4 - Espaços vetoriais.

4.1 Verifique quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

(a) $S = \{(x, 0, 0) : \; x \in \mathbb{R}\}$
(b) $S = \{(x, 1, 1) : \; x \in \mathbb{R}\}$
(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\}$
(d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z + 1\}$
(e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}\}$
(f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 1, \; a, b, c \in \mathbb{R}\}$
(g) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$
(h) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = y - z = 0\}$

4.2 Dos conjuntos-solução do sistema homogéneo $AX = 0$, indique os que correspondem a um plano que passa na origem, uma recta que passa na origem ou apenas a origem. No caso em que é um plano, determine a sua equação geral; no caso em que é uma recta, determine as suas equações reduzidas. Considere A a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$
(e) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$.

4.3 Averigue, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços dos espaços vetoriais indicados:

(a) $A = \{(x, y, z, w) : x + y + z = y + z + w = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(b) $B = \{(x, y, z, w) : z = x + y \wedge w = 2x + 3y\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(c) $C = \{(x, y, z, w) : z = x - y \wedge x = y - w + 1\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(d) $D = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(e) $E = \{(a, b, c, d, e) : b - c = 0 \wedge a = b + d\} \subseteq \mathbb{R}^5$
(f) $F = \{(x, y) : y - 2x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(g) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : b = 2c \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$
(h) $H = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & c \\ c & e & 0 \end{bmatrix} : c, e \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 3}$
(i) $I = \{A : A^T = A\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$

4.4 Nos espaços vetoriais indicados, verifique se o vetor $\overrightarrow{v}$ é combinação linear dos vetores dados e, em caso afirmativo, exiba uma combinação linear:

(a) $\overrightarrow{v} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{v}_1 = (3,5)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (0,1)$, em $\mathbb{R}^2$
(b) $\overrightarrow{v} = (2,3)$ e $\overrightarrow{v}_1 = (2,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (-1,1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,2)$, em $\mathbb{R}^2$
(c) $\overrightarrow{v} = (3,-1)$ e $\overrightarrow{v}_1 = (2,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (4,2)$, em $\mathbb{R}^2$
(d) $\overrightarrow{v} = (2,1)$ e $\overrightarrow{v}_1 = (3,-1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (4,2)$, em $\mathbb{R}^2$
(e) $\overrightarrow{v} = (1,-1,2)$ e $\overrightarrow{v}_1 = (1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0,1,1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,1,0)$, em $\mathbb{R}^3$
(f) $\overrightarrow{v} = (2,-1,0)$ e $\overrightarrow{v}_1 = (1,-2,1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,-1,0)$, em $\mathbb{R}^3$

4.5 Determine todos os valores reais k para os quais o vetor:

(a) $(0,k,5)$ é combinação linear dos vetores $(1,3,0)$ e $(1,0,2)$
(b) $(k,4,-k-11)$ é combinação linear dos vetores $(-1,1,2)$ e $(0,2,-3)$

4.6 Que condição deve impor aos números reais a, b e c, de modo a que o vetor (a,b,c) seja combinação linear de:

(a) $(1,2,1)$ e $(0,1,-1)$?
(b) $(-1,0,2), (1,1,1)$ e $(0,1,3)$?
(c) $(1,2,3)$?
(d) $(1,1,1), (1,1,0)$ e $(1,0,0)$?

4.7 No espaço vetorial das matrizes reais quadradas de ordem 2, $\mathbb{R}^{2\times 2}$, mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4.8 Verifique quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente dependentes. Nesses casos, escreva um vetor como combinação linear dos restantes:

(a) $\{(1,0),(2,1)\}$, em $\mathbb{R}^2$
(b) $\{(1,0),(2,2),(1,2)\}$, em $\mathbb{R}^2$
(c) $\{(1,0,1),(3,0,1),(0,1,2)\}$, em $\mathbb{R}^3$
(d) $\{(-5,1,3),(13,1,0),(1,1,2)\}$, em $\mathbb{R}^3$
(e) $\{(1,0,0,2),(1,1,2,1),(0,3,2,1),(2,3,4,3)\}$, em $\mathbb{R}^4$
(f) $\{(-1,1,1,-1),(2,1,1,3),(0,1,2,0),(3,1,0,1)\}$, em $\mathbb{R}^4$
(g) $\left\{\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right\}$, em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

4.9 Diga quais os valores reais do parâmetro a que tornam linearmente independentes os seguintes conjuntos de vetores, nos espaços vetoriais indicados:

(a) $\{(1,0,a),(3,1,-1),(a,1,-3)\}$, em $\mathbb{R}^3$
(b) $\{(1,0,0,0),(-1,a^2-1,3,0),(-1,1,1,0)\}$, em $\mathbb{R}^4$
(c) $\{(1,1,0,a),(1,a-1,a+1,0),(2,-1,a,a)\}$, em $\mathbb{R}^4$

4.10 Considere os vetores $\overrightarrow{v}_1 = (2,1,3)$, $\overrightarrow{v}_2 = (-1,-2,-3)$, $\overrightarrow{v}_3 = (1,1,2)$.

(a) Prove que os vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ são linearmente dependentes e escreva um destes vetores como combinação linear dos outros dois.
(b) Calcule a dimensão e uma base do subespaço gerado por $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$.

(c) Prove que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ é um plano e calcule a sua equação geral.

4.11 Verifique quais dos seguintes conjuntos de vetores são geradores ou bases de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(3,2,1),(3,2,0),(3,0,0)\}$ (b) $\{(1,-1,2),(-1,0,2),(1,-1,4),(2,1,5)\}$

4.12 Prove que $S = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,1,1),(-1,1,-1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ e indique, justificando, um subconjunto de S que seja base de $\mathbb{R}^3$.

4.13 Prove que $B = \{(1,-1,1),\ (-2,2,-1)\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes mas não é base de $\mathbb{R}^3$. Estenda B a uma base de $\mathbb{R}^3$.

4.14 Considere os vetores $\vec{v}_1 = (0,1,-1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,1,0,1)$, $\vec{v}_3 = (1,2,-1,2)$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine 4 vetores que pertençam ao subespaço gerado por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

(b) Prove que o subespaço gerado por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ tem dimensão 2 e defina-o analiticamente.

(c) Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha dois dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

4.15 Seja $S = \langle (0,-1,1),(2,0,1),(0,2,k) \rangle$. Para todos os valores reais k:

(a) Verifique se o vetor $(4,1,1)$ pertence a S.

(b) Determine a dimensão e uma base de S.

(c) Defina analiticamente o subespaço S.

4.16 Calcule a dimensão e uma base dos seguintes subespaços dos espaços vetoriais indicados:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0 \ \wedge \ x-y=0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2z \wedge y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(c) $C = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z=0 \ \wedge \ 2x+3z-w=0\} \subseteq \mathbb{R}^4$

4.17 Relativamente aos conjuntos da questão 4.3 que são subespaços dos espaços indicados, indique uma base e a dimensão respectiva.

4.18 Calcule uma base e a dimensão do espaço vetorial das soluções do sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases}$$

4.19 Considere os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \langle (1,0,1,0),(2,-3,2,0),(1,-1,1,0) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w=0\}.$$

(a) Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços F e G.

(b) Defina analiticamente o subespaço F.

(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua 3 vetores de G.

(d) Determine uma base e a dimensão de $F \cap G$.

(e) Determine as coordenadas do(s) vetor(es) da base de $F \cap G$ em relação às bases (ordenadas) apresentadas na alínea (a).

4.20 Em $\mathbb{R}^{2\times 2}$, considere os subespaços vetoriais $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+d=0 \right\}$ e $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

(a) Determine uma base e a dimensão de F.

(b) Indique uma base de G e complete-a de forma a obter uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Caracterize os vetores de G por meio de condições.

(d) Determine uma base e a dimensão de $F \cap G$.

4.21 Seja $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Indique qual das afirmações seguintes é falsa:

(a) F é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right)$ é uma sequência linearmente independente de vetores de F.

(c) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de F.

(d) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma sequência linearmente independente de vetores de F.

4.22 No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ considere os subespaços vetoriais:

$$F = \langle (1,1,2), (0,1,1) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{(x,y,z) : x + y = 0\}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é falsa:

(a) $G = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$.

(b) $(2,-2,3) \in F \cap G$.

(c) $F = \{(x,y,z) : x + y - z = 0\}$.

(d) $\dim(F \cap G) = 1$.

4.23 Em $\mathbb{R}^{2\times 2}$, considere a sequência de vetores:

$$s = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Indique qual das afirmações seguintes é falsa:

(a) s é uma sequência de vetores linearmente independente.

(b) O subespaço gerado por s é $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

(d) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

4.24 No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ considere os subconjuntos:

$$F = \{(x,y,z) : xy = 0\} \quad \text{e} \quad G = \{(x,y,z) : x = 0\}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é falsa:

(a) F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) $(4,0,1) \in F \cup G$.

(c) $G \subseteq F$.

(d) G é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4.25 Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sem efectuar cálculos, indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Um conjunto com $n + 1$ vetores é linearmente independente.

(b) Um conjunto com n geradores de V é linearmente dependente.

(c) Um conjunto com $n - 1$ vetores é um conjunto de geradores de V.

(d) Um conjunto com n vetores linearmente independentes é um conjunto de geradores de V.

(e) Um conjunto de geradores de V linearmente independente não pode ter menos do que n elementos, mas pode ter mais do que n.

(f) Um conjunto linearmente independente com menos de n vetores pode ser ampliado de modo a obter uma base de V.