Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

13. Valores e vetores próprios. Diagonalização.

Índice

Matriz de uma aplicação linear

Sejam $f : U \longrightarrow V$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_U = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base (ordenada) de U e $\mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_m)$ uma base (ordenada) de V. Chama-se **matriz de f nas bases $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$** (ou relativamente às bases $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$), e denota-se por $M(f, \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, à matriz do tipo m por n:

$$M(f, \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m \\ f(u_2) &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{m2} v_m \\ &\vdots \\ f(u_n) &= a_{n1} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m \end{aligned}$$

Matriz de uma aplicação linear

Em todo este capítulo, f **é um endomorfismo de** U**:**

$$f : U \longrightarrow U \text{ aplicação linear.}$$

?Existe uma base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de U tal que $M(f; , \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é uma **matriz diagonal**?

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \lambda_1 u_1 \\ f(u_2) &= \lambda_2 u_2 \\ &\vdots \\ f(u_n) &= \lambda_n u_n \end{aligned}$$

Valor e vetor próprio

Seja $f : U \longrightarrow U$ uma aplicação linear. Um vetor u não nulo de U diz-se um **vetor próprio de f**, associado ao **valor próprio** $\lambda \in \mathbb{R}$, se

$$f(u) = \lambda u.$$

Prove que $u = (1, 2)$ é vetor próprio de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (4x - y, 2x + y)$.

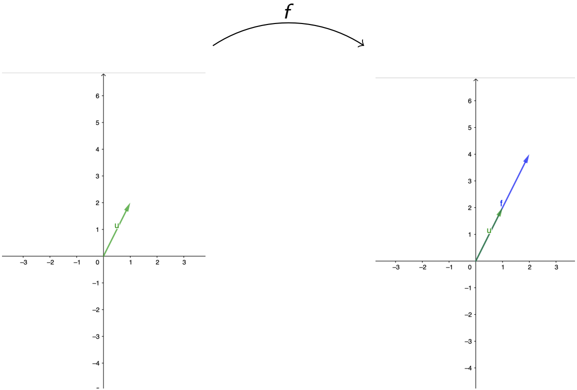
$$f(u) = f(1, 2) = (4 \cdot 1 - 2, 2 \cdot 1 + 2) = (2, 4) = 2(1, 2) = 2u$$

logo $(1, 2)$ é vetor próprio de f associado ao valor próprio 2.

Valores e vetores próprios

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x,y) = (4x - y, 2x + y)$$

$$f(1,2) = 2(1,2)$$



Valor e vetor próprio

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ não nulo diz-se um **vetor próprio de A**, associado ao **valor próprio** $\lambda \in \mathbb{R}$, se

$$A[u] = \lambda[u].$$

Prove que $u = (1, 2)$ é vetor próprio da matriz $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A[u] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2[u]$$

logo $(1, 2)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio 2.

(A é a matriz canónica de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (4x - y, 2x + y)$)

Espectro

Seja $f : U \longrightarrow U$ uma aplicação linear. Chama-se **espectro de f** ao conjunto de todos os valores próprios de f. Representa-se por $\mathcal{E}(f)$.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Chama-se **espectro de A** ao conjunto de todos os valores próprios de A. Representa-se por $\mathcal{E}(A)$.

Espectro

Determine o espectro da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A[u] = \lambda[u] \Leftrightarrow A[u] - \lambda[u] = O \Leftrightarrow (A - \lambda I_2)[u] = O, \ u \text{ não nulo.}$$

$$(A - \lambda I_2)X = O \qquad \text{SPI} \qquad \det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

$$\mathcal{E}(A) = \{2, 3\}$$

Cálculo de valores e vetores próprios

u um vetor próprio de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e A a matriz canónica de f.

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow A[u] = \lambda[u] \Leftrightarrow A[u] - \lambda[u] = O \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)[u] = O$$

$[u]$ é uma solução não nula do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = O$

$$r(A - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e A a matriz canónica de f.

- Os valores próprios de f são as soluções da equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$;
- Os vetores próprios de f associados ao valor próprio λ são as soluções não nulas do sistema homógeneo $(A - \lambda I_n)X = O$.

Cálculo de valores e vetores próprios: exemplo

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y,z) = (2z, x+2y+z, -x+3z)$$

Cálculo dos valores próprios de f:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2}{=} \\
&= (2-\lambda)\big(-\lambda(3-\lambda) - 2(-1)\big) = \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = \\
&= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)
\end{aligned}$$

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 2$$

1 e 2 são os valores próprios de f:

$$\mathcal{E}(f) = \{1, 2\}$$

Cálculo de valores e vetores próprios: exemplo

Cálculo dos vetores próprios associados ao valor próprio 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \end{array}\right] \underset{\lambda=1}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \end{cases}$$

Soluções: $(2z, -3z, z)$

vetores próprios associados ao valor próprio 1:

$(2z, -3z, z)$, com $z \neq 0$.

Cálculo de valores e vetores próprios: exemplo

Cálculo dos vetores próprios associados ao valor próprio 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \end{array}\right] \underset{\lambda=2}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to 2L_2 + L_1 \\ L_3 \to 2L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Soluções: $(0, y, 0)$

vetores próprios associados ao valor próprio 2:

$(0, y, 0)$, com $y \neq 0$.

Polinómio característico

Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear e A a matriz canónica de f. Ao polinómio (de grau n) na variável x:

$$p(x) = \det(A - xI_n)$$

chama-se **polinómio característico de f**.

Se λ é valor próprio de f então λ é **raíz** do polinómio característico de f. À multiplicidade de λ como raíz do polinómio característico de f (número de vezes que λ é raíz do polinómio) chama-se **multiplicidade algébrica de λ** e denota-se por m.a.(λ).

Note-se que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem no máximo n valores próprios.

Polinómio característico

Exemplo anterior:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y,z) = (2z, x+2y+z, -x+3z)$$

Polinómio característico de f:

$$p(x) = \det(A - xI_3) = (2-x)(x-1)(x-2)$$

- O valor próprio 1 é uma vez raíz do polinómio característico:

$$\text{m.a.}(1) = 1$$

- O valor próprio 2 é duas vezes raíz do polinómio característico:

$$\text{m.a.}(2) = 2$$

Subespaço próprio

Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear e A a matriz canónica de f.
O subespaço de $\mathbb{R}^n$ constituído pelas soluções do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ chama-se **subespaço próprio de f associado ao valor próprio λ** e denota-se por S_λ:

$$S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^n \colon f(u) = \lambda u\} = \{u \in \mathbb{R}^n \colon A[u] = \lambda[u]\}$$

À dimensão de S_λ chama-se **multiplicidade geométrica de λ** e representa-se por $\mathrm{m.g.}(\lambda)$.

Subespaço próprio - exemplo anterior

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y,z) = (2z, x+2y+z, -x+3z)$$

$$S_1 = \{(2z, -3z, z) \colon z \in \mathbb{R}\} = \{z(2,-3,1) \colon z \in \mathbb{R}\} = \langle (2,-3,1) \rangle$$

$$S_2 = \{(0, y, 0) \colon z \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,0) \colon z \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,0) \rangle$$

$$\text{m.g.}(1) = 1 = \text{m.g.}(2)$$

Subespaço próprio

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x, y, z) = (2z, x + 2y + z, -x + 3z)$$

$$S_1 = \langle (2, -3, 1) \rangle \quad \text{e} \quad S_2 = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

$$f(S_1) = \langle f(2, -3, 1) \rangle = \langle 1(2, -3, 1) \rangle = \langle (2, -3, 1) \rangle = S_1$$

$$f(S_2) = \langle f(0, 1, 0) \rangle = \langle 2(0, 1, 0) \rangle = \langle (0, 1, 0) \rangle = S_2$$

Subespaço próprio

$$S_\lambda = \langle u_1, \ldots u_k \rangle$$

$$f(S_\lambda) = f\big(\langle u_1, \ldots u_k \rangle\big) = \langle f(u_1), \ldots f(u_k) \rangle = \langle \lambda u_1, \ldots, \lambda u_k \rangle$$

Seja S_λ o subespaço próprio de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ associado ao valor próprio λ.

- Se $\lambda \neq 0$ então $f(S_\lambda) = S_\lambda$;
  Neste caso, diz-se que f deixa S_λ **invariante**;
- Se $\lambda = 0$ então $f(S_\lambda) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
  Neste caso, $S_\lambda = S_0 = \mathrm{Nuc}(f)$ e f não é injetiva (nem sobrejetiva).

Multiplicidades

Se λ é valor próprio de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ então:

$$1 \leq \text{m.g.}(\lambda) \leq \text{m.a.}(\lambda).$$

Em particular:

$$\text{m.a.}(\lambda) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(\lambda) = 1$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x, y) = (4x - y, 2x + y)$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

$$\text{m.a.}(2) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(2) = 1 \quad \text{e} \quad \text{m.a.}(3) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(3) = 1$$

Vetores próprios e dependência linear

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valores próprios de f, **distintos dois a dois**. Se $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são vetores próprios de f associados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, respectivamente, então $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são **linearmente independentes**.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x, y) = (4x - y, 2x + y)$$

$$\mathcal{E}(f) = \{2, 3\}$$

Soluções do sistema homogéneo:

- $(A - 2I_2)X = 0$: $\quad (x, 2x) = x(1, 2)$
- $(A - 3I_2)X = 0$: $\quad (x, x) = x(1, 1)$

Os vetores próprios $u_1 = (1, 2)$ e $u_2 = (1, 1)$ de f associados a 2 e 3 são **l.i. logo** $\{u_1, u_2\}$ **é uma base de** $\mathbb{R}^2$ **(formada por vetores próprios de** f**)**.

Diagonalização

Uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se **diagonalizável** se existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de f.

Exemplos anteriores:

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (4x - y, 2x + y)$ **é diagonalizável** pois $\{(1,2),(1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vetores próprios de f.

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (2z, x + 2y + z, -x + 3z)$ **não é diagonalizável** pois $\mathcal{E}(f) = \{1,2\}$,

$$S_1 = \langle (2,-3,1) \rangle \quad \text{e} \quad S_2 = \langle (0,1,0) \rangle$$

  logo

$$\text{m.g.}(1) + \text{m.g.}(2) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

  (não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de f)

Aplicação diagonalizável e matriz diagonal

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear diagonalizável e $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ uma base (ordenada) de $\mathbb{R}^n$ formada por **vetores próprios de** f.

$$\begin{array}{rcccl} f(u_1) & = & \lambda_1 u_1 & = & \lambda_1 u_1 + 0 u_2 + \cdots + 0 u_n \\ f(u_2) & = & \lambda_2 u_1 & = & 0 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + 0 u_n \\ & \vdots & & \vdots & \\ f(u_n) & = & \lambda_n u_n & = & 0 u_1 + 0 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \end{array}$$

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

A matriz de f na base B é uma matriz diagonal

Aplicação diagonalizável e matriz diagonal - exemplo

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y,z) = (x+6y, x+2y, 2x+6y-z)$$

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_3}{=} (-1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda)-6\big) =$$

$$\det(A-\lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 4$$

$$\text{m.a.}(-1) = 2 \Rightarrow \text{m.g.}(-1) \leq 2$$

$$\text{m.a.}(4) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(4) = 1$$

Aplicação diagonalizável e matriz diagonal - exemplo

$$\text{m.g.}(-1) = ???$$

$$[A-(-1)I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\cdots]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{SPI}, \text{GI} = 2$$

$$\text{m.g.}(-1) = \dim\left(S_{-1}\right) = \text{GI} = 2$$

$$\text{m.g.}(-1) + \text{m.g.}(4) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

f é diagonalizável

$$2x + 6y = 0 \Leftrightarrow x = -3y$$

Soluções: $(-3y, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(0, 0, 1), \;\; y, z \in \mathbb{R}$

$$S_{-1} = \langle(-3, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$$

Aplicação diagonalizável e matriz diagonal - exemplo

Cálculo dos vetores próprios associados ao valor próprio 4:

$$[A - 4I_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} -3x + 6y = 0 \\ 10y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$$

Soluções: $(2y, y, 2y) = y(2, 1, 2),\ \ y \in \mathbb{R}$

$$S_4 = \langle (2, 1, 2) \rangle$$

Aplicação diagonalizável e matriz diagonal - exemplo

$$S_{-1} = \langle(-3,1,0),(0,0,1)\rangle \qquad S_4 = \langle(2,1,2)\rangle$$

$$\mathcal{B} = \big((-3,1,0),(0,0,1),(2,1,2)\big)$$

é uma base (ordenada) de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de f e

$$M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Aplicação diagonalizável

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. São equivalentes as seguintes afirmações:

- f é diagonalizável;
- a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de f é igual a n;
- existe uma base de $\mathbb{R}^n$ em relação à qual a matriz de f é diagonal.

Aplicação diagonalizável e matriz diagonal

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação linear diagonalizável

$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de f

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D$$

Seja A a matriz canónica de f. Tem-se:

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = [\mathcal{B}]^{-1} A [\mathcal{B}] \Leftrightarrow D = [\mathcal{B}]^{-1} A [\mathcal{B}]$$

Matriz diagonalizável

Uma matriz A, quadrada de ordem n, diz-se **diagonalizável** se for semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existem matrizes P e D, quadradas de ordem n, com P invertível e D matriz diagonal, tais que

$$D = P^{-1}AP$$

Neste caso, diz-se que P é uma matriz **diagonalizante** de A.

Matriz diagonalizável - exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 2$$

$$\text{m.a.}(1) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(1) = 1$$

$$\text{m.a.}(-1) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(-1) = 1$$

$$\text{m.a.}(3) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(3) = 1$$

$$\text{m.g.}(1) + \text{m.g.}(-1) + \text{m.g.}(2) = 1 + 1 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

logo A é diagonalizável

$$S_1 = \langle (1,0,0) \rangle, \quad S_{-1} = \langle (1,-1,0) \rangle, \quad S_2 = \langle (-2,1,1) \rangle$$

$$\mathcal{B} = \big((1,0,0), (1,-1,0), (-2,1,1) \big)$$

$$D = [\mathcal{B}]^{-1} A [\mathcal{B}] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz diagonalizante}}$$

Matriz diagonalizável - exemplo 2

Determine a matriz quadrada de ordem 2 com vetores próprios $u = (1, -2)$ e $v = (2, -5)$ associados aos valores próprios 3 e -3.

- **Matriz diagonal:** $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$
- **Matriz diagonalizante:** $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 12 \\ -60 & -27 \end{bmatrix} \end{aligned}$$