Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

14. Produto Interno

Índice

Produto interno

Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, o **produto interno** (canónico) ou **produto escalar de u e v**, que se denota por $u \cdot v$, é o escalar:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

- $(1, 2) \cdot (3, 4) = 3 + 8 = 11$
- $(-1, 3, 7) \cdot (1, -2, 1) = -1 - 6 + 7 = 0$
- $(3, 2, -4, 0) \cdot (-2, 1, 3, 8) = -6 + 2 - 12 + 0 = -16$

Produto interno - propriedades

Dados u, v, e w vetores de $\mathbb{R}^n$ e um escalar k de $\mathbb{R}$ tem-se:

1. $u \cdot v = v \cdot u$;
2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
3. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$;
4. $u \cdot (kv) = k(u \cdot v) = (ku) \cdot v$;
5. $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0$ se e só se $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Norma ou comprimento

A **norma** ou **comprimento** de um vetor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}$, que se representa por $\|u\|$, é o escalar:

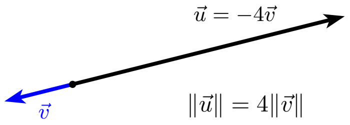
$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

- $\|(-1,5)\| = \sqrt{(-1,5) \cdot (-1.5)} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$;
- $\|(0,0,0)\| = \sqrt{(0,0,0) \cdot (0,0,0)} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$;
- $\|(-2,2,-5,4)\| = \sqrt{(-2,2,-5,4) \cdot (-2,2,-5,4)} =$
  $= \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-5)^2 + 4^2} = 7$

Norma - propriedades

Sejam $u \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$. Tem-se:

- Se $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ então $\|u\| > 0$;
- $\|ku\| = |k|\|u\|$;



Um vetor u de $\mathbb{R}^n$ diz-se **unitário** se $\|u\| = 1$.
Em particular, se u é não nulo então o **versor de** u, que se representa por $\text{vers}\, u$,

$$\text{vers}\, u = \frac{1}{\|u\|} u$$

é unitário.

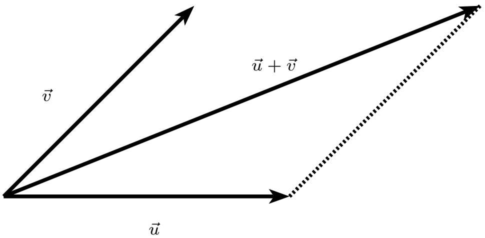
Norma - propriedades

Desigualdade Triangular

Para quaisquer vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

havendo igualdade sse $u = kv$ ou $v = ku$, com $k \geq 0$.



Norma - propriedades

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Dados vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

havendo igualdade sse u e v são linearmente dependentes.

Se u e v são não nulos então

$$\frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

ou, equivalentemente,

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

Ângulo

A **desigualdade de Cauchy-Schwarz** permite-nos definir **ângulo** entre dois vetores:

O **ângulo entre dois vetores não nulos**, u e v, que se denota por $\sphericalangle(u, v)$, é o número (entre 0 e π):

$$\sphericalangle(u, v) = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right)$$

O ângulo entre $u = (1, -1, 1, -1)$ e $v = (1, 0, 0, 0)$ é

$$\sphericalangle(u, v) = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\left(\sphericalangle(u, v)\right)$$

Ângulo

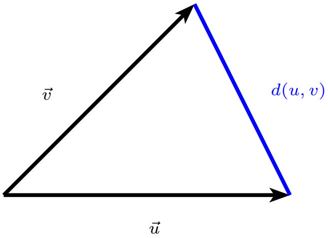
$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\left(\sphericalangle(u,v)\right)$$

- Se $u \cdot v > 0$ então $0 \leq \sphericalangle(u,v) < \dfrac{\pi}{2}$;
  Neste caso, diz-se que o ângulo entre u e v é **agudo**;
- Se $u \cdot v = 0$ então $\sphericalangle(u,v) = \dfrac{\pi}{2}$;
  Neste caso, diz-se que o ângulo entre u e v é **reto**;
- Se $u \cdot v < 0$ então $\dfrac{\pi}{2} < \sphericalangle(u,v) \leq \pi$;
  Neste caso, diz-se que o ângulo entre u e v é **obtuso**;

Distância

Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, a **distância entre u e v**, que se representa por $d(u, v)$, é o escalar:

$$d(u, v) = \|u - v\|$$



A distância entre $u = (1, -1, 1, -1)$ e $v = (1, 0, 0, 0)$ é

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(0, -1, 1, -1) \cdot (0, -1, 1, -1)} = \sqrt{3}$$

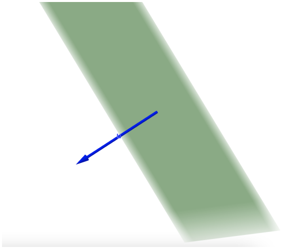
Vetores ortogonais

Dados dois vetores u, v de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que u e v são **ortogonais** ou **perpendiculares** se $u \cdot v = 0$. Representa-se por $u \perp v$.

Determine o conjunto dos vetores ortogonais a $u = (1, 2, -1)$

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = 0$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$$



Projeção ortogonal

Sejam u, v dois vetores de $\mathbb{R}^n$. Se $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, **a projeção ortogonal de v sobre u** , que se representa por $\mathrm{proj}_u\, v$, é o vetor:

$$\mathrm{proj}_u\, v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$$

$$u = (1, 0, 1) \quad v = (-1, 2, 5)$$

$$\mathrm{proj}_u\, v = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u = \frac{-1 + 0 + 5}{1 + 0 + 1} u = 2u = (2, 0, 2)$$

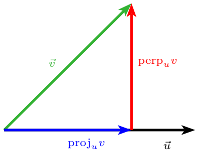
Projeção ortogonal

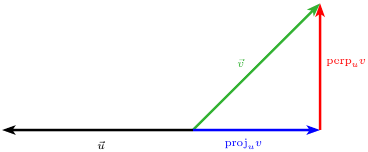
Seja u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, o vetor $v - \operatorname{proj}_u v$, que se representa por $\operatorname{perp}_u v$, é **ortogonal a u**.

$$
\begin{aligned}
(v - \operatorname{proj}_u v) \cdot u &= v \cdot u - \operatorname{proj}_u v \cdot u = \\
&= v \cdot u - \left(\frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u \right) \cdot u = \\
&= v \cdot u - \left(\frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \right) (u \cdot u) = \\
&= v \cdot u - \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \|u\|^2 = \\
&= v \cdot u - u \cdot v = 0
\end{aligned}
$$

Projeção ortogonal

- $\operatorname{proj}_u v = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|^2} u = \dfrac{u \cdot v}{u \cdot u} u$
- $v = \operatorname{proj}_u v + (v - \operatorname{proj}_u v)$
- $(v - \operatorname{proj}_u v) \perp u$





Qualquer vetor não nulo é soma de dois vetores ortogonais, um deles com direção fixa:

$$v = \operatorname{proj}_u v + (v - \operatorname{proj}_u v)$$

Bases ortogonais e bases ortonormadas

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Uma base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ de S diz-se:

- **uma base ortogonal** se os vetores da base são ortogonais dois a dois:

$$u_i \cdot u_j = 0 \quad se \quad i \neq j$$

- **uma base ortonormada** se é uma base ortogonal e os vetores da base são unitários:

$$u_i \cdot u_j = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \|u_i\| = 1.$$

A base canónica de $\mathbb{R}^n$ é uma base ortonormada.

Bases ortogonais e bases ortonormadas

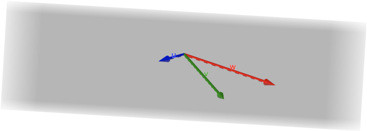
A base de $\mathbb{R}^2$:

- $\{(3,4),(-4,3)\}$ é uma **base ortogonal**;
- $\{(3/5,4/5),(-4/5,3/5)\}$ é uma **base ortonormada**;
- $\{(1,1),(0,1)\}$ **não é ortonormada nem ortogonal**.

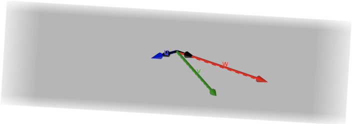
Bases ortogonais e bases ortonormadas

Seja $S = \langle u = (1, 0, 1), v = (-1, 2, 5)\rangle$. A base de S:

- $\{u, v\} = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 5)\}$ **não é ortogonal**;
- $\{u, v - \operatorname{proj}_u v\} = \{(1, 0, 1), (-3, 2, 3)\}$ **é ortogonal**;



- $\left\{ \frac{u}{\|u\|}, \frac{v - \operatorname{proj}_u v}{\|v - \operatorname{proj}_u v\|} \right\} =$
$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}} \right) \right\}$ **é ortonormada**.



Método de ortogonalização Gram-Schmidt

Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ uma base de um subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^n$.

A base $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ definida por:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2 \\ u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1} v_3 - \operatorname{proj}_{u_2} v_3 \\ \vdots \\ u_k = v_k - \operatorname{proj}_{u_1} v_k - \operatorname{proj}_{u_2} v_k - \cdots - \operatorname{proj}_{u_{k-1}} v_k \end{cases}$$

é uma **base ortogonal de S**.

Método de ortogonalização Gram-Schmidt

A base $\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (-1,2,5), v_3 = (2,1,4)\}$ de $\mathbb{R}^3$ **não é ortogonal**.

$$u_1 = v_1 = (1,0,1)$$

$$u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (-3,2,3)$$

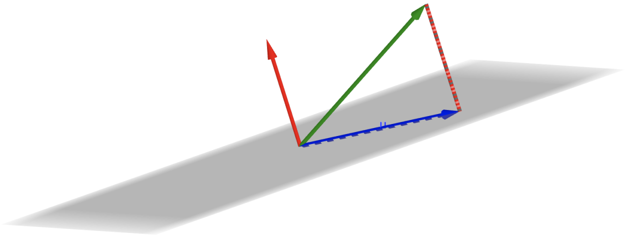
$$u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1} v_3 - \operatorname{proj}_{u_2} v_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \left(\frac{1}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{1}{11}\right)$$

$\{(1,0,1), (-3,2,3), (1,3,-1)\}$ é uma **base ortogonal de** $\mathbb{R}^3$

Projeção ortogonal sobre um subespaço

Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, a **projeção ortogonal de v sobre S**, que se representa por $\operatorname{proj}_S v$, é o vetor tal que $v - \operatorname{proj}_S v$ é ortogonal a todos os vetores de S. Escreve-se:

$$(v - \operatorname{proj}_S v) \perp S$$



Projeção ortogonal sobre um subespaço

Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e v um vetor de $\mathbb{R}^n$. Se $\{u_1, \ldots u_k\}$ é uma **base ortogonal de** S então:

$$\operatorname{proj}_S v = \operatorname{proj}_{u_1} v + \cdots + \operatorname{proj}_{u_k} v$$

Calcule a projeção do vetor $v = (1, 3, -2)$ sobre o subespaço

$$S = \langle (1, 0, 1), (-1, 2, 5) \rangle$$

$\{\underbrace{(1, 0, 1)}_{u_1}, \underbrace{(-3, 2, 3)}_{u_2}\}$ é uma base ortogonal de S

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_S v &= \operatorname{proj}_{u_1} v + \operatorname{proj}_{u_2} v = \frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 \\ &= -\frac{1}{2} u_1 - \frac{3}{22} u_2 = -\frac{1}{11}(1, 3, 10) \end{aligned}$$

Complemento ortogonal de um subespaço

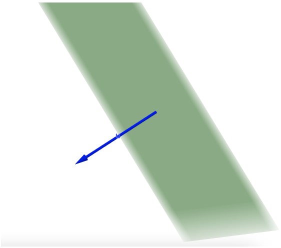
Dado S subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, o **complemento ortogonal de S**, que se denota por $S^\perp$, é o conjunto formado pelos vetores que são ortogonais a todos os vetores de S:

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \colon v \cdot u = 0 \text{ para todo } u \in S\}.$$

$$S = \langle (1,2,-1) \rangle$$

$$S^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \cdot (1,2,-1) = 0\}$$

$$S^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2y - z = 0\}$$



Complemento ortogonal de um subespaço

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Tem-se:

- $S^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$;
- $\left(S^\perp\right)^\perp = S$;
- $S \cap S^\perp = 0_{\mathbb{R}^n}$;
- $\mathbb{R}^n = S + S^\perp$
- Se $\dim(S) = k$ então $\dim(S^\perp) = n - k$.

Qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é soma de um vetor de S com um vetor de $S^\perp$:

$$v = \operatorname{proj}_S v + \left(v - \operatorname{proj}_S v\right)$$

Complemento ortogonal de um subespaço

Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de

$$S = \langle \underbrace{(1,1,-1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1,1)}_{v_2} \rangle$$

$$S^\perp = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon (x,y,z,w)\cdot(1,1,-1,1) = 0 \wedge (x,y,z,w)\cdot(-1,0,1,1) = 0\}$$

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ -x + z + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2w \\ x = z + w \end{cases}$$

Soluções: $(z+w, -2w, z, w) = z(1,0,1,0) + w(1,-2,0,1), w, z \in \mathbb{R}$

$$S^\perp = \langle \underbrace{(1,0,1,0)}_{v_3}, \underbrace{(1,-2,0,1)}_{v_4} \rangle$$

$$v_2 - \operatorname{proj}_{v_1} v_2 = \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \frac{1}{4}(-3,1,3,5) \quad v_4 - \operatorname{proj}_{v_3} v_4 = \frac{v_4 \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} v_3 = \frac{1}{2}(1,-4,-1,2)$$

$$\{(1,1,-1,1), (-3,1,3,5), (1,0,1,0), (1,-4,-1,2)\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contém uma base de S.

Produto externo

Em $\mathbb{R}^3$, dados 2 vetores linearmente independentes existe **uma única direção simultaneamente perpendicular a u e a v**:

$$\dim\left(\langle u, v\rangle\right) = 2 \Rightarrow \dim\left(\langle u, v\rangle^{\perp}\right) = 3 - 2 = 1$$

Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, o **produto externo** ou **produto vetorial** de u por v, que se denota por $u \times v$, é o vetor:

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Sendo $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, então $u \times v$ pode ser calculado usando o **determinante "simbólico"**:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Produto externo

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

1. $u = (1, 0, -3),\ v = (2, 2, 0).$

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 6e_1 - 6e_2 + 2e_3 = (6, -6, 2).$$

2. $u = (0, 0, 0),\ v = (1, 2, 3).$

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0e_1 - 0e_2 + 0e_3 = (0, 0, 0).$$

3. $u = (1, -1, 2),\ v = (-2, 2, -4).$

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 0e_1 - 0e_2 + 0e_3 = (0, 0, 0).$$

Produto externo

Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$

- Se u e v são **lineamente dependentes** então $u \times v$ é o **vetor nulo.**

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ ku_1 & ku_2 & ku_3 \end{bmatrix} = 0e_1 - 0e_2 + 0e_3 = (0, 0, 0)$$

- Se u e v são **linearmente independentes** então

$$(u \times v) \perp u \qquad \text{e} \qquad (u \times v) \perp v$$

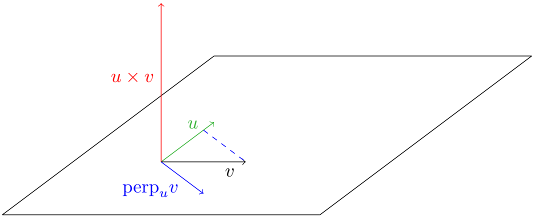
$$\begin{aligned}
(u \times v) \cdot u &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) u_1 + (-u_1 v_3 + u_3 v_1) u_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) u_3 \\
&= 0 \left(= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Produto externo

Se u e v são vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes então

$$\{u, \operatorname{perp}_u v, u \times v\}$$

é uma **base ortogonal** de $\mathbb{R}^3$.



Produto externo

Calcule uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base do subespaço

$$S = \langle \underbrace{(1,2,3)}_{u}, \underbrace{(2,3,4)}_{v} \rangle.$$

$$\operatorname{perp}_u v = v - \operatorname{proj}_u v = v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{1}{7}(4,1,-2)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1e_1 + 2e_2 - 1e_3 = (-1,2,-1)$$

$$\{(1,2,3),(4,1,-2),(-1,2,-1)\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contém uma base de S.