

4 - Soluções - Espaços vetoriais.

4.1 (a) $S \neq \emptyset$, por exemplo $(0,0,0) \in S$.

Sejam $\vec{u} = (x,0,0)$, $\vec{v} = (x',0,0) \in S$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Tem-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x+x',0,0) \in S$;
- $a\vec{u} = (ax,0,0) \in S$.

Logo, S é subespaço de \mathbb{R}^3 .

(b) S não é subespaço de \mathbb{R}^3 já que $(0,0,0) \notin S$;

(c) $S \neq \emptyset$, por exemplo $(0,0,0) \in S$. Sejam $\vec{u} = (x,y,z)$, $\vec{v} = (x',y',z') \in S$, então $y = x+z$ e $y' = x'+z'$. Seja $a \in \mathbb{R}$. Tem-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x+x', y+y', z+z')$ e $y+y' = (x+z) + (x'+z') = (x+x') + (z+z')$, logo, $\vec{u} + \vec{v} \in S$;
- $a\vec{u} = (ax, ay, az)$ e $ay = a(x+z) = ax + az$, logo, $a\vec{u} \in S$.

Assim S é subespaço de \mathbb{R}^3 .

(d) S não é subespaço de \mathbb{R}^3 já que $(0,0,0) \notin S$;

(e) $S \neq \emptyset$, por exemplo $(0,0,0) \in S$. Sejam $\vec{u} = (x,y,z)$, $\vec{v} = (x',y',z') \in S$, então $ax+by+cz=0$ e $ax'+by'+cz'=0$. Seja $d \in \mathbb{R}$. Tem-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x+x', y+y', z+z')$ e $a(x+x') + b(y+y') + c(z+z') = (ax+by+cz) + (ax'+by'+cz') = 0+0=0$, logo, $\vec{u} + \vec{v} \in S$;
- $d\vec{u} = (dx, dy, dz)$ e $a(dx) + b(dy) + c(dz) = d(ax+by+cz) = d \cdot 0 = 0$, logo, $d\vec{u} \in S$.

Assim S é subespaço de \mathbb{R}^3 .

Se $a=b=c=0$ então S é o espaço \mathbb{R}^3 ;

(f) S não é subespaço de \mathbb{R}^3 já que $(0,0,0) \notin S$;

(g) $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$, pelo que, $S = \{(0,0,0)\}$

(h) $\begin{cases} x+2y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ z=y \end{cases}$, donde, $S = \{(-2y, y, y) : y \in \mathbb{R}\}$

- fazendo $y=0$, vem $x=-2y=(-2) \cdot 0=0$ e $z=y=0$, pelo que $(0,0,0) \in S$;
- Sejam $\vec{u} = (-2y, y, y)$, $\vec{v} = (-2y', y', y') \in S$. Tem-se: $\vec{u} + \vec{v} = (-2(y+y'), y+y', y+y') \in S$;
- Sejam $\vec{u} = (-2y, y, y) \in S$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se: $a\vec{u} = (-2ay, ay, ay) \in S$.

Assim, S é subespaço de \mathbb{R}^3 .

4.2 (a) reta de equações reduzidas: $\begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases}$;

(b) Origem;

(c) Origem;

(d) reta de equações reduzidas: $\begin{cases} x=-3z \\ y=-2z \end{cases}$

(e) Plano de equação geral: $x - 3y + z = 0$.

4.3 (a) A é subespaço de \mathbb{R}^4 ;

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ w = -y - z \end{cases} \Rightarrow A = \{(-y - z, y, z, -y - z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

- fazendo $y = z = 0$, vem $x = -y - z = 0 = w$, pelo que $(0, 0, 0, 0) \in A$;
- Sejam $\vec{u} = (-y - z, y, z, -y - z)$, $\vec{v} = (-y' - z', y', z', -y' - z') \in A$. Tem-se: $\vec{u} + \vec{v} = (-(y + y') - (z + z'), y + y', z + z', -(y + y') - (z + z')) \in A$;
- Sejam $\vec{u} = (-y - z, y, z, -y - z) \in A$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se: $a\vec{u} = (-ay - az, ay, az, -ay - az) \in A$.

(b) B é subespaço de \mathbb{R}^4 ;

$$B = \{(x, y, x + y, 2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

- fazendo $x = y = 0$, vem $z = x + y = 0 + 0 = 0 \wedge w = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$, pelo que $(0, 0, 0, 0) \in B$;
- Sejam $\vec{u} = (x, y, x + y, 2x + 3y)$, $\vec{v} = (x', y', x' + y', 2x' + 3y') \in B$. Tem-se: $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', (x + x') + (y + y'), 2(x + x') + 3(y + y')) \in B$;
- Sejam $\vec{u} = (x, y, x + y, 2x + 3y) \in B$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se: $a\vec{u} = (ax, ay, ax + ay, 2ax + 3ay) \in B$.

(c) C não é subespaço de \mathbb{R}^4 ;

$$\begin{cases} z = x - y \\ x = y - w + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - y \\ w = y - x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \{(x, y, x - y, y - x + 1) : x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ pelo que, } (0, 0, 0, 0) \notin C.$$

(d) D não é subespaço de \mathbb{R}^2 ;

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x \vee y = -x, \text{ donde,}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \vee y = -x\}$$

Por exemplo, $(1, 1), (-1, 1) \in D$ mas $(1, 1) + (-1, 1) = (0, 2) \notin D$, pelo que D não é fechado para a adição.

(e) E é subespaço de \mathbb{R}^5 ;

$$E = \{(b + d, b, b, d, e) : b, d, e \in \mathbb{R}\}$$

- fazendo $b = d = e = 0$, vem $a = b + d = 0 \wedge c = b = 0$, pelo que $(0, 0, 0, 0, 0) \in E$;
- Sejam $\vec{u} = (b + d, b, b, d, e)$, $\vec{v} = (b' + d', b', b', d', e') \in E$. Tem-se:

$$\vec{u} + \vec{v} = ((b + b') + (d + d'), b + b', b + b', d + d', e + e') \in E$$

- Sejam $\vec{u} = (b + d, b, b, d, e) \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\alpha\vec{u} = (\alpha b + \alpha d, \alpha b, \alpha b, \alpha d, \alpha e) \in E$$

(f) F não é subespaço de \mathbb{R}^2 ;

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x\}$$

$(1, 3) \in F$ mas $(-1)(1, 3) = (-1, -3) \notin F$ ($-3 < 2 \cdot (-1)$), pelo que F não é fechado para a multiplicação por escalar.

(g) G é subespaço de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$;

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

- fazendo $a = c = d = 0$, vem $b = 2c = 0$, pelo que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$;

- Sejam $\vec{u} = \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} a' & 2c' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Tem-se:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} a + a' & 2(c + c') \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix} \in G$$

- Sejam $\vec{u} = \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\alpha \vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha a & 2\alpha c \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \in G$$

(h) H não é subespaço de $\mathbb{R}^{2 \times 3}$;

Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin H$.

(i) I é subespaço de $\mathbb{R}^{n \times n}$;

- $0_n^T = 0_n \Rightarrow 0_n \in I$;

- Sejam $A, B \in I \Rightarrow A^T = A \wedge B^T = B$. Então, $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, logo, $A + B \in I$;

- Sejam $A \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se, $A^T = A$ e, por isso, $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$, donde, $\alpha A \in I$.

4.4 (a) \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 : $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{v}_1 - \frac{13}{3}\vec{v}_2$.

(b) \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 : $\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{v}_1 + \frac{4}{3}\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$, por exemplo.

(c) \vec{v} não é combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

(d) \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 : $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2$.

(e) \vec{v} é combinação linear de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 : $\vec{v} = 2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 - \vec{v}_3$.

(f) \vec{v} não é combinação linear de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 .

4.5 (a) $k = -15/2$;

(b) $k = 2$.

4.6 (a) $3a - b - c = 0$;

(b) $2a - 3b + c = 0$;

(c) $b - 2a = c - 3a = 0$;

(d) não há condições a impor.

4.7 $A = 2B + C + \frac{3}{2}D$.

4.8 (a) Conjunto de vetores linearmente independentes;

(b) Conjunto de vetores linearmente dependentes, $(1, 0) = (2, 2) - (1, 2)$;

(c) Conjunto de vetores linearmente independentes;

- (d) Conjunto de vetores linearmente dependentes, $(13, 1, 0) = (-2)(-5, 1, 3) + 3(1, 1, 2)$;
 (e) Conjunto de vetores linearmente dependentes, $(0, 3, 2, 1) = (-1)(1, 0, 0, 2) + (-3)(1, 1, 2, 1) + 2(2, 3, 4, 3)$;
 (f) Conjunto de vetores linearmente independentes;
 (g) Conjunto de vetores linearmente independentes.
- 4.9 (a) $a \neq 1 \wedge a \neq 2$;
 (b) $a \neq -2 \wedge a \neq 2$;
 (c) os vetores dados são linearmente independentes para qualquer valor de a .
- 4.10 (a) Por exemplo, $\vec{v}_3 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 - \frac{1}{3}\vec{v}_2$.
 (b) $\dim\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 2$ e $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é uma base de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$;
 (c) $\dim\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 2$ logo $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ é um plano. Equação geral: $x + y - z = 0$.
- 4.11 (a) É base e gerador.
 (b) Não é base mas é gerador.
- 4.12 Existem escalares a_1, a_2, a_3, a_4 tais que $(x, y, z) = a_1(1, 1, 0) + a_2(-1, 0, 1) + a_3(0, 1, 1) + a_4(-1, 1, -1)$, para qualquer vetor (x, y, z) de \mathbb{R}^3 , logo S é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .
 $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, -1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 .
 $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, -1)\}$ também é uma base de \mathbb{R}^3 .
- 4.13 Os vetores $(1, -1, 1), (-2, 2, -1)$ não são múltiplos, logo são linearmente independentes.
 $\{(1, -1, 1), (0, 1, 0), (-2, 2, -1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 , contendo $(1, -1, 1), (-2, 2, -1)$.
- 4.14 (a) Por exemplo, $(0, 0, 0, 0), 2\vec{v}_1 = (0, 2, -2, 2), \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (-1, 0, -1, 0), \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (2, 4, -2, 4)$;
 (b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z = 0 \wedge y - w = 0\}$;
 (c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^4 que contém \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .
- 4.15 (a) $(4, 1, 1) \in S, \forall k \in \mathbb{R} : (4, 1, 1) = (-1)(0, -1, 1) + 2(2, 0, 1) + 0(0, 2, k)$;
 (b) Se $k = -2$ então $\dim S = 2$ e $\{0, -1, 1), (2, 0, 1)\}$ é uma base de S ;
 Se $k \neq -2$ então $\dim S = 3$ e $\{0, -1, 1), (2, 0, 1), (0, 2, k)\}$ é uma base de S . Na verdade, tendo em conta que $\dim S = 3$ e que S é um subespaço de \mathbb{R}^3 , tem-se que $S = \mathbb{R}^3$. Donde, qualquer base de \mathbb{R}^3 constitui uma base de S ;
 (c) Se $k = -2$ então $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 2z = 0\}$;
 Se $k \neq -2$ então $S = \mathbb{R}^3$.
- 4.16 (a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \{(0, 0)\}; \dim(A) = 0, \emptyset \text{ é a base de } A$;
 (b) $B = \{(2z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 0, 1) \rangle; \dim(B) = 1, \{(2, 0, 1)\}$ é uma base de B ;
 (c) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3z - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + z \\ w = 2x + 3z \end{cases} \Rightarrow C = \{(x, -x + z, z, 2x + 3z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ e
 $(x, -x + z, z, 2x + 3z) = (x, -x, 0, 2x) + (0, z, z, 3z) = x(1, -1, 0, 2) + z(0, 1, 1, 3)$;
 $\dim(C) = 2, \{(1, -1, 0, 2), (0, 1, 1, 3)\}$ é uma base de C .
- 4.17 (a) $A = \{(-y - z, y, z, -y - z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de \mathbb{R}^4 ;
 $(-y - z, y, z, -y - z) = (-y, y, 0, -y) + (-z, 0, z, -z) = y(-1, 1, 0, -1) + z(-1, 0, 1, -1)$

A é o conjunto solução de um SPI (homogêneo) com $\text{GI}=2$ logo $\dim(A) = 2$ e

$\{(-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, -1)\}$ é uma base de A

(b) $B = \{(x, y, x + y, 2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de \mathbb{R}^4 ;

$$(x, y, x + y, 2x + 3y) = (x, 0, x, 2x) + (0, y, y, 3y) = x(1, 0, 1, 2) + y(0, 1, 1, 3)$$

B é o conjunto solução de um SPI (homogêneo) com $\text{GI}=2$ logo $\dim(A) = 2$ e

$\{(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 3)\}$ é uma base de B

(e) $E = \{(b + d, b, b, d, e) : b, d, e \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de \mathbb{R}^5 ;

$$(b + d, b, b, d, e) = (b, b, b, 0, 0) + (d, 0, 0, d, 0) + (0, 0, 0, 0, e) = b(1, 1, 1, 0, 0) + d(1, 0, 0, 1, 0) + e(0, 0, 0, 0, 1)$$

E é o conjunto solução de um SPI com $\text{GI}=3$ logo $\dim(E) = 3$ e

$\{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de E

(g) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$;

$$\begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2c \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As 3 matrizes são l.i. logo $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de G e $\dim(G) = 3$.

(i) I é subespaço de $\mathbb{R}^{n \times n}$,

$$I = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = A\}$$

Se $n = 2$,

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de I e $\dim(I) = 3$.

Se $n = 3$,

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de I e $\dim(I) = 6$.

Por um raciocínio idêntico, obter-se-ia uma base para I com:

- n matrizes (diagonais) com a entrada (k, k) igual a 1 e as restantes entradas nulas, $k \in [n]$;
- $\frac{n^2 - n}{2}$ matrizes com entradas (i, j) e (j, i) iguais a 1 e as restantes entradas nulas, $i \neq j, i, j \in [n]$;

$$\dim(I) = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

4.18 $\{(-1, -1, 1)\}$ é uma base do espaço das soluções do sistema homogêneo. Dimensão igual a 1.

4.19 (a) $\dim(F) = 2$ e $\{(1, 0, 1, 0), (1, -1, 1, 0)\}$ é uma base de F .

$\dim(G) = 3$ e $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de G .

(b) $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \wedge w = 0\}$.

(c) $\{(1, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ é uma base de \mathbb{R}^4 contendo 3 vetores (linearmente independentes!) de G ;

$$(d) (x, y, z, w) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ z = x \\ w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \\ w = 0 \end{cases}$$

$$F \cap G = \{(x, -2x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 1, 0) \rangle$$

$$\{(1, -2, 1, 0)\} \text{ é uma base de } F \cap G \text{ e } \dim(F \cap G) = 1$$

(e) $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 1, 0), (1, -1, 1, 0))$ base ordenada de F

$$(1, -2, 1, 0) = -1(1, 0, 1, 0) + 2(1, -1, 1, 0) \Rightarrow (1, -2, 1, 0) = (-1, 2)_{\mathcal{B}_1}$$

$\mathcal{B}_2 = ((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ base ordenada de G

$$(1, -2, 1, 0) = -2(-1, 1, 0, 0) + 1(-1, 0, 1, 0) + 0(-1, 0, 0, 1) \Rightarrow (1, -2, 1, 0) = (-2, 1, 0)_{\mathcal{B}_2}$$

$$4.20 (a) F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : d = -a \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Os 3 geradores de F são linearmente independentes (verifique) pelo que formam uma base de F e $\dim(F) = 3$.

(b) os 3 geradores de G são linearmente dependentes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mas $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ é uma base de } G \text{ e } \dim(G) = 2;$$

Uma base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nas condições pedidas é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$(c) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G \Leftrightarrow c = d = 0.$$

$$(d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F \cap G \Leftrightarrow a + d = 0 \wedge c = d = 0 \Leftrightarrow a = c = d = 0 \Rightarrow F \cap G = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ é uma base de } F \cap G \text{ e } \dim(F \cap G) = 1$$

4.21 É falsa a afirmação (d).

4.22 É falsa a afirmação (b).

4.23 É falsa a afirmação (c).

4.24 É falsa a afirmação (a).

- 4.25
- (a) Falso, porque um conjunto linearmente independente de V tem no máximo n vetores.
 - (b) Falso, porque um conjunto de geradores de V com n vetores é uma base de V , logo o conjunto é linearmente independente.
 - (c) Falso, um conjunto de geradores de V tem no mínimo n vetores.
 - (d) Verdadeiro, porque um conjunto linearmente independente de V com n vetores é uma base de V , logo é um conjunto gerador de V .
 - (e) Falso, porque um conjunto de geradores linearmente independente de V é uma base de V , logo tem exactamente n vetores.
 - (f) Verdadeiro, basta ampliar o conjunto dado a um conjunto de n vetores linearmente independentes.