Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

7 - Espaços Vetoriais

Índice

Definição de Espaço Vetorial

Um conjunto V é um **espaço vetorial real** se estão definidas em V duas operações:

- $\forall\ u, v \in V,\ \ u + v \in V$;
- $\forall\ u \in V, \forall\ a \in \mathbb{R},\ \ au \in V$;

que verificam as seguintes propriedades:

1. $\forall u, v \in V,\ \ u + v = v + w$;
2. $\forall u, v, w \in V,\ \ u + (v + w) = (u + v) + w$;
3. $\exists 0_V \in V, \forall u \in V,\ \ u + 0_V = u$;
4. $\forall u \in V, \exists(-u) \in V : u + (-u) = 0_V$;
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V,\ \ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V,\ \ \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$;
8. $\forall u \in V,\ \ 1u = u$.

Espaço vetorial - exemplo

É um **espaço vetorial** o conjunto:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

munido com as operações:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
- $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Espaço vetorial - exemplo

É um **espaço vetorial** o conjunto das matrizes do tipo m por n:

$$\mathbb{R}^{m\times n} = \{\text{matrizes do tipo } m \text{ por } n\} = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

munido com

- a soma de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- multiplicação de uma matriz por um escalar:

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Espaço vetorial - exemplo

Em particular, é um **espaço vetorial o conjunto das matrizes coluna com n entradas**:

$$\mathbb{R}^{n\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Notação: Dado $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $[u]$ a matriz coluna $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Espaço vetorial - exemplos

É um **espaço vetorial** o conjunto dos polinómios na incógnita x com coeficientes reais de grau inferior ou igual a n:

$$\mathbb{P}_n[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 : a_n, \ldots a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

munido com as operações:

- $(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0) =$
  $= (a_n + b_n) x^n + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$
- $k(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = (k a_n) x^n + \ldots + (k a_1) x + (k a_0)$

É um **espaço vetorial** o conjunto das funções reais de variável real com as operações habituais de soma de funções e multiplicação de um número real por uma função:

- $(f+g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(\alpha f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$;

$\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções (reais de variável real).

Subespaço vetorial

Um **subespaço vetorial** do espaço vetorial V é um subconjunto não vazio S de V tal que:

1. $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$;
2. $u \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in S$.

Note-se que, como as operações definidas em V verificam as 8 propriedades da definição de espaço vetorial, um **subespaço vetorial é também um espaço vetorial**.

Se S é subespaço vetorial de V então:

- $0_V \in S$;
- $u_1, u_2, \ldots, u_k \in S \Rightarrow a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n \in S$

Subespaço vetorial

Seja S o conjunto das soluções de um SEL homogéneo com n incógnitas:

$$AX = O$$

- A **solução nula** é sempre solução de um sistema homogéneo, $AO = O$, logo

$$(0, 0, \ldots, 0) \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$$

- Se $u = (x_1, x_2, \ldots x_n), v = (y_1, y_2, \ldots y_n) \in S$ então $A[u] = O$ e $A[v] = O$. Logo

$$A[u + v] = A[u] + A[v] = O + O = O \Rightarrow u + v \in S$$

- Se $k \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in S$ então $A[u] = O$. Logo

$$A[ku] = kA[u] = kO = O \Rightarrow ku \in S$$

Subespaço vetorial

Dada A matriz do tipo m por n, o **núcleo de A**, conjunto das soluções do SEL homogéneo $AX = O$:

$$N(A) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T = O\}.$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0 \wedge z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$;
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$;
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Porquê?

Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n \times n}$ - exemplos

(Exercício: Mostrar que:)

É um subespaço vetorial (do espaço vetorial) das matrizes quadradas de ordem n o subconjunto das matrizes:

- simétricas;
- triangulares inferiores/superiores;
- com diagonal nula;
- diagonais;
- escalares;

Não é um subespaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n o subconjunto das matrizes:

- com diagonal não nula;
- invertíveis;
- não invertíveis.

Interseção e soma de subespaços vetoriais

Se S_1 e S_2 são subespaços do espaço vetorial V então:

- $S_1 \cap S_2$ é um subespaço vetorial de V;
- $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \colon s_1 \in S_1 \wedge s_2 \in S_2\}$ é um subespaço vetorial de V.

Seja $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. Sejam
S_1 o subconjunto de V das matrizes triangulares superiores e
S_2 o subconjunto de V das matrizes triangulares inferiores.
O conjunto:

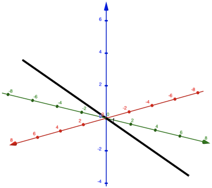
- $S_1 \cap S_2$, das matrizes diagonais de ordem n, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- $S_1 + S_2$ é o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n \times n}$:

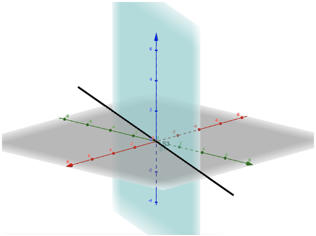
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{2} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{a_{nn}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \frac{a_{nn}}{2} \end{bmatrix}$$

Interseção de subespaços vetoriais

O subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0 \wedge z = 0\}$$





é interseção dos subespaços:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$$

Subespaços vetoriais

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0 \wedge z = 0\}$

  Soluções: $(x, 2x, 0) = x(1, 2, 0), x \in \mathbb{R}$

- $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0\}$

  Soluções: $(x, 2x, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 0, 1),\ x, z \in \mathbb{R}$

- $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$

  Soluções: $(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0), x, y \in \mathbb{R}$

Combinação linear

Seja V um espaço vetorial. Diz-se que o elemento u de V é **combinação linear** dos elementos $u_1, \ldots, u_k$ de V se existem escalares $a_1, \ldots, a_k (\in \mathbb{R})$ tais que

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k.$$

Os elementos do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0 \wedge z = 0\}$ são **combinação linear** de $(1, 2, 0)$;
- $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x - y = 0\}$ são **combinação linear** de $(1, 2, 0)$ e $(0, 0, 1)$;
- $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$ são **combinação linear** de $(1, 0, 0)$ e de $(0, 1, 0)$.

Combinação linear

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é combinação linear das matrizes $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois:

$$A = a_1 B + a_2 C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases} \quad \text{SI}$$

Combinação linear e subespaço gerado

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, \dots, v_k \in V$ é um subespaço vetorial de V, chamado **subespaço vetorial gerado por** $v_1, \dots, v_k$ e denotado por $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$:

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k : a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Os elementos $v_1, \dots, v_k$ são os **geradores** de S.

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0 \wedge z = 0\} = \langle (1, 2, 0) \rangle$;
- $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\} = \langle (1, 2, 0), (0, 0, 1) \rangle$;
- $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$

Combinação linear e subespaço gerado

O vetor $v = (2, -2, 5)$ pertence ao subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -3, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$?

Um vetor v pertence ao subespaço S se é combinação linear dos vetores v_1 e v_2:

$$v = av_1 + bv_2 \Leftrightarrow (2, -2, 5) = a(1, -3, 0) + b(0, 1, 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = -2 \\ b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 1 = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

o sistema **é impossível**, logo o vetor **não é** combinação linear dos vetores v_1 e v_2 e assim **não pertence** ao subespaço.

Combinação linear e subespaço gerado

Prove que $\langle (1,0,1),(0,1,1),(1,1,0) \rangle = \mathbb{R}^3$

?Qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear de $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)$?

$$(x,y,z) = a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=x \\ b+c=y \\ a+b=z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & z-x-y \end{array}\right]$$

$$r(A) = r(A|B) \Rightarrow \text{SP}$$

Qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear de $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)$!

$$\langle (1,0,1),(0,1,1),(1,1,0) \rangle = \mathbb{R}^3$$