14
Sinais – Espetro
(representação de sinais no domínio da frequência)

Comunicação Digital

(25 de maio de 2023)

Sumário

Parte 1 – Espetro de sinais periódicos

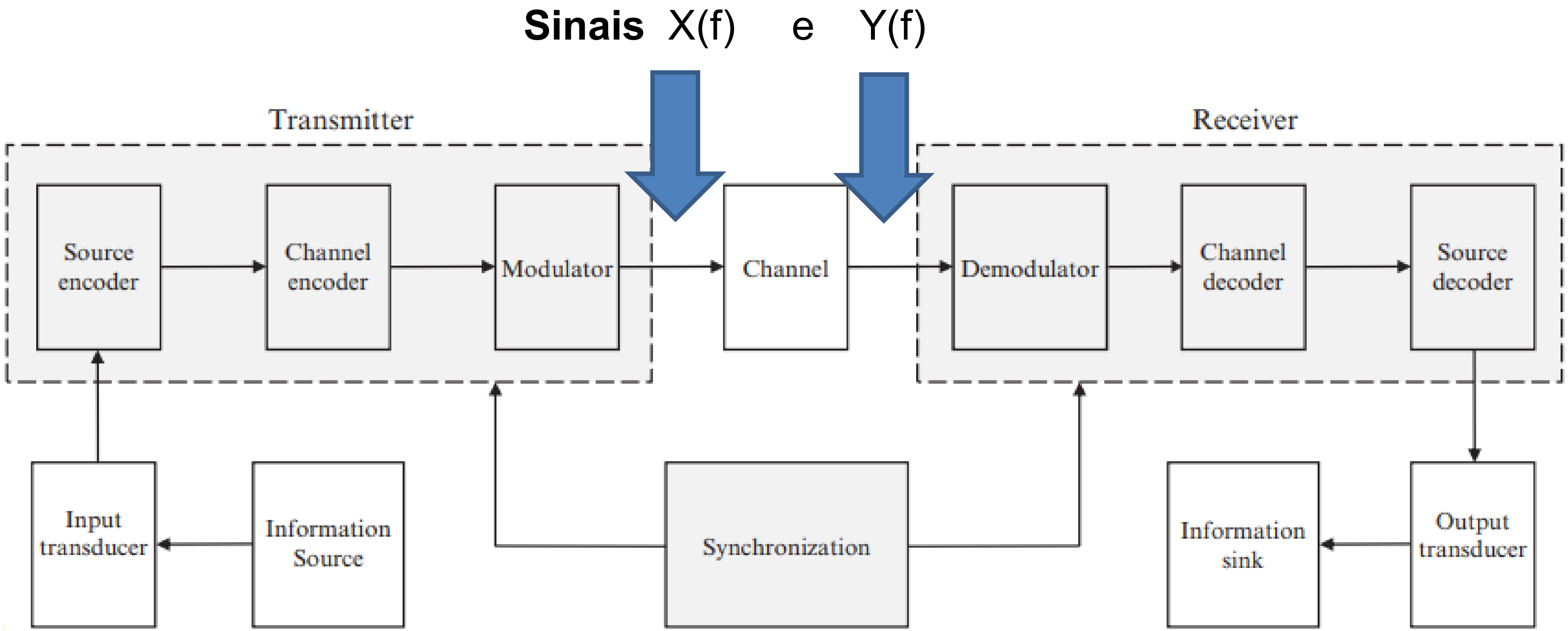
1. Sinais periódicos
2. Espetro <u>discreto</u> de amplitude e de fase
3. Cálculos de indicadores (potência, valor médio e largura de banda)
4. Exercícios

Parte 2 – Espetro de sinais não periódicos

5. Sinais não periódicos
6. Espetro <u>contínuo</u> de amplitude e de fase
7. Cálculos de indicadores (energia e largura de banda)
8. Exercícios

Sistemas de Comunicação (1)

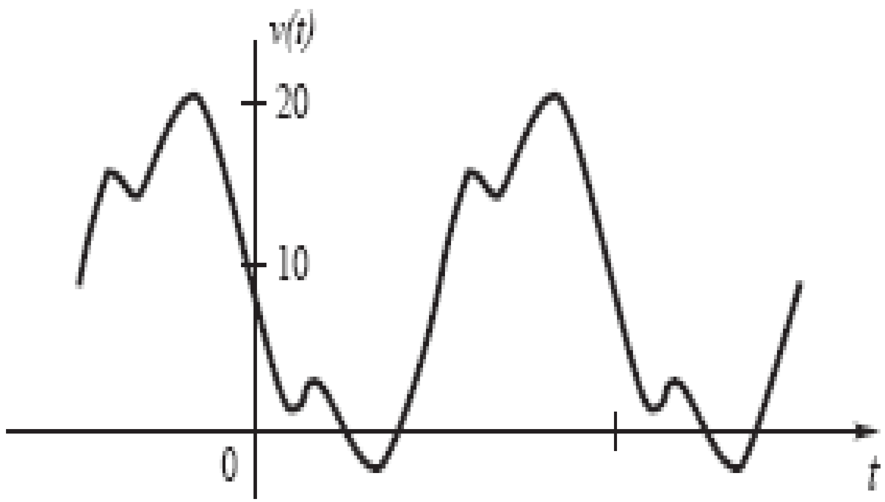
- Diagrama de blocos genérico



Sistemas de Comunicação (2)

- Quais as componentes de **frequência** e as respetivas **amplitudes** do sinal v(t)?

- Qual a **largura de banda** necessária à sua transmissão?



- A análise do sinal no **domínio do tempo** revela-se insuficiente

- Torna-se necessária a análise no **domínio da frequência**

1. Sinais periódicos

- Sinais periódicos ou estritamente repetitivos
- Repetem-se a cada **período fundamental T_o – menor valor de tempo para o qual o sinal se repete**
- No domínio contínuo ou analógico (período T_o seg) temos

$$x(t) = x(t + kT_o)$$

- Para o domínio discreto (período de N amostras) temos

$$x[n] = x[n + kN]$$

k é inteiro relativo.

- São exemplos:
  - a sinusóide
  - a onda quadrada

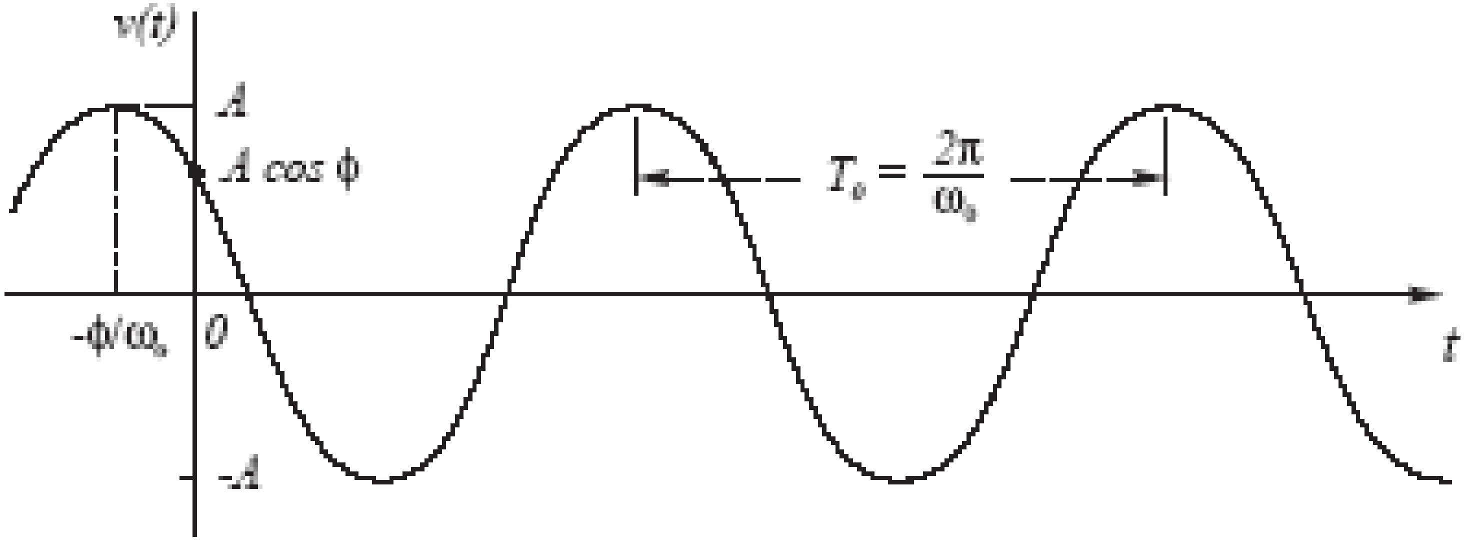
1. Sinais periódicos - Sinusóide

$$v(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

A – valor máximo de amplitude

f_o – frequência fundamental (n.º de períodos por segundo)
$T_o = 1 / f_o$, é o período fundamental

ϕ – fase inicial (deslocamento no eixo dos tempos, em relação à origem)



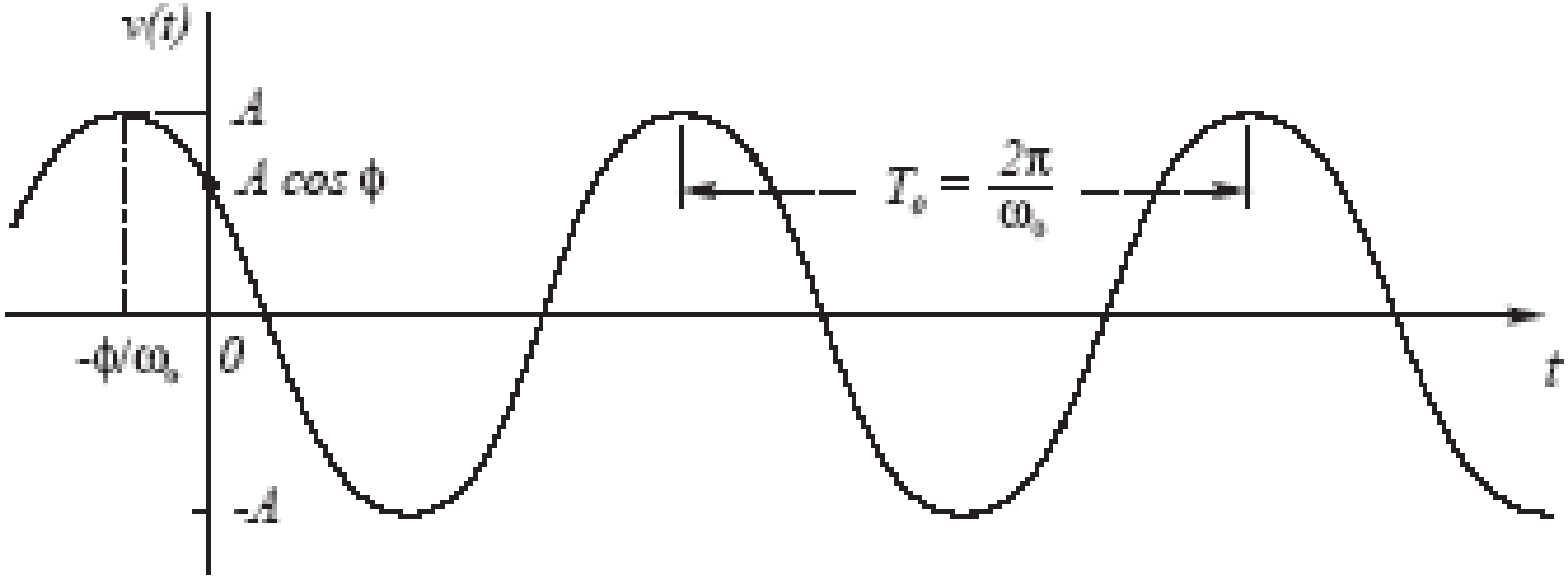
1. Sinusóide

$$v(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

- Tem valor médio nulo

- A potência é $P_v = \dfrac{A^2}{2}$

    - apenas depende da amplitude
    - não depende da frequência nem da fase

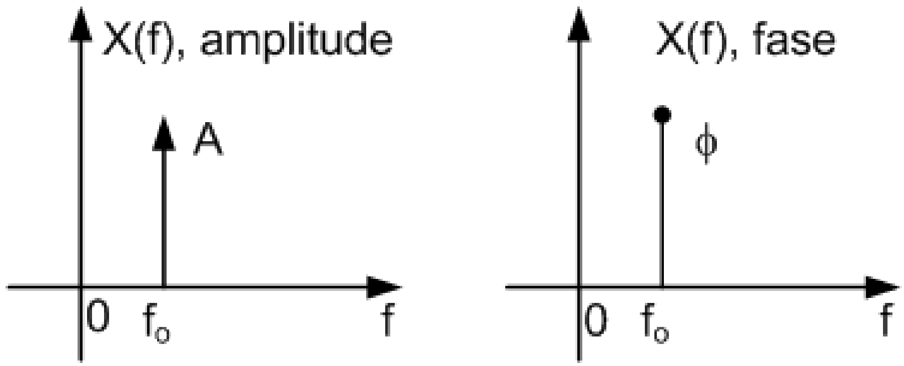


2. Espetro de amplitude e de fase

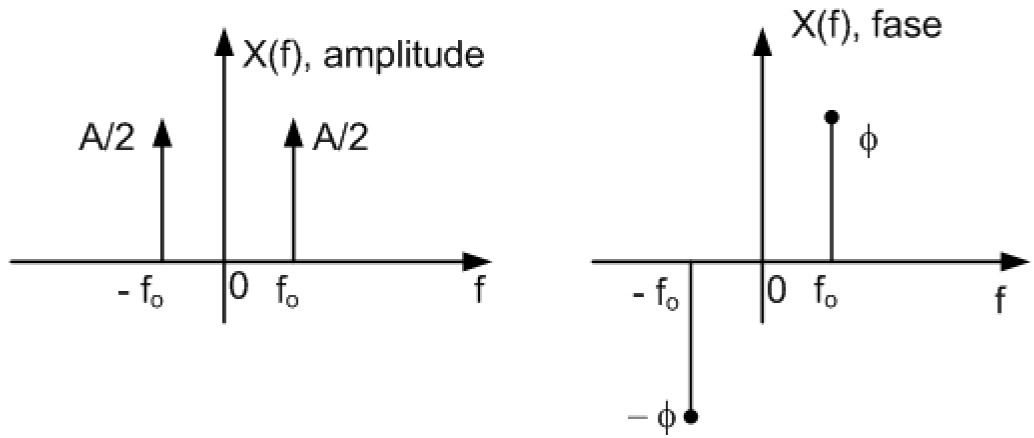
Domínio do Tempo

$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \phi)$$
$$= \frac{A}{2}\cos(2\pi f_o t + \phi) + \frac{A}{2}\cos(-(2\pi f_o t + \phi))$$
$$= \frac{A}{2}\cos(2\pi f_o t + \phi) + \frac{A}{2}\cos(2\pi(-f_o)t - \phi)$$

Espetro Unilateral



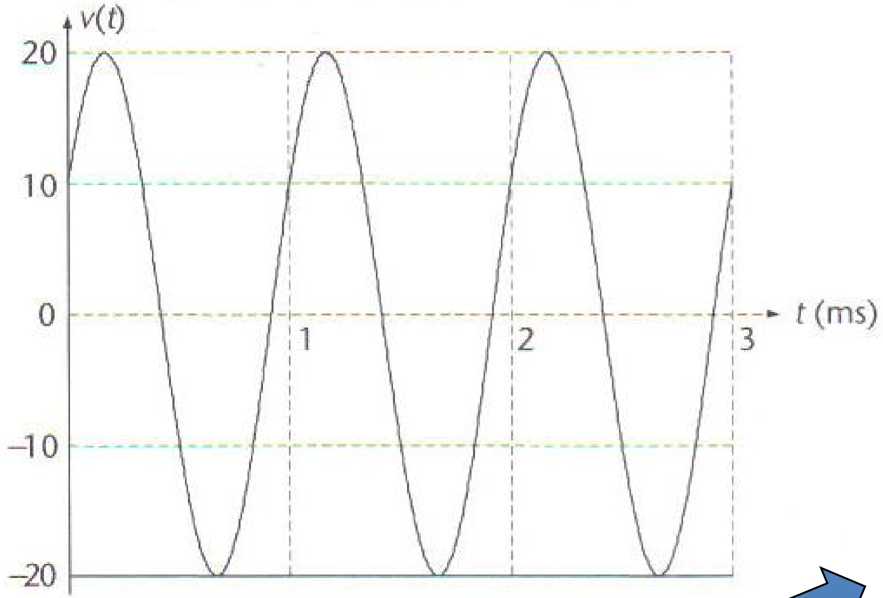
Espetro Bilateral



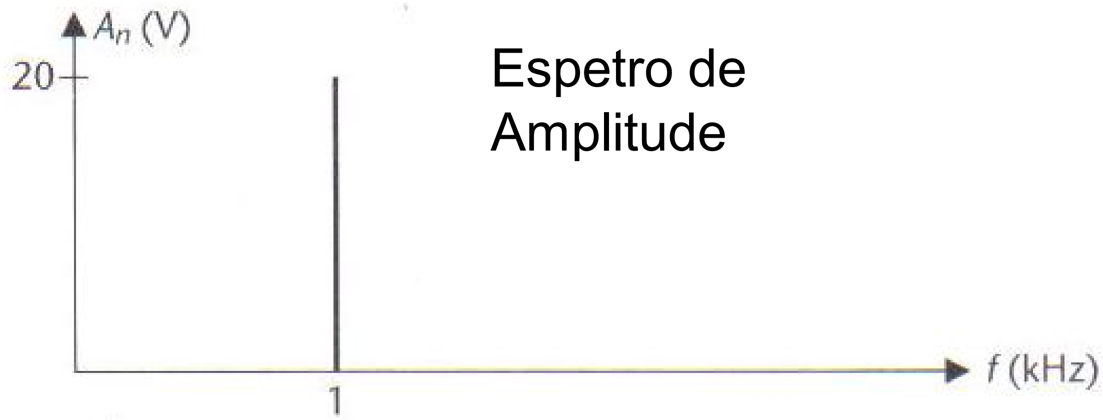
2. Espetro de amplitude e de fase

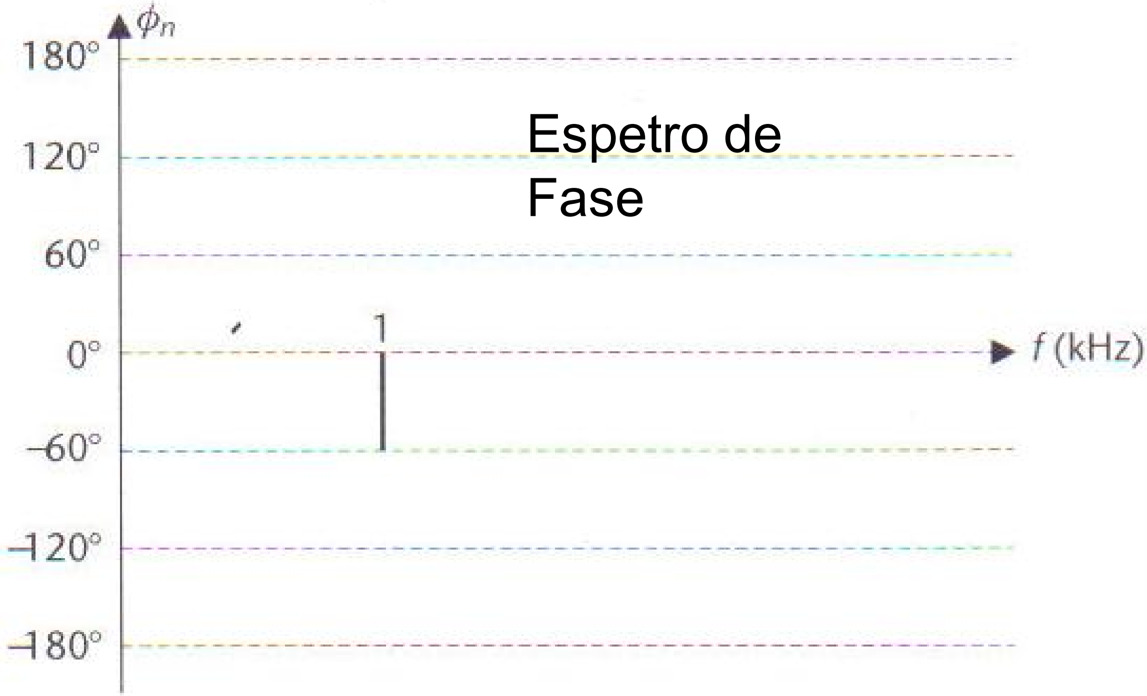
A sinusóide

$v(t) = 20\ cos\ (2\pi\ 1000\ t - \pi/3)$



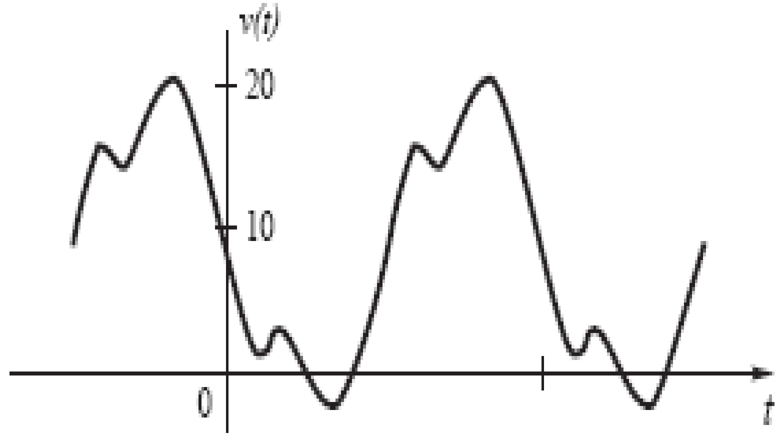
$\pi/3$ corresponde a 60º





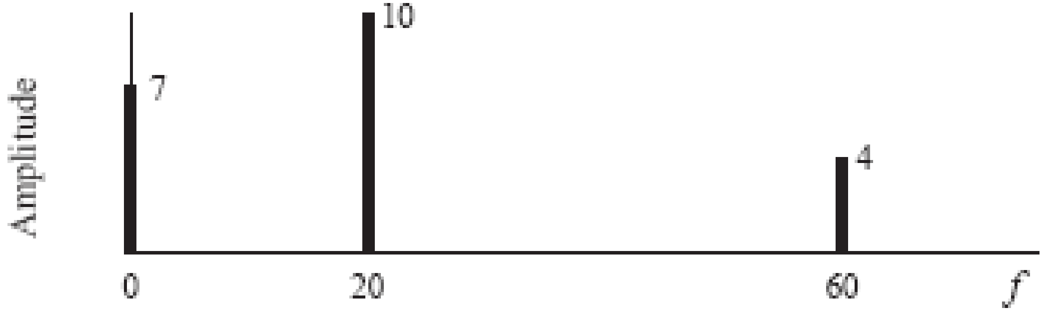
2. Espetro de amplitude e de fase

Soma de sinusóides com componente DC não nula

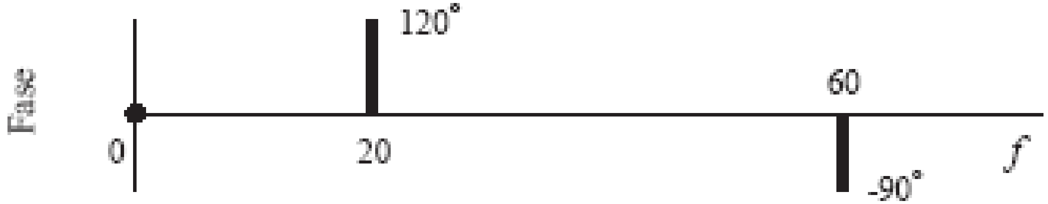


Domínio do tempo

Domínio da frequência:
- Amplitude



- Fase (em graus)



$$v(t) = 7 - 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3}\right) + 4\operatorname{sen}(2\pi 60t)$$

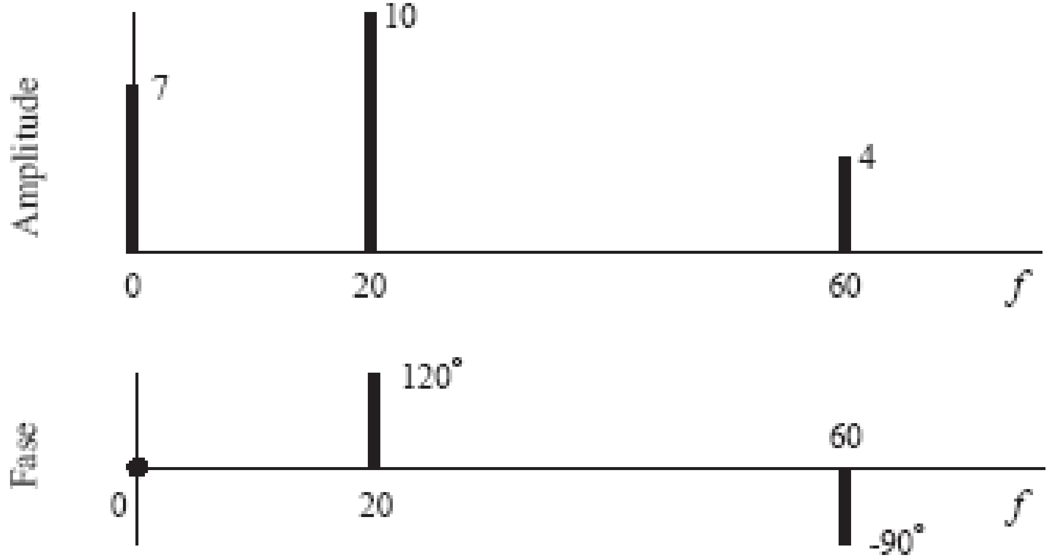
2. Espetro de amplitude e de fase

$$v(t) = 7 - 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3}\right) + 4\mathrm{sen}(2\pi 60t)$$

$$= 7 + 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3} + \pi\right) + 4\cos\left(2\pi 60t - \frac{\pi}{2}\right)$$

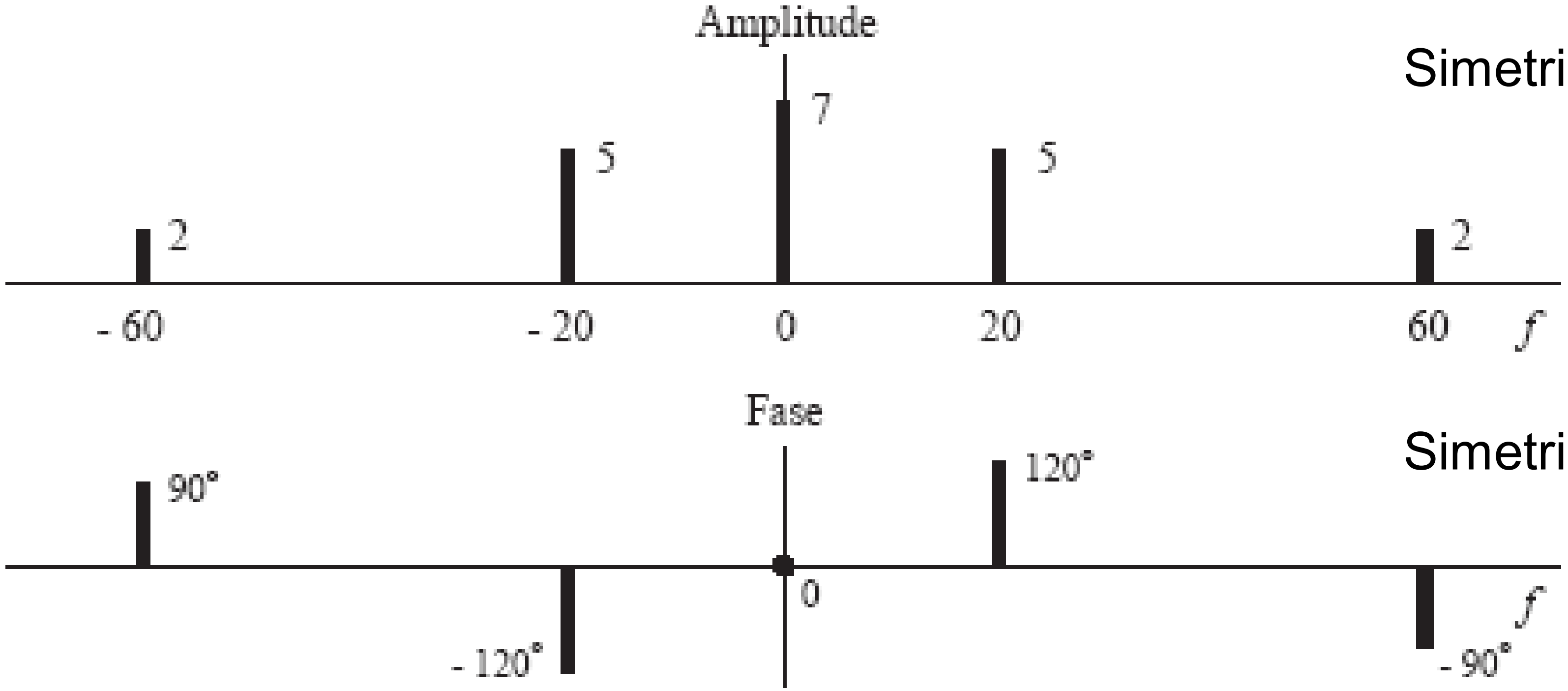
$$= 7 + 10\cos\left(2\pi 20t + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(2\pi 60t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Amplitude sempre positiva
- Cosseno indica a referência de fase



2. Espetro de amplitude e de fase

Versão bilateral do espetro



Simetria par

Simetria ímpar

$$v(t) = 7 - 10\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{3}\right) + 4\text{sen}(2\pi 60t)$$

$$= 7 + 10\cos\left(2\pi 20t + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(2\pi 60t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Espetro de amplitude e fase

- Constituem representações gráficas de sinusóides no domínio da frequência
- Uma linha no espetro unilateral representa uma sinusóide
- Essa mesma sinusóide é representada por duas linhas no espetro bilateral
- O **espetro de amplitude** fornece indica a distribuição de potência pelas frequências
- O **espetro de fase** indica o desfasamento de cada componente de frequência (desvio para t=0)

3. Cálculos de indicadores

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_o t + \phi_k) \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \cos(2\pi k f_o t + \Phi_k)$$

- A **potência** é calculada a partir do espetro de amplitude, recorrendo ao Teorema de Parseval https://en.wikipedia.org/wiki/Marc-Antoine_Parseval

$$P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k^2}{2}$$ Espetro Unilateral

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$ Espetro Bilateral

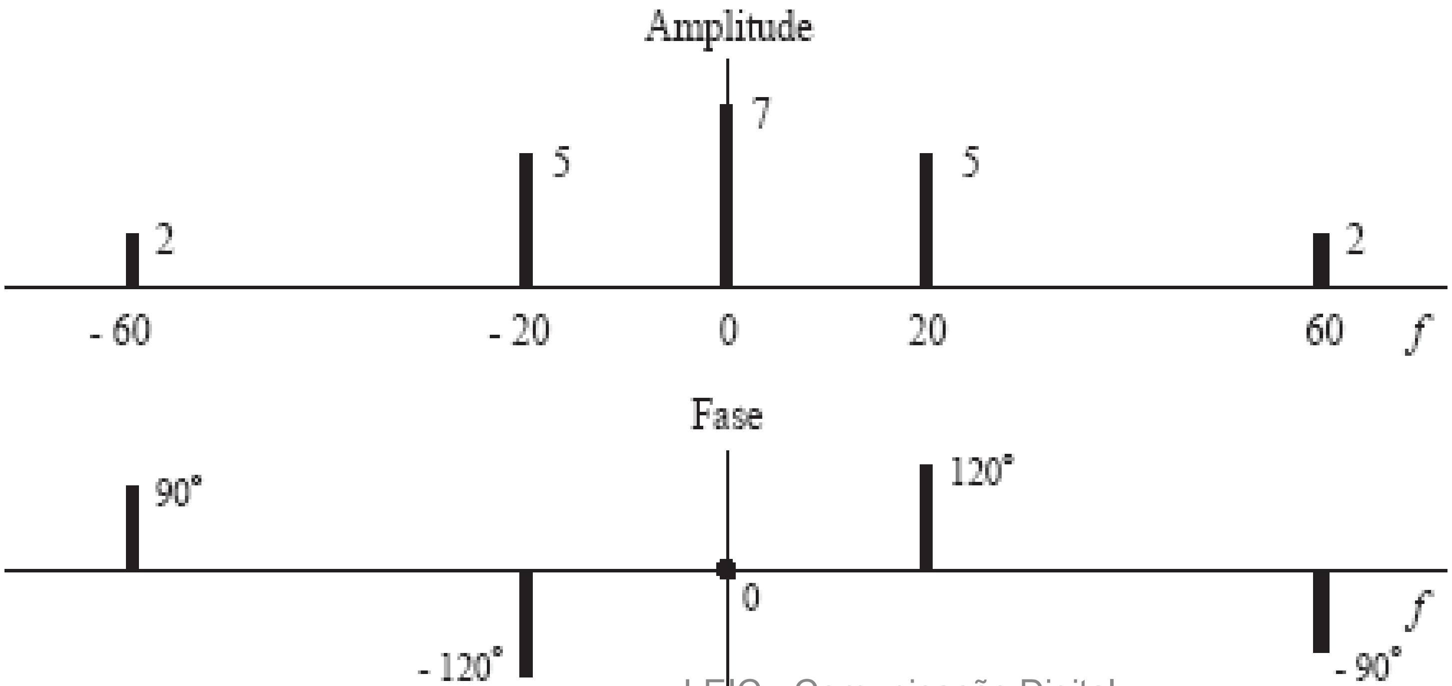
Marc-Antoine Parseval (1755 – 1836)

- O **valor médio** (ou componente DC) é dado pelo coeficiente $A_0 = c_0$ (contribuição da frequência 0)

3. Cálculos de indicadores

A <u>largura de banda</u> (LB) é definida como a largura da faixa de frequências ocupada pelo sinal

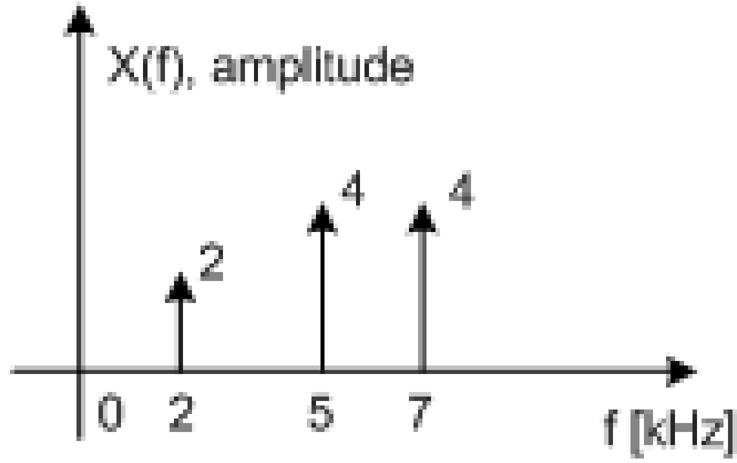
Frequências “negativas” não são consideradas



LB=60 Hz

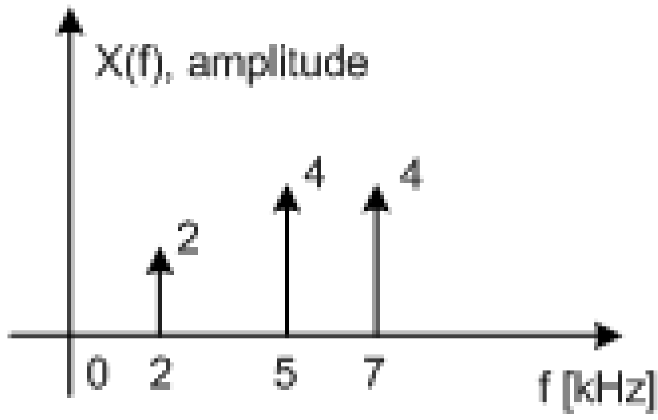
4. Exercícios

A figura apresenta o espetro unilateral de amplitude do sinal x(t).



a) Apresente o respetivo espetro bilateral de amplitude

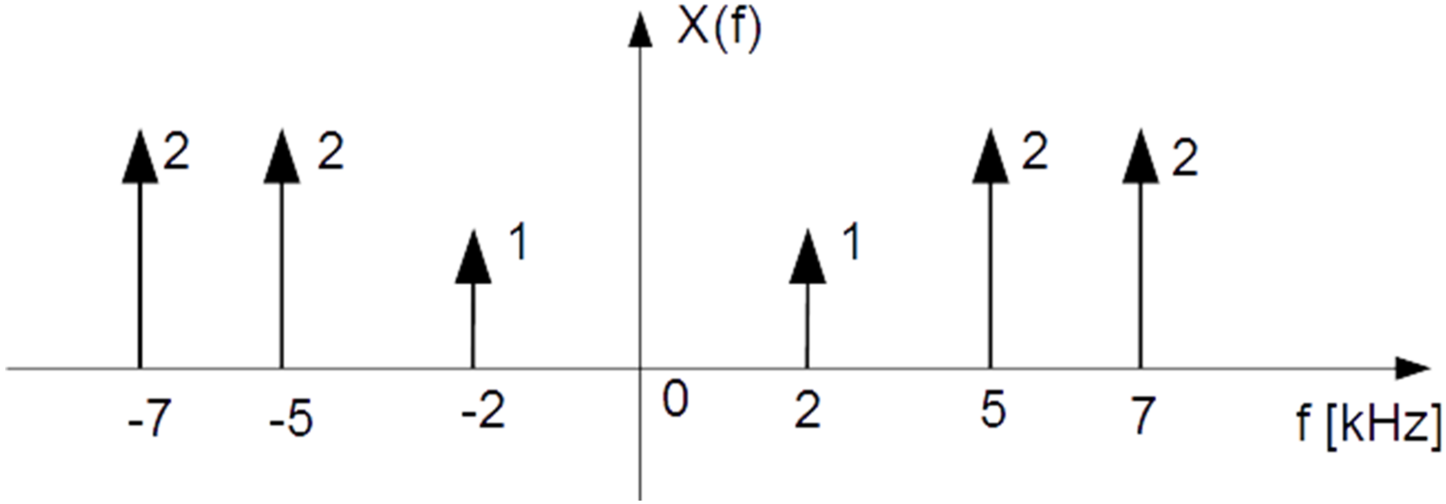
b) Indique a potência, a largura de banda, a frequência fundamental e o valor médio do sinal



4. Exercícios

Solução

a) Espetro bilateral



b) Potência = 18 W

Largura de banda = 5 kHz

Frequência fundamental = 1 kHz

Valor médio = 0

4. Exercícios

Considere o sinal periódico x(t), de frequência fundamental 10 kHz, definido por

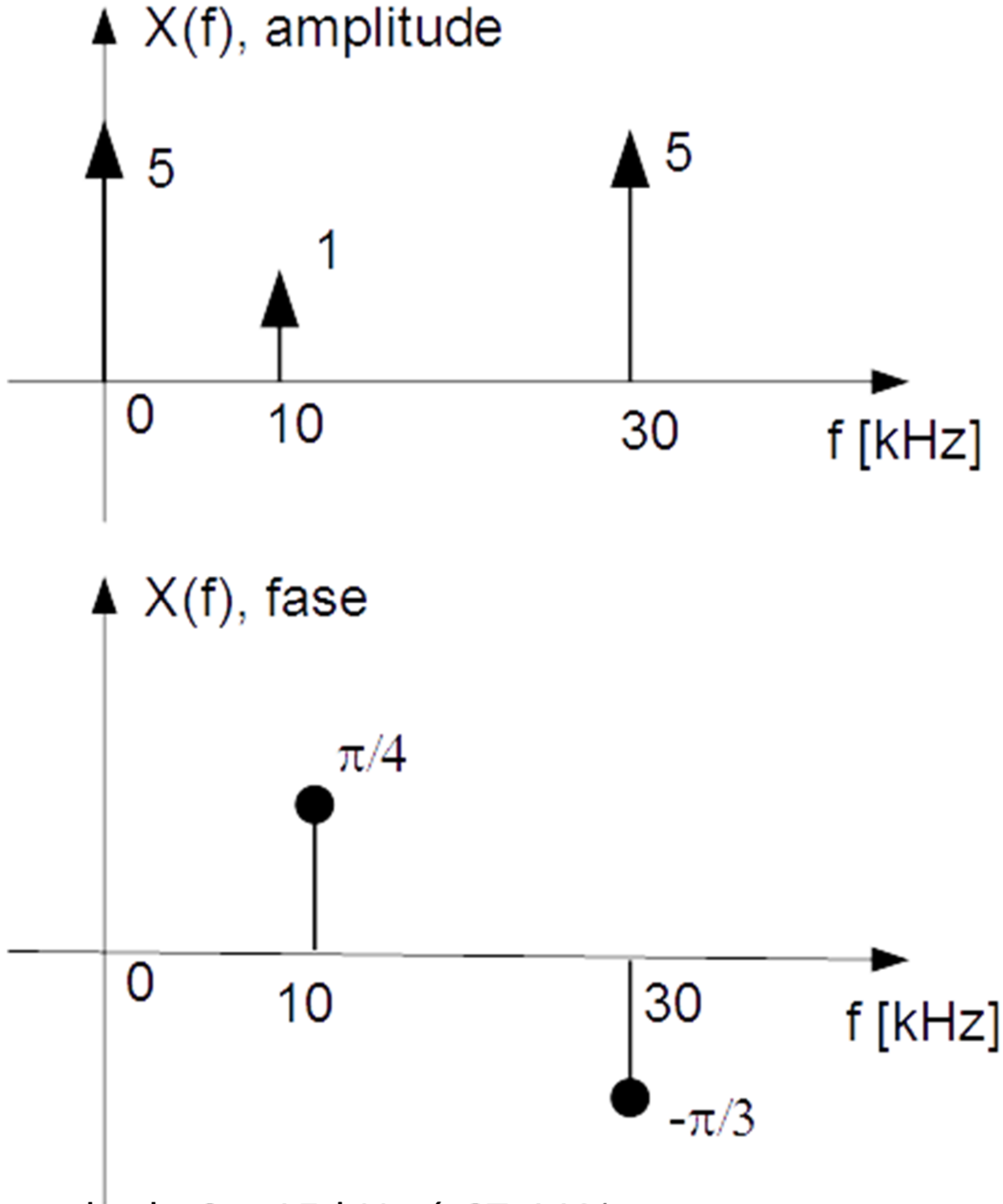
$$x(t) = 5 + \cos(2\pi\, f_o t + \pi/4) + 5\cos(2\pi\, 3 f_o t - \pi/3)$$

a) Esboce os espetros unilaterais de amplitude e de fase de x(t)
b) Indique a largura de banda do sinal
c) Indique a percentagem de potência contida na banda de 0 a 15 kHz

4. Exercícios

Solução

a) Espetros unilaterais de amplitude e de fase de x(t).



b) Largura de banda = 30 kHz

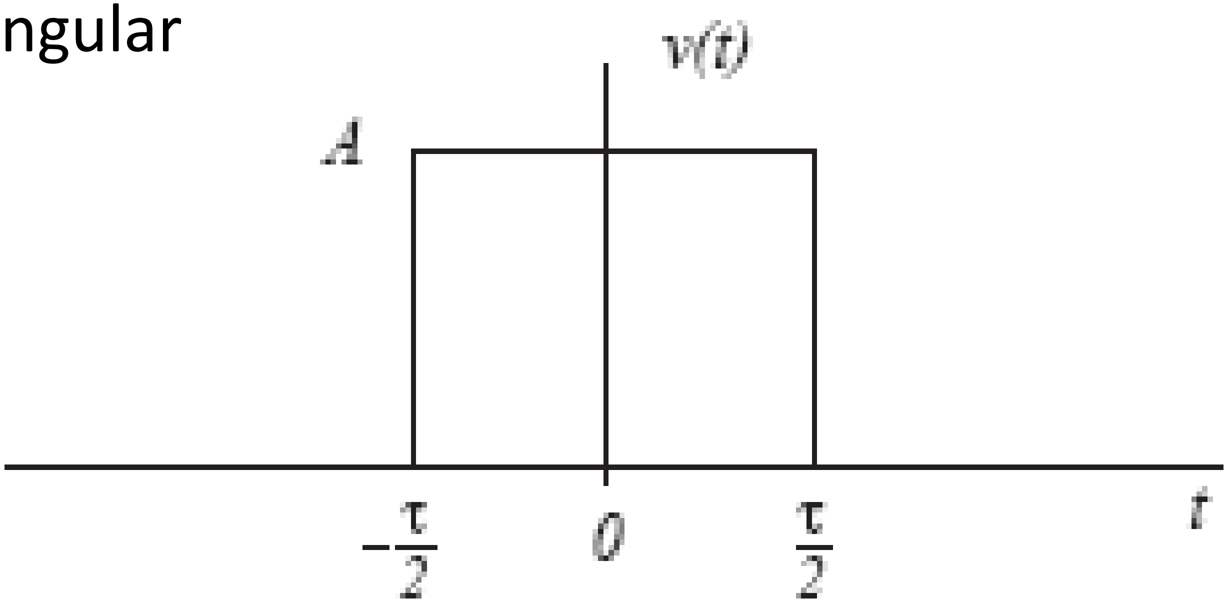
c) Percentagem de potência contida na banda de 0 a 15 kHz é 67,11%

5. Sinais não periódicos

- Não apresentam padrões de repetição
- Tipicamente caraterizados pela energia (finita)
- Não têm frequência fundamental, nem período fundamental
  - Não se aplica o conceito de harmónica
- São representados no domínio da frequência por um espetro contínuo
  - No limite, todas as frequências contribuem para a síntese do sinal

5. Sinais não periódicos

Pulso Retangular



Sinal estritamente limitado no tempo: $v(t)$ =0 fora do intervalo $\left[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right]$

A energia é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| v(t)^2 \right| dt$$

$$E = A^2 \tau$$

6. Transformada de Fourier

- Sinal não periódico corresponde a sinal periódico com período fundamental T_o a tender para infinito

- Assim, f_o, $2f_o$, $3f_o$, ... tendem para zero

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} | c_k | \exp(j2\pi k f_o t)$$

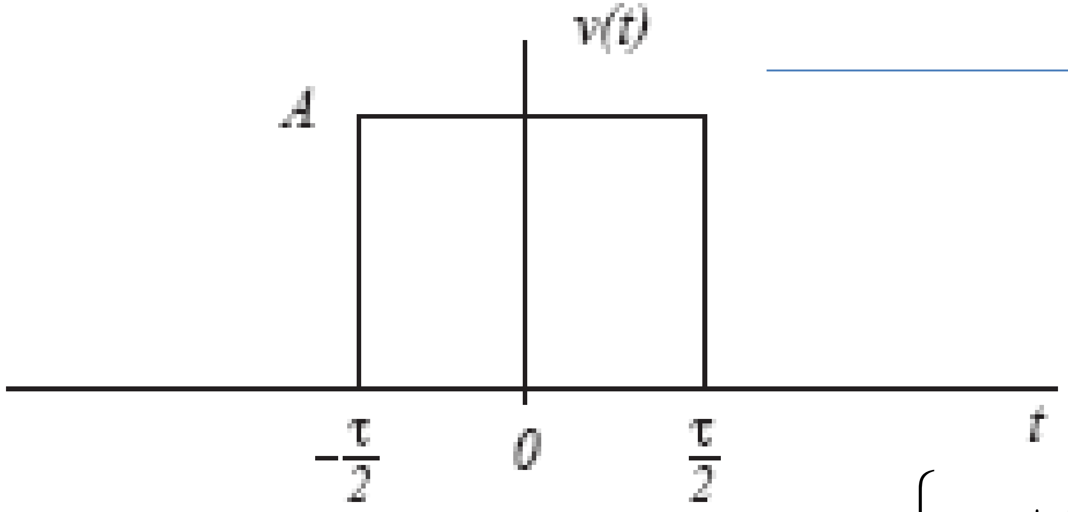
Joseph Fourier
(1768 – 1830)

Com f_o a tender para zero

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df$$

Equação de síntese
ou transformada inversa

6. Espetro de amplitude e de fase



Pulso retangular no domínio do tempo

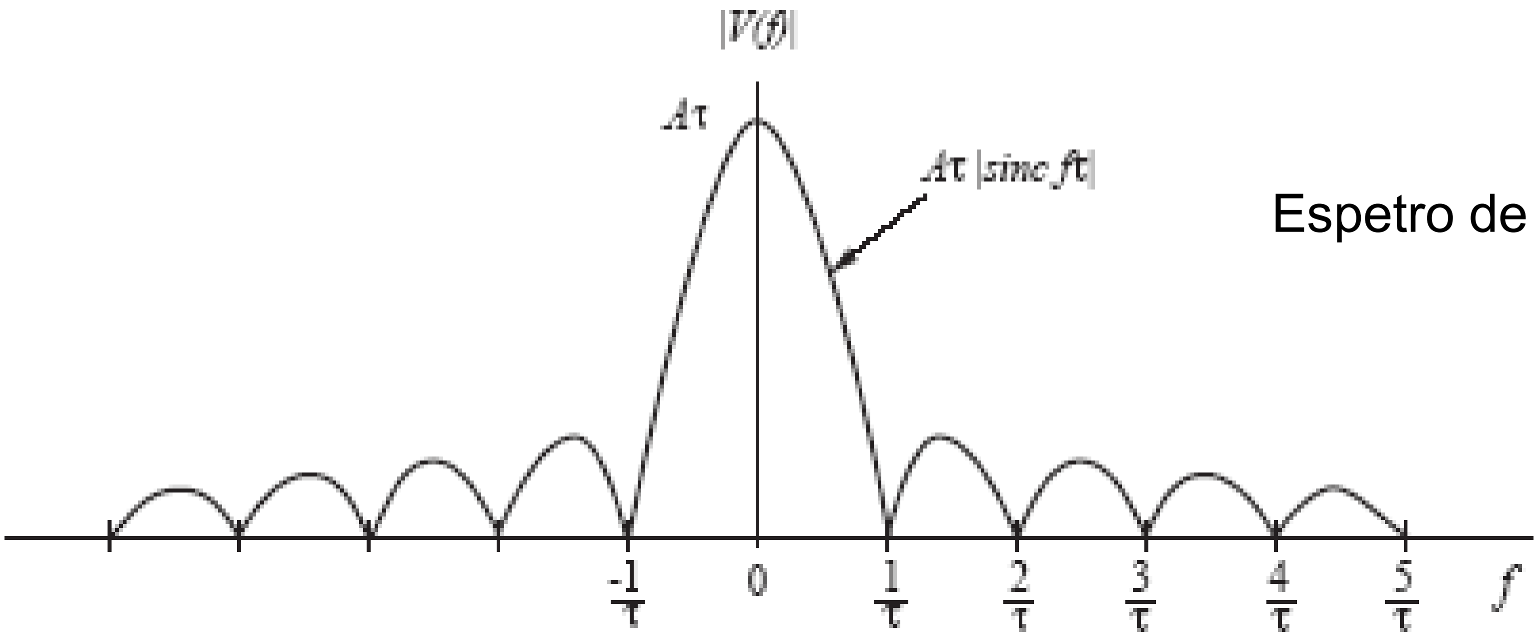
$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \qquad v(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Expressão do espetro

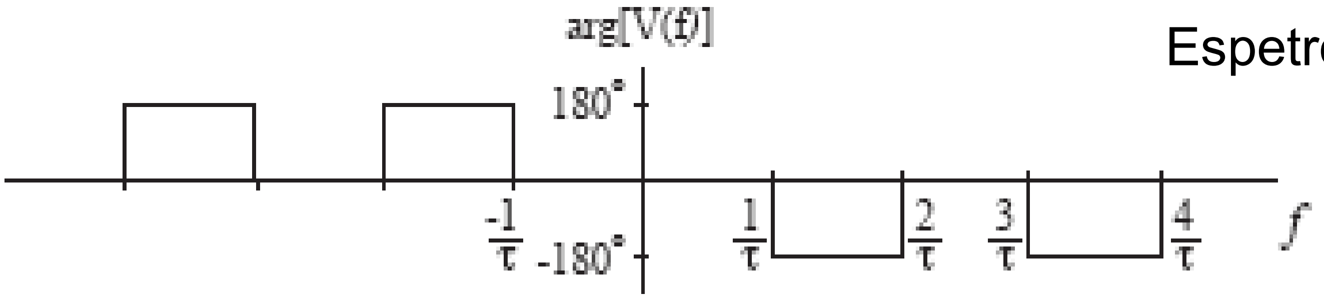
$$V(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi f t}\,dt = \frac{A}{\pi f}\sin(f\,\tau) = A\tau\,\mathrm{sinc}(f\,\tau)$$

$$V(0) = A\tau$$

6. Espetro de amplitude e de fase do pulso retangular



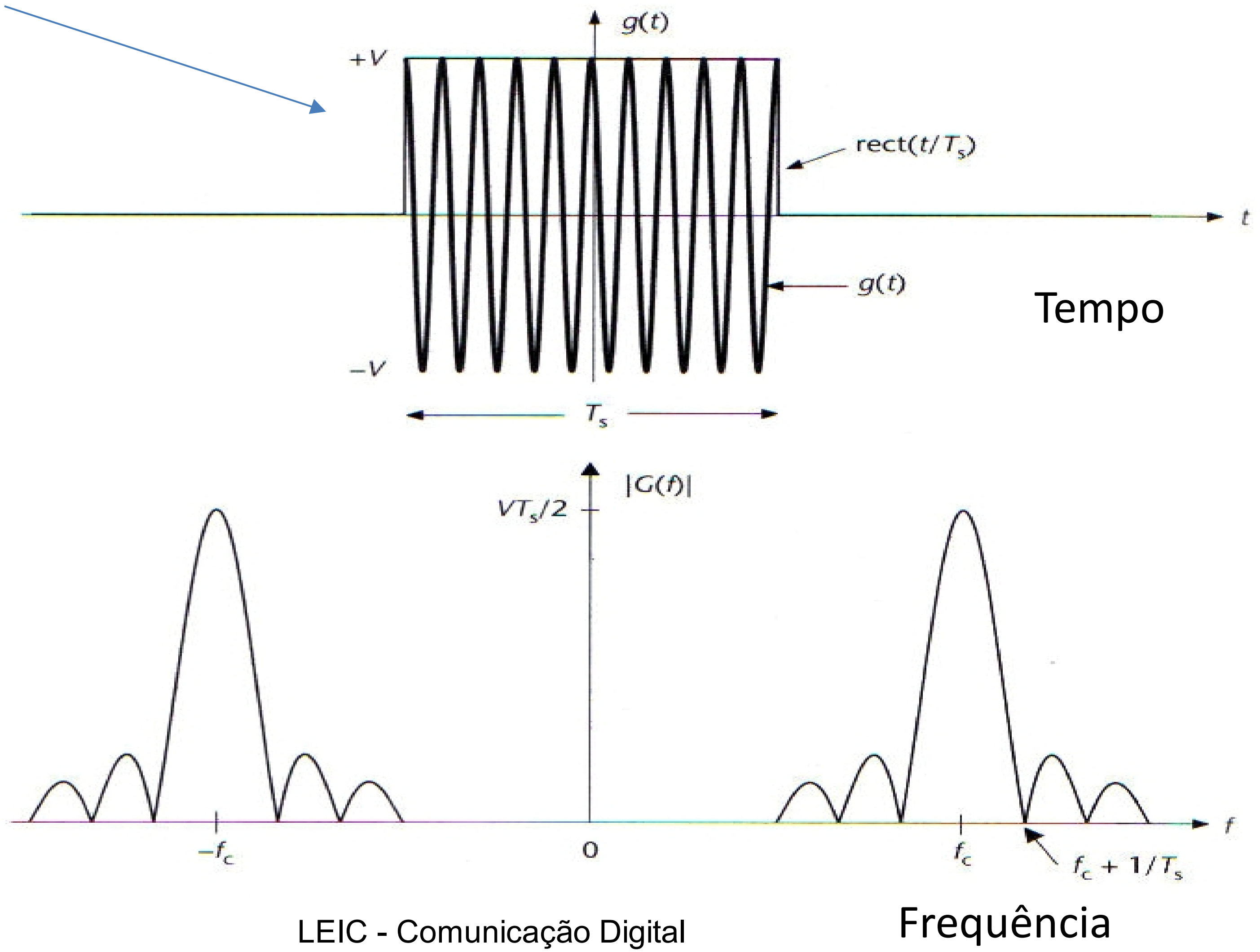
Espetro de Amplitude



Espetro de Fase

6. Espetro de amplitude – pulso sinusoidal

• O Pulso Sinusoidal no domínio do tempo - resulta do produto de uma sinusóide por um pulso retangular



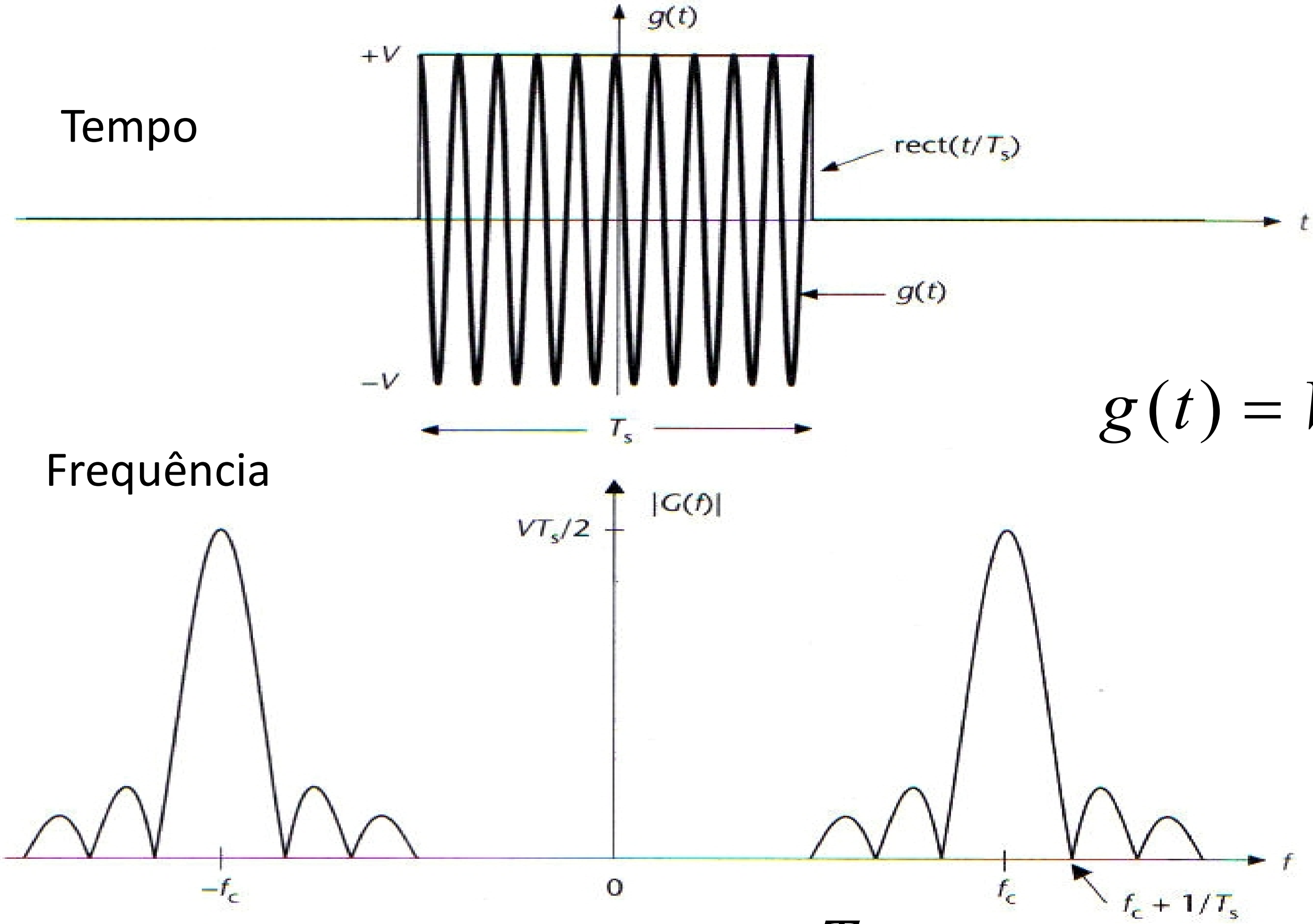
Energia de símbolo

$$E = \frac{V^2}{2} T_s$$

6. Espetro de amplitude – pulso sinusoidal

Tempo

Frequência



Expressão no domínio do tempo

$$g(t) = V\,\Pi\left(\frac{t}{Ts}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

Expressão do espetro

$$G(f) = V\frac{T_s}{2}\text{sinc}((f - f_c)T_s) + V\frac{T_s}{2}\text{sinc}((f + f_c)T_s)$$

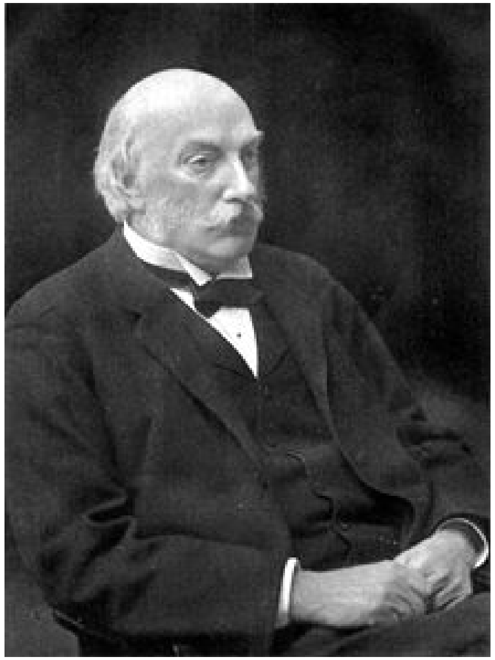
7. Cálculo de indicadores

- A energia pode ser calculada através do espetro
- Teorema de Rayleigh
- Relação idêntica ao teorema da potência de Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| V(f) \right|^2 df$$

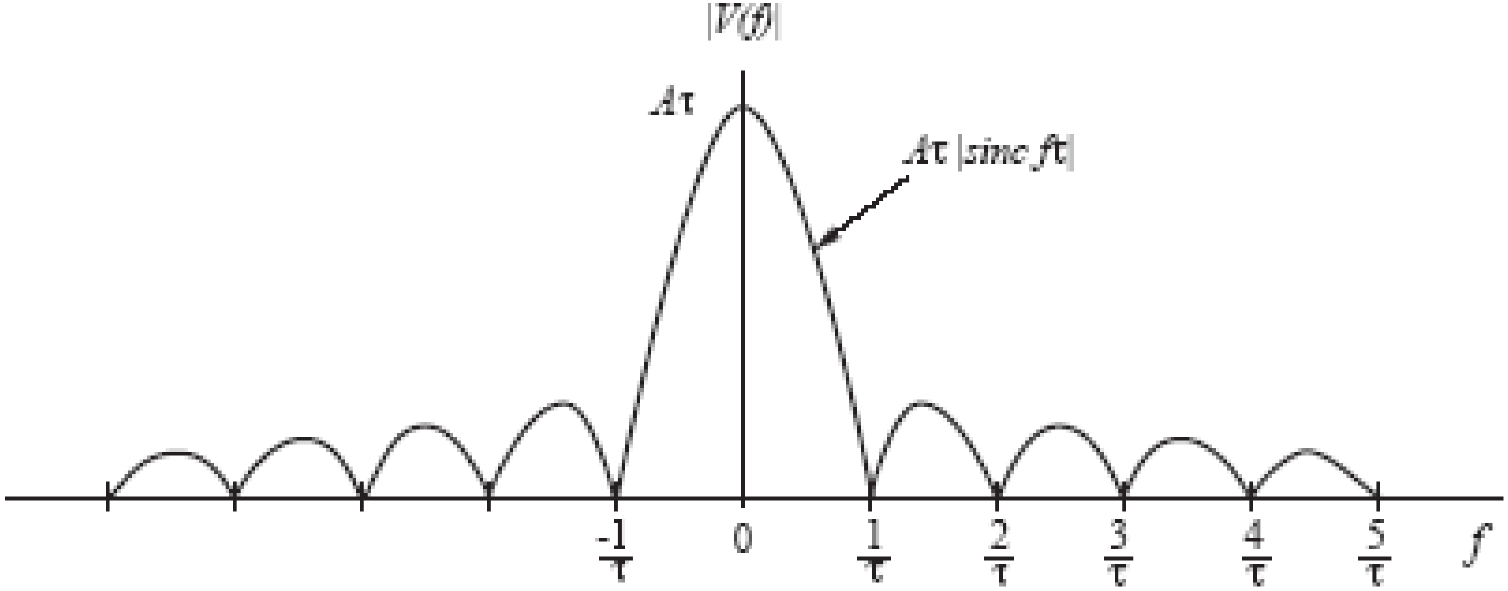
$$Gv(f) = \left| V(f) \right|^2$$

densidade espectral energia (Joules/Hz)



John W. Strutt
(3rd Baron Rayleigh)
(1842 – 1919)

7. Cálculo de indicadores



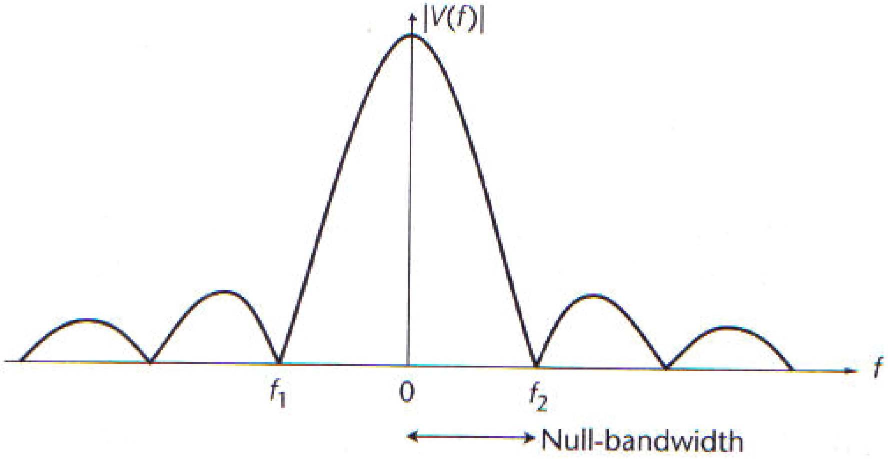
$$E_{\frac{1}{\tau}} = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left|V(f)\right|^2 df = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2(f\tau) df$$

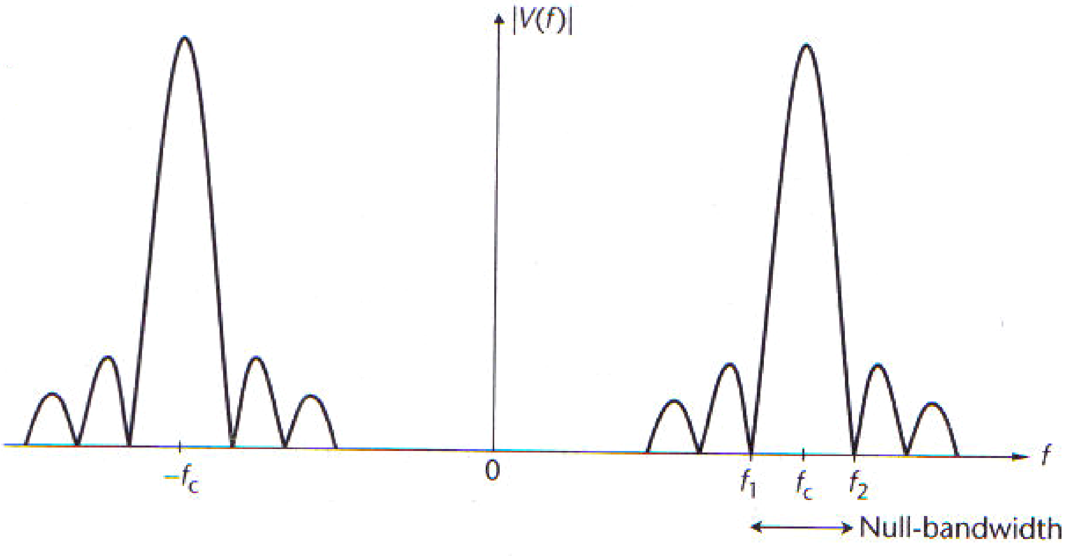
$$E_{\frac{1}{\tau}} = 0.92 A^2 \tau \longleftarrow$$

No lobo principal da sinc, temos 92 % da energia total

Concentração da energia nas baixas frequências

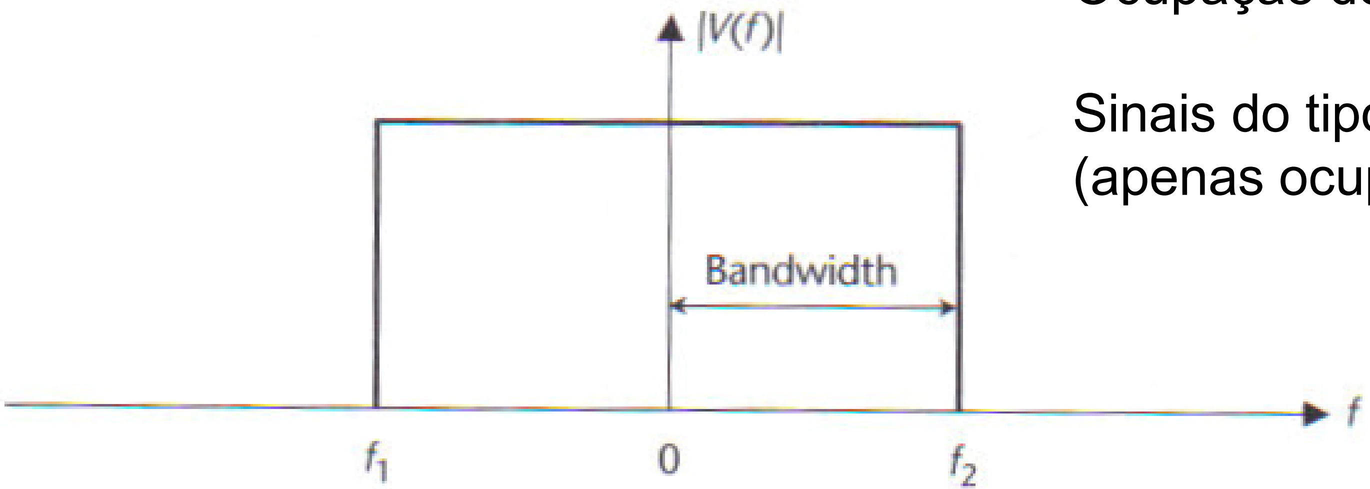
7. Cálculo de indicadores





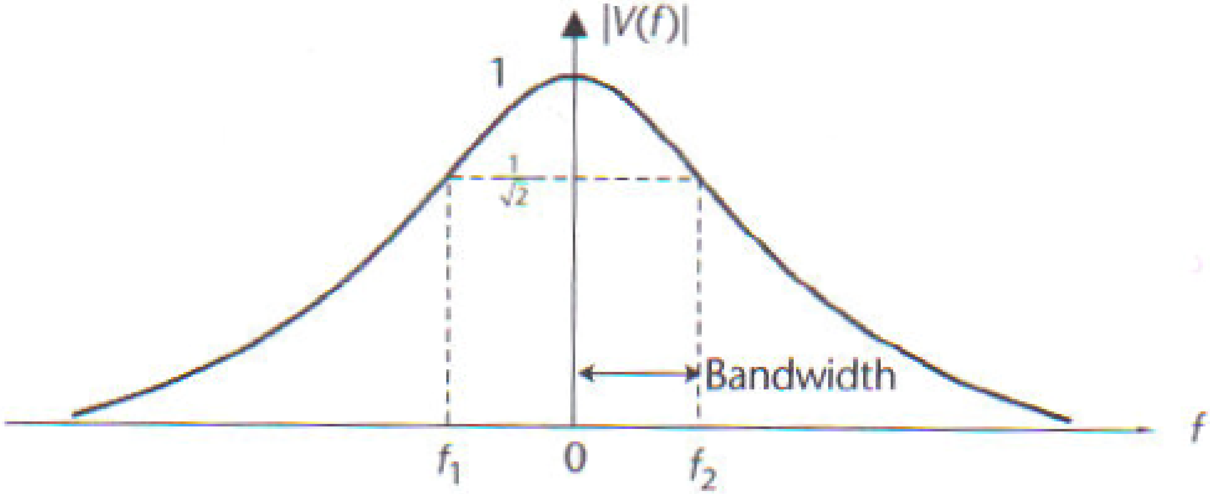
<u>Largura de banda</u>, definida a partir dos zeros espetrais

7. Cálculo de indicadores



Ocupação do espetro

Sinais do tipo passa-baixo
(apenas ocupam as baixas frequências)



8. Exercícios

Seja $x(t) = 3 \, \text{rect}(t / 10)$.

a) Apresente a expressão do espetro de $x(t)$.

b) Qual o valor da energia e largura de banda?

8. Exercícios

Solução

a) $X(f) = 30 \text{ sinc}(10 f)$

b) $E_x = 90$ J.

$LB_x = 0{,}1$ Hz, pelo critério do primeiro zero espetral

$LB_x = \infty$, assumindo que X(f) só toma o valor 0 de forma definitiva em $f = \infty$

Sinal Típico	**Tempo** $x(t)$	**Frequência** $X(f)$
Pulso retangular	$A \prod \left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}(fT)$
Pulso sinusoidal	$A \prod \left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t)$	$\frac{AT}{2}\text{sinc}((f-f_c)T) + \frac{AT}{2}\text{sinc}((f+f_c)T)$

8. Exercícios

Considere z(t) = 5 rect (t / 0,1) cos (2 pi 20 t).

a) Esboce z(t) e calcule a sua energia.

b) Determine a expressão de Z(f).

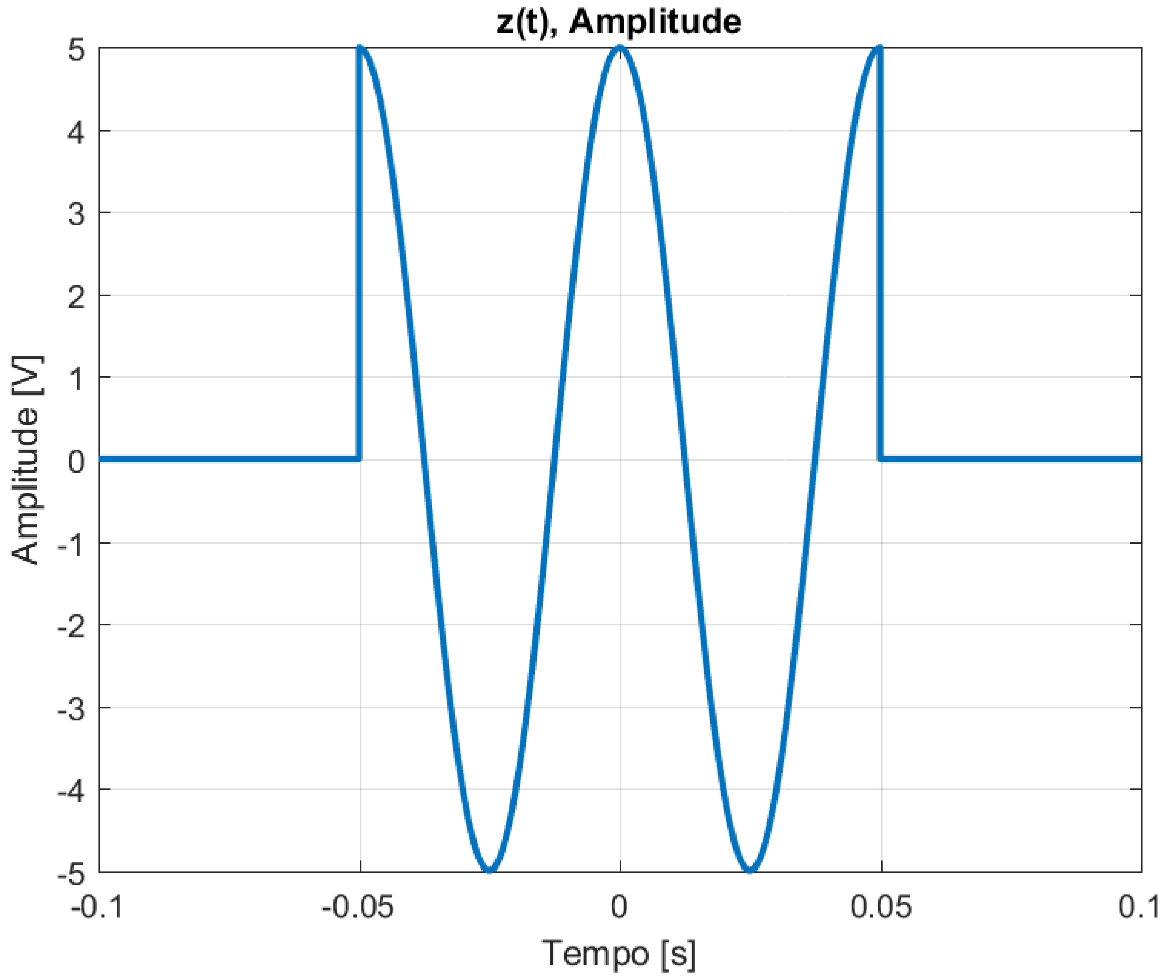
c) Esboce Z(f).

Sinal Típico	**Tempo** $x(t)$	**Frequência** $X(f)$
Pulso retangular	$A\prod\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}(fT)$
Pulso sinusoidal	$A\prod\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$	$\frac{AT}{2}\text{sinc}((f-f_c)T)+\frac{AT}{2}\text{sinc}((f+f_c)T)$

8. Exercícios

Solução

a) z(t) = 5 rect (t / 0,1) cos (2 pi 20 t).
Energia E_z = 1,25 J

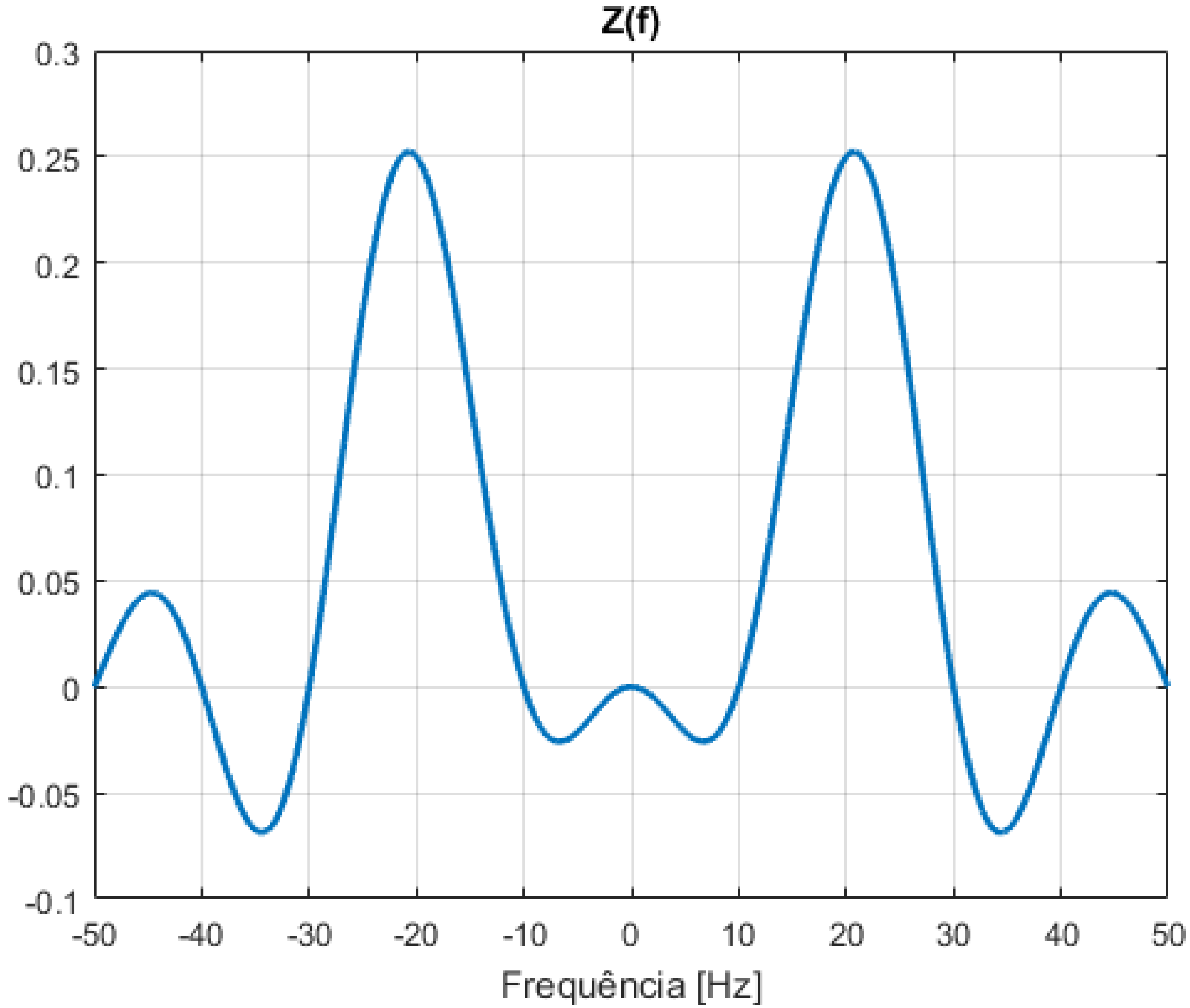


8. Exercícios

Solução

b) $Z(f) = 0{,}25 \operatorname{sinc}(0{,}1f - 2) + 0{,}25 \operatorname{sinc}(0{,}1f + 2)$

c)



8. Exercícios

Sejam w(t) = 5 rect (t / 0,1) cos (2 pi 80 t) e v(t) = 5 rect (t / 0,2) cos (2 pi 20 t).

a) Esboce W(f) e V(f).

b) Compare W(f) e V(f) com Z(f). Comente os resultados.

8. Exercícios

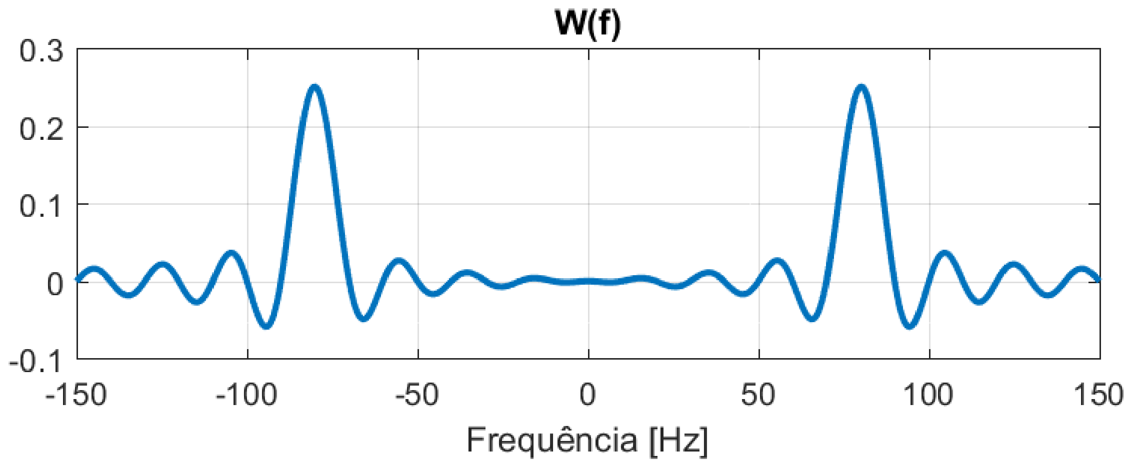
Solução

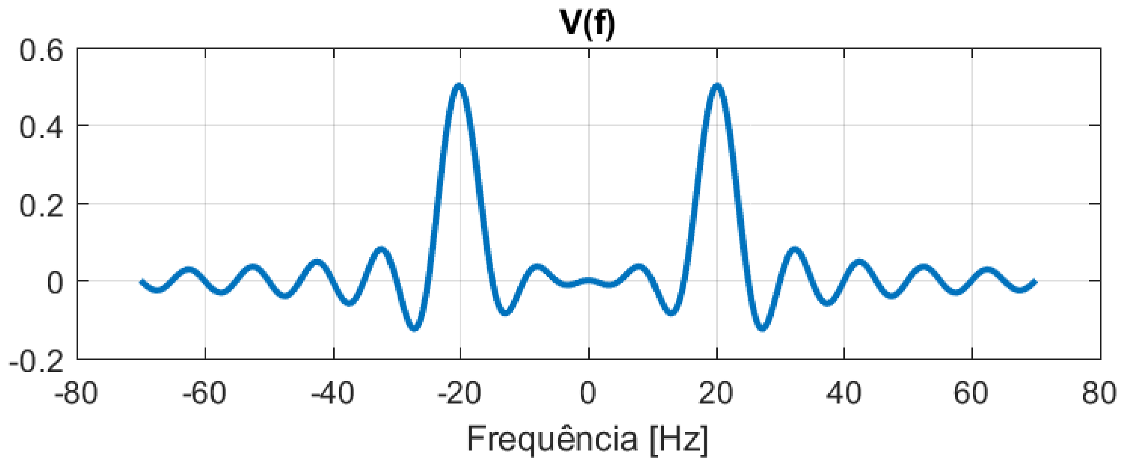
a) $W(f) = 0{,}25\ \mathrm{sinc}(0{,}1f - 8) + 0{,}25\ \mathrm{sinc}(0{,}1f + 8)$

$V(f) = 0{,}5\ \mathrm{sinc}(0{,}2f - 4) + 0{,}5\ \mathrm{sinc}(0{,}2f + 4)$

b) Espetro passa-banda centrado na frequência da portadora (em 20 Hz para Z(f) e W(f); em 80 Hz para W(f).

Os zeros espetrais são efinidos pela duração do pulso retangular (0,1 para z(t) e w(t); 0,2 para v(t))





8. Exercícios

Seja X(f) = 3 rect (f / 2000) + 4 rect (f / 10000).

a) Esboce *X*(*f*).

b) Calcule a sua largura de banda e energia.

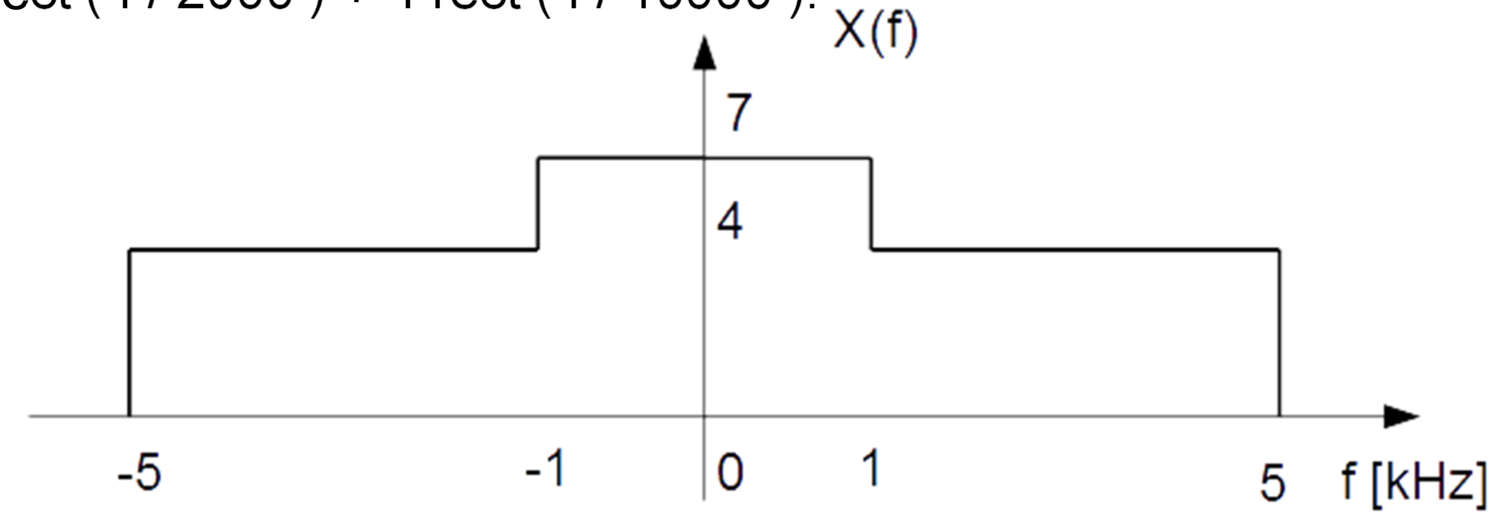
c) Qual a percentagem de energia contida na largura de banda 500 Hz a 1000 Hz?

8. Exercícios

Solução

$X(f) = 3 \text{ rect } (f / 2000) + 4 \text{ rect } (f / 10000)$.

a)



b) $LB_x = 5$ kHz $\quad E_x = 226$ kJ

c) Percentagem de energia na largura de banda 500 Hz a 1000 Hz = 21,68 %