Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

11. Matriz canónica ou Matriz de Multiplicação

Índice

Recordar: Imagem ou Contradomínio

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear. Ao subespaço vetorial $f(U)$ de V chama-se **imagem de** f e denota-se por $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) : u \in U\}.$$

Seja $f : U \longrightarrow V$ uma aplicação linear. Se $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U então:

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(u_1), \ldots, f(u_n) \rangle$$

Uma aplicação linear $f : U \longrightarrow V$ é **sobrejetiva** se

$$\mathrm{Im}(f) = V.$$

Recordar: Núcleo

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear. Chama-se **núcleo** de f, e denota-se por $\mathrm{Nuc}(f)$, ao subespaço vetorial de U:

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{u \in U : f(u) = 0_V\}.$$

Uma aplicação linear $f : U \to V$ é **injetiva** sse

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{0_U\}.$$

Recordar: Teorema da dimensão

Seja U um espaço vetorial de dimensão finita.
Se $f : U \to V$ é uma aplicação linear então

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = \dim(U)$$

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear . Chama-se:

- **característica de f** à dimensão da Imagem de f. Representa-se por c_f;
- **nulidade de f** à dimensão do núcleo de f. Representa-se por n_f.

Tem-se:

$$c_f + n_f = \dim(U)$$

Aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0, 1, \ldots, 0)}_{e_2} + \cdots + x_n \underbrace{(0, \ldots, 0, 1)}_{e_n}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$$

Escrita matricial:

$$[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \underbrace{\begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \end{bmatrix}}_{\text{matriz canónica de } f} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matriz canónica de uma aplicação linear

Chama-se **matriz canónica ou matriz de multiplicação da aplicação linear** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ à matriz (do tipo m por n) cujas colunas são as imagens da base canónica de $\mathbb{R}^n$. Representa-se por M_f:

$$M_f = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix}$$

Tem-se:

$$[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Abreviadamente,

$$[f(u)] = M_f[u]$$

Matriz canónica de uma aplicação linear: exemplo I

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x-y, 2x+y-3z, y+2z)$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,2,0) \\ f(0,1,0) &= (-1,1,1) \\ f(0,0,1) &= (0,-3,2) \end{aligned}$$

Matriz canónica de f:

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Tem-se:

$$M_f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [f(x,y,z)] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x+y-3z \\ y+2z \end{bmatrix}$$

Matriz canónica de uma aplicação linear: exemplo II

2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (2x - 3y + z, 0)$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (2,0) \\ f(0,1,0) &= (-3,0) \\ f(0,0,1) &= (1,0) \end{aligned}$$

Matriz canónica de f:

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Tem-se:

$$M_f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [f(x,y,z)] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 3y + z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz canónica de uma aplicação linear: exemplo III

3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x,y) = (-5x, y, -x+3y, 6x-2y)$

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (-5, 0, -1, 6) \\ f(0,1) &= (0, 1, 3, -2) \end{aligned}$$

Matriz canónica de f:

$$M_f = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

Tem-se:

$$M_f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [f(x,y)] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x \\ y \\ -x+3y \\ 6x-2y \end{bmatrix}$$

Matriz canónica $\rightarrow$ aplicação linear

Defina a aplicação linear com matriz canónica:

1. $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z, w) = (x+2y+w, 5x-z+w, 2z)$

2. $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

   $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y, -x - y)$

3. $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$

Imagem, Núcleo e Matriz Canónica

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Tem-se:

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \rangle$$

logo

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = r \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \end{bmatrix} = r(M_f)$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Tem-se:

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon M_f \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T = O\}$$

logo

$$\dim(\mathrm{Nuc}(f)) = n - r(M_f)$$

Teorema da dimensão e Matriz Canónica

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear. Tem-se:

$$c_f = r(M_f) \quad \text{e} \quad n_f = n - r(M_f)$$

logo

$$c_f + n_f = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear.

- Se $n > m$ então f **não é injetiva**;
- Se $n < m$ então f **não é sobrejetiva**;
- Se $n = m$ então f **é injetiva se e só se é f sobrejetiva**.

Teorema da dimensão e Matriz Canónica - exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ com matriz canónica $M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$M_f \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_f = r(M_f) = 3 \quad \text{e} \quad n_f = 4 - 3 = 1$$

- $c_f = r(M_f) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ logo f **é sobrejetiva;**
- $n_f = 4 - 3 = 1 \neq 0$ logo f **não é injetiva**;
- $\{(1,0,1), (-1,1,0), (0,1,-1)\}$ é uma base da Imagem de f;
- $f(x,y,z,w) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + w = 0 \\ y + z - w = 0 \\ -2z + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ w = -2z \end{cases}$

Soluções: $(-z, z, z, -2z) = z(-1, 1, 1, 2), z \in \mathbb{R}$

$\{(-1,1,1,2)\}$ é uma base do Núcleo de f.

Expressão Analítica e Matriz Canónica

Determine a expressão analítica da aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,3) = (-2,-1,3) \quad \text{e} \quad f(2,5) = (-3,-1,5)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,3) = (-2,-1,3) \quad \Leftrightarrow \quad M_f \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \\ f(2,5) = (-2,-1,3) \quad \Leftrightarrow \quad M_f \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow M_f \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Expressão analítica: $f(x,y) = (x-y, 2x-y, y)$