LEIC

# Álgebra Linear e Geometria Analítica - 2020/21 - SV

---

## Soluções - 6 - Valores e vectores próprios. Diagonalização.

6.1 (a) $a = -5/7$;

(b) $f(-3,-3,-3) = (-6,-6,-6) = 2(-3,-3,-3)$, logo o vector $(-3,-3,-3)$ é vector próprio de $f$ associado ao valor próprio 2.

6.2 (a) Vectores próprios de $g$ associados ao valor próprio $0$ : $\overrightarrow{v} = (-z,-z,z),\ z \neq 0$;

(b) $E_0 = \langle(-1,-1,1)\rangle (= \text{Nuc}(g))$.

6.3 (a) Existem 3 valores próprios distintos, $-1$, $1$ e $3$ logo existem 3 vectores próprios linearmente independentes e assim existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de $T$.

(b) Seja $\mathcal{B}_{vp}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de $T$;

$$M(T;\mathcal{B}_{vp},\mathcal{B}_{vp}) = \left[B\right]^{-1} M_T \left[B\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Tendo em conta que $T$ tem 3 valores próprios distintos, existem $3! = 6$ matrizes diagonais diferentes semelhantes a $M_T$.

6.4 (a) $\mathcal{B}_{vp} = ((2,0,1),(0,1,0),(1,0,-2))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de $h$.

(b) $M(h;\mathcal{B}_{vp},\mathcal{B}_{vp}) = \left[B\right]^{-1} M_h \left[B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

6.5 (a) $\dim(E_2) = 1$; $\{(1,0,0)\}$ é uma base de $E_2$.

(b) 2 e $-3$ são os valores próprios de $T$; $m.g.(2) + m.g.(-3) = \dim(E_2) + \dim(E_{-3}) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, logo, não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de $T$ e assim $T$ não é diagonalizável.

6.6 (a) $-3$ é um valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ d & 1 \end{bmatrix}$ sse $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ d & 4 \end{vmatrix} = 0$ sse $d = 5$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 2d+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 4 \wedge d = 3/2$ .

6.7 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \wedge a + b = 3$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 \\ -2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_2 = 3 \wedge -2a + b = 3$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$$

6.8 $g(1,3)=(2,6)\Rightarrow g(1,3)=2(1,3)\Rightarrow g^{-1}(g(1,3))=g^{-1}(2(1,3))\Rightarrow(1,3)=2g^{-1}(1,3)$
$\Rightarrow g^{-1}(1,3)=\dfrac{1}{2}(1,3)$.

6.9 $h(\overrightarrow{v})=\lambda\overrightarrow{v}\Rightarrow h^{-1}(h(\overrightarrow{v}))=h^{-1}(\lambda\overrightarrow{v})\Rightarrow\overrightarrow{v}=\lambda h^{-1}(\overrightarrow{v})\Rightarrow h^{-1}(\overrightarrow{v})=\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.

6.10 (a) $T(0,1,0)=(0,-3,0)\Rightarrow T(0,1,0)=(-3)(0,1,0)$. Donde, $-3$ é um valor próprio de $T$ e $(0,1,0)$ um vector próprio associado ao mesmo.

(b) $|M_T-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & -3-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(-3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(-3-\lambda)((1-\lambda)^2-4)$

$|M_T-\lambda I_3|=0\Leftrightarrow(-3-\lambda)((1-\lambda)^2-4)=0\Leftrightarrow\lambda=-3\vee\lambda=3\vee\lambda=-1$
m.a.$(-3)=$ m.a.$(-1)=$ m.a.$(3)=1\Rightarrow$ m.g.$(-3)=$ m.g.$(-1)=$ m.g.$(3)=1$

Como m.g.$(-3)=1$ e $(0,1,0)\in E_{-3}$, $E_{-3}=\langle(0,1,0)\rangle$.

$(M_T-(-1)I_3)X=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&0&2\\0&-2&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow z=-x\wedge y=0$. Donde, $E_{-1}=\langle(1,0,-1)\rangle$

$(M_T-3I_3)X=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-6&0\\2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow z=x\wedge y=0$. Donde, $E_3=\langle(1,0,1)\rangle$

(c) Como $\lambda=0$ não é valor próprio de $T$, $\mathrm{Nuc}(T)=\{(0,0,0)\}$, logo, $T$ é bijectiva [alternativamente, $r(M_T)=3\Rightarrow\dim\mathrm{Im}(T)=3\Rightarrow\dim\mathrm{Nuc}(T)=0$]

(d) $D=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

6.11 $\begin{bmatrix}5&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}-2&1\\2&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}-2&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}3&-2\\-2&3\end{bmatrix}$

6.12 $\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\Leftrightarrow$
$A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

6.13 $E_1=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}:x=0\wedge y-z=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0\\z\\z\end{bmatrix}:z\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$

$E_{-1}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}:y+z=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\-z\\z\end{bmatrix}:x,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\Leftrightarrow$
$A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

6.14 $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,1) \rangle$

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\} = \{(x,y,x+y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$

(a) $\dim E_0 = \text{m.g.}(0) = 1$ e $\dim E_1 = \text{m.g.}(1) = 2$. Por se tratar de um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, o polinómio característico de $f$ tem grau 3 e, tendo em conta os valores próprios de $f$, com as raízes 0 e 1. Donde, $p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2$.

(b) $\text{m.g.}(0) + \text{m.g.}(1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donde, $f$ é diagonalizável. Uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a matriz de $f$ é diagonal $D$ é formada por vectores próprios de $f$.

Por exemplo, $\mathcal{B}_{vp} = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$. Relativamente a esta, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6.15

6.16 (a) $\text{m.a.}(0) = 2$, logo, $\text{m.g.}(0) = 1$ ou $\text{m.g.}(0) = 2$;
$\text{m.a.}(1) = 1$, donde, $\text{m.g.}(1) = 1$;
$\text{m.a.}(2) = 3$, logo, $\text{m.g.}(2) = 1$, $\text{m.g.}(2) = 2$ ou $\text{m.g.}(2) = 3$;

(b) $A$ é diagonalizável sse $\text{m.g.}(\lambda) = \text{m.a.}(\lambda)$, com $\lambda \in \{0,1,2\}$. Donde, $\dim(E_0) = 2$, $\dim(E_1) = 1$ e $\dim(E_2) = 3$.

6.17 (a) $\text{m.a.}(2) = 2 \neq 1 = \text{m.g.}(2)$, logo, a matriz $A$ não é semelhante a uma matriz diagonal;

(b) $\text{m.a.}(1) = 1 = \text{m.g.}(1)$; $\text{m.a.}(-1) = 1 = \text{m.g.}(-1)$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\text{m.a.}(3) = 1 = \text{m.g.}(3)$; $\text{m.a.}(2) = 2 \neq 1 = \text{m.g.}(2)$, por isso, a matriz $C$ não é semelhante a uma matriz diagonal;

(d) $\text{m.a.}(3) = 2 = \text{m.g.}(3)$; $\text{m.a.}(2) = 1 = \text{m.g.}(2)$; $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(e) $\text{m.a.}(-2) = 1 = \text{m.g.}(-2)$; $\text{m.a.}(-1) = 1 = \text{m.g.}(-1)$; $\text{m.a.}(1) = 2 = \text{m.g.}(1)$;

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1}EP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$