Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

9 - Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Índice

Revisão: Combinação linear e subespaço gerado

Seja V um espaço vetorial. Diz-se que o elemento u de V é **combinação linear** dos elementos $u_1, \ldots, u_k$ de V se existem escalares $a_1, \ldots, a_k (\in \mathbb{R})$ tais que

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k.$$

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $u_1, \ldots, u_k \in V$ é um subespaço vetorial de V, chamado **subespaço vetorial gerado por** $u_1, \ldots, u_k$ e denotado por $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$:

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \colon a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Os elementos $u_1, \ldots, u_k$ são os **geradores** de S.

Revisão: Dependência e independência linear

Diz-se que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ elementos de V são:

- **linearmente independentes** (l.i.) se a combinação linear nula:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots a_k u_k = 0_V$$

  implicar que todos os escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são (obrigatoriamente) nulos;

- **linearmente dependentes** (l.d.) se existem escalares $b_1, b_2, \ldots, b_k$ não todos nulos tais que:

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots b_k u_k = 0_V$$

  Neste caso, pelo menos um dos vetores é combinação linear dos restantes vetores.

Revisão: Base e dimensão

Um conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ diz-se uma **base de** V se:

- $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes
- $u_1, \ldots, u_n$ são geradores de V, ou seja $V = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$

Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base do espaço vetorial V então qualquer base de V tem n elementos e diz-se que V tem **dimensão** n. Escreve-se $\dim(V) = n$.

Subespaços de $\mathbb{R}^n$ - Subespaço gerado

Dimensão e base

$$S = \langle u_1 = (1,0,1,1), u_2 = (0,1,0,1), u_3 = (1,1,-1,0), u_4 = (1,1,0,1) \rangle$$

combinação linear nula:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 - a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ldots]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} = 3 \qquad u_1, u_2, u_3, u_4$ são l.d.

$r\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = 3 \qquad u_1, u_2, u_3$ são l.i.

$\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de S e $\dim(S) = 3$

Subespaços de $\mathbb{R}^n$ - Subespaço gerado

Seja $S = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Tem-se:

- $\dim(S) = r \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_k \end{bmatrix}$;
- o conjunto dos vetores geradores correspondentes às colunas dos pivots da matriz em escada obtida por eliminação de Gauss a partir da matriz $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_k \end{bmatrix}$ é uma base de S.

Dada $A^{n \times k}$ chama-se **espaço das colunas de A** ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas de A. Representa-se por $C(A)$ e tem-se:

$$\dim (C(A)) = r(A)$$

Dimensão e base

$$S = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} \text{SPI} \\ \text{GI} = 2 \end{array}$$

Soluções: $(-2y + w, y, 0, w) = y(-2, 1, 0, 0) + w(1, 0, 0, 1), y, w \in \mathbb{R}$

$$S = \langle \underbrace{(-2, 1, 0, 0)}_{u}, \underbrace{(1, 0, 0, 1)}_{v} \rangle \qquad u, v \text{ l.i.}$$

$\{u, v\}$ é uma base de S e $\dim(S) = 2 = \text{GI} = n - r(A)$

Subespaços de $\mathbb{R}^n$ - Soluções $AX = O$ - Núcleo de A

Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^n$ das soluções do sistema homogéneo $AX = O$, o **núcleo de A**:

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T = O\} = N(A)$$

Tem-se:

- $\dim(S) = n - r(A)$;
- o conjunto das soluções geradoras obtidas ao substituir cada variável livre por 1 e as restantes por 0 é uma base de S.

Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ chama-se **nulidade de A** à dimensão do núcleo de A. Tem-se:

$$\dim\left(N(A)\right) = n - r(A)$$

Subespaços associados a uma matriz

Determine a dimensão e uma base do núcleo de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & -1 & -k \end{bmatrix}$

$$N(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon A \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & -k & 0 \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- $k = -3 \Rightarrow \dim(N(A)) = n - r(A) = 3 - 2 = 1$

  Soluções: $(-z, 2z, z) = z(-1, 2, 1), \ z \in \mathbb{R}$

  $\{(-1, 2, 1)\}$ é uma base de $N(A)$

- $k \neq -3 \Rightarrow \dim(N(A)) = n - r(A) = 3 - 3 = 0$

  $\emptyset$ é a base de $N(A)$

Subespaços associados a uma matriz

Determine a dimensão e uma base do espaço das colunas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & -1 & -k \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & -1 & -k \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $k = -3 \Rightarrow \dim(C(A)) = r(A) = 2$

  $\{(1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, -1)\}$ é uma base de $C(A)$

- $k \neq -3 \Rightarrow \dim(C(A)) = r(A) = 3$

  $\{(1, 0, -1, 1), (0, -1, 1, -1), (1, 2, k, -k)\}$ é a base de $C(A)$

Subespaços de $\mathbb{R}^n$ - Equações

Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k, $0 < k < n$.

- Se $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é uma base de S então para qualquer $u \in S$ existem escalares $a_1, \ldots, a_k$ tais que:

  $$u = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \text{ - } \textbf{equação vetorial de } S$$

  Esta equação entre vetores pode separar-se em n equações entre números - **equações paramétricas de S**.

- S pode ser definido pelo conjunto solução de um SEL homogéneo com $n - k$ equações - **equações cartesianas de S.**

Subespaços de $\mathbb{R}^n$ - Equações - Exemplo 1

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \wedge y + z = 0 \wedge x - 2z = 0\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} \text{SPI} \\ \text{GI} = 1 \end{array}$$

$$\dim(S) = n - r(A) = 3 - 2 = 1$$

Equações cartesianas: $x + y - z = 0 \wedge y + z = 0$

Soluções: $(2z, -z, z) = z(2,-1,1),\ z \in \mathbb{R}$

$$\{(2,-1,1)\} \text{ é uma base de } S$$

Equação vetorial: $(x,y,z) = a(2,-1,1),\ a \in \mathbb{R}$

Equações paramétricas: $\begin{cases} x = -2a \\ y = -a \\ z = a \end{cases},\ a \in \mathbb{R}$

Subespaços de $\mathbb{R}^n$ - Equações - Exemplo 2

$$S = \langle \underbrace{(-1,3,2,1)}_{u}, \underbrace{(1,-2,1,1)}_{v}, \underbrace{(0,1,3,2)}_{w} \rangle$$

$$u = (x,y,z,t) \in S \Leftrightarrow (x,y,z,t) = a(-1,3,2,1) + b(1,-2,1,1) + c(0,1,3,2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x \\ 3 & -2 & 1 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \\ 1 & 1 & 2 & t \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+3x \\ 0 & 0 & 0 & z-3y-7x \\ 0 & 0 & 0 & t-2y-5x \end{array}\right]$$

$r\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = 2 = \dim(S) = r\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ e $\{u, v\}$ é uma base de S

Equação vetorial: $(x,y,z,t) = a(-1,3,2,1) + b(1,-2,1,1)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Equações paramétricas: $\begin{cases} x = -a + b \\ y = 3a - 2b \\ z = 2a + b \\ t = a + b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$r(A) = r(A|B) \Rightarrow z - 3y - 7x = 0 \wedge t - 2y - 5x = 0$$

Equações cartesianas: $z - 3y - 7x = 0 \wedge t - 2y - 5x = 0$