第2节　振动的合成和分解

Composition and Separation of Oscillations

一、同方向、同频率的简谐振动的合成

1. 代数方法： $x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$　　$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

合振动的位移：

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= \boxed{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}\cos\omega t \\ &\quad - \boxed{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}\sin\omega t \end{aligned}$$

$A\cos\varphi$

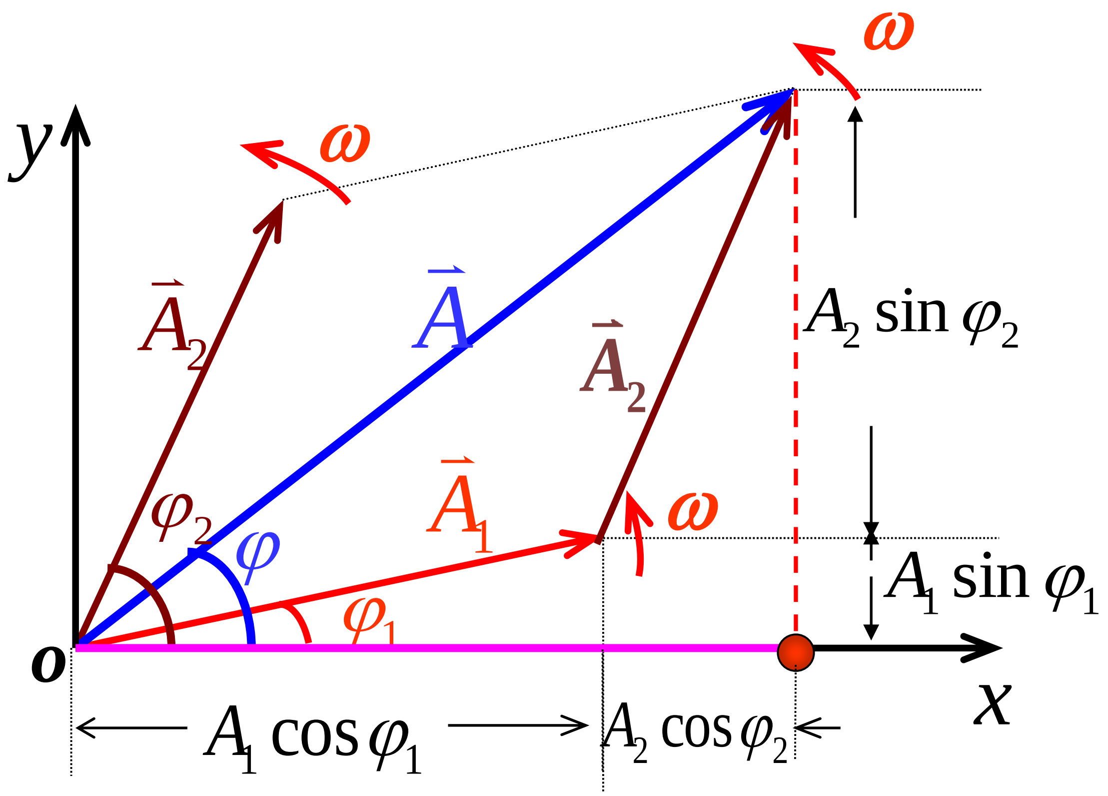
$A\sin\varphi$

$$\begin{aligned} &= A\cos\varphi\cdot\cos\omega t - A\sin\varphi\cdot\sin\omega t \\ &= A\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

合振动是简谐振动，其角频率仍为ω。

2. 几何方法

$\vec{A}$即是合成振动的旋转矢量。



结论：

① 合振动仍是同频率的简谐振动。

②合振幅不仅与分振幅有关还与Δφ有关。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

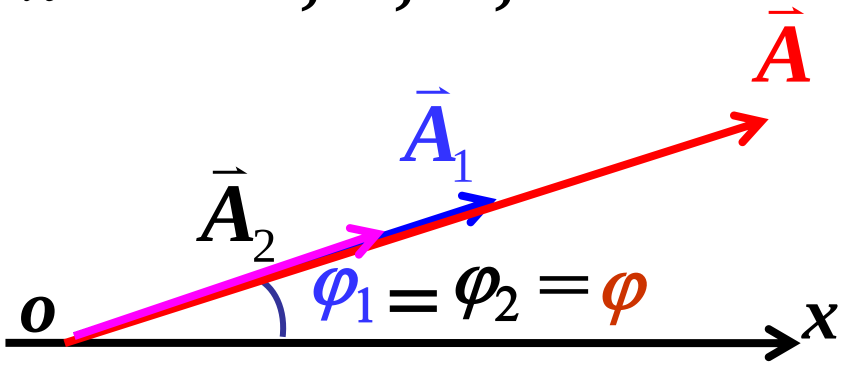
3. 重要讨论：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

①两分振动同相：$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\vec{A}_1$，$\vec{A}_2$ 同向，合振幅为：

$$A=A_1+A_2$$

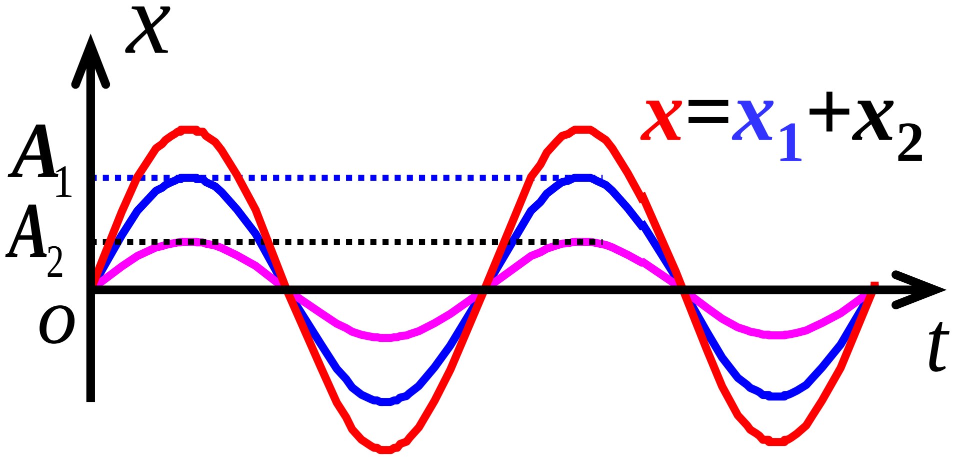


合振动初相位：$\varphi=\varphi_1=\varphi_2$

合振动方程：

$$x=x_1+x_2$$

$$=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi_1)$$



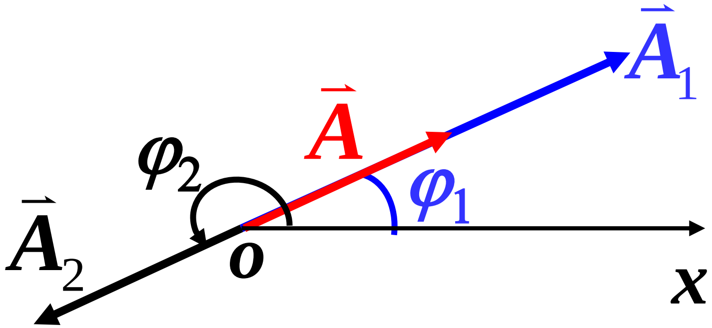
合振动的振幅最大

两振动的合成效果：——使振动加强

②两分振动反相：

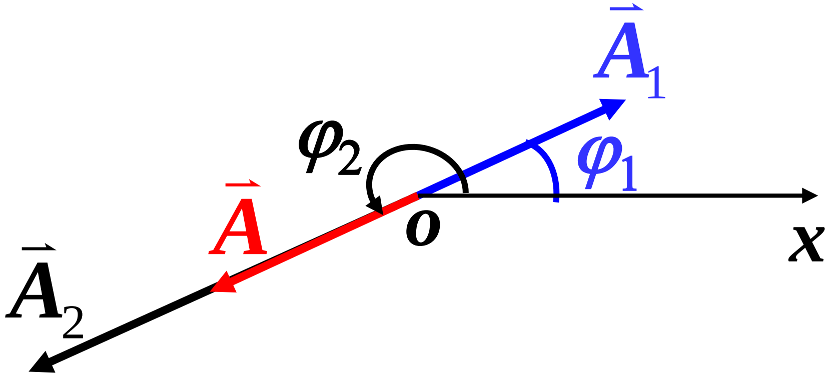
$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$



$\vec{A}_1$与$\vec{A}_2$方向相反

合振幅为： $A = |A_1 - A_2|$

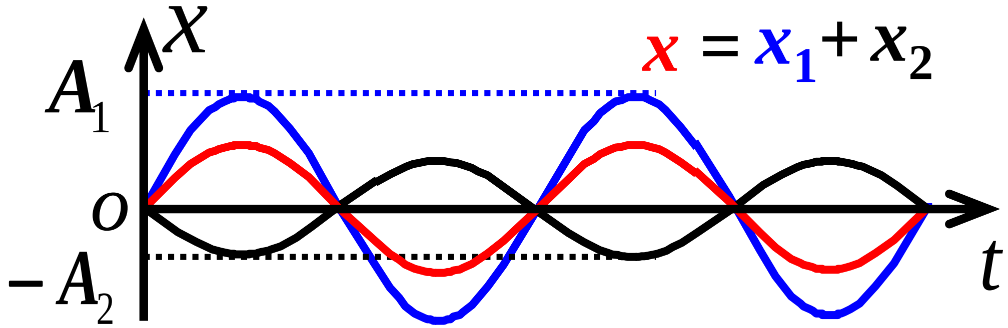


合振动初相位：

若$A_1 > A_2$　　$\varphi = \varphi_1$

若$A_1 < A_2$　　$\varphi = \varphi_2$

两振动合成的振幅最小。

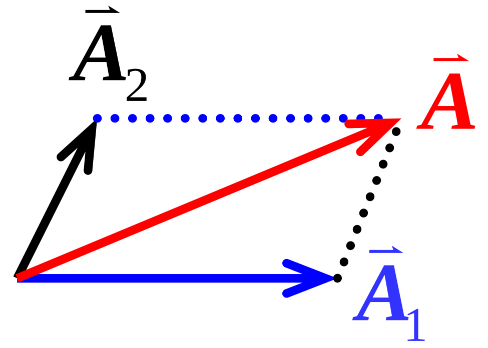


两振动的合成效果：——使振动减弱

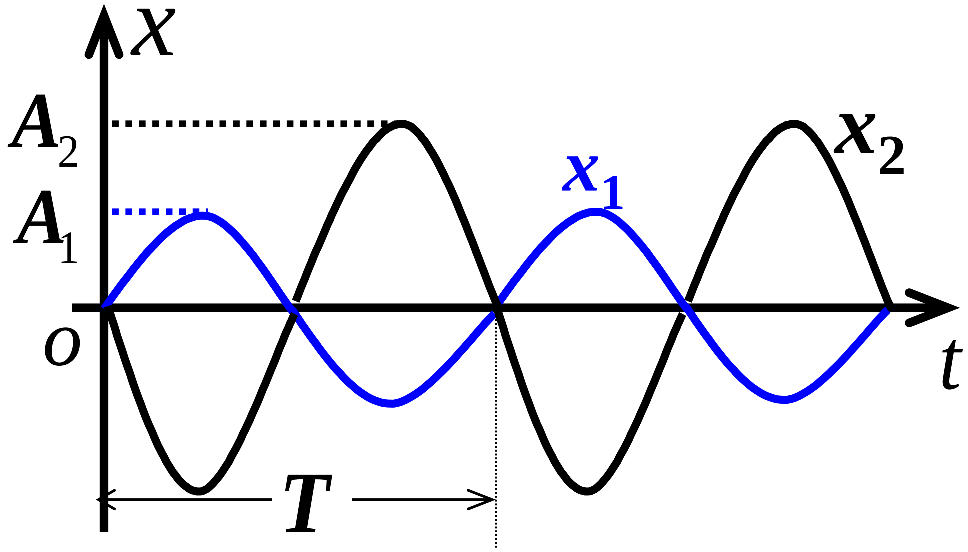
③两分振动的相位差：

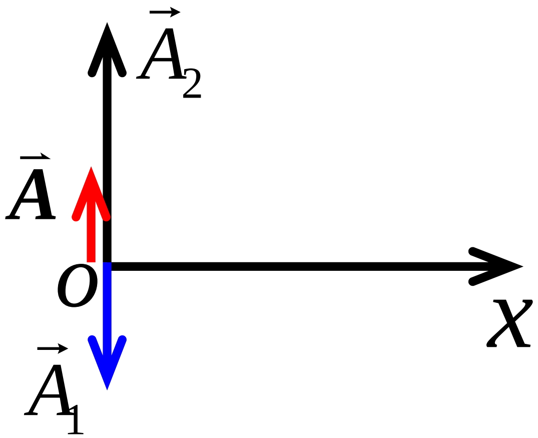
一般情况：$\varphi_2 - \varphi_1 \neq k\pi$

$$|A_1 - A_2| < A < |A_1 + A_2|$$



例1. 两同方向简谐振动曲线如图。求合振动的振动方程。





$$x = (A_2 - A_1)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

4. 同方向N个同频率简谐振动的合成

设它们的振幅相等，初相位依次差一个恒量：

$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \delta)$$

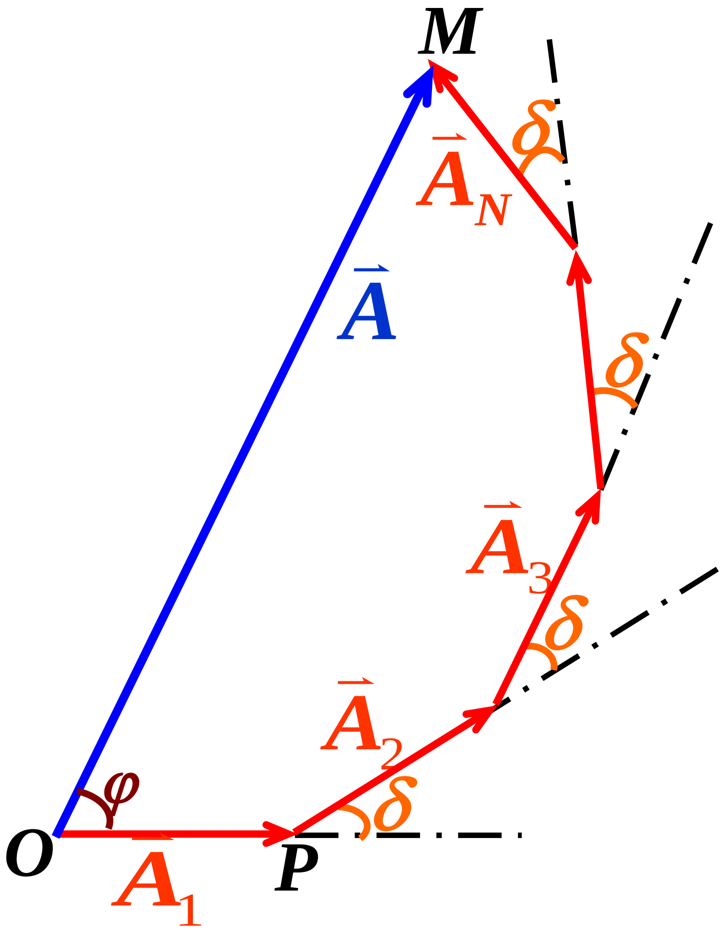
$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots$$

$$x_N = a\cos[\omega t + (N-1)\delta]$$

合振动为简谐振动。

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



在ΔOCM中：$A = 2R\sin(\frac{N\delta}{2})$

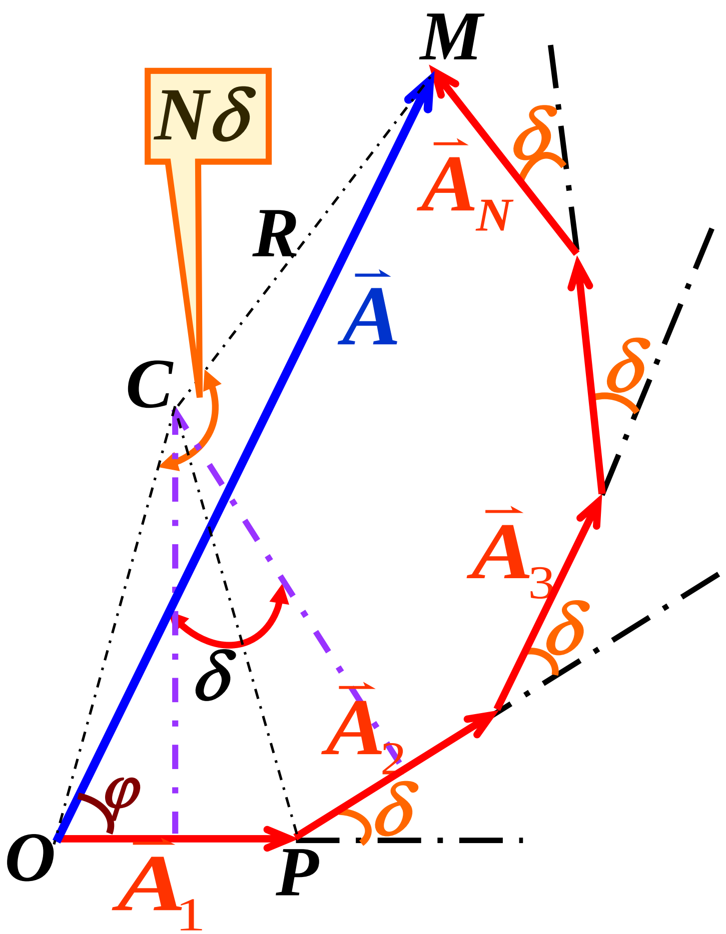
在ΔOCP中：$A_1 = 2R\sin(\frac{\delta}{2})$

$$A = A_1 \frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})}$$

$$\varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\delta$$

合振动的表达式

$$x = A_1 \frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})} \cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)$$



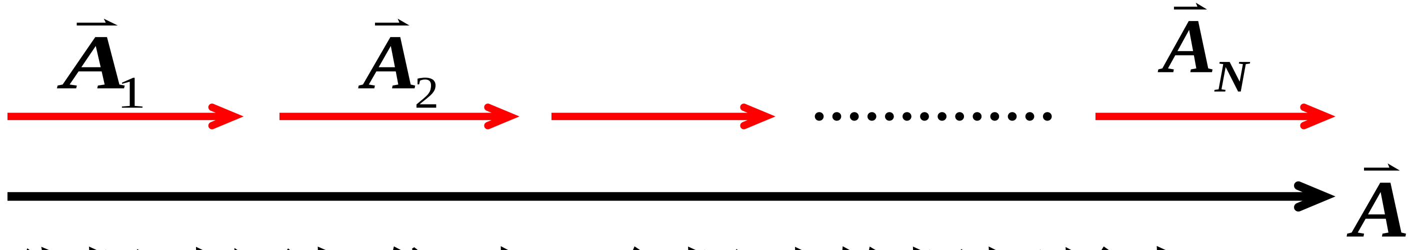
讨论

$$x = A_1 \frac{\sin(\frac{N\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta)$$

①当 $\delta = 2k\pi$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

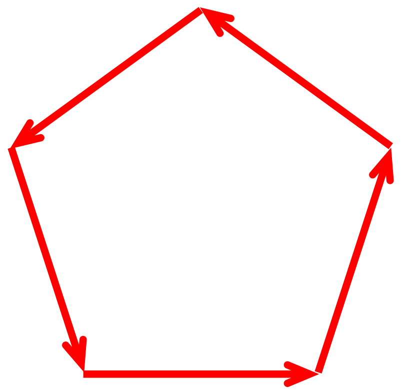
$A = Na$



即各分振动同相位时，合振动的振幅最大。

②当 $N\delta = 2k\pi \;\; (k \neq k'N)$，$A = 0$

此时各分振动矢量依次相接，构成闭合的正多边形。



多个分振动的合成在说明光的干涉和衍射规律时有重要的应用。

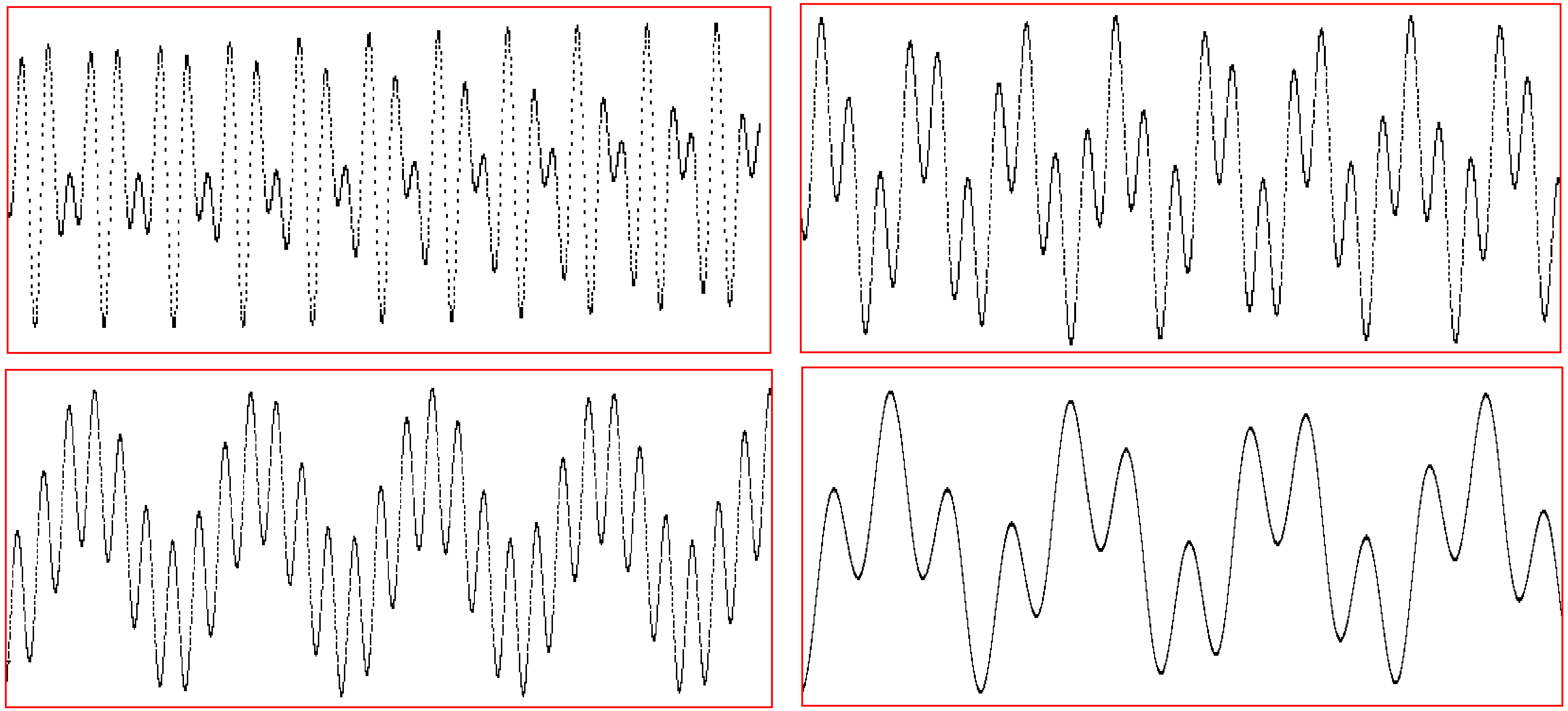
二、同方向、不同频率的简谐振动的合成

两振动 $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$ $x_2 = A_1\cos(\omega_2 t + \varphi)$

的合振动：$x = x_1 + x_2 = 2A_1\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$

振幅按余弦函数变化，变化范围： $0 \le A \le 2A_1$

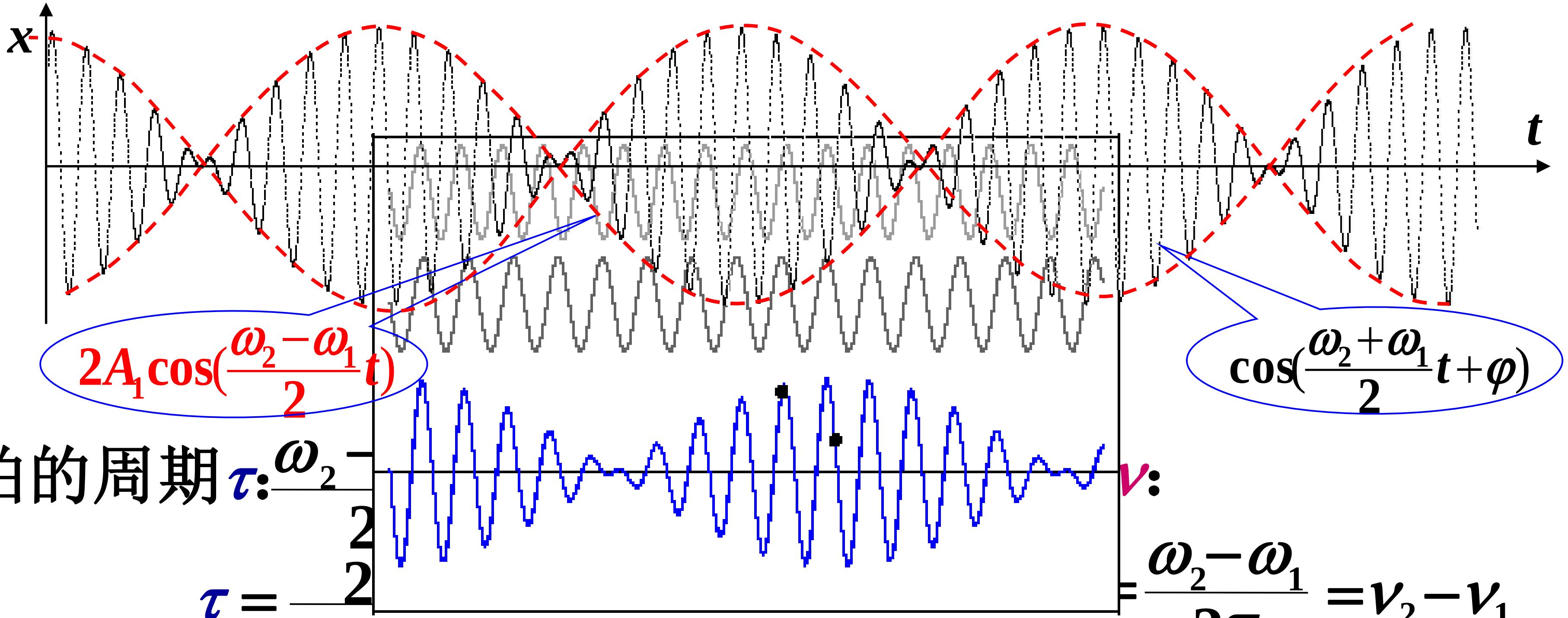
因此，合振动显然不是谐振动。振动曲线取决于频率差。



若频率差很小：振幅出现明显的变大、变小的现象——拍

$$x=2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

可见 $\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$ 改变π时，A就重复出现一次变化



拍的周期τ: $\frac{\omega_2-}{2}$ … ν:

$\tau=\frac{2}{\omega_2-}$ … $=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$

拍频与合振动 … 司的。

拍现象只在两分振动的频率相差不大时才明显。

三、相互垂直、同频率简谐振动的合成

设一个质点同时参与了两个振动方向相互垂直的同频率简谐振动，即

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1); \qquad y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_1 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_2 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_2$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi}$$

质点的轨迹为椭圆。

椭圆的形状和质点的运动方向由

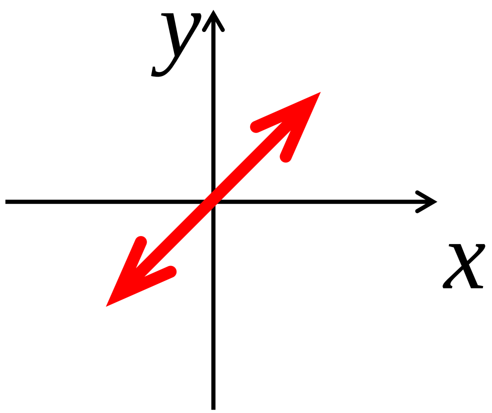
位相差 $\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)$ 决定。

当 $0<\Delta\varphi<\pi$ 时，质点沿顺时针方向运动；　右旋

当 $-\pi<\Delta\varphi<0$ 时，质点沿逆时针方向运动。　左旋

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi}$$

讨论： ① $(\varphi_2-\varphi_1)=0$



$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$ 质点作直线运动。

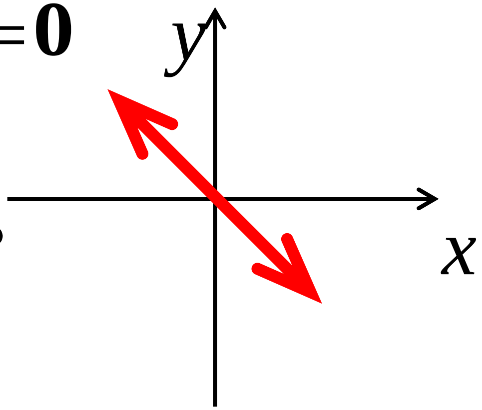
合振动为Ⅰ、Ⅲ象限的一维简谐振动。

任意时刻质点离开平衡位置的位移为:

$$s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi}$$

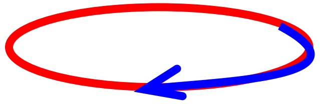
② $(\varphi_2-\varphi_1)=\pi$ $\quad\quad \dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}+\dfrac{2xy}{A_1A_2}=0$



质点在 $y=-\dfrac{A_2}{A_1}x$ 直线上的振动。

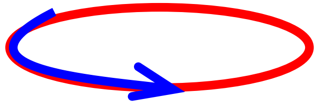
合振动为Ⅱ、Ⅳ象限的一维简谐振动。

③ $(\varphi_2-\varphi_1)=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\quad \dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$



质点的轨迹为正椭圆。且顺时针旋转。

④ $(\varphi_2-\varphi_1)=-\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\quad \dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$



质点的轨迹为正椭圆。但逆时针旋转。

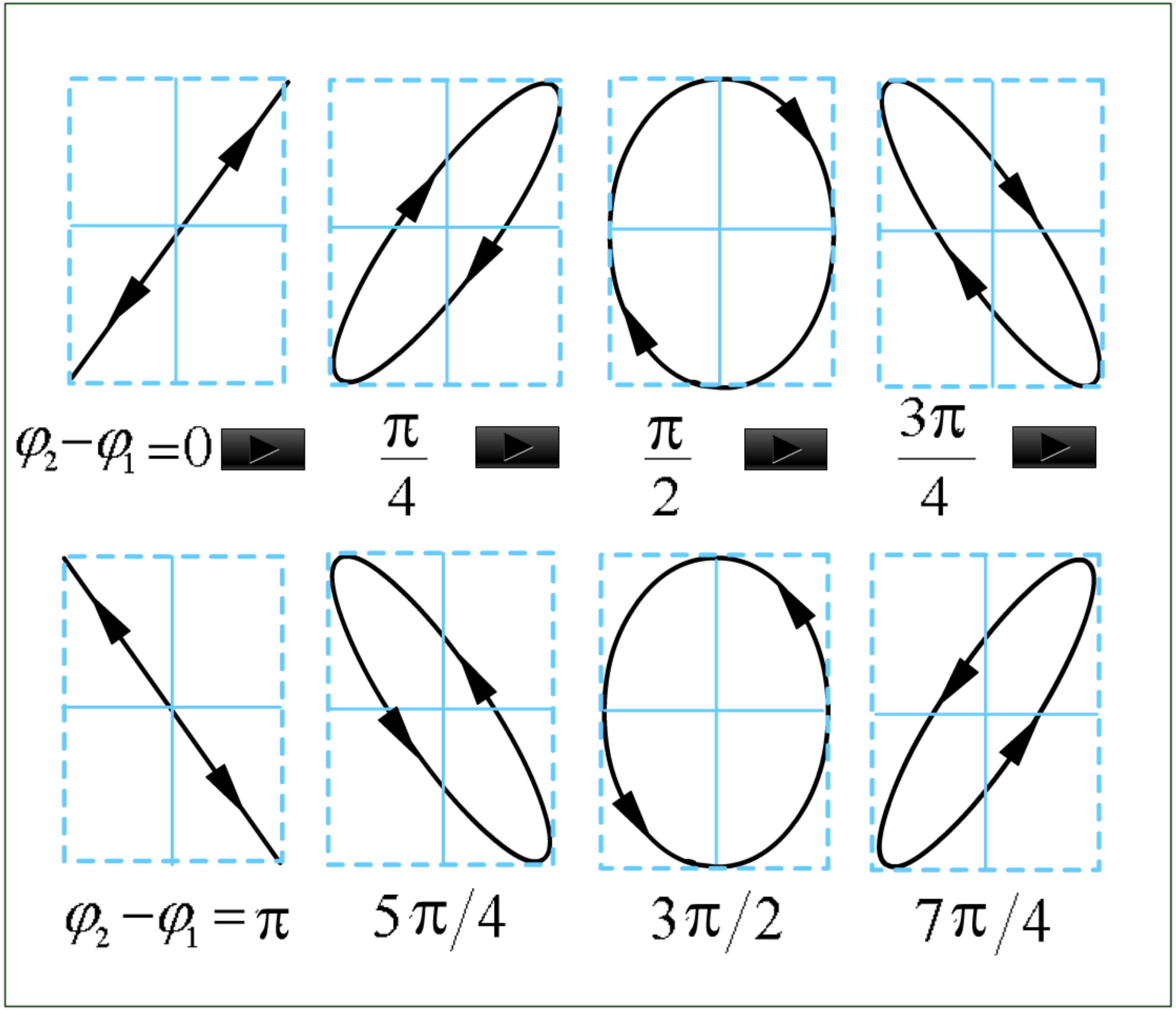
当 $A_1=A_2$ 时，正椭圆退化为圆。

⑤ $\phi_2 - \phi_1 \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ $\varphi_2 - \varphi_1 \neq 2k\pi$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$ 则合振动轨迹为任一椭圆方程。

综上所述：两个频率相同的互相垂直的简谐振动合成后，合振动在一直线上或者在椭圆上进行。当两个分振动的振幅相等时，椭圆轨道就成为圆。

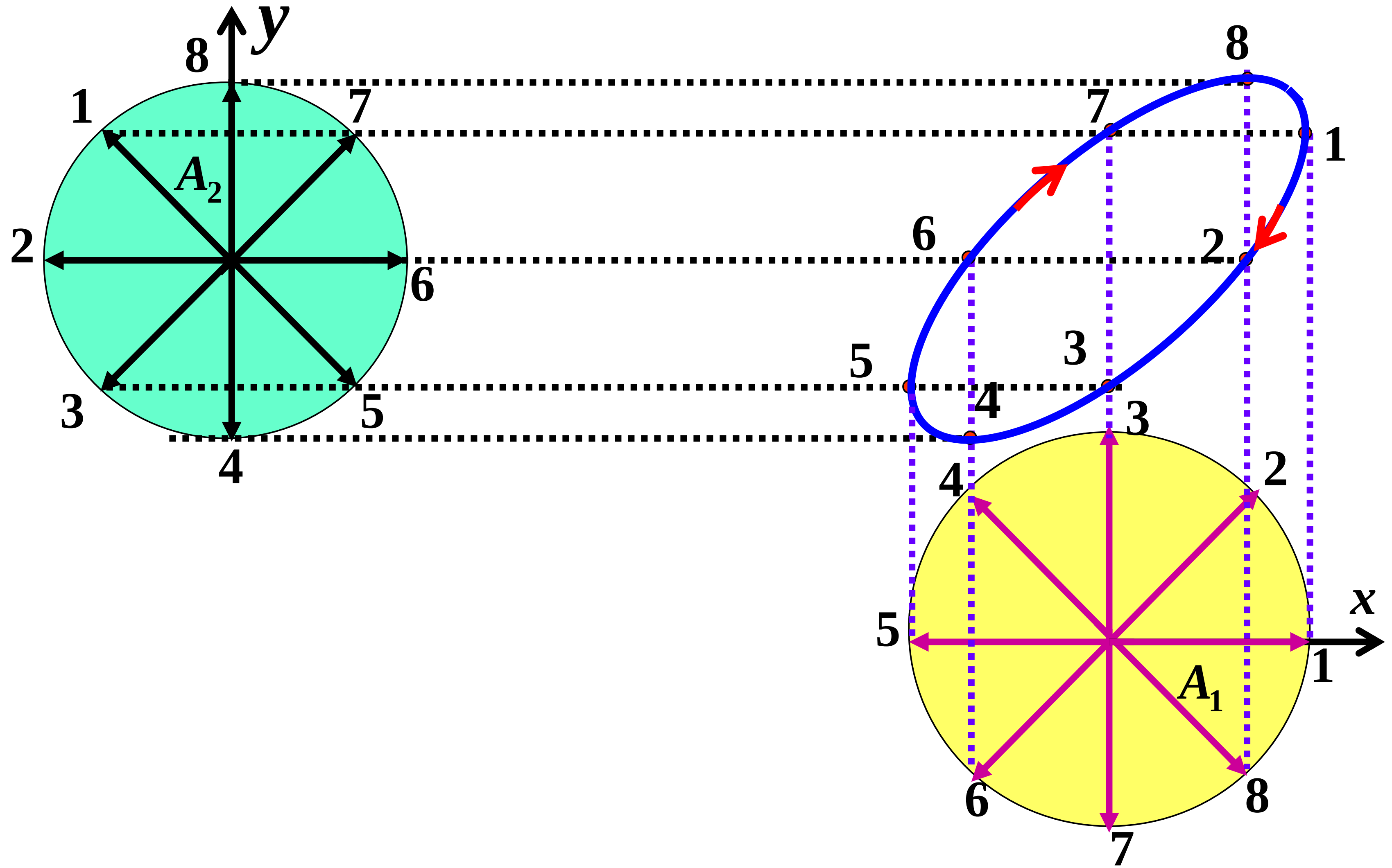
一个椭圆运动、匀速圆周运动、直线简谐振动，均可视为两个互相垂直的简谐振动合成，即它们都可分解为两个互相垂直的简谐振动。


$\varphi_2-\varphi_1=0$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\varphi_2-\varphi_1=\pi$
$5\pi/4$
$3\pi/2$
$7\pi/4$

例1. 若 $\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \pi/4) \end{cases} \Rightarrow \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

试确定合振动的轨迹。

解:



四、垂直方向不同频率简谐振动的合成

一般情况很复杂，下面介绍两种简单情况：

1. 两分振动频率相差很小

可近似看作两频率相等，而φ_2-φ_1随 t 缓慢变化

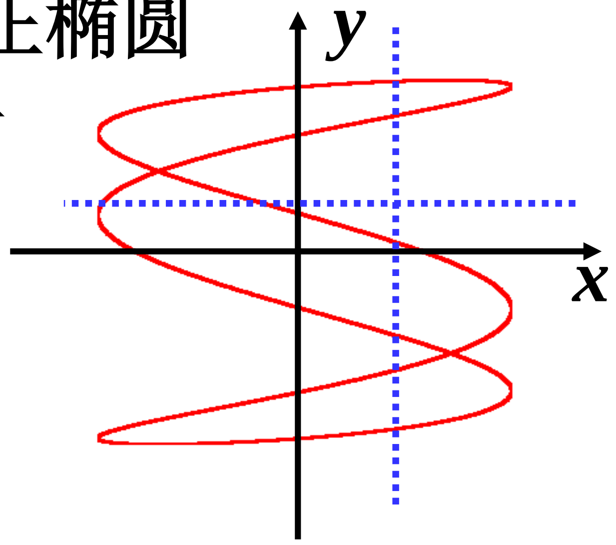
（$\Delta\varphi$ 将从 $0 \rightarrow \pi/2 \rightarrow \pi \rightarrow 3\pi/2 \rightarrow 2\pi$）

合运动轨迹将依次（从直线→斜椭圆→正椭圆→斜椭圆→直线→…）不停地变化下去

2. 两振动的频率成整数比

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n},\quad m,n \text{ 为正整数}$$

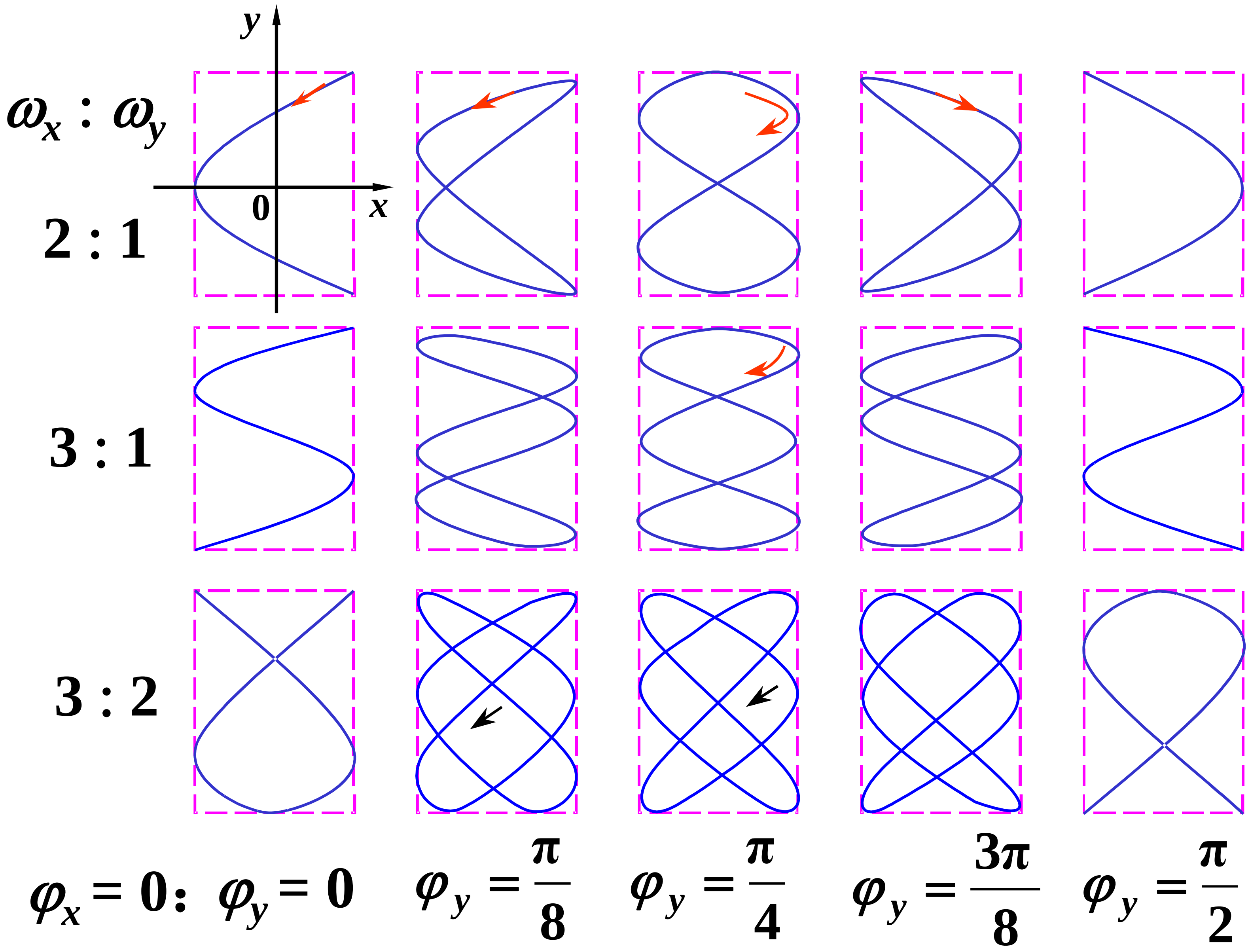
合成轨迹为稳定的闭合曲线—李萨如图形



$$\frac{f_x}{f_y}=\frac{6}{2}$$

可以测量信号频率：

$$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{\nu_x}{\nu_y}=\frac{x\text{达到最大的次数}}{y\text{达到最大的次数}}$$



$\omega_x : \omega_y$
2 : 1
3 : 1
3 : 2
y
x
0
$\varphi_x = 0$: $\varphi_y = 0$
$\varphi_y = \frac{\pi}{8}$
$\varphi_y = \frac{\pi}{4}$
$\varphi_y = \frac{3\pi}{8}$
$\varphi_y = \frac{\pi}{2}$

五、谐振分析

利用傅里叶级数分解，可将任意振动分解成若干简谐振动的叠加。

对周期性振动： T — 周期， $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)]$$

分立谱：

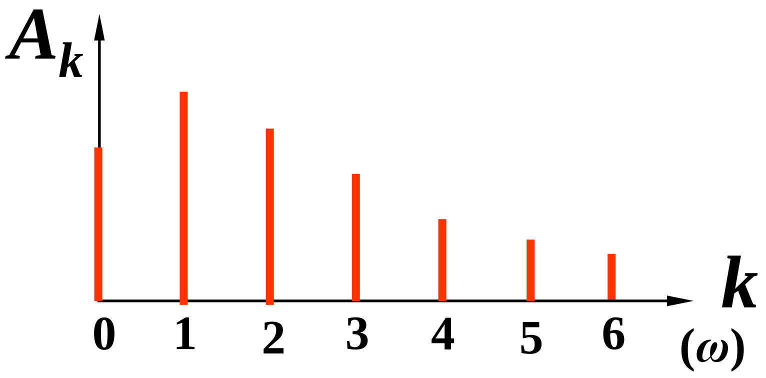
$k = 1$，基频（ω）

$k = 2$，二次谐频（2ω）

$k = 3$，三次谐频（3ω）

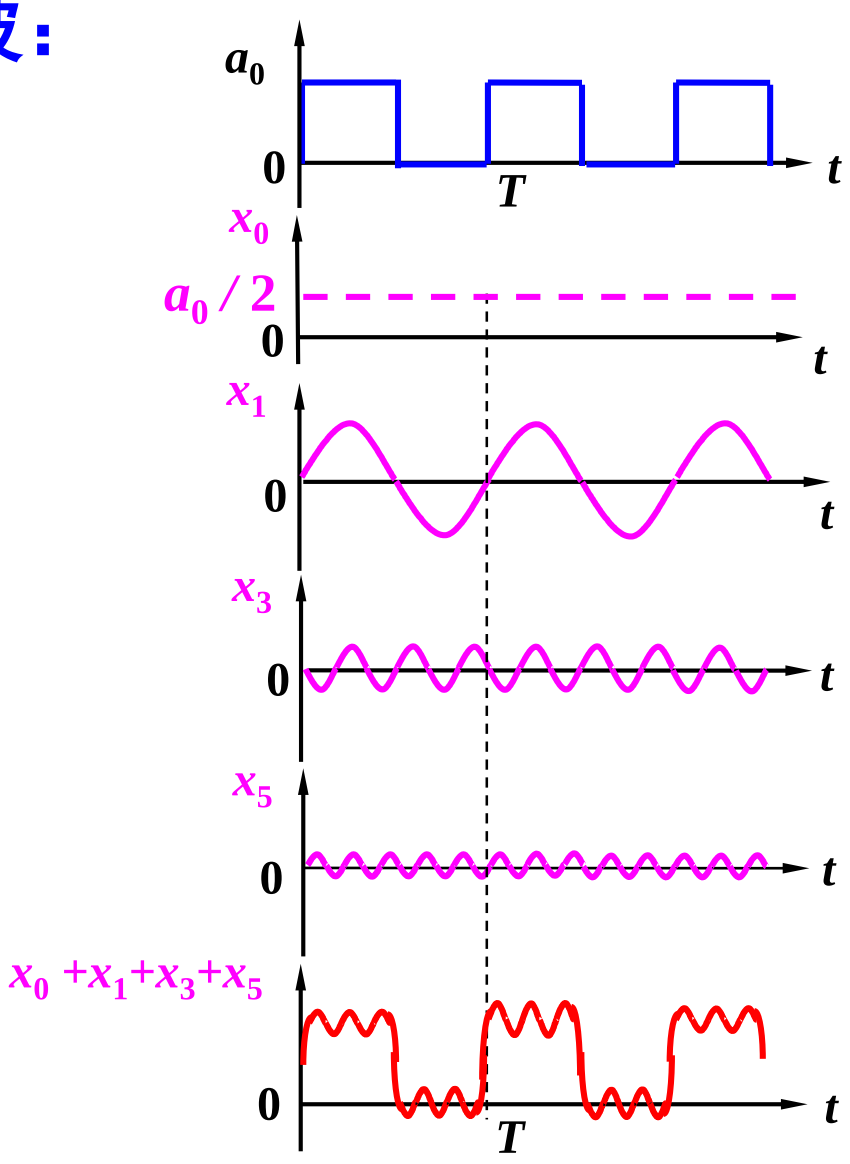
……

高次谐频



对非周期性振动：利用傅里叶变换，得连续谱

例如对方波：



$$x_{2n} = 0\,,\ \ n = 1\,,2\,,3\,,\ldots$$