ISEL
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

10. Aplicações Lineares

Índice

Aplicação linear

Sejam U e V espaços vetoriais. Uma **aplicação ou transformação linear de U em V** é uma aplicação $f : U \to V$ que verifica as seguintes condições:

- $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in U;$
- $f(\lambda u) = \lambda f(u), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in U.$

Diz-se que:

- f preserva a soma de vetores;
- f preserva o produto de um vetor por um escalar.

Em particular,

- $f(0_U) = f(0 \cdot u) = 0 \cdot f(u) = 0_V$
- $f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + \cdots + a_n f(u_n)$

Aplicação linear: exemplo I

A aplicação

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad f(x, y, z) = (y, z, 0)$$

é uma aplicação linear:

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (y_1 + y_2, z_1 + z_2, 0) \\ &= (y_1, z_1, 0) + (y_2, z_2, 0) \\ &= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k(x, y, z)) &= f(kx, ky, kz) \\ &= (ky, kz, 0) \\ &= k(y, z, 0) \\ &= kf(x, y, z) \end{aligned}$$

Aplicação linear: exemplo II

A aplicação

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad f(x, y, z) = (x + 2y, x^2)$$

não é uma aplicação linear:

$$f((1, 1, 1) + (1, 1, -1)) = f(2, 2, 0) = (6, 4)$$

e

$$f(1, 1, 1) + f(1, 1, -1) = (3, 1) + (3, 1) = (6, 2).$$

Aplicação linear: exemplo III

A aplicação

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, c-d)$$

é uma aplicação linear:

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) = \\
&= ((a_1+a_2)+(b_1+b_2), (c_1+c_2)-(d_1+d_2)) \\
&= (a_1+b_1, c_1-d_1) + (a_2+b_2, c_2-d_2) \\
&= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) \\
&= (ka+kb, kc-kd) \\
&= k(a+b, c-d) \\
&= kf\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Aplicação linear: expressão analítica ou expressão geral

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear.
Se U tem dimensão n e $B = \{u_1 \ldots, u_n\}$ é uma base de U então qualquer vetor $u \in U$ escreve-se de maneira única como combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n$:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Como f preserva combinações lineares,

$$f(u) = f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + \cdots + a_n f(u_n)$$

logo **a imagem de qualquer vetor de U é combinação linear das imagens de uma base de U**.

Expressão analítica - exemplo I

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(1,0,0) = (2,-1),\ f(0,1,0) = (0,1) \text{ e } f(0,0,1) = (-1,1)$$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= x\, f(1,0,0) + y\, f(0,1,0) + z\, f(0,0,1) \\ &= x(2,-1) + y(0,1) + z(-1,1) \\ &= (2x - z, -x + y + z) \end{aligned}$$

A expressão analítica de f é:

$$f(x,y,z) = (2x - z, -x + y + z)$$

Expressão analítica - exemplo II

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(1,1) = (1,-1,2) \text{ e } f(1,2) = (0,1,1)$$

$$(x,y) = a(1,1) + b(1,2) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = x \\ a+2b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x - y \\ b = y - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= af(x(1,1) + bf(1,2) \\ &= (2x-y)\,f(1,1) + (y-x)\,f(1,2) \\ &= (2x-y)(1,-1,2) + (y-x)(0,1,1) \\ &= (2x-y, -2x+y+y-x, 4x-2y+y-x) \\ &= (2x-y, -3x+2y, 3x-y) \end{aligned}$$

A expressão analítica de f é:

$$f(x,y) = (2x-y, -3x+2y, 3x-y)$$

Aplicação linear: expressão analítica

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ então:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n,\ldots,a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n),$$

com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in [m]$ e $j \in [n]$.

São aplicações lineares:

- $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_1(x,y,z) = (x+2y, x-y+2z, x-z)$
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_2(x,y) = (x-y, y, 3x)$
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_3(x,y,z) = (2x-3y+z, 0)$
- $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_4(x,y) = (x-y, -x)$
- $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f_5(x,y) = (x, y, -x, 2y)$
- $f_6 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f_6(x,y,z,t) = (x+z, y-t, 3y, x+y+z+t)$

Imagem de um subespaço vetorial

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear. Se S é um subespaço vetorial de U então a **imagem de S**:

$$f(S) = \{f(u) \colon u \in S\}$$

é um subespaço vetorial de V.

Em particular, se

$$S = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$$

então

$$f(S) = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k) \rangle$$

Imagem de um subespaço vetorial - exemplo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y) = (x+y, 2x+2y, -x-y)$$

Se $S = \langle (1,2) \rangle$ então $f(S)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$f(S) = \langle f(1,2) \rangle = \langle (3,6,-3) \rangle$$

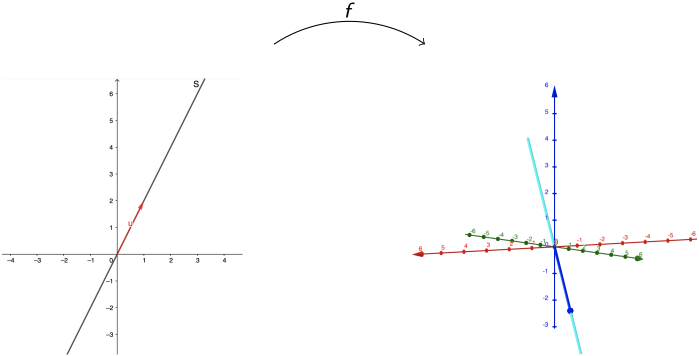


Imagem de um subespaço vetorial - exemplo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y) = (x+y, 2x+2y, -x-y)$$

Se $S = \langle (1,-1) \rangle$ então $f(S)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$f(S) = \langle f(1,-1) \rangle = \langle (0,0,0) \rangle = \{(0,0,0)\}$$

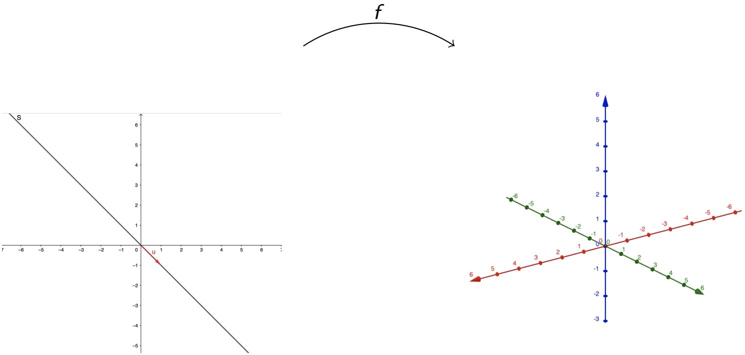


Imagem de um subespaço vetorial - exemplo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y) = (x+y, 2x+2y, -x-y)$$

$f(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$f(\mathbb{R}^2) = \langle f(1,0), f(0,1) \rangle = \langle (1,2,-1), (1,2,-1) \rangle = \langle (1,2,-1) \rangle$$

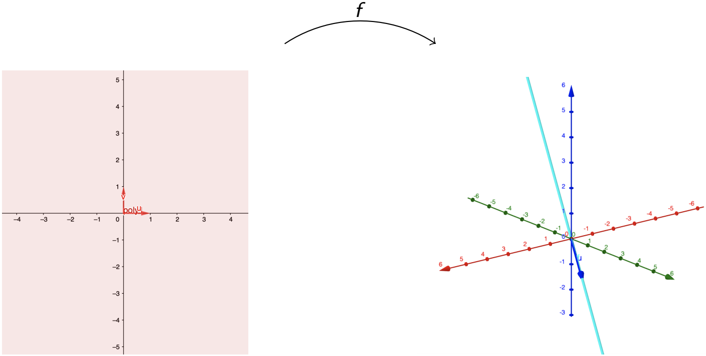


Imagem ou Contradomínio

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear. Ao subespaço vetorial $f(U)$ de V chama-se **imagem de f** e denota-se por $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) : u \in U\}.$$

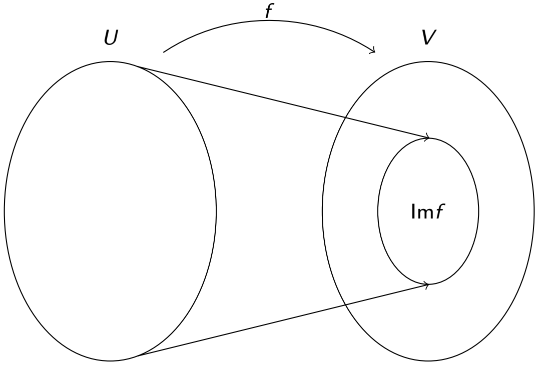


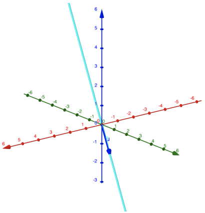
Imagem ou Contradomínio

Seja $f : U \longrightarrow V$ uma aplicação linear. Se $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U então:

$$\operatorname{Im}(f) = \langle f(u_1), \ldots, f(u_n) \rangle$$

Exemplo anterior:

$$\operatorname{Im}(f) = \langle f(1,0), f(0,1) \rangle = \langle (1,2,-1), (1,2,-1) \rangle = \langle (1,2,-1) \rangle$$



Aplicação linear sobrejetiva

Uma aplicação linear $f : U \longrightarrow V$ é **sobrejetiva** se

$$\mathrm{Im}(f) = V.$$

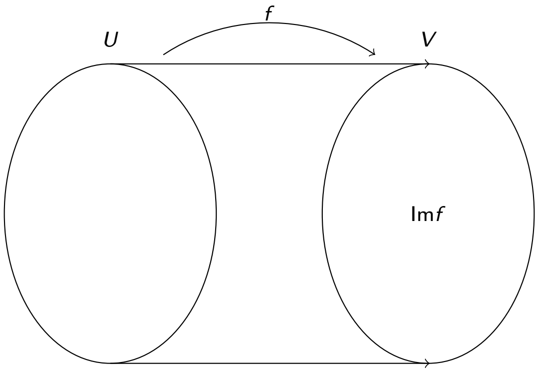


Imagem e sobrejetividade - exemplo I

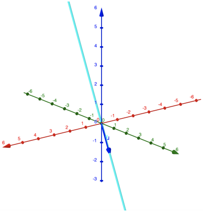
A aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y) = (x+y, 2x+2y, -x-y)$$

não é sobrejetiva pois

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1,2,-1) \rangle$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de **dimensão 1** (e não 3=dim($\mathbb{R}^3$))



- $\{(1,2,-1)\}$ é uma base de Im(f);
- Equações paramétricas de Im(f):

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Equações cartesianas de Im(f):

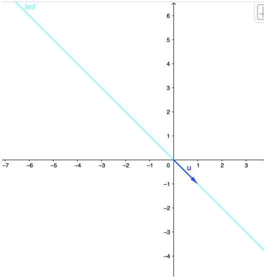
$$x + z = 0 \wedge y + 2z = 0$$

Imagem e sobrejetividade - exemplo II

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + 2y, -x - 2y)$ **não é sobrejetiva** pois

$$\mathrm{Im}f = \langle f(1,0), f(0,1)\rangle = \langle (1,-1), (2,-2)\rangle = \langle (1,-1)\rangle$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ de **dimensão 1** (e não $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$)



- $\{(1, -1)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(f)$;
- Equações paramétricas de $\mathrm{Im}(f)$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Equação cartesianas de $\mathrm{Im}(f)$:

$$x + y = 0$$

Imagem e sobrejetividade - exemplos

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, z)$

$$\text{Im} f = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,0), (1,0), (0,1)\rangle = \langle (1,0), (0,1)\rangle = \mathbb{R}^2$$

f **é sobrejetiva**

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + 2y, x - y + 2z, x - z)$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle \\ &= \langle (1,1,1), (2,-1,0), (0,2,-1)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 0 - 0 - 0 + 2 = 7 \neq 0$$

Os 3 geradores de $\text{Im}(f)$ são l.i. logo formam uma base de $\mathbb{R}^3$:

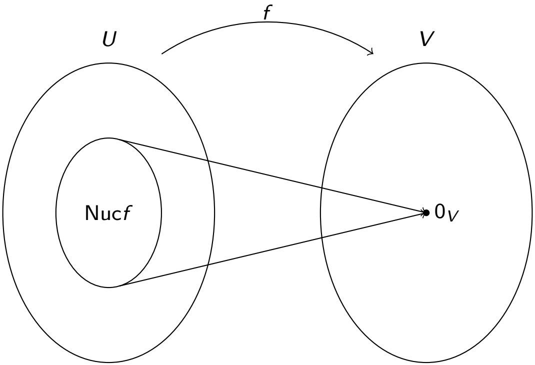
$$\text{Im}(f) = \langle (1,1,1), (2,-1,0), (0,2,-1)\rangle = \mathbb{R}^3$$

e f **é sobrejetiva**.

Núcleo

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear. Chama-se **núcleo** de f, e denota-se por $\mathrm{Nuc}(f)$, ao subespaço vetorial de U:

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{u \in U : f(u) = 0_V\}.$$



Exemplo I

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y)=(x+y,2x+2y,-x-y)$$

$$\text{Nuc}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)=(0,0,0)\}$$

$$f(x,y)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\2x+2y=0\\-x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\0=0\\0=0\end{cases}$$

Soluções: $(x,-x)=x(1,-1),\quad x\in\mathbb{R}$

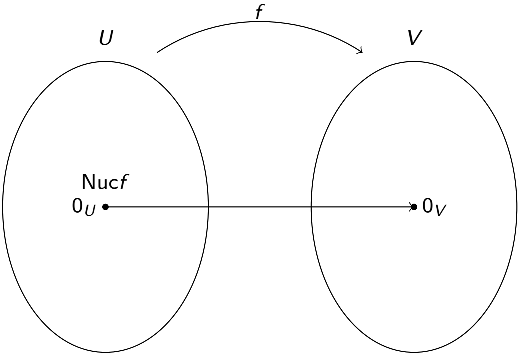
$$\text{Nuc}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x+y=0\}=\langle(1,-1)\rangle$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1 e $\{(1,-1)\}$ é uma base de $\text{Nuc}(f)$.

Aplicação linear injetiva

Uma aplicação linear $f : U \to V$ é **injetiva** sse

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{0_U\}.$$



Núcleo e injetividade - exemplos

- A aplicação linear

  $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y)=(x+y,2x+2y,-x-y)$

  não é injetiva pois

$$\mathrm{Nuc}(f)=\langle(1,-1)\rangle\neq\{(0,0)\}$$

- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(x+2y,-x-2y)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(f) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=(0,0)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+2y=0\wedge -x-2y=0\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+2y=0\}\\ &= \langle(-2,1)\rangle\end{aligned}$$

f **não é injetiva** pois $\mathrm{Nuc}(f)\neq\{(0,0)\}$

Núcleo e injetividade - exemplos

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y, z)$

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0 \wedge z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=-x \wedge z=0\} \\ &= \langle (1,-1,0) \rangle \end{aligned}$$

f **não é injetiva** pois $\text{Nuc}(f) \neq \{(0,0,0)\}$

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x+2y, x-y+2z, x-z)$

$$\text{Nuc}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x-y+2z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Logo $\text{Nuc}(f) = \{(0,0,0)\}$ e f **é injetiva**.

Imagem e Núcleo

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (x+y, 2x+2y, -x-y)$

$$\mathrm{Im}(f) = \langle (1,2,-1) \rangle \quad \text{e} \quad \mathrm{Nuc}(f) = \langle (1,-1) \rangle$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x+2y, -x-2y)$

$$\mathrm{Im} f = \langle (1,-1) \rangle \quad \text{e} \quad \mathrm{Nuc}(f) = \langle (-2,1) \rangle$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y, z)$

$$\mathrm{Im} f = \langle (1,0), (0,1) \rangle \quad \text{e} \quad \mathrm{Nuc}(f) = \langle (1,-1,0) \rangle$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (x+2y, x-y+2z, x-z)$

$$\mathrm{Im} f = \langle (1,1,1), (2,-1,0), (0,2,-1) \rangle \quad \text{e} \quad \mathrm{Nuc}(f) = \{(0,0,0)\}$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 3 + 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Teorema da dimensão

Seja U um espaço vetorial de dimensão finita.
Se $f : U \to V$ é uma aplicação linear então

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = \dim(U)$$

Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear . Chama-se:

- **característica de** f à dimensão da Imagem de f. Representa-se por c_f;
- **nulidade de** f à dimensão do núcleo de f. Representa-se por n_f.

Tem-se:

$$c_f + n_f = \dim(U)$$

Morfismos

Uma aplicação linear $f : U \to V$ diz-se um:

- **homomorfismo** de U em V;
- **monomorfismo** se é injetiva;
- **epimorfismo** se é sobrejetiva;
- **isomorfismo** se é bijetiva (injetiva e sobrejetiva);
- **endomorfismo** se $U = V$;
- **automorfismo** se é um endomorfismo bijetivo.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita.
Uma aplicação linear $f : U \to V$ é um:

- **monomorfismo** sse $n_f = 0$;
- **epimorfismo** sse $c_f = \dim(V)$;
- **isomorfismo** então $\dim(U) = \dim(V)$.

Morfismos - exemplo I

Considere o endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que
$f(x, y, z) = (x + y + z, y + 2z, 3z)$. É um automorfismo?

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,0), (1,1,0), (1,2,3)\rangle$$

$$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3 \text{ logo 3 vetores l.i.}$$

$$c_f = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 \Rightarrow n_f = \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 3 - 3 = 0$$

- $c_f = \dim(\mathbb{R}^3)$ logo f é um **epimorfismo**;
- $n_f = 0$ logo f é um **monomorfismo**.

f **é um automorfismo**

Morfismos - exemplo II

Prove que a aplicação linear $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, b-c, c+d, -d-a)$ é um isomorfismo.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \left\langle f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \right\rangle = \\ &= \langle (1,0,0,-1), (1,1,0,0), (0,-1,1,0), (0,0,1,-1) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow 4 \text{ vetores l.i.}$$

$$c_f = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 \Rightarrow n_f = \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 4 - 4 = 0$$

- $c_f = \dim(\mathbb{R}^4)$ logo f é um **epimorfismo**;
- $n_f = 0$ logo f é um **monomorfismo**.

f é um isomorfismo