7 - Produto Interno. Ortogonalidade.

7.1 Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $||\alpha \overrightarrow{u}|| = |\alpha| \, ||\overrightarrow{u}||$. Conclua que, se $\overrightarrow{u}$ é não nulo, então o vetor $\dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ é unitário, isto é, tem norma igual a 1.

7.2 Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vetores não nulos e linearmente dependentes de $\mathbb{R}^n$. Prove que o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ou é 0 ou é π.

7.3 Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vetores não nulos e ortogonais de $\mathbb{R}^n$. Mostre que

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras).}$$

7.4 Seja $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que, $\sphericalangle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \pi/3$ e $||\overrightarrow{u}_1|| = ||\overrightarrow{u}_2|| = \sqrt{2}$. Calcule os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais os vetores $k\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2$ e $\overrightarrow{u}_1 + 2\overrightarrow{u}_2$ são ortogonais.

7.5 Considere o vetor $\overrightarrow{u} = (-1, 0, 2, -2)$. Determine os valores de k para os quais $||k\overrightarrow{u}|| = 15$.

7.6 Calcule os valores de k para os quais os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais:

(a) $\overrightarrow{u} = (3, -1, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (k, 7, 1)$

(b) $\overrightarrow{u} = (k, 1, k)$ e $\overrightarrow{v} = (k, 6, -5)$

7.7 Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno canónico, considere os vetores $\overrightarrow{u} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, -1, 2)$ e o subespaço $F = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$. Determine:

(a) A projecção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$, $proj_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{v}$ e a componente de $\overrightarrow{v}$ perpendicular a $\overrightarrow{u}$, $perp_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{v}$.

(b) O produto externo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

(c) Uma base ortogonal de F.

(d) Uma base ortonormada de $F^{\perp}$.

(e) uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base de F.

7.8 Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno canónico, considere os vetores $\overrightarrow{u} = (2, 2, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 1, 8)$.

(a) Mostre que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais.

(b) Determine um vetor $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ de modo a que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ forme uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

7.9 Considere a recta $r \equiv \begin{cases} y = 2x \\ z = -x \end{cases}$ e o plano $\alpha \equiv x + 2y - z = 0$.

(a) Prove que a recta r e o plano α são ortogonais.

(b) Determine uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de r e α.

7.10 Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno canónico, determine uma base ortonormada de $F^\perp$ e uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ só formada por vetores de F e de $F^\perp$, sendo:

(a) $F = \langle (1,-2,1),(0,1,-1) \rangle$

(b) $F = \langle (1,-1,0) \rangle$

(c) $F = \langle (1,0,1),(0,1,1),(2,2,4) \rangle$

(d) $F = \langle (0,1,-2),(0,-3,6) \rangle$

7.11 Utilizando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ (produto interno canónico), a partir dos vetores $(1,0,1),(1,0,-2),(0,3,4)$.

7.12 Em $\mathbb{R}^4$, com o produto interno canónico, considere o subespaço

$$F = \langle (-1,0,1,1),(1,0,1,2),(0,-2,0,1) \rangle.$$

Verifique que os 3 geradores de F são linearmente independentes e obtenha uma base ortonormada de F a partir da dada.

7.13 Escreva $\overrightarrow{v} = (2,1,3,0)$ como soma de um vetor de $F = \langle (-1,1,0,1),(1,1,1,0) \rangle$ com um vetor de $F^\perp$.

7.14 Em $\mathbb{R}^4$, com o produto interno canónico, determine uma base ortonormada de $F^\perp$ e uma base ortonormada de $\mathbb{R}^4$ só formada por vetores de F e de $F^\perp$, sendo:

(a) $F = \{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 : x+y+z+w=0\}$

(b) $F = \{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 : x=0 \wedge z=0\}$