ISEL
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

8 - (In)dependência linear. Base e dimensão.

Índice

Revisão: Subespaço vetorial

Um **subespaço vetorial** do espaço vetorial V é um subconjunto não vazio S de V tal que:

1. $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$;
2. $u \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in S$.

Note-se que, como as operações definidas em V verificam as 8 propriedades da definição de espaço vetorial, um **subespaço vetorial é também um espaço vetorial**.

Se S_1 e S_2 são subespaços do espaço vetorial V então:

- $S_1 \cap S_2$ é um subespaço vetorial de V;
- $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \colon s_1 \in S_1 \wedge s_2 \in S_2\}$ é um subespaço vetorial de V.

Revisão: Subespaço vetorial - exemplo

O conjunto das soluções de um SEL homogéneo com n incógnitas **é um subespaço vetorial de** $\mathbb{R}^n$:

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T = O\},$$

com A matriz do tipo m por n.

Revisão: Combinação linear e subespaço gerado

Seja V um espaço vetorial. Diz-se que o elemento u de V é **combinação linear** dos elementos $u_1, \ldots, u_k$ de V se existem escalares $a_1, \ldots, a_k (\in \mathbb{R})$ tais que

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k.$$

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, \ldots, v_k \in V$ é um subespaço vetorial de V, chamado **subespaço vetorial gerado por $v_1, \ldots, v_k$** e denotado por $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$:

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k : a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Os elementos $v_1, \ldots, v_k$ são os **geradores** de S.

Combinação linear e subespaço gerado

Defina analiticamente o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por
$u = (1, -1, 2)$, $v = (-1, 2, -1)$ e $w = (0, 1, 1)$.

$$(x, y, z) \in \langle u, v, w\rangle \Leftrightarrow (x, y, z) = a(1, -1, 2) + b(-1, 2, -1) + c(0, 1, 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = x \\ -a + 2b + c = y \\ 2a - b + c = z \end{cases} \qquad \text{SP}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 2 & 1 & y \\ 2 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y + x \\ 0 & 0 & 0 & z - y - 3x \end{array}\right]$$

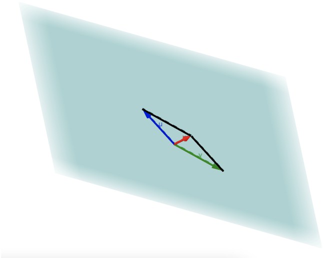
$$r(A) \underset{\text{SP}}{=} r(A|B) \Leftrightarrow z - y - 3x = 0$$

Definição analítica: $\langle u, v, w\rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y - 3x = 0\}$

Combinação linear e subespaço gerado

$$u = (1, -1, 2),\ v = (-1, 2, -1) \text{ e } w = (0, 1, 1)$$

$$\langle u, v, w \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z - y - 3x = 0\}$$



$$w = u + v \text{ logo } w \text{ é combinação linear dos vetores } u \text{ e } v$$

$$\langle u, v, w \rangle = \langle u, v \rangle$$

Se u_i é combinação linear de $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k$ então

$$\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k \rangle$$

Combinação linear nula

$$u = (1, -1, 2),\ v = (-1, 2, -1) \text{ e } w = (0, 1, 1)$$

$w = u + v$ logo w é combinação linear dos vetores u e v

$u = -v + w$ logo u é combinação linear dos vetores v e w

$v = -u + w$ logo v é combinação linear dos vetores u e w

$u + v - w = (0, 0, 0)$ **combinação linear nula**

O vetor nulo de V, 0_V, é combinação linear de quaisquer vetores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de V:

$$0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_k = 0_V$$

(combinação linear nula trivial)

Dependência e independência linear

Diz-se que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ elementos de V são:

- **linearmente independentes** (l.i.) se a combinação linear nula:

  $$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots a_k u_k = 0_V$$

  implicar que todos os escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são (obrigatoriamente) nulos;
- **linearmente dependentes** (l.d.) se existem escalares $b_1, b_2, \ldots, b_k$ não todos nulos tais que:

  $$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots b_k u_k = 0_V$$

  Neste caso, pelo menos um dos vetores é combinação linear dos restantes vetores.

Dependência e independência linear

$$u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (2,5,3) \text{ e } u_3 = (0,1,1)$$

$$a_1(1,1,0) + a_2(2,5,3) + a_3(0,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_1 + 5a_2 + a_3 = 0 \\ 3a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A) = 2 < n = 3$ SPI logo os 3 vetores são l.d.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 3a_2 + a_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -2a_2 \\ a_3 = -3a_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Por exemplo, se $a_2 = 1$ temos a combinação linear nula:

$$-2u_1 + u_2 - 3u_3 = 0$$

Por exemplo, u_2 é combinação linear de u_1 e u_3: $u_2 = 2u_1 + 3u_3$

Dependência e independência linear

Prove que os polinómios $p(x) = 1 - x^2$ e $q(x) = x + x^2$ de $\mathbb{P}_2(x)$ são l.i.

$$ap(x) + bq(x) = 0 \Leftrightarrow a(1 - x^2) + b(x + x^2) = 0 \Leftrightarrow a + bx + (b - a)x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Os escalares a e b são obrigatoriamente nulos logo os polinómios são l.i.

(In)dependência linear - propriedades

Sejam $u_1, \ldots, u_k$ elementos do espaço vetorial V.

1. O vetor nulo, 0_V, é linearmente dependente.

2. u é linearmente independente se e só se $u \neq 0_V$.

3. $u_1, \ldots, u_k$ $(k \geq 2)$ são linearmente dependentes se e só se pelo menos um deles é combinação linear dos restantes.

4. Se algum dos vetores $u_1, \ldots, u_k$ é o vetor nulo, então $u_1, \ldots, u_k$ são linearmente dependentes.

5. Se $u_1, \ldots, u_k$ são linearmente independentes então $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$ são linearmente dependentes sse u_{k+1} é combinação linear de $u_1, \ldots, u_k$.

(In)dependência linear - propriedades

Sejam $u_1, \ldots, u_k$ elementos do espaço vetorial V.

6. Se $u_1, \ldots, u_k$ são linearmente dependentes e $u_1, \ldots, u_m \in S \subseteq V$ então todos os vetores de S são linearmente dependentes.

7. Se $u_1, \ldots, u_k$ são linearmente independentes, então os vectores de qualquer seu subconjunto são linearmente independentes.

Prove que 4 vetores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes

A combinação linear nula $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$ produz um sistema homogéneo $AX = O$ com 4 incógnitas e 3 equações logo $r(A) \leq 3 < n = 4$ e o sistema é SPI e os vetores u_1, u_2, u_3, u_4 são l.d.

Base e dimensão

Um conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ diz-se uma **base de V** se:

- $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes
- $u_1, \ldots, u_n$ são geradores de V, ou seja $V = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$

$$\{(1,0),(0,1)\} \text{ é uma base de } \mathbb{R}^2$$

- $a(1,0) + b(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow (1,0),(0,1)$ são l.i.
- $?\langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2?$

$$(x,y) = a(1,0) + b(0,1) \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right] \quad \text{SP}$$

$$\langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$$

Base e dimensão

- $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$
- $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$

$$\vdots$$

- $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. A esta base dá-se o nome de **base canónica** de $\mathbb{R}^n$

Base e dimensão

Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base do espaço vetorial V então qualquer base de V tem n elementos e diz-se que V tem **dimensão** n. Escreve-se $\dim(V) = n$.

É uma base de $\mathbb{R}^n$ o conjunto com n elementos:

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$$

logo **qualquer base de** $\mathbb{R}^n$ **tem** n **elementos:**

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Base e dimensão

- **É uma base de** $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o conjunto com 4 matrizes:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

logo **qualquer base de** $\mathbb{R}^{2\times 2}$ **tem 4 elementos:**

$$\dim\left(\mathbb{R}^{2\times 2}\right) = 4$$

- **É uma base de** $\mathbb{R}^{2\times 3}$ o conjunto com 6 matrizes:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

logo **qualquer base de** $\mathbb{R}^{2\times 3}$ **tem 6 elementos:**

$$\dim\left(\mathbb{R}^{2\times 3}\right) = 6$$

> Em geral, **qualquer base de** $\mathbb{R}^{m\times n}$ **tem** $m \times n$ **elementos:**
>
> $$\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = m \times n$$

Base e dimensão

- **É uma base de** $\mathbb{P}_1(x) = \{a + bx \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ o conjunto com 2 monómios:

$$\{1, x\}$$

logo **qualquer base de** $\mathbb{P}_1(x)$ **tem 2 elementos:**

$$\dim \mathbb{P}_1(x) = 2$$

- **É uma base de** $\mathbb{P}_2(x) = \{a + bx + cx^2 \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ o conjunto com 3 monómios:

$$\{1, x, x^2\}$$

logo **qualquer base de** $\mathbb{P}_2(x)$ **tem 3 elementos:**

$$\dim \mathbb{P}_2(x) = 3$$

Em geral, **qualquer base de** $\mathbb{P}_n(x)$ **tem** $n + 1$ **elementos:**

$$\dim(\mathbb{P}_n(x)) = n + 1$$

Base e dimensão

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

- Se $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto gerador de V então (todos os vetores de $\mathcal{B}$ são l.i. e) $\mathcal{B}$ **é uma base de** V;
- Se $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e todos os vetores de $\mathcal{B}$ são l.i. então ($\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V e) $\mathcal{B}$ **é uma base de** V.

Prove que $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(1,-1,1),(1,0,-2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

$$a(1,2,3) + b(1,-1,1) + c(1,0,-2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a-b=0 \\ 3a+b-2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2+0+2+3-0+4 = 11 \neq 0$$

$r(A) = 3$ SPD **3 vetores l.i.**

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ logo B é uma base de $\mathbb{R}^3$

Base e dimensão

Calcule uma base e a dimensão do subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado por $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 5, 3)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}) = 2 = r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix})$$

logo os 3 vetores são l.d. e os 2 vetores v_1, v_2 são l.i.

O vetor v_3 é combinação linear de v_1, v_2 logo

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\{v_1, v_2\} \text{ é uma base de } S \text{ e } \dim S = 2$$

Base e dimensão

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

- Seja $m > n$. Se $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é um **conjunto de geradores de** V então existe (pelo menos) um subconjunto de C que é uma base de V.

- Se $v_1, \ldots, v_k \in V$ são **linearmente independentes**, com $1 \leq k < n$, é possível escolher $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ tais que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

Base e dimensão

Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,0,1),\; v_2 = (0,1,1),\; v_3 = (1,1,2) \text{ e } v_4 = (1,-1,1)$$

Prove que $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ e determine um subconjunto de C que seja base de $\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 = x \\ a_2 + a_3 - a_4 = y \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 1 & 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\cdots}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-x-y \end{array}\right]$$

$$r(A) = 3 = r(A|B)$$

O sistema é possível logo v_1, v_2, v_3, v_4 geram $\mathbb{R}^3$.

Note-se que, para provar que v_1, v_2, v_3, v_4 geram $\mathbb{R}^3$ bastaria mostrar que:

$$r\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}\right) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

Base e dimensão

O conjunto $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ mas os 4 vetores são l.d.
Temos que eliminar um vetor de C de modo a obter uma base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_4 \end{bmatrix}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

logo $\{v_1, v_2, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Note-se que:

- v_3 é combinação linear de v_1, v_2, v_4.
- $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$
- $r(\begin{bmatrix} v_1 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ logo $\{v_1, v_3, v_4\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^3$

Base e dimensão

Os vetores $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ são l.i.. Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua estes 2 vetores.

Queremos um vetor $v_3 = (x, y, z)$ tal que v_1, v_2, v_3 sejam l.i.. Para tal:

$$r\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\right) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \quad \text{ou} \quad \det\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\right) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z \end{vmatrix} = x + y + z \neq 0$$

Por exemplo, se $x = 0$, $y = 0$ e $z = 1$ tem-se $x + y + z \neq 0$ logo

$$\{v_1, v_2, v_3 = (0, 0, 1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base ordenada de V.
Qualquer elemento u de V **escreve-se de maneira única como combinação linear dos elementos de** $\mathcal{B}$, isto é, existem **escalares únicos** $c_1, \ldots, c_n$ tais que:

$$v = c_1 u_1 + \cdots c_n u_n$$

Estes escalares designam-se por **coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$** e escreve-se:

$$u = (c_1, \ldots, c_n)_{\mathcal{B}}$$

Coordenadas

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \text{e} \quad C = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

Calcule as coordenadas de $v = (2,1,0)$ em relação às bases B e C.

$$v = (2,1,0) = 2(1,0,0) + 1(1,0,0) + 0(0,0,1) = (2,1,0)_B$$

$$v = a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ b+c=1 \\ a+c=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\cdots]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{cases} a + \frac{3}{2} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ b - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$v = (2,1,0) = \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{3}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)_C$$

Exercício

Considere os vetores $u = (-1, 0, 2)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 1, -1)$ e o subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \langle (1, 4, 2), (3, 1, -5) \rangle$$

(a) Prove que $u, v, w \in S$

(b) Prove que $B = \{v, w\}$ é uma base de S

(c) Calcule as coordenadas do vetor u em relação à base B