

15

Sistemas - Resposta em Frequência

(representação de sistemas
no domínio da frequência)

Comunicação Digital
(25 de maio de 2023)



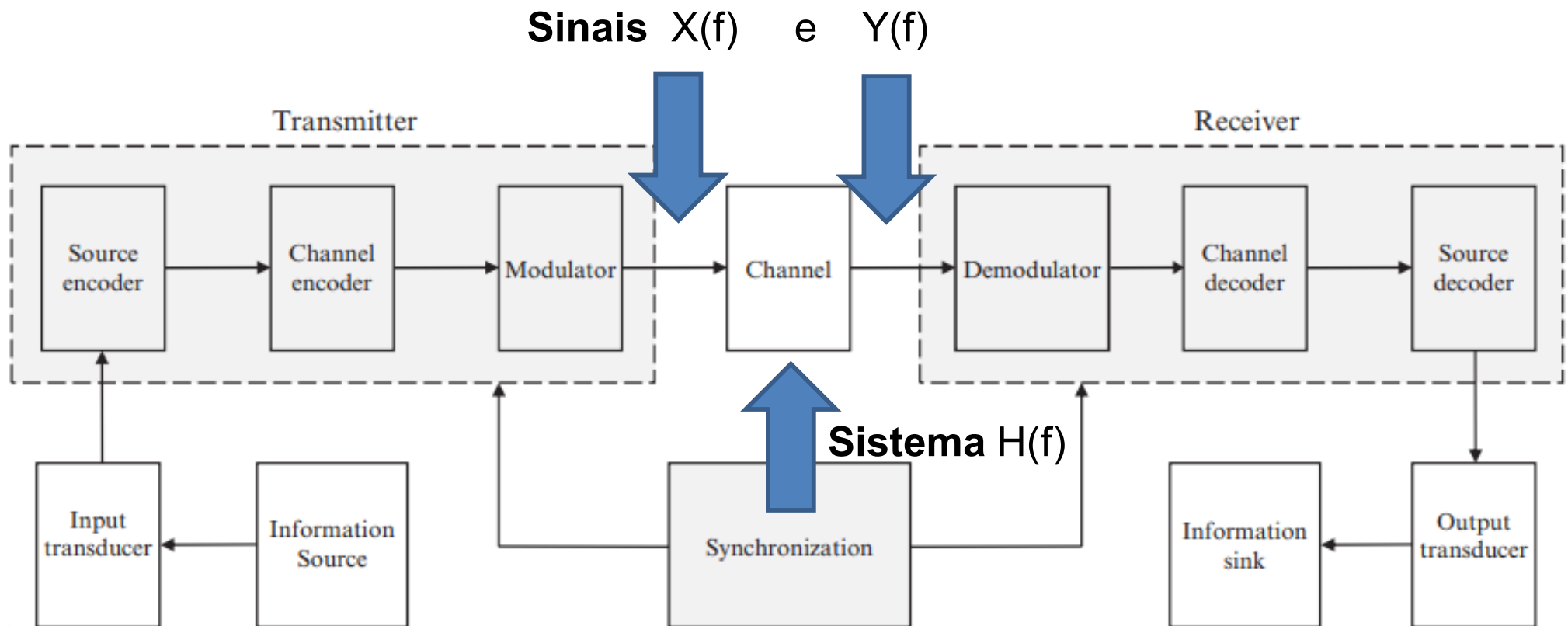
Sumário

1. Sistemas
2. Resposta em frequência
3. Tipos de filtragem e exemplos de filtragem
4. Associação de sistemas
 - Série
 - Paralelo
5. Exercícios



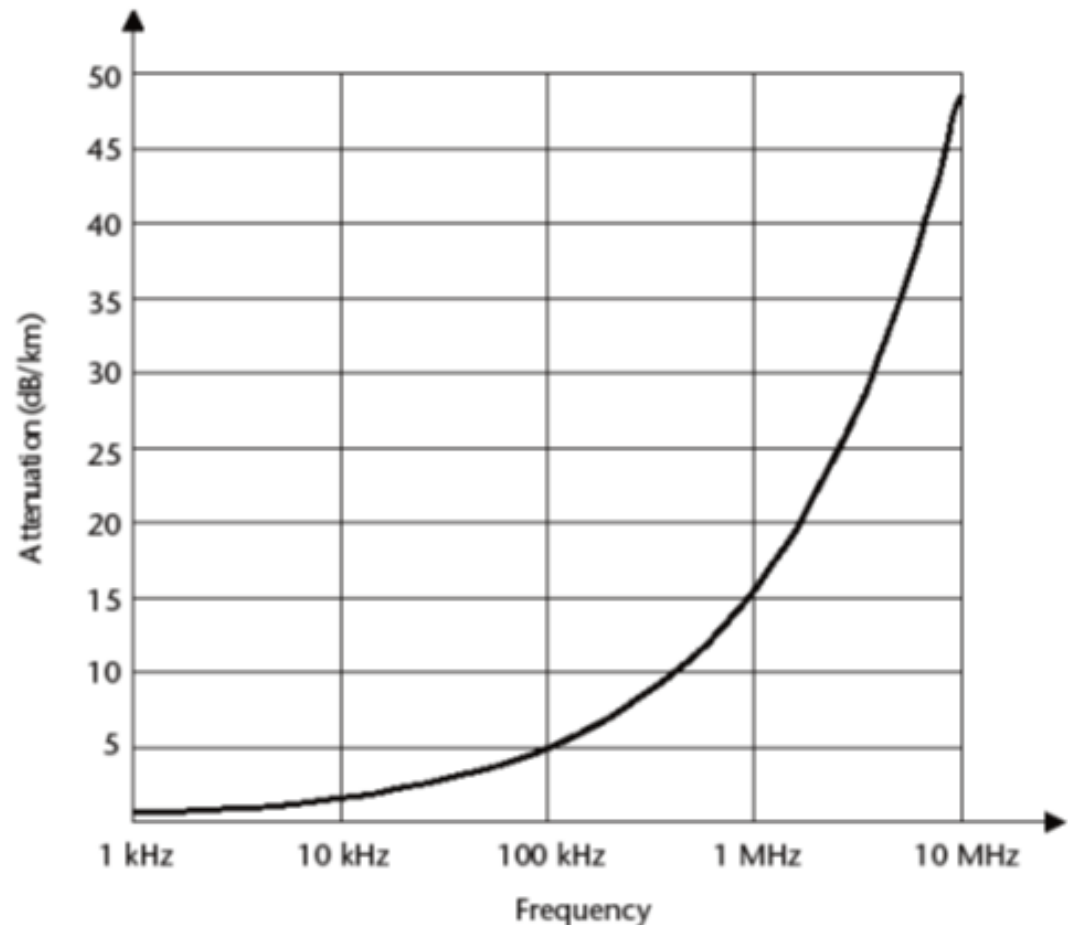
Sistemas de Comunicação (1)

- Diagrama de blocos genérico



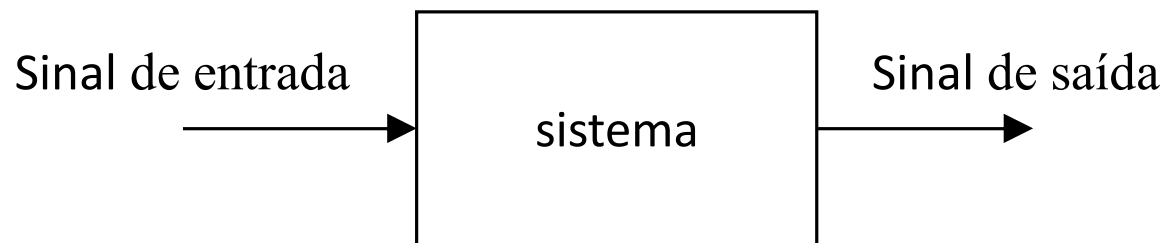
Sistemas de Comunicação (2)

- Os canais (meios de transmissão) têm um comportamento que depende da **frequência** do sinal de entrada
- Os canais possuem uma **largura de banda**



1. Sistemas

- Define-se **sistema** como um objeto que manipula um ou mais sinais para realizar certa função, produzindo um novo sinal

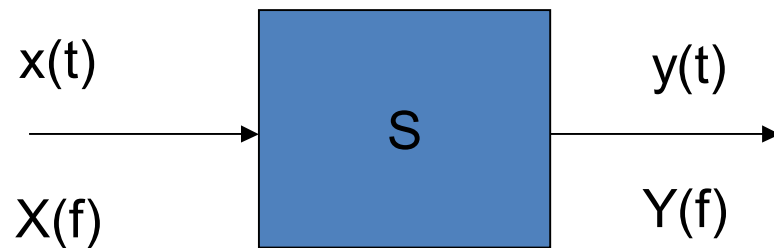


- diz-se **contínuo** ou **discreto** conforme o tipo de sinais que manipula
- a análise dos sinais de entrada e de saída pode ser realizada:
 - no domínio do tempo
 - no domínio da frequência



2. Resposta em frequência

- A resposta em frequência $H(f)$ caracteriza o comportamento no domínio da frequência
- Indica qual o ganho que o sistema aplica a cada frequência



$$Y(f) = X(f)H(f)$$

As componentes de frequência que constam de $Y(f)$ são aquelas que:

- estão presentes em $X(f)$ e
- o sistema tem ganho não nulo

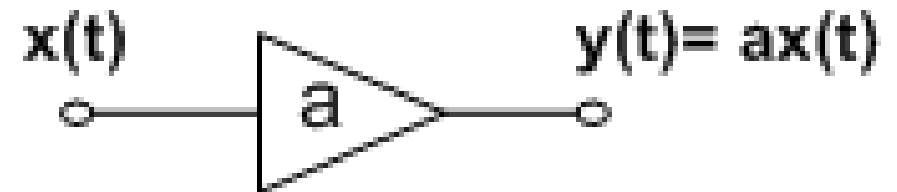
$$H(f) = Y(f) \quad \text{com} \quad X(f) = 1$$

Temos assim a interseção do espectro de entrada com a resposta em frequência



2. Resposta em frequência

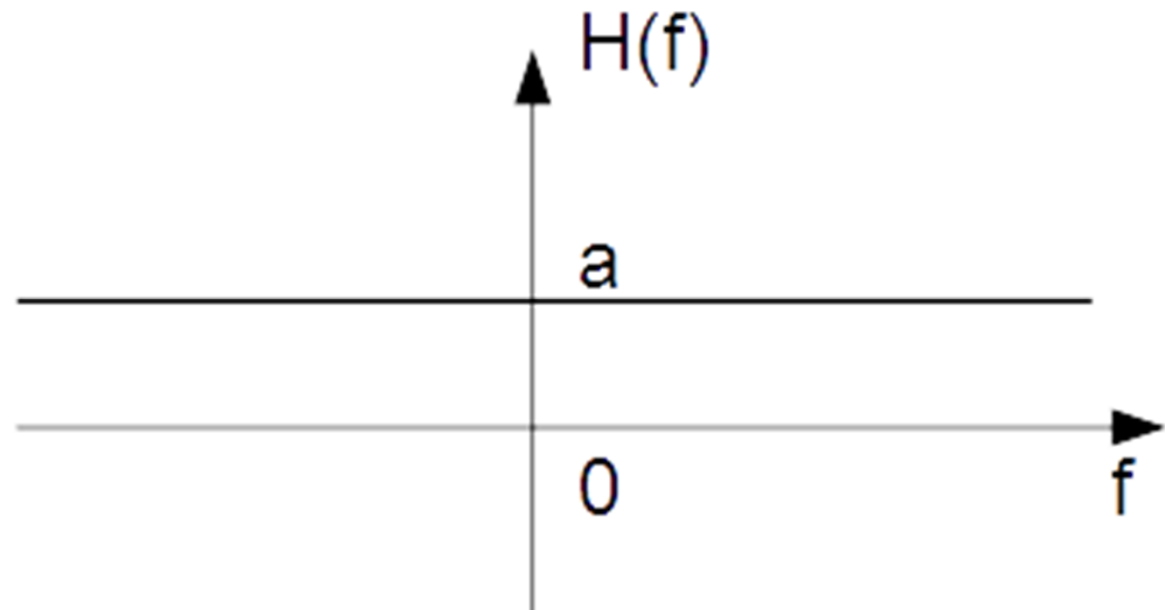
- Exemplo: sistema amplificador/atenuador



$$Y(f) = H(f)X(f) = aX(f)$$

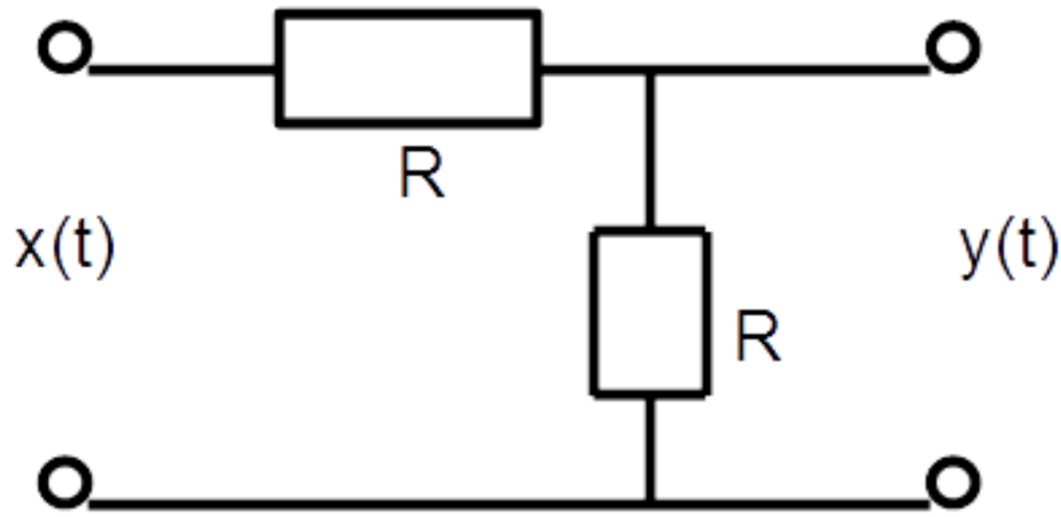
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = a$$

$$h(t) = a\delta(t)$$



2. Resposta em frequência

- Exemplo: atenuador (divisor de tensão)

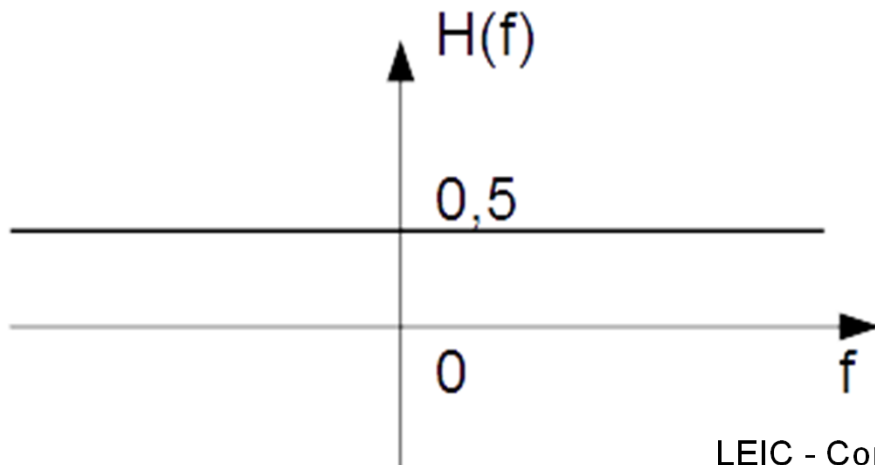


$$y(t) = 0,5x(t)$$

$$h(t) = 0,5\delta(t)$$

$$Y(f) = 0,5X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = 0,5$$



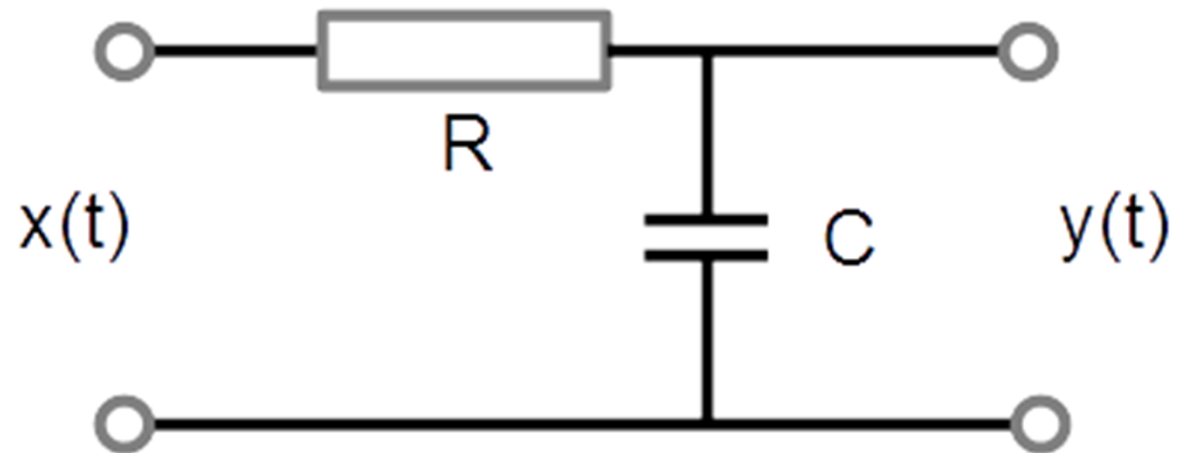
2. Resposta em frequência

- Exemplo: circuito RC

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$



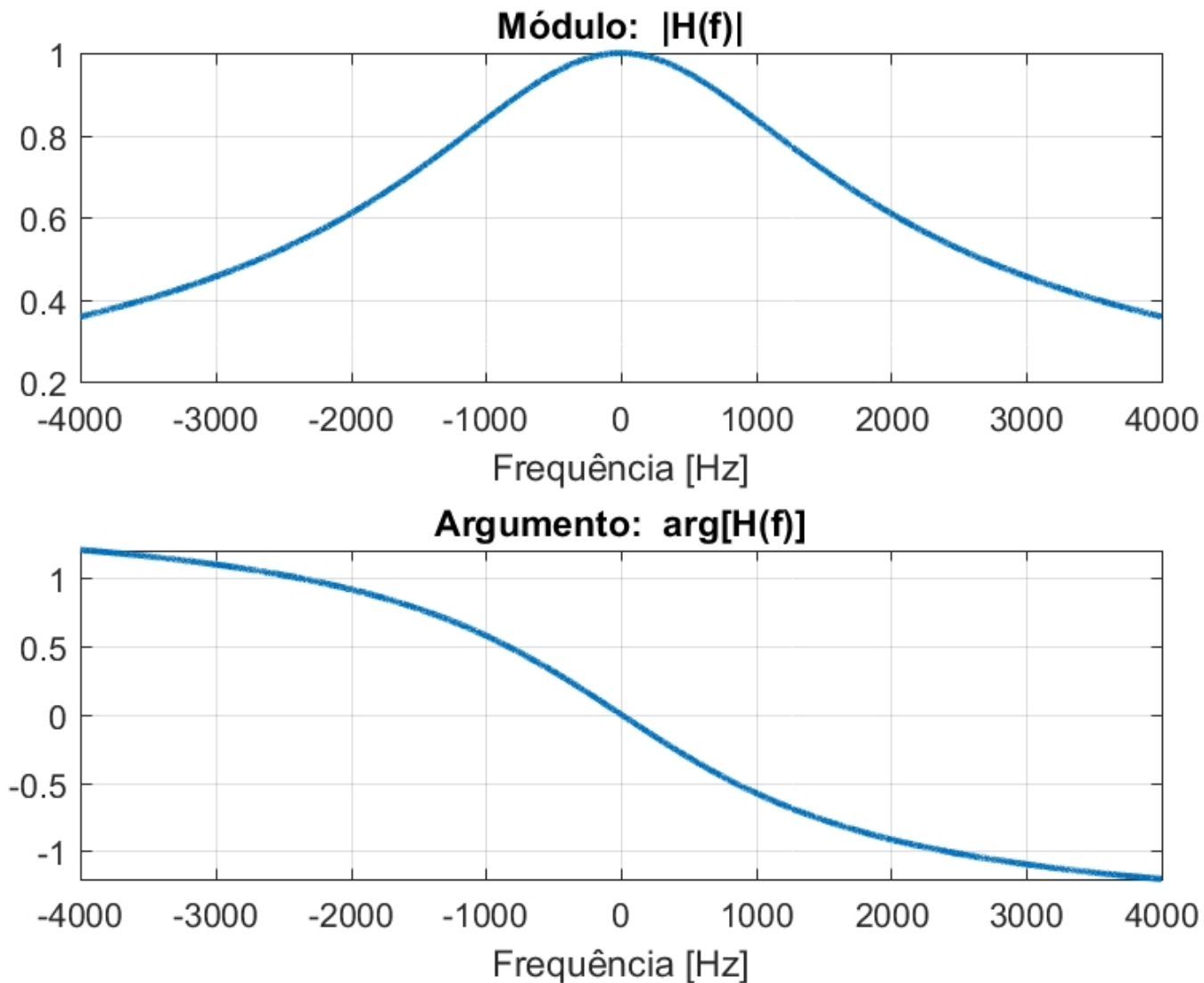
$$\arg[H(f)] = \text{atan}(-2\pi fRC)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/RC_circuit



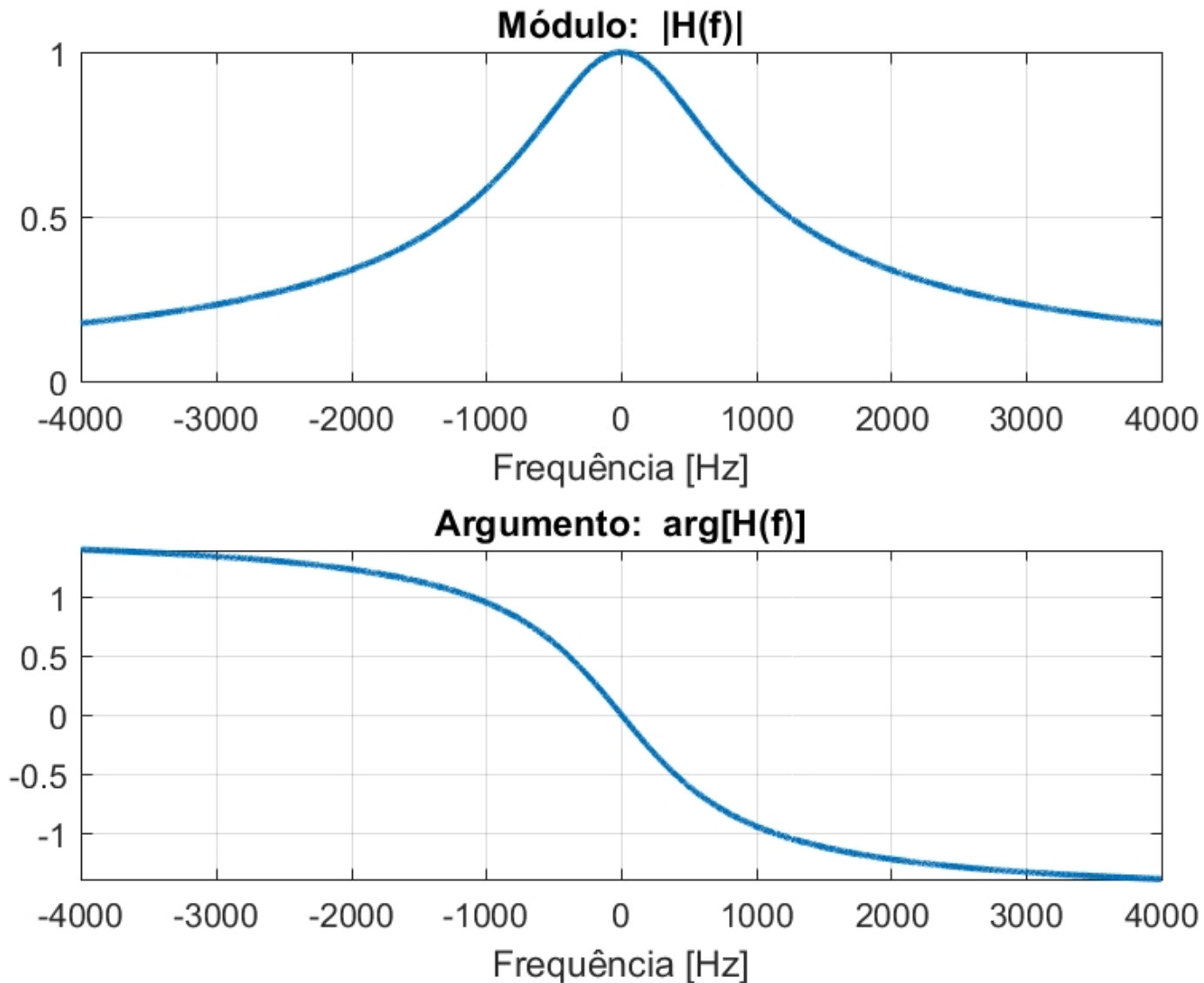
2. Resposta em frequência

- Exemplo: circuito RC $R=4,7\text{ k}\Omega$ $C=22\text{ nF}$



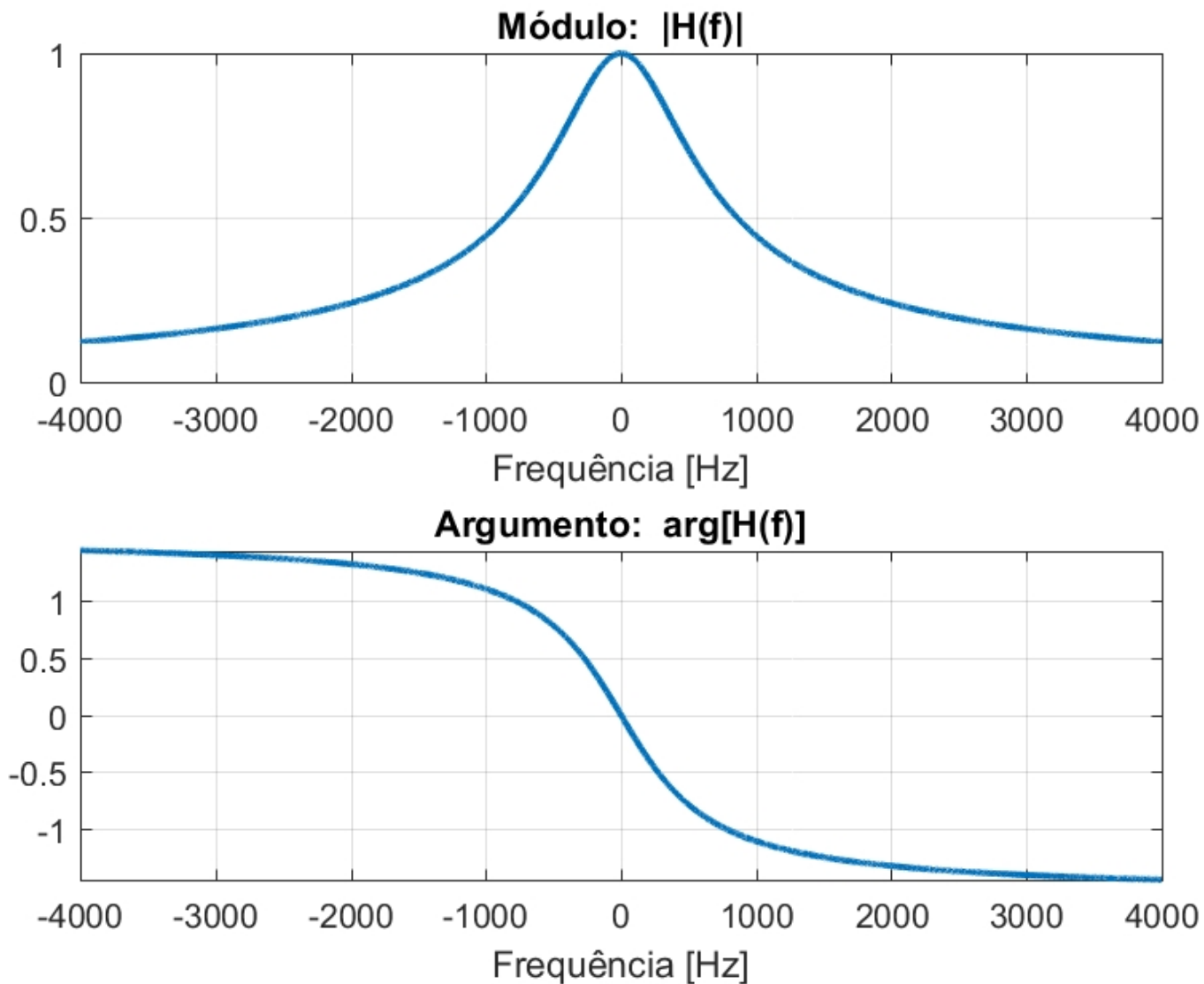
2. Resposta em frequência

- Exemplo: circuito RC $R=4,7\text{ k}\Omega$ $C=47\text{ nF}$



2. Resposta em frequência

- Exemplo: circuito RC $R=4,7\text{ k}\Omega$ $C=68\text{ nF}$



3. Filtragem e tipos de filtragem

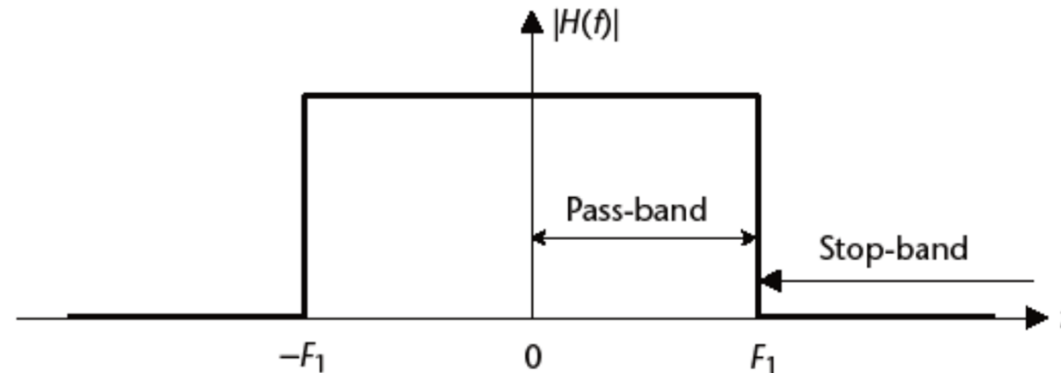
- Tendo em conta que $Y(f) = X(f)H(f)$
- As componentes de frequência que constam de $X(f)$ e não constam de $Y(f)$ são filtradas (eliminadas) pelo sistema
- Assim, o tipo de filtragem é definido pela função $H(f)$
- Existem 4 tipos de filtragem típicos:
 - Passa-baixo
 - Passa-banda
 - Passa-alto
 - Rejeita-banda



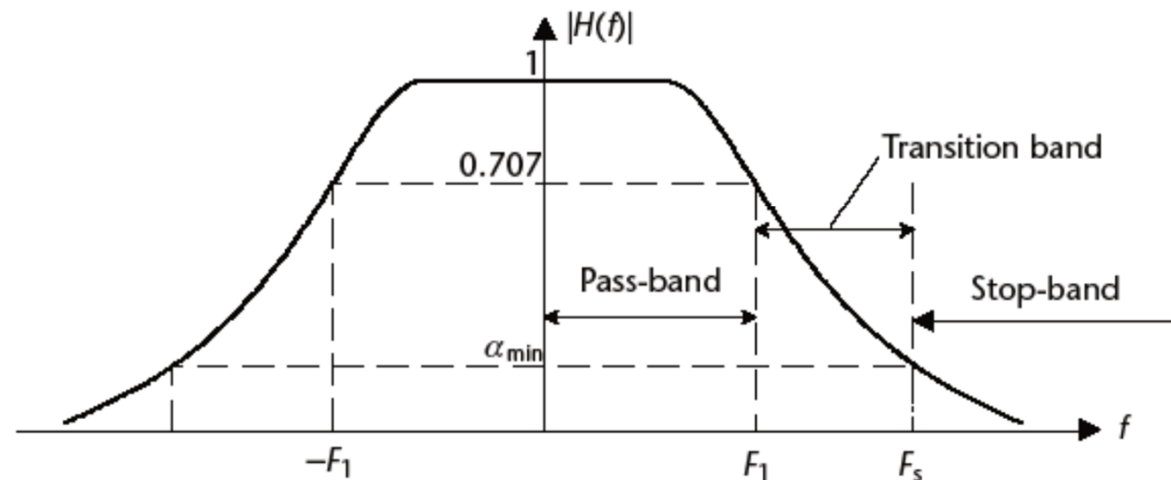
3. Tipos de filtragem

Figure 2.29

(a)
Filtro passa-baixo ideal



(b)
Filtro passa-baixo real

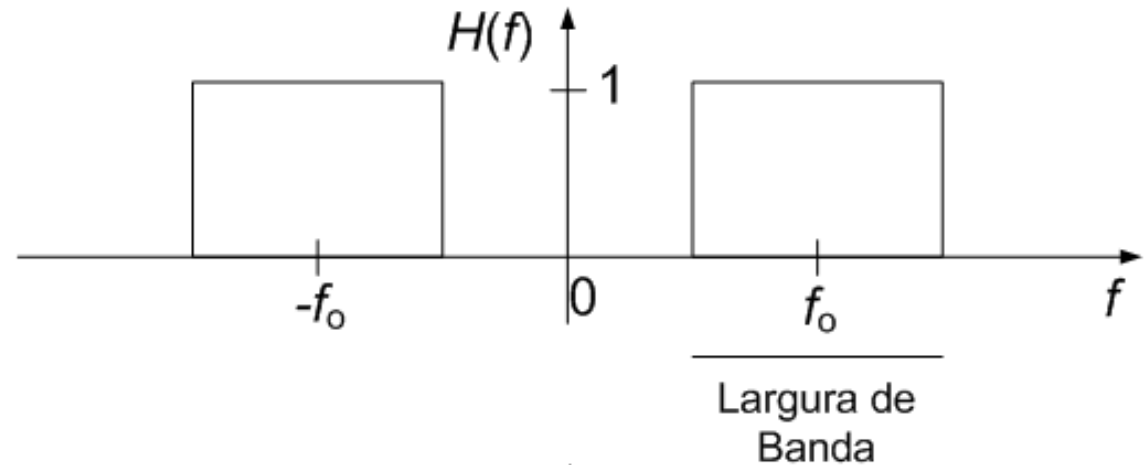


Taken from *Communication Engineering Principles*, © Ifiok Otung, published 2001 by Palgrave

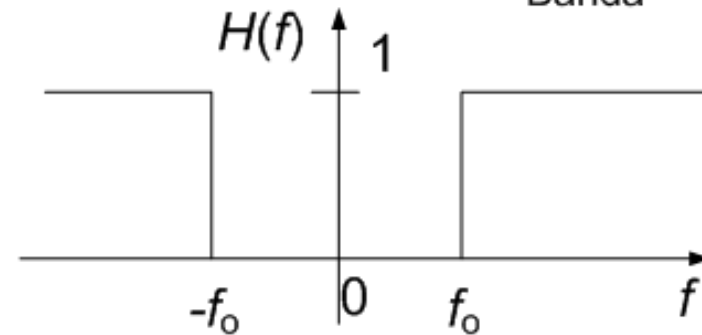


3. Tipos de filtragem

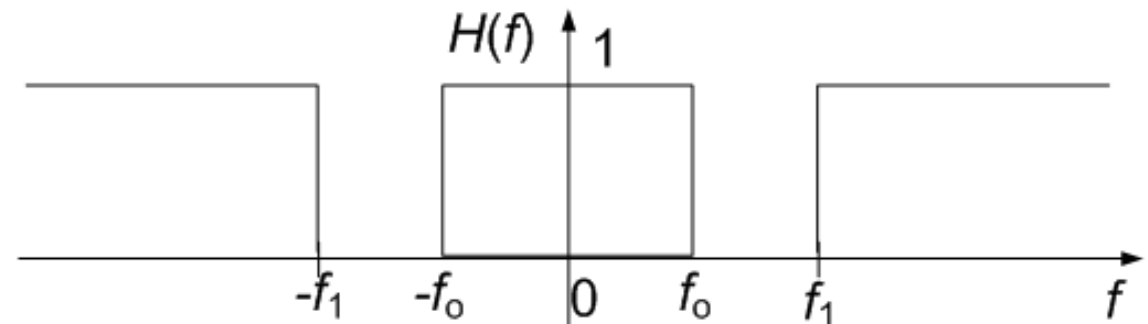
Filtro passa-banda ideal



Filtro passa-alto ideal



Filtro rejeita-banda ideal



3. Exemplos de filtragem

Considere-se o filtro passa-baixo ideal com frequência de corte $f_c = 40$ kHz e ganho unitário.

Seja $x(t) = 3 + 2\cos(2\pi 5000 t) + 2\cos(2\pi 25000 t) + 2\cos(2\pi 55000 t)$ o sinal presente na entrada do sistema.

A expressão do sinal de saída é $y(t) = 3 + 2\cos(2\pi 5000 t) + 2\cos(2\pi 25000 t)$.

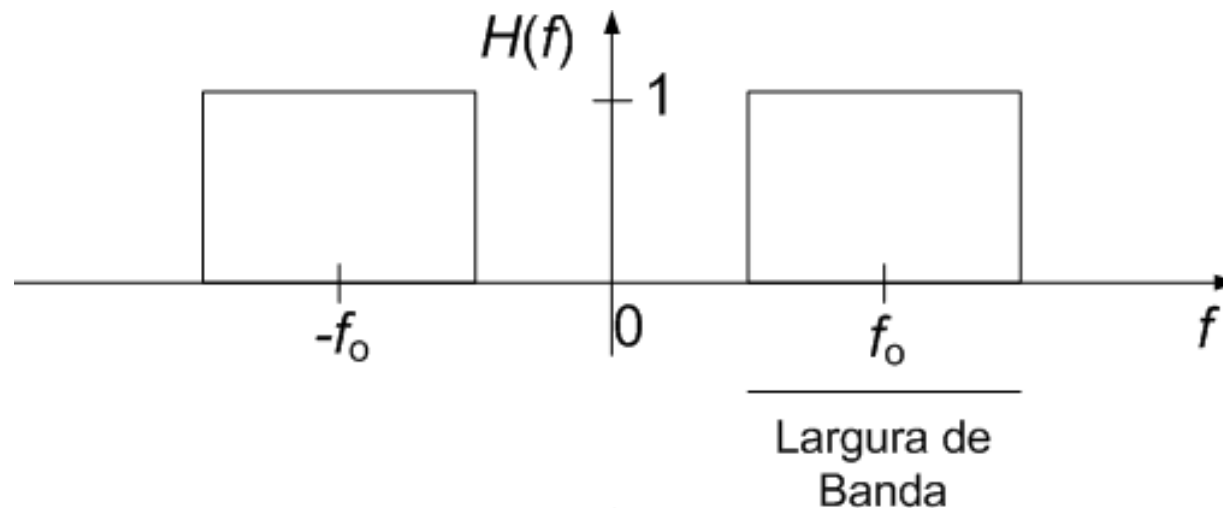
Caso o filtro tenha $f_c = 20$ kHz e ganho igual a 2,5, temos que, para o mesmo sinal de entrada $x(t)$, a expressão do sinal de saída é

$$y(t) = 2,5 \times 3 + 2,5 \times 2\cos(2\pi 5000 t) = 7,5 + 5\cos(2\pi 5000 t).$$



3. Exemplos de filtragem

Considere-se o filtro passa-banda ideal com frequência central $f_0 = 30$ kHz, largura de banda 20 kHz e ganho unitário



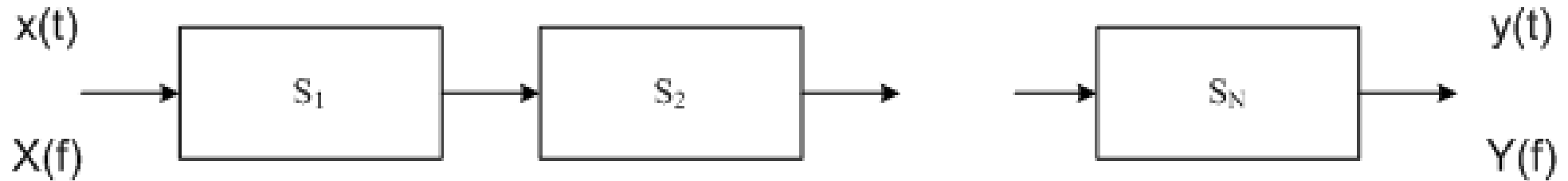
Seja $x(t) = 3 + 2\cos(2\pi 5000 t) + 2\cos(2\pi 25000 t) + 2\cos(2\pi 45000 t)$ o sinal presente na entrada do sistema.

A expressão do sinal de saída é $y(t) = 2 \cos(2\pi 25000 t)$.



4. Associação de sistemas

- Associação série ou cascata



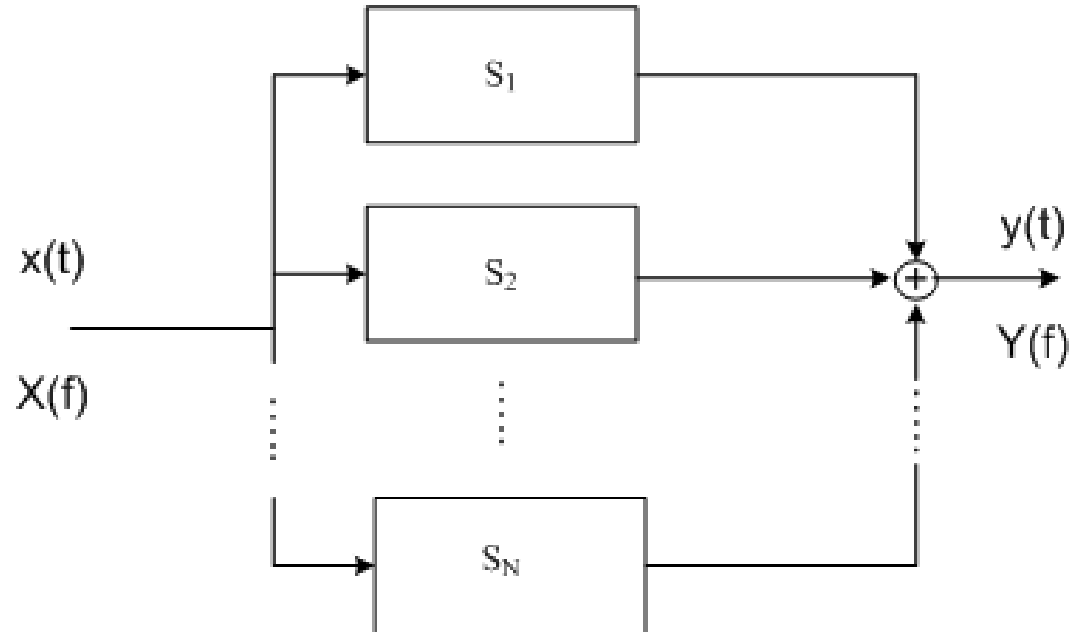
- A resposta em frequência equivalente é o produto das sucessivas respostas em frequência individuais

$$H_{eq}(f) = H_1(f)H_2(f) \dots H_N(f)$$
$$= \prod_{k=1}^N H_k(f)$$



4. Associação de sistemas

- Associação paralelo



- A resposta em frequência equivalente é a soma das sucessivas respostas em frequência individuais

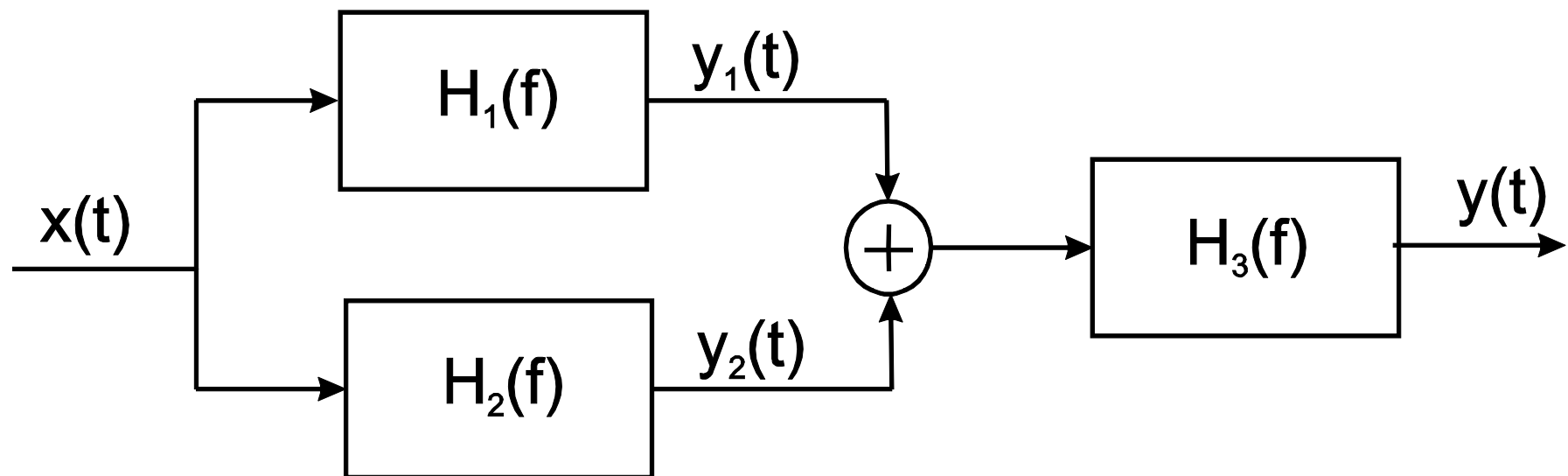
$$H_{eq}(f) = H_1(f) + H_2(f) + \dots + H_N(f)$$
$$= \sum_{k=1}^N H_k(f)$$



5. Exercícios

Considere a associação de sistemas presente na figura com

$$H_1(f) = 4\Pi\left(\frac{f}{6000}\right) \quad , \quad H_2(f) = 2\Pi\left(\frac{f}{2000}\right) \quad \text{e} \quad H_3(f) = 2\Pi\left(\frac{f-2000}{1000}\right) + 2\Pi\left(\frac{f+2000}{1000}\right)$$



- a) Determine a resposta em frequência equivalente da associação da figura.
- b) Qual a expressão de $y(t)$, com $x(t) = 5 + 2\cos(2\pi 100t) + 4\cos(2\pi 2000t)$?



5. Exercícios

Solução

a) $H_e(f) = (H_1(f) + H_2(f)) \cdot H_3(f),$

É um filtro passa-banda ideal de ganho 8 na largura de banda 1,5 kHz a 2,5 kHz.

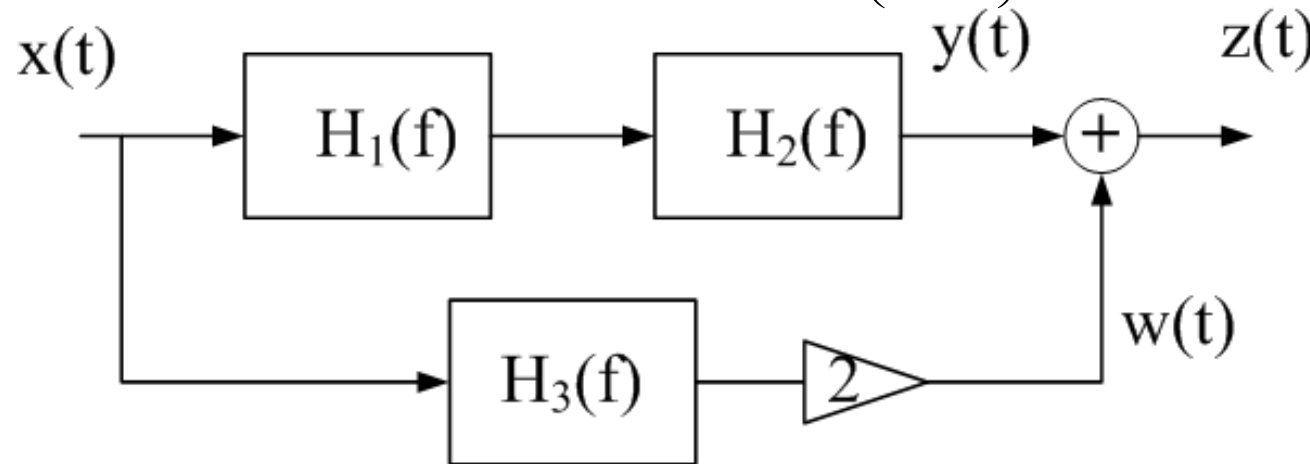
b) $y(t) = 32\cos(2 \pi 2000t).$



5. Exercícios

Considere a associação de sistemas presente na figura com

$$H_1(f) = 3\Pi\left(\frac{f}{6000}\right) \text{ e } H_2(f) = 2\Pi\left(\frac{f-2000}{1000}\right) + 2\Pi\left(\frac{f+2000}{1000}\right)$$



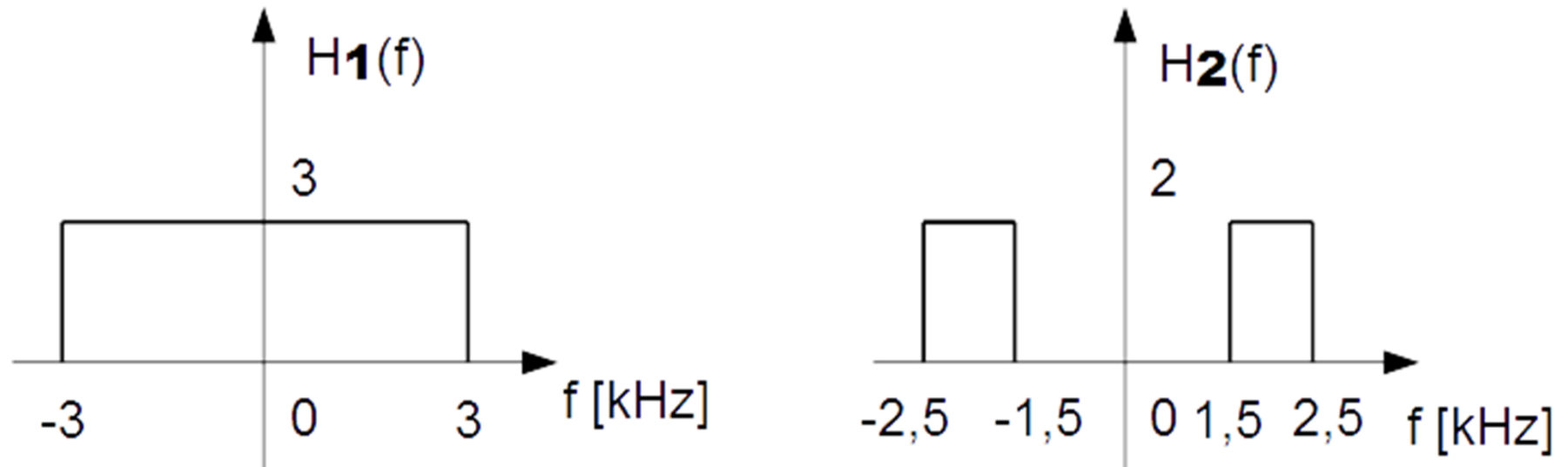
- Esboce as respostas em frequência $H_1(f)$ e $H_2(f)$. Classifique os sistemas quanto ao tipo de filtragem e indique a respetiva largura de banda.
- Apresente a resposta em frequência da associação série de $H_1(f)$ e $H_2(f)$. Determine a expressão da resposta em frequência equivalente da associação da figura.
- Com $x(t) = 5 + 2\cos(2\pi 100t) + 4\cos(2\pi 2000t)$:
 - indique a expressão de $y(t)$
 - sabendo que o sistema $H_3(f)$ é filtro passa-baixo ideal com frequência de corte 3 kHz e ganho unitário, determine as expressões dos sinais $w(t)$ e $z(t)$



5. Exercícios

Solução

a)



$H_1(f)$ é filtro passa-baixo com largura de banda 3 kHz

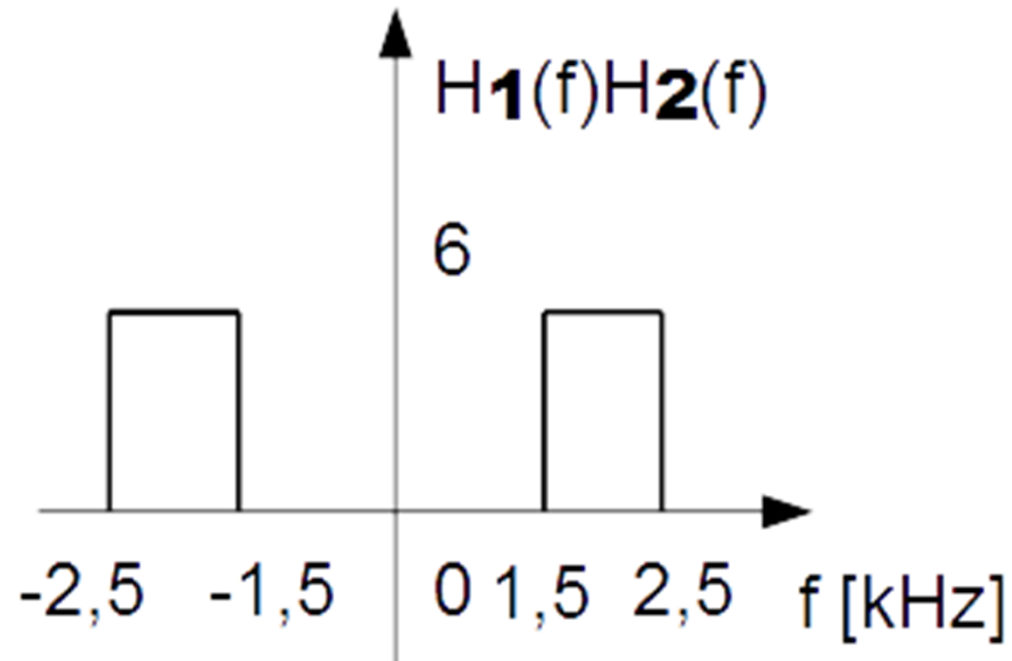
$H_2(f)$ é filtro passa-banda com largura de banda 1 kHz



5. Exercícios

Solução

b) Resposta em frequência da associação série de $H_1(f)$ e $H_2(f)$ é dada por $H_1(f) H_2(f)$



A expressão da resposta em frequência equivalente da associação da figura é dada por $H_{eq}(f) = H_1(f).H_2(f) + 2H_3(f)$.



5. Exercícios

Solução

c) Com $x(t) = 5 + 2\cos(2\pi 100t) + 4\cos(2\pi 2000t)$:

i) $y(t) = 24\cos(2\pi 2000t)$

ii) $w(t) = 2x(t) = 10 + 4\cos(2\pi 100t) + 8\cos(2\pi 2000t)$

$$z(t) = y(t) + w(t) = 10 + 4\cos(2\pi 100t) + 32\cos(2\pi 2000t)$$

