第5节 麦克斯韦方程组

电场
- 静止电荷 ⟹ 静电场
  $$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_i q_i$$
  $$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$
- 变化磁场 ⟹ 感应电场
  $$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

磁场
- 恒定电流 ⟹ 稳恒磁场
  $$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$
  $$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_i$$
  ⇓
- 变化电场 ⟹ 感应磁场？
  $$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=?$$

本节思路：

推广安环 → 矛盾 → 假设全电流 → 完善方程组

一、位移电流的提出

安培环路定理：$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i\text{传导电流}}$

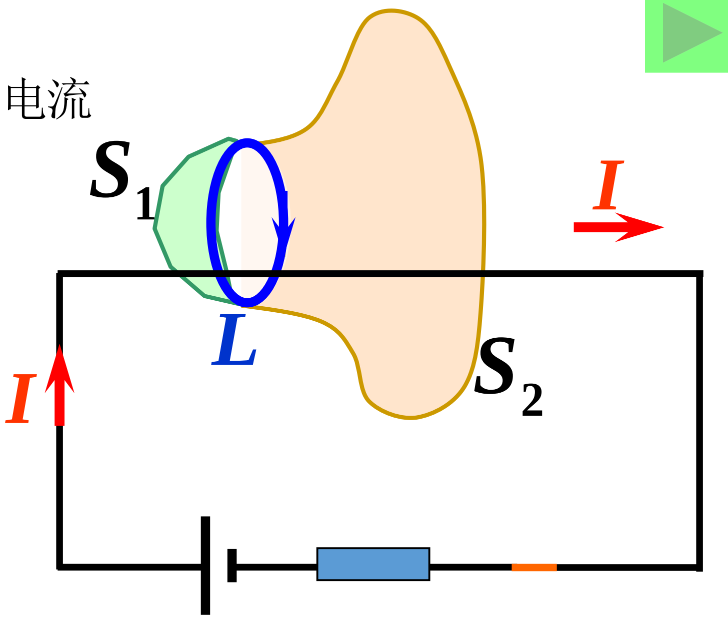
1. 从稳恒电路中推出。

目的：避开磁化电流的计算；

2. 传导电流(电荷定向移动)：

热效应、产生磁场。

3. $\sum_i I_{i\text{内}}$ ：与回路相套连的电流。



以围绕电流的回路L为边界的任意曲面上通过的传导电流均相等。$I = \int_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S}$ $\quad \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$

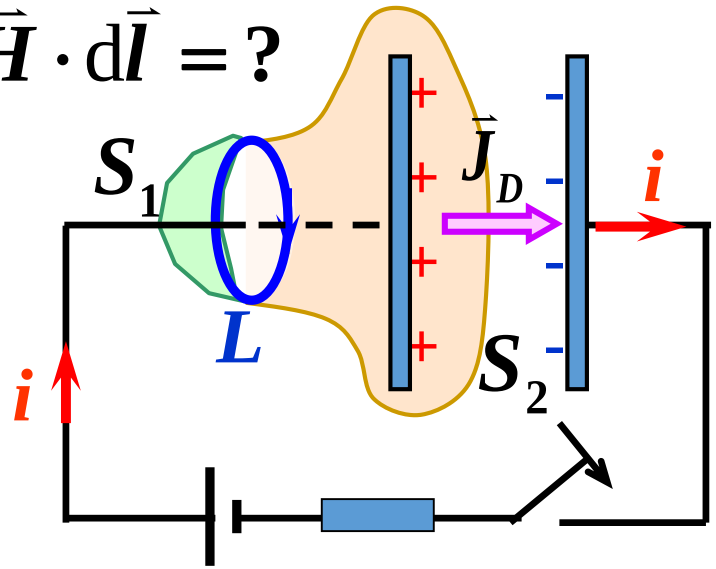
在稳恒电路中，流入闭合面的传导电流等于流出该面的传导电流。

电流连续性方程

在非稳恒电路（电容器充电过程）中，情形如何？

在某时刻，回路中传导电流强度为 i

取回路L如图：计算H 的环流 $\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$



$$\left.\begin{array}{l} \text{取 } S_1 \quad \sum\limits_i I_{i内} = i \\ \text{取 } S_2 \quad \sum\limits_i I_{i内} = 0 \end{array}\right\} \text{矛盾！}$$

思考一：场是客观存在的。其环流值必须唯一！

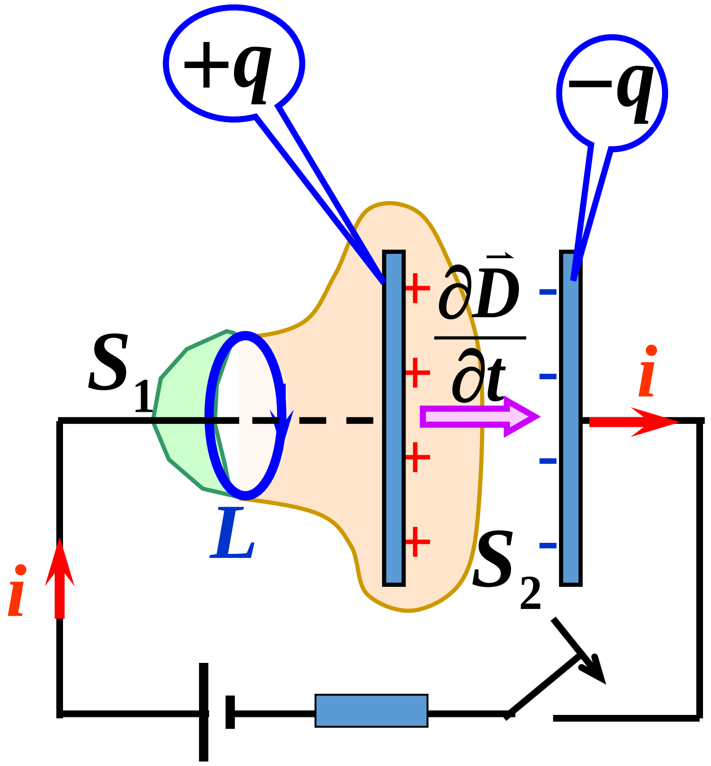
思考二：应该存在普适的定理。

矛盾根源：传导电流在电容器极板间中断。

假设：电容器内存在一种类似电流的物理量！

使得“总电流”连续！

对电容器充电电路：



流入闭合面 $S = S_1 + S_2$ 的传导电流为：

$$i = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

由电荷守恒定律：

$$i = \frac{dq}{dt} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

应用高斯定理于闭合曲面 S ： $q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \left(\boxed{\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

连续。在传导电流 $\vec{j}$ 中断处，

由 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 接续。

$$\oint_S \left(\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

变化的电场可等效地视为一种“电流”——位移电流

电场空间中某点位移电流密度定义为该点电位移矢量随时间的变化率：

$$\vec{j}_D=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

方向即 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的方向。

穿过空间任意曲面的位移电流为：

$$I_D=\int_S \vec{j}_D\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

为穿过该曲面的电位移通量随时间的变化率。

位移电流和传导电流之和保证了电流的连续性。

即被电容器极板中断的传导电流由位移电流接替。

二、全电流定理

1. 全电流：位移电流和传导电流之和。

1）传导电流 I：载流子定向运动。 $I=\int_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

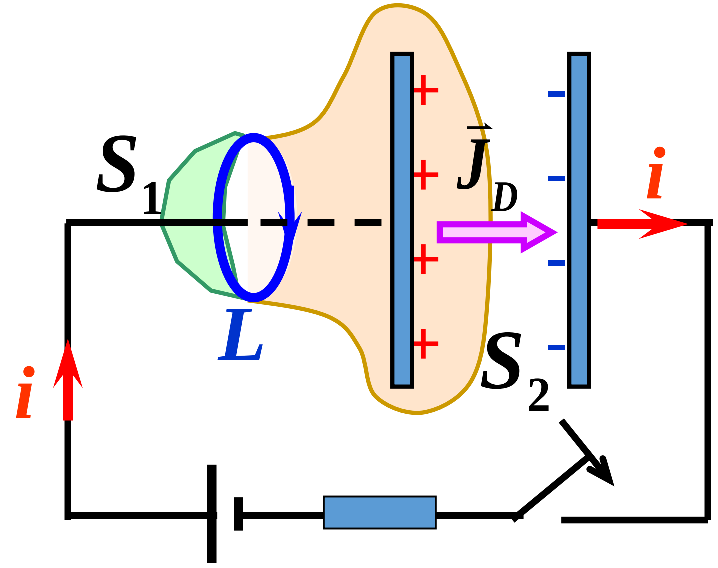
2）位移电流 I_D： $\vec{j}_D=\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $I_D=\int_S \vec{j}_D\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$I_{全}=I+I_D \qquad \oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i I_{全}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S\left(\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$ ——全电流定理

用全电流定理就可以解决

前面的充电电路中矛盾：



S_1 只有传导电流 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = i$

S_2 只有位移电流 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_D$

平行板电容器板面积为S $\Phi_D = DS = \sigma S = q$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt} = i$$

全电流总是连续的。$\vec{H}$的环路积分与以积分回路L为边界的面积S的形状无关。

推广了安培环路定理！

2. 位移电流的本质之认识

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

位移电流的实质是随时间变化的电场。

考虑真空： $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

若仅存在位移电流，即仅有变化的电场，有：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

变化的电场要激发有旋磁场！

产生电磁波的必要条件之一。

电磁波的存在得证后，位移电流的假说随之得证。

3. 位移电流与传导电流之对比：

相同点：

都具有产生磁场的能力，所产生的磁场性质一样。

所产生的磁场均是有旋磁场。

其它方面均表现出不同：

位移电流不伴有自由电荷的任何运动，所以谈不上产生焦耳热。

位移电流可存在于介质、导体和真空中：

基本项

如介质中：
$$\vec{j}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

极化变化→极化电荷运动→热损耗（不满足焦耳定律）

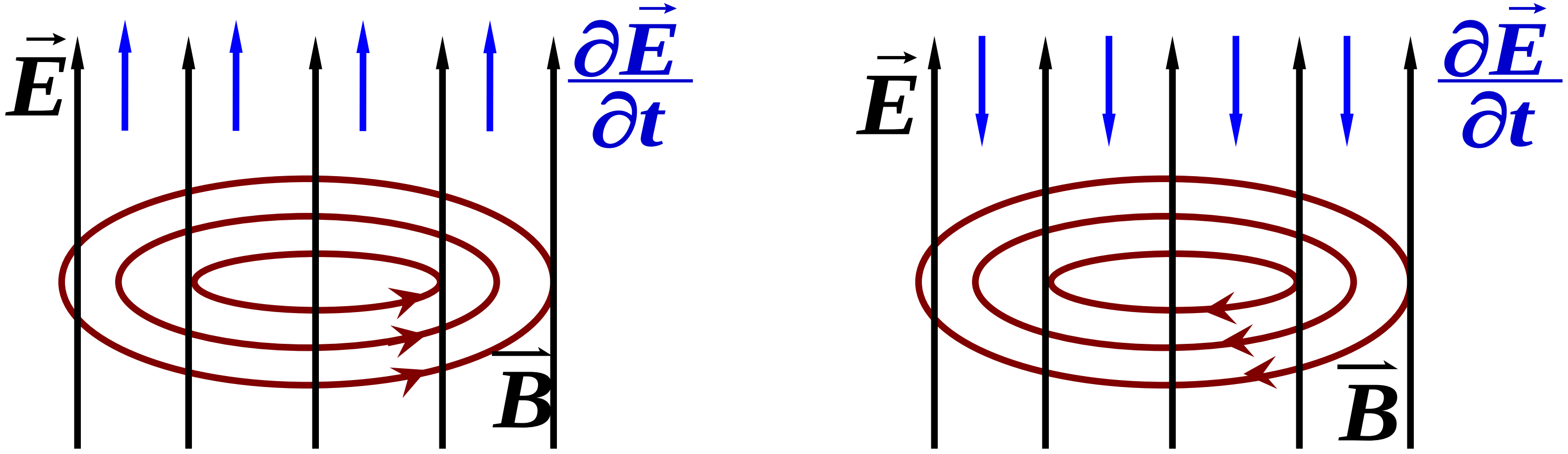
导体中：传导电流远大于位移电流（低频）。

4. 对应变化的电场之磁场的方向

由 $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 得涡旋电场与$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$成右螺旋关系。

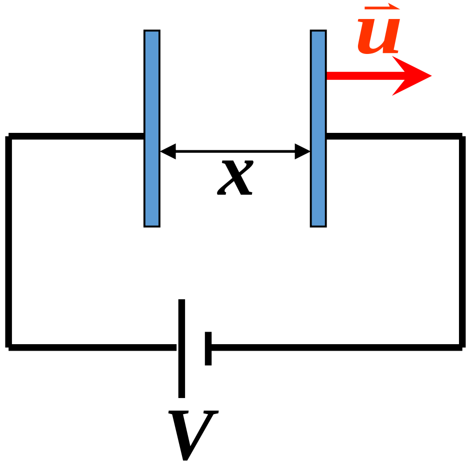
$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 位移电流的磁场

与 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 成右螺旋关系。



$\vec{E}$ 或 $\vec{D}$增加 $\vec{E}$或 $\vec{D}$减少

例1. 一平行板电容器与一电压为V的电源相连。若将电容器的一极板以速率u拉开，则当极板间的距离为x时，求电容器内的位移电流密度。



解： 设极板间的距离为x时，

板内电场为E，则有：

$$V = Ex \qquad \therefore E = \frac{V}{x}$$

位移电流密度大小为

$$J_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\varepsilon_0 \frac{V}{x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon_0 \frac{Vu}{x^2}$$

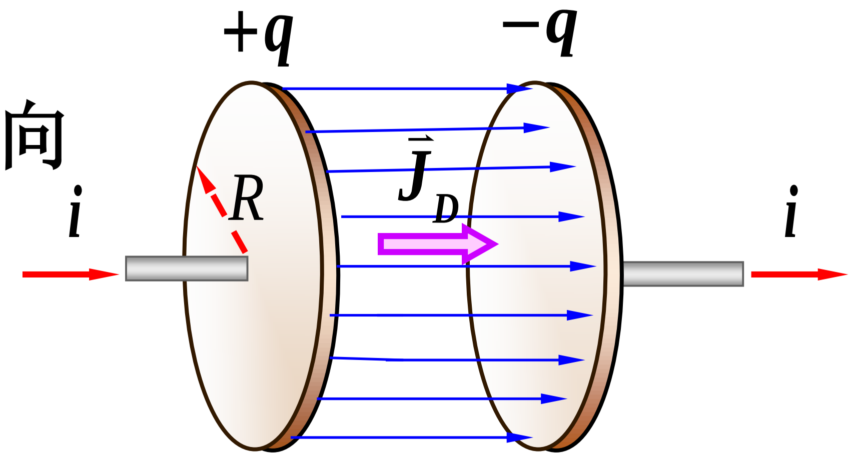
方向向左

例2. 半径为R的圆形平行板电容器均匀充电，板间

$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=c$，内部充满介质$\varepsilon$、$\mu$，求（1）两极板间的位移电流；（2）离轴线$r$处的磁感强度。（忽略边缘效应）

解: 充电时$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}>0$，

位移电流密度与电场同方向

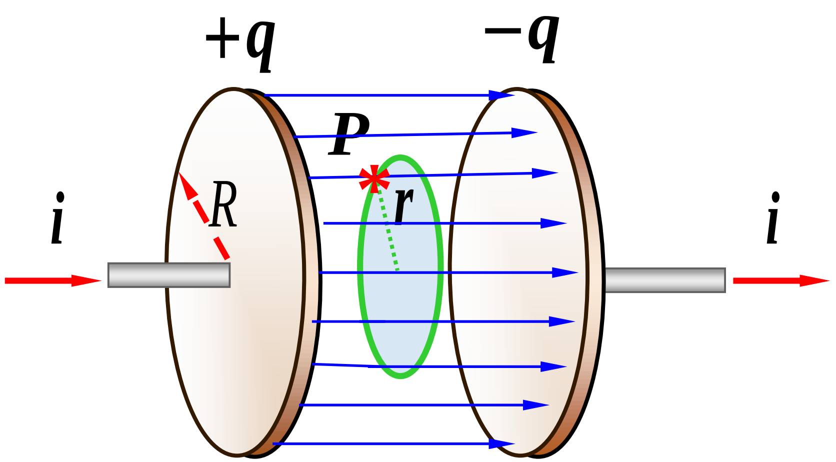


$$j_D=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$I_D=\int\vec{j}_D\cdot\mathrm{d}\vec{S}=j_D\cdot S=\varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$

或 $$I_D=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(D\pi R^2\right)=\varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$

$$j_D = \varepsilon \frac{dE}{dt} \qquad I_D = \varepsilon \frac{dE}{dt} \pi R^2$$



（2） 由全电流定理：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{全} = I_D$$

由E的特征知：B具有轴对称性！即在同一圆周上B的大小相等，方向沿切线方向。

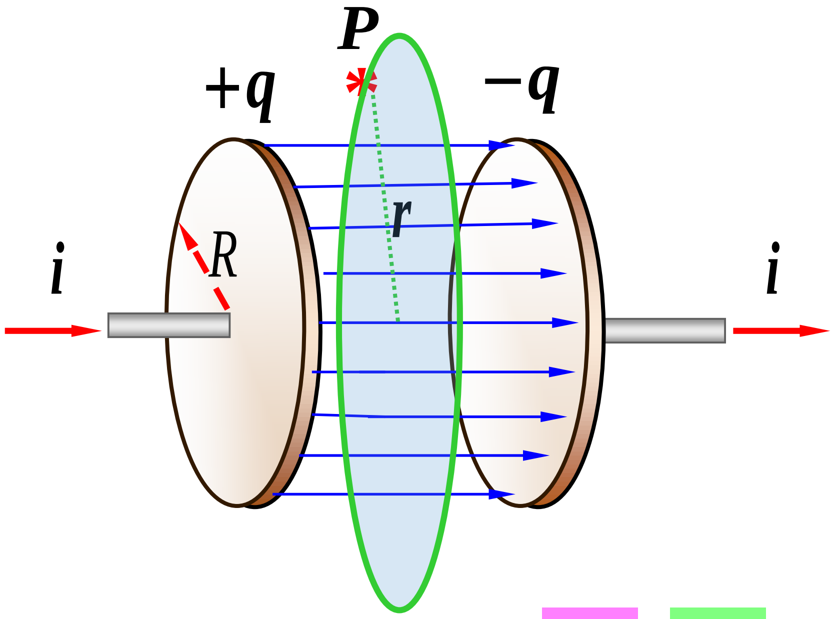
过P点垂直轴线作一半径为r 的圆环：

当$r \le R$时：$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r$

$$I_D = j_D \cdot \pi r^2$$

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r \\ &I_D = j_D \cdot \pi r^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &H = \frac{\varepsilon r}{2} \frac{dE}{dt} \\ &B = \mu H = \frac{\mu \varepsilon r}{2} \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

当 $r \le R$ 时：$\begin{cases} H = \dfrac{\varepsilon r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \\ B = \mu H = \dfrac{\mu\varepsilon r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

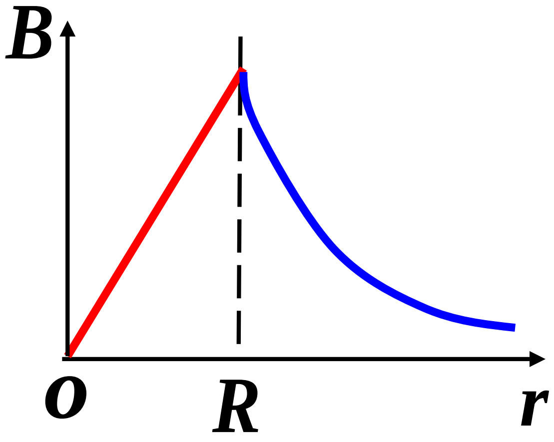


当 $r \ge R$ 时：$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i I_{全}$

$$H\,2\pi r = j_D \cdot \pi R^2 = \pi R^2 \varepsilon \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$H = \frac{\varepsilon R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$B = \frac{\mu\varepsilon R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$



三、麦克斯韦方程组

1. 积分形式

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$

通过任意闭合面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷的代数和。

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

通过任意闭合面的磁通量恒等于零。

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

电场强度沿任意闭合路径的环流等于穿过该环路的磁通量随时间变化率的负值。

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

磁场强度沿任意闭合曲线的环流等于穿过该环路的传导电流与位移电流之和。

*2. 微分形式

1） 数学定理

Gauss定理

$$\oint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

Stokes定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\text{算符}\begin{cases}\nabla & \text{梯度}\\ \nabla\cdot & \text{散度}\\ \nabla\times & \text{旋度}\end{cases}$$

直角坐标系

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

2）微分形式

积分形式

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

微分形式

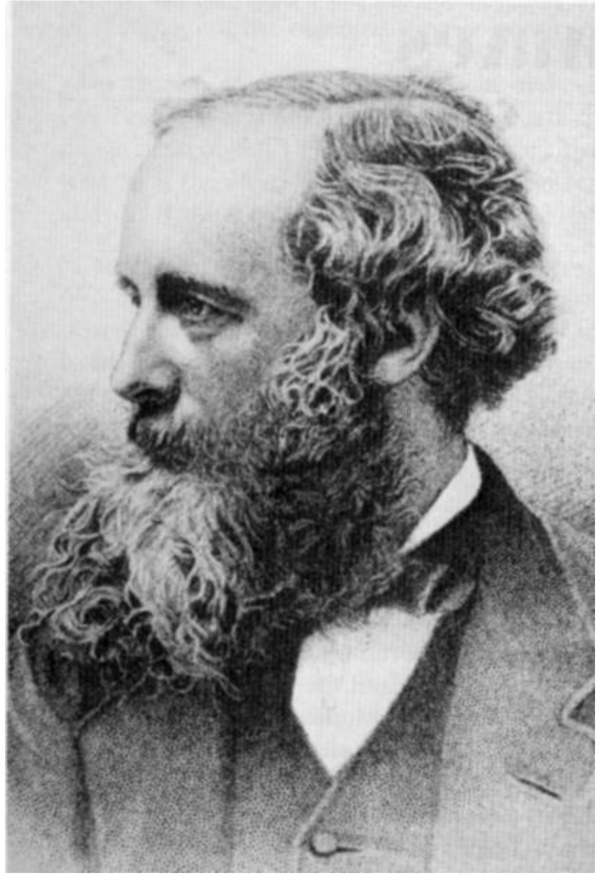
$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

麦克斯韦（1831－1879）英国物理学家



1865 年麦克斯韦在总结库仑、安培和法拉第等人工作的基础上，提出完整的电磁场理论，他的主要贡献是提出了“有旋电场”和“位移电流”两个假设，预言了电磁波的存在，并计算出真空中电磁波的速度（即光速）。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

说明了光就是一种电磁波！

1888 年赫兹的实验证实了他的预言，麦克斯韦理论奠定了经典电动力学的基础。

3. 真空中的电磁波

在没有电荷分布的自由空间或均匀介质

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\qquad \nabla\cdot\vec{D}=0\qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

在真空中：$D=\varepsilon_0 E$，$B=\mu_0 H$，利用上面第一，二方程可得：

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

用矢量分析公式及 $\nabla\cdot\vec{E}=0$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$$

得电场*E*的偏微分方程：$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$

同理可得：$\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$

令：$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0\qquad\qquad \nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

上式称为波动方程，通过它可以得到各种不同类型随时间变化的电磁波的解。

*c*代表在真空中一切电磁波的传播速度，如无线电波，光，X射线，和 γ 射线等，它是最基本的物理量之一。

4. 平面电磁波

$$E_x = H_x = 0$$

电磁波是横波

$$E_z = 0 \qquad\qquad H_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$