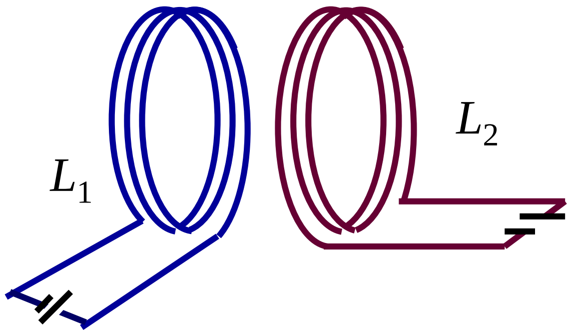
第3节　互感与自感

一、互感



回路L_1中的电流i_1变化

$\xrightarrow{\text{引起}}$ 回路L_2中Ψ_{12}的变化

在回路L_2中产生感应电动势

——互感电动势e_{12}

同理: 回路L_2中电流i_2的变化

——回路L_1中产生互感电动势e_{21}

显然：互感电动势与线圈电流变化的快慢有关；而且与线圈结构以及它们之间的相对位置和磁介质的分布有关。

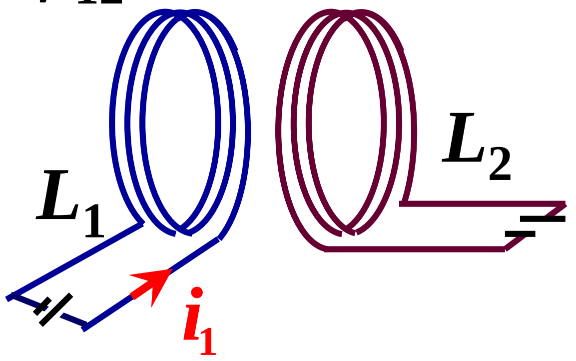
若两线圈的相对位置确定:

设L_1的电流i_1在L_2中产生的全磁通为ψ_{12}

$$\because \Psi_{12} \propto B_1 \propto i$$

$$\Psi_{12} = M_{12} i_1$$

同理 $\Psi_{21} = M_{21} i_2$



可以证明两个给定线圈有 $M_{12}= M_{21}=M$

M称为两线圈的互感系数，简称互感。单位：亨利（H）

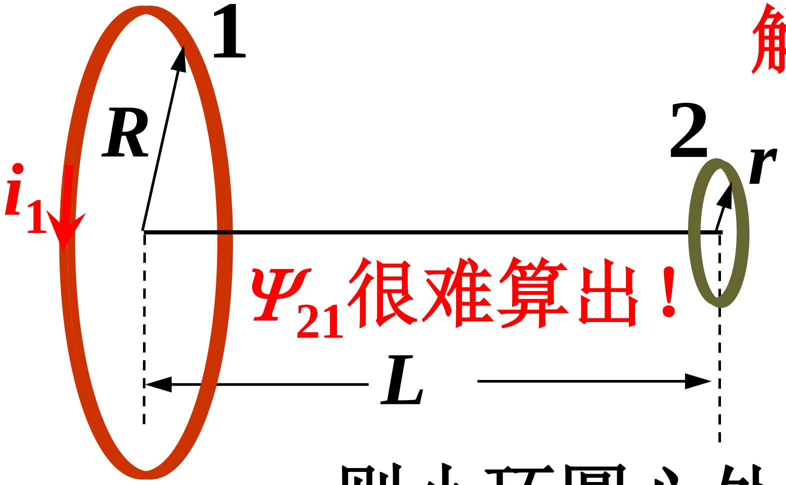
互感电动势 $\varepsilon_M = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - i\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

当 M = 常数时，$\varepsilon_M = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$\varepsilon_{12} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

例1. 已知两个半径分别为R、r（$r<<R$）的圆环，其圆心同轴并相距$L(L>>R)$。求它们的互感M？



解：由互感的定义可知

$$M=\frac{\Psi_{21}}{i_2}=\frac{\Psi_{12}}{i_1}$$

设大圆环通有i_1

则小环圆心处的磁场为 $B_1=\dfrac{\mu_0 i_1 R^2}{2(R^2+L^2)^{3/2}}$

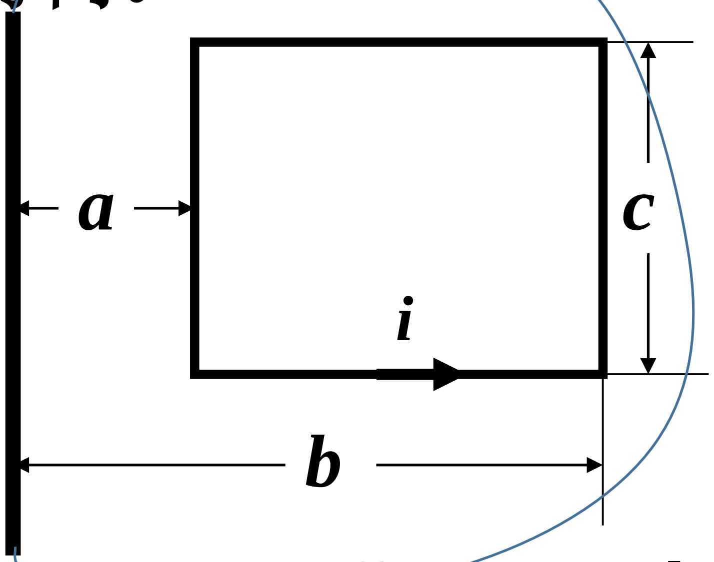
由于$r<<R$,小环面上的场近似为均匀场

小圆环中的磁通量为 $\Psi_{12}=B_1\pi r^2=\dfrac{\pi\mu_0 i_1 R^2 r^2}{2(R^2+L^2)^{3/2}}$

$$\therefore M=\frac{\Psi_{12}}{i_1}=\frac{\pi\mu_0 R^2 r^2}{2(R^2+L^2)^{3/2}}=\frac{\pi\mu_0 R^2 r^2}{2L^3}$$

[问]: 如小线圈中通以电流 $i(t)$，求大线圈中的 $\varepsilon(t)$。

例2. 在长直导线旁有一矩形共面线圈，当矩形共面线圈通电流$i=I_0\sin\omega t$时， 求长直导线的感应电动势的表达式。并指出$t=0$时感应电动势的方向。



解： 想象长直导线为一无限大线圈，其中有电流 I 时，在矩形线圈中引起的磁通量为

$$\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi r}c\,dr=\frac{\mu_0 Ic}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

长直导线和矩形线圈之间的互感系数为 $M=\dfrac{\Phi}{I}=\dfrac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

当矩形共面线圈通电流$i=I_0\sin\omega t$时，

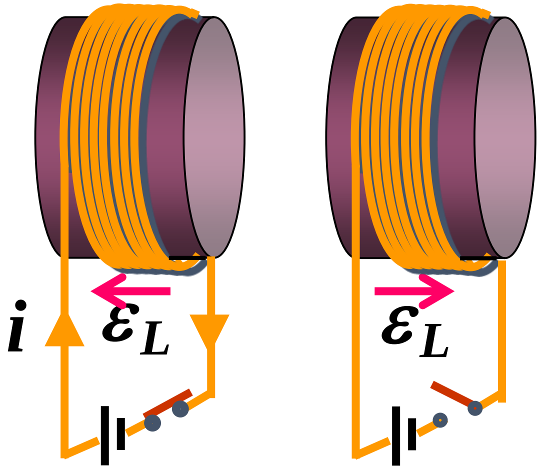
长直导线的感应电动势为：$\varepsilon_i=-M\dfrac{di}{dt}=-\dfrac{\mu_0 cI_0\omega}{2\pi}\cos\omega t\ln\dfrac{b}{a}$

$t=0$时感应电动势方向向上。

二、自感

当线圈中电流变化时，它所激发的磁场通过线圈自身的磁通量也发生变化，使线圈自身产生感应电动势

——自感电动势



$$\Psi \propto B \propto i$$

$\Psi = Li$　　L—自感系数或自感

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

取决于回路的大小形状、匝数以及μ

单位: 亨利（H）

$$\boxed{\Psi = Li}$$

回路自感电动势为 $\varepsilon_L = -\dfrac{d\Psi}{dt} = -L\dfrac{di}{dt} - i\dfrac{dL}{dt}$

当L=常量　$\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$

ε_L的方向：反抗回路中电流的改变。

电流增加时，自感电动势与原电流方向相反；

电流减小时，自感电动势与原电流方向相同。

讨论：

1° $\varepsilon_L \propto \dfrac{di}{dt}$，回路里 $di/dt \neq 0 \rightarrow \varepsilon_L$

2° $\varepsilon_L \propto L$

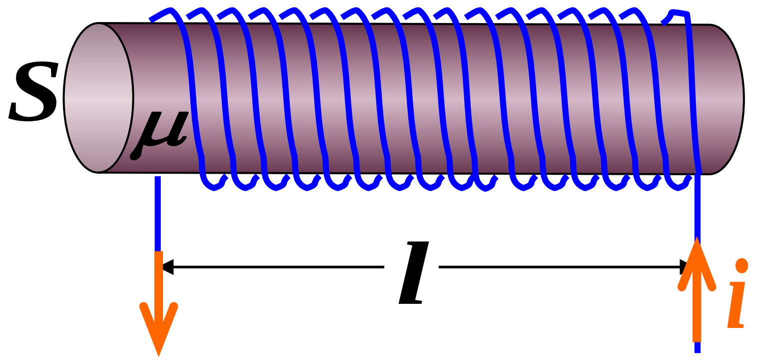
L大，ε_L大→阻碍电路变化的阻力大

L小，ε_L小→阻碍电路变化的阻力小

∴ L~~对电路“电磁惯性”的量度

例3. 求长直密绕螺线管的自感系数，已知

l，S，N，μ 。



解: 设通电流 i，内部匀强场

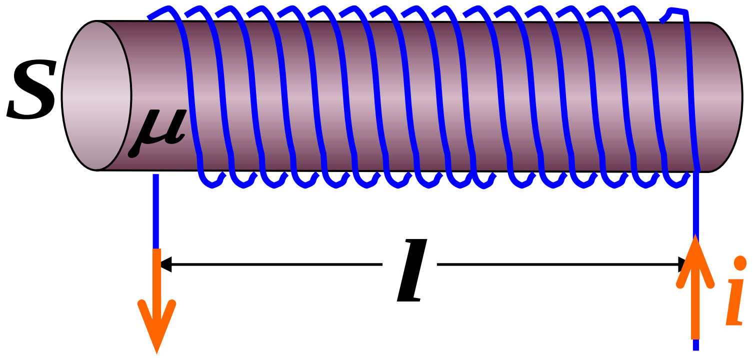
$$B = \mu n i = \mu \frac{N}{l} i$$

$$\psi = N\Phi = NBS = \frac{\mu N^2 S}{l} i = \frac{\mu N^2 S l}{l^2} i$$

$$L = \frac{\psi}{i} = \mu n^2 V \begin{cases} \text{介质} \\ \text{几何条件} \end{cases}$$

思考1：长直密绕螺线管的自感系数是否等于各匝线圈的自感系数之和？

分析：假设有N匝，通电流i，



总磁场由各匝线圈的磁场共同组成

$$\vec{B} = \sum B_i$$

第i匝上的磁通量为各匝线圈产生的磁通量共同组成

$$\Phi_i = \sum \Phi_{ij}$$

整个螺线管上的磁通链数为

$$\Psi = \sum \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \Phi_{ii} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \Phi_{ij}$$

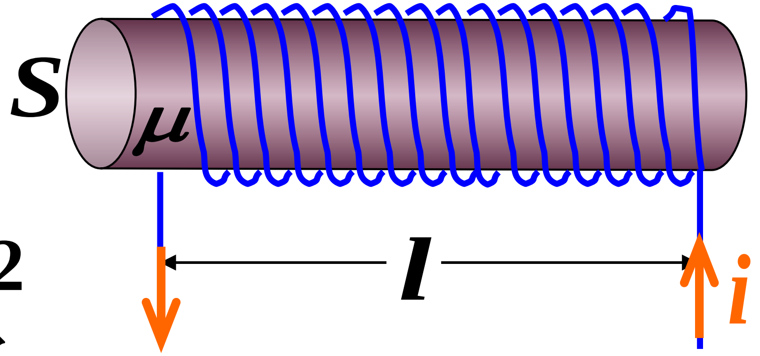
螺线管的自感系数为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \sum_{i=1}^{N} L_{ii} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} M_{ij}$$

思考2：关于长直密绕螺线管的自感系数的困惑。

（1） 整体考虑，

$$L = \frac{\Psi}{i} = \mu n^2 Sl$$



（2）由两个顺接的长度为$l/2$的螺线管构成，两半之间互感系数M，

$$L' = 2L_{半} + 2M = L + 2M \neq L$$

如何解释？

解释：把长直螺线管内部空间全部当作均匀磁场是一个近似，实际上其两端面处磁感强度只有中间的一半。

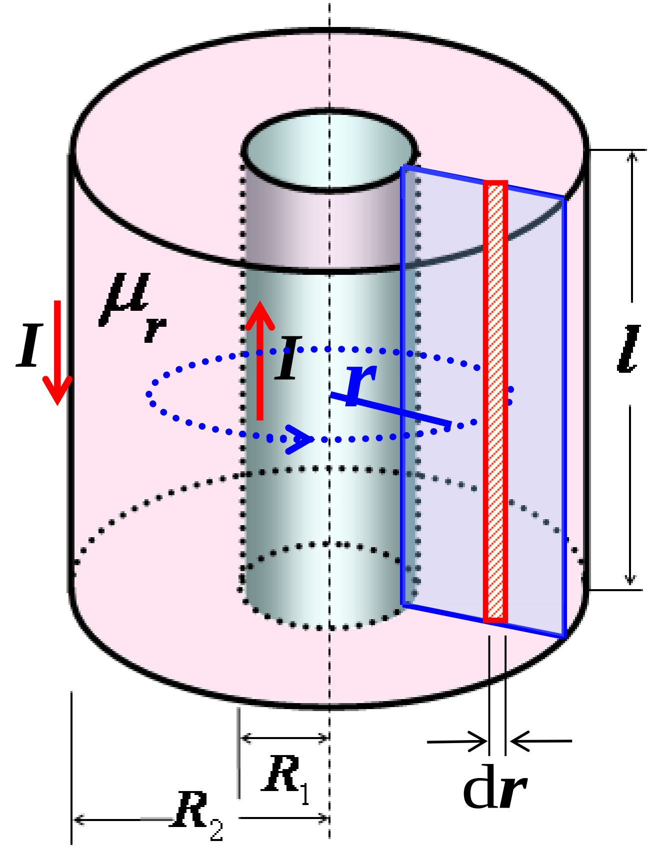
将长直螺线管看作两半顺接并且取 $L_{半} = \frac{1}{2}\mu n^2 Sl$ 时，意味着端面与内部一样为均匀场，已经把互感的影响考虑了。

例4. 计算同轴电缆单位长度的自感。

解： 设电流 I 由内筒流入，外筒流回。相当于单匝回路。

两筒间磁场为

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}\qquad R_1\le r\le R_2$$



l长电缆通过面元 $l\mathrm{d}r$ 的磁通量

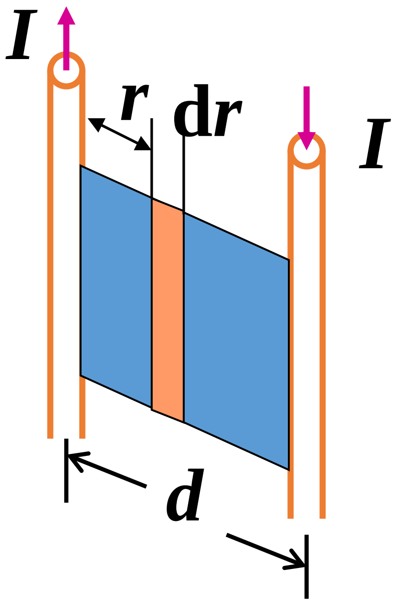
$$\mathrm{d}\Phi=Bl\mathrm{d}r=\frac{\mu I}{2\pi r}l\mathrm{d}r$$

$$\psi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r}l\mathrm{d}r=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

电缆单位长度的自感：$L=\dfrac{\psi}{l\cdot I}=\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

例5. 两根平行输电导线，中心距离为d，半径为a，求：两导线单位长度上的分布电感（d>>a）。

解： 如图，设导线中有电流I。



单位长度上的磁通量：

$$\Psi = \Phi = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r + \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

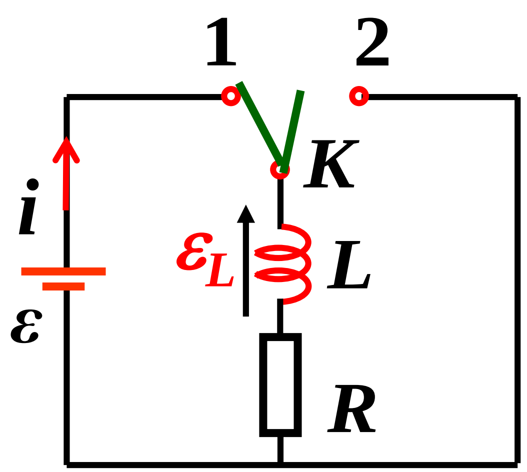
$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a} \qquad (d >> a)$$

第4节　*LR*暂态电路与磁能

一、*LR*电路

由一自感线圈*L*，电阻*R*，与电源ε组成电路。

求：电键*K*接1上一段时间后，
又接到2上回路里 *i* 的变化。



$K\rightarrow 1$，$i\nearrow I$，L上产生ε_L，

$\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，　$\varepsilon_{总}=\varepsilon+\varepsilon_L$

即　$\varepsilon+\varepsilon_L=iR$

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{\varepsilon}{L}$$

则回路中的电流　$i = \dfrac{\varepsilon}{R} + \mathrm{C}e^{-Rt/L} = \dfrac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L})$

由初始条件：$t=0$，$i=0$，则 $\mathrm{C}=-\varepsilon/R$，

讨论

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)$$

1° $t\to\infty$，$i=\dfrac{\varepsilon}{R}=I$

2° $t=L/R$，$i=\dfrac{\varepsilon}{R}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)=0.63I$

时间常数

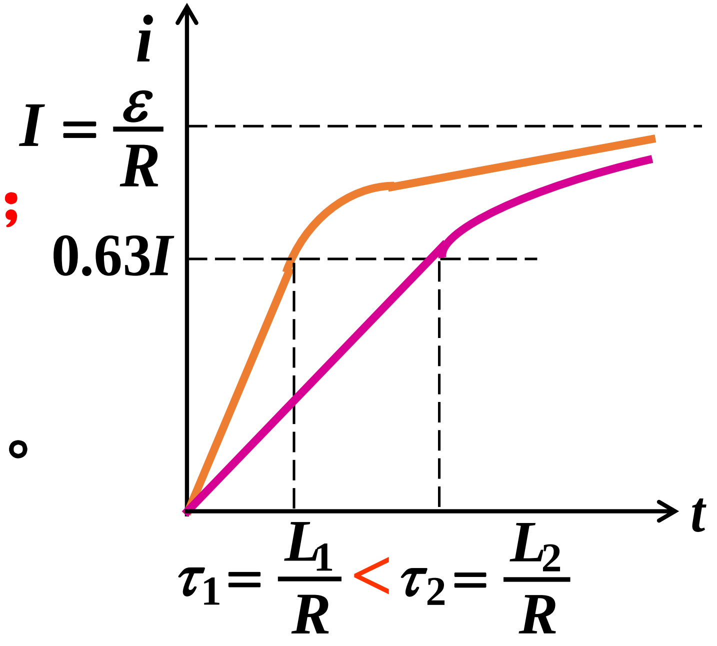
令 $\tau=L/R$，i从$0\to0.63I$ 所需时间

τ大，L大，i增长慢，

ε_L阻力大，电磁惯性大；

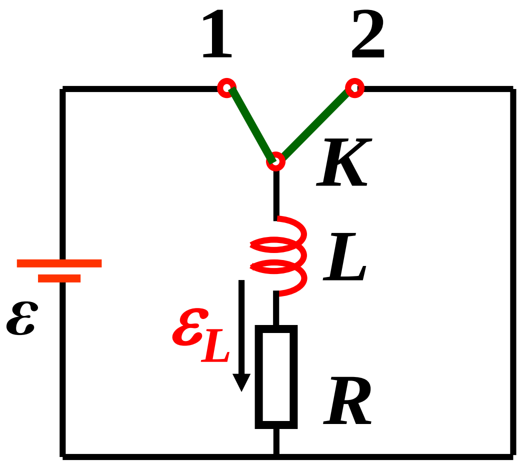
τ小，L小，i增长快，

ε_L阻力小，电磁惯性小。



$i \to I$后，$k \to 2$，电路加了阶跃电压$\varepsilon \to 0$

自感电动势将使电流维持一段时间

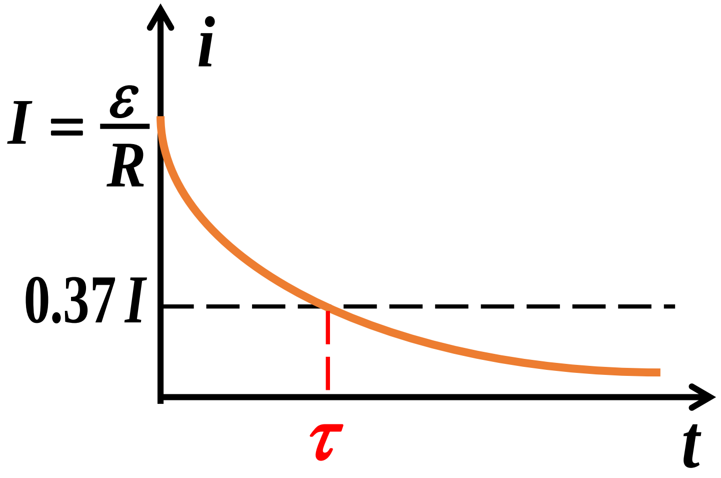


$$\left.\begin{aligned} \because\ \varepsilon_L &= -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_L &= iR \end{aligned}\right\} \quad -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR$$

初始条件：$t=0$，$i=I$，$C=I=\varepsilon/R$

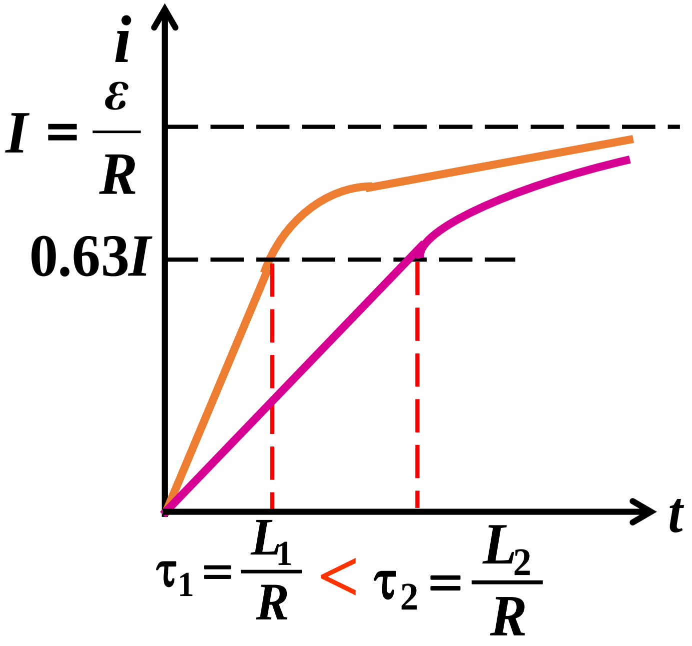
$$\therefore \quad i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L}$$

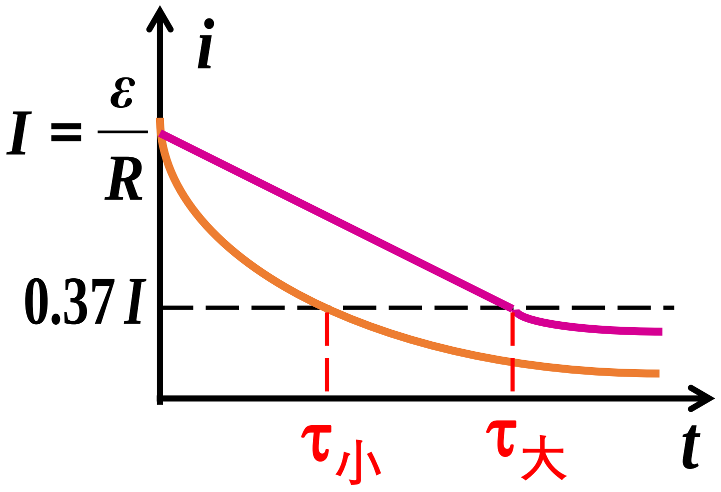
自感的作用将使电路中的电流不会瞬间突变。从开始变化到趋于恒定状态的过程叫暂态过程。时间常数τ表征该过程的快慢。



$t=\tau$时，$i=0.37I$

当t大于τ的若干倍后，暂态过程基本结束。





讨论：

1 º*LR*电路在阶跃电压的作用下，电流不能突变，

$\tau=L/R$ 标志滞后时间。*L*有平稳电流作用。

2 º自感在电工及无线电技术中应用很广泛，

但在大自感电路里也是有害的。

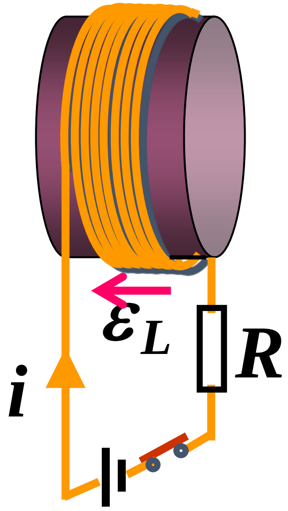
二、自感储存磁能

电容器充电后就储存了电场能量: $W_e = \frac{1}{2}CU^2$

当线圈通有电流时，在其周围建立了磁场。

第一种计算方法——所储存的磁能等于建立磁场过程中，电源克服自感所做的功。

若回路电流以$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t>0$变化时，在$\mathrm{d}t$时间内，电源克服$\varepsilon_L$做功为$\mathrm{d}A$



$$\mathrm{d}A = -\varepsilon_L \mathrm{d}q = -\varepsilon_L i\mathrm{d}t$$

$$\because \varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \therefore \quad \mathrm{d}A = Li\mathrm{d}i$$

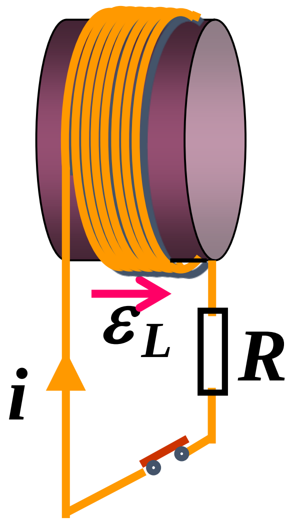
$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^I Li\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{\text{储存}} W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

$$\boxed{A = W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

第二种计算方法——自感为L的线圈通有电流I 时所储存的磁能，就等于该电流减小为零的过程中自感电动势所做的功:

$$A_L = \int \varepsilon_L \cdot \mathrm{d}q = \int \varepsilon_L \cdot i\mathrm{d}t = \int_I^0 -Li \cdot \mathrm{d}i$$

$$= \frac{1}{2}LI^2 = W_m$$



第三种计算方法——自感电动势所做的电功，由电阻R消耗:

$$Q = \int Ri^2\mathrm{d}t = \int R(I^2 e^{-2\frac{R}{L}t})\mathrm{d}t$$

$$= RI^2\int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}LI^2$$

$$\boxed{i = Ie^{-Rt/L}}$$

由上可知，通有电流 I 的自感线圈中储能：

$$W=\frac{1}{2}LI^2$$ 这些能量存在何处？ 磁场中。

那么， $W_m \rightarrow$ 磁场（$\vec{B}$ 、$\vec{H}$）如何联系？

以长直螺线管为例

我们已知长直螺线管的自感为

$$L=\mu_0 n^2 V_{体}$$

设螺线管通有电流I，则其存储的磁能为：

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 V_{体}\cdot I^2$$ 而 $B=\mu_0 nI$

即 $$W_m=\frac{B^2}{2\mu_0}V_{体}$$

通有电流 I 的长直螺线管储存的磁能为

$$\boxed{W_m = \frac{B^2}{2\mu_0}V_{体}}$$

又长直螺线管管内为均匀磁场!

∴ 单位体积储存的磁场能量为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$ ——磁能密度

其中 $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$ ——磁场强度

以上结论对任意形式的磁场都成立!

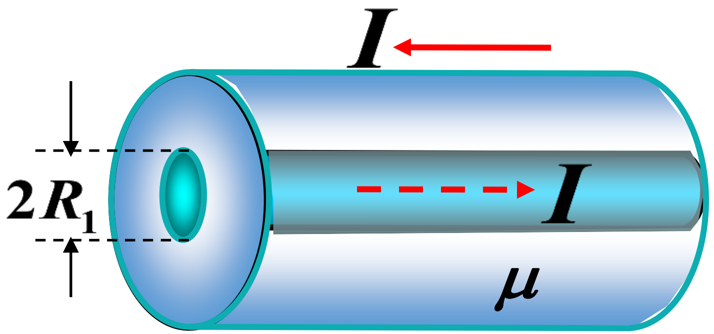
一般地，对非均匀磁场：

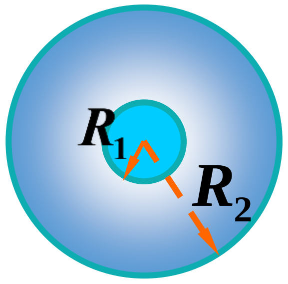
$$W_m = \int w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V$$

例1. 同轴电缆，芯线为半径 R_1的铜导线，外面为半径 R_2的薄层导体，中间充以磁介质(μ)，芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反。芯线上电流均匀。求单位长度的磁能和自感。

解： 由安培环路定律可求 B

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_o Ir}{2\pi R_1^2}=B_1 & r<R_1\\[2ex] \dfrac{\mu I}{2\pi r}=B_2 & R_1<r<R_2\\[2ex] 0 & r>R_2\end{cases}$$





磁能密度 $w_m=\dfrac{B^2}{2\mu}$

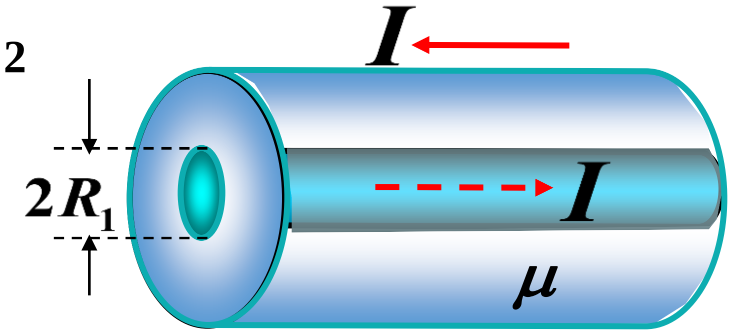
$$W_m = \int_{\text{有场的空间}} w_m \boxed{dV}$$

单位长度薄圆筒体积

$$dV = 2\pi r dr \cdot 1$$

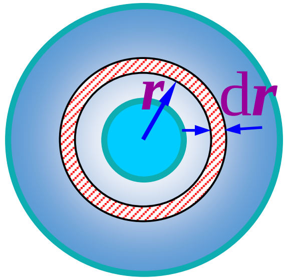
$$= \int_0^{R_1} \frac{B_1^2}{2\mu_o} 2\pi r dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{B_2^2}{2\mu} 2\pi r dr + \int_{R_2}^{\infty} 0 \times 2\pi r dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln\frac{R_2}{R_1} = W_{m1} + W_{m2}$$



由 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

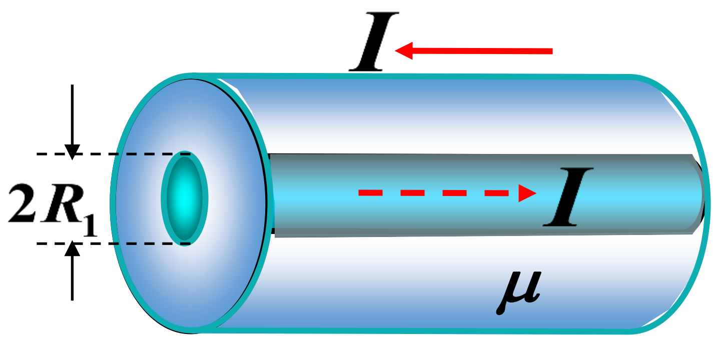


拓展： 试用 $L=\dfrac{\Psi}{I}$ 的方法计算自感。

$$\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

解一： $$\Psi_1=\Phi_1=\int_{R_1}^{R_2}B_2\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L_1=\frac{\Psi_1}{I}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

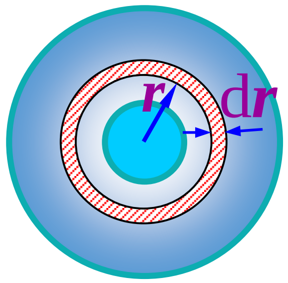


解二： $\Psi_2=\Phi_2$

$$=\int_0^{R_1}\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}r\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}+\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L_2=\frac{\mu_0}{4\pi}+\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



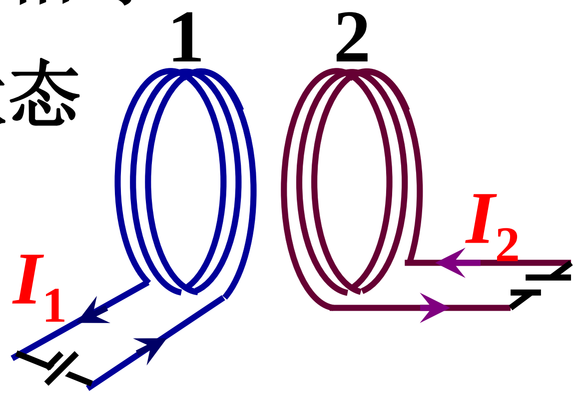
错在哪?

注意：芯线区域，并非全部电流都对$\mathrm{d}\Phi$有贡献。

故： 用磁能来求自感比较稳妥

例2. 证明两个导体回路的互感系数相等。

解: 设两个回路开始处在开路状态



先接通回路1的电源，

其电流从$0 \to I_1$,

电源力作功，储存在磁场的能量为 $W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$

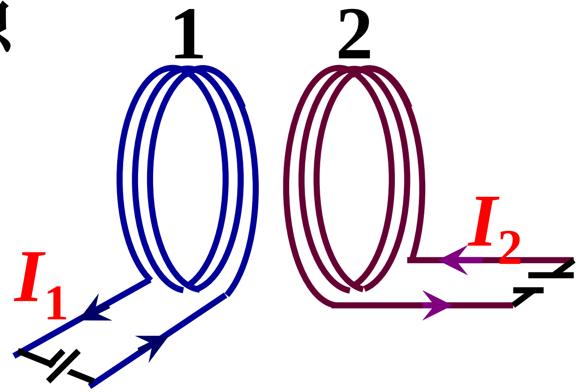
再接通回路2的电源，其电流从$0 \to I_2$,

在回路2的磁场储存的能量为 $W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$

但此过程在回路1中产生了互感电动势 $\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 \qquad W_2 = \frac{1}{2}L_2 I_2^2 \qquad \varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$$

为保持I_1不变，回路1的电源要克服这个电动势作功:



$$A = \int -\varepsilon_{21}\mathrm{d}q = \int_0^{I_2} M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\cancel{\mathrm{d}t}} I_1 \cancel{\mathrm{d}t}$$

$$= M_{21} I_1 I_2$$

两回路电流分别达到I_1、I_2时，整个系统的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

若先接通回路2的电源，则有

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

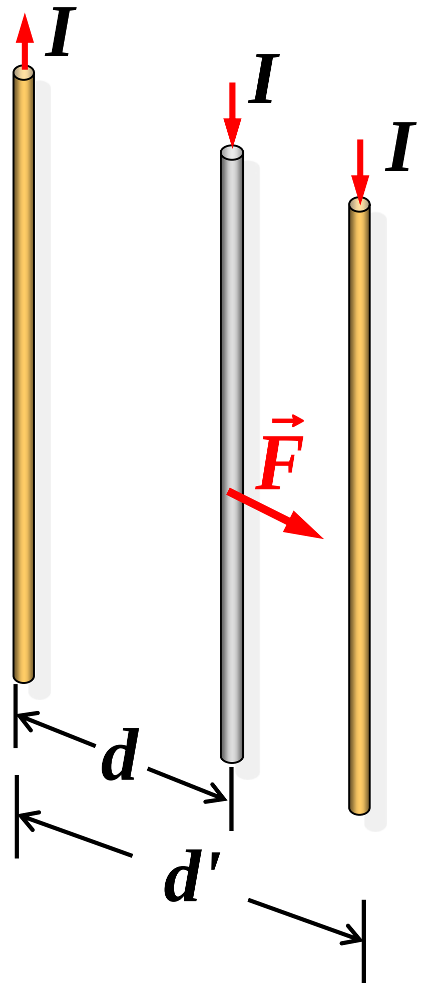
而系统的总能量与建立电流的过程无关:

$$\boxed{\therefore M_{21} = M_{12} = M}$$ 命题得证

例3. 两根平行输电线相距为d，半径为a， 维持 I 不变。（单位长度上的自感 $L=\dfrac{\mu_0}{\pi}\ln\dfrac{d}{a}$）

求：（1）当$d\to d'$时，磁力做的功。

（2）磁能改变多少？增加还是减少？说明能量来源。



解:（1）根据 $\vec{F}=\int_0^L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$

单位长度受力

$$F=IlB=I\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$A=\int_d^{d'}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}>0$$

（2）磁能改变多少？

解： $\Delta W = W_{d'} - W_d = \frac{1}{2}L'I^2 - \frac{1}{2}LI^2$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d} > 0$$

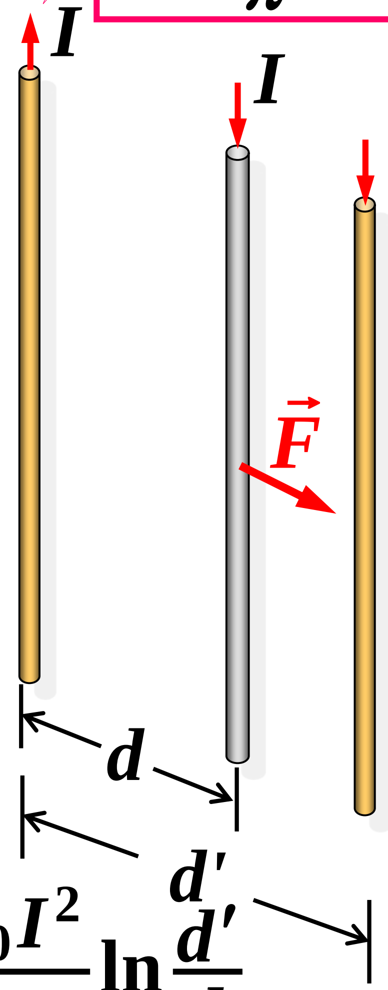
$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}}$$

能量从何而来？

$$\boxed{\Psi = Li}$$

导线移动时（无限大单匝线圈）→

自感电动势 $\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\cancel{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}^{0} - I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$



维持I不变，电源力克服ε_L做功：

$$A_{外} = -\int \varepsilon_L \mathrm{d}q = \int I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q = \int_L^{L'} I^2 \mathrm{d}L$$

$$= I^2(L' - L) = I^2\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d'}{a} - \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right) = \frac{\mu_0 I^2}{\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

$$= A_{磁力} + \Delta W$$

能量守恒