Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

Álgebra Linear e Geometria Analítica

12. Matrizes de uma Aplicação Linear

Índice

Matriz de uma aplicação linear

Sejam $f : U \longrightarrow V$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}_U = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base (ordenada) de U e $\mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_m)$ uma base (ordenada) de V. Chama-se **matriz de f nas bases $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$** (ou relativamente às bases $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$), e denota-se por $M(f, \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$, à matriz do tipo m por n:

$$M(f, \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m \\ f(u_2) &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{m2} v_m \\ &\vdots \\ f(u_n) &= a_{n1} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m \end{aligned}$$

Em particular, $$M(f, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}) = M_f$$

Matriz de uma aplicação linear

Determine a matriz de
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (x-y, y, 3x)$ nas bases ordenadas

$$\mathcal{B} = \big((-1,1),(1,1)\big) \text{ e } \mathcal{B}' = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$$

Como

$$\begin{array}{rcccccccc} f(-1,1) & = & (-2,1,-3) & = & -2(1,1,1) & + & 3(0,1,1) & + & (-4)(0,0,1) \\ f(1,1) & = & (0,1,3) & = & 0(1,1,1) & + & 1(0,1,1) & + & 2(0,0,1) \end{array}$$

a matriz de f nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ é

$$M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz de uma aplicação linear

Seja $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ uma base ordenada de um espaço vetorial U e seja $f : U \longrightarrow U$ uma aplicação linear. Determine $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ sabendo que:

$$f(u_1) = u_3 + 2u_4, \quad f(u_2) = 0_U, \quad f(u_3) = u_1, \quad f(u_4) = u_2$$

Como

$$\begin{array}{lclllllll} f(u_1) & = & 0u_1 & + & 0u_2 & + & 1u_3 & + & 2u_4 \\ f(u_2) & = & 0u_1 & + & 0u_2 & + & 0u_3 & + & 0u_4 \\ f(u_3) & = & 1u_1 & + & 0u_2 & + & 0u_3 & + & 0u_4 \\ f(u_4) & = & 0u_1 & + & 1u_2 & + & 0u_3 & + & 0u_4 \end{array}$$

a matriz de f nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ é

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz $\rightarrow$ expressão analítica

Considere as bases de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \text{ e } \mathcal{B}' = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$$

Determine a expressão analítica de $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) = (2,1,0)$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0(1,0,0) + 4(0,1,0) + 0(0,0,1) = (0,4,0)$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) = (0,1,0)$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) = (0,1,0)$$

Matriz $\to$ expressão analítica

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = af\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + bf\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) + cf\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) + df\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = a(2,1,0) + b(0,4,0) + c(0,1,0) + d(0,1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ a + 2b = y \\ 3b + 2c + d = z \\ a + b - c = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y-x}{2} \\ c = \frac{x+y-2w}{2} \\ d = \frac{x-5y+2z+4w}{2} \end{cases}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = x(2,1,0) + \frac{y-x}{2}(0,4,0) + \frac{x+y-2w}{2}(0,1,0) + \frac{x-5y+2z+4w}{2}(0,1,0) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (2x, z+w, 0)$$

Matriz de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base (ordenada) de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_m)$ uma base (ordenada) de $\mathbb{R}^m$.
Tem-se

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m \\ f(u_2) &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{m2} v_m \\ &\vdots \\ f(u_n) &= a_{n1} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m \end{aligned}$$

Escrita matricial:

$$\begin{bmatrix} f(u_1) & f(u_2) & \ldots & f(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} f(u_1) & f(u_2) & \dots f(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} f(u_1) & f(u_2) & \dots f(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{bmatrix} M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

Utilizando a matriz canónica de f:

$$\boxed{M_f \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{bmatrix} M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

Abreviadamente,

$$M_f \begin{bmatrix} \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}' \end{bmatrix} M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

$$M_f = \begin{bmatrix} \mathcal{B}' \end{bmatrix} M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} \mathcal{B} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} \mathcal{B}' \end{bmatrix}^{-1} M_f \begin{bmatrix} \mathcal{B} \end{bmatrix}$$

Matriz de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

Determine a matriz de

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x,y) = (x-y, y, 3x)$$

nas bases

$$\mathcal{B} = \{(-1,1),(1,1)\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$$

$$M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \left[\mathcal{B}'\right]^{-1} M_f \left[\mathcal{B}\right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriz de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

Considere a base $\mathcal{B} = \{(3,5),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine a expressão geral da aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_f = [\mathcal{B}]\, M(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\, [\mathcal{B}]^{-1}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -9 \\ 30 & -16 \end{bmatrix}$$

logo

$$f(x,y) = (17x - 9y, 30x - 16y)$$

Operações com aplicações lineares

Se $f : U \longrightarrow V$ e $g : U \longrightarrow V$ são aplicações lineares então:

- a soma de f com g
$$f + g : U \longrightarrow V \text{ tal que } (f+g)(u) = f(u) + g(u)$$
é uma aplicação linear;
- a multiplicação de f por um real k
$$kf : U \longrightarrow V \text{ tal que } (kf)(u) = kf(u)$$
é uma aplicação linear;

Em particular se U e V têm dimensão finita e $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$ são bases de U e V, respetivamente, então:

- $M(f+g; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) = M(f; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) + M(g; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$;
- $M(kf; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) = k \cdot M(f; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)$.

Operações com aplicações lineares

Sejam $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com:

$$M(f; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(g; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_U = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_V = \big((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big)$$

Defina a aplicação linear $f + g$.

$$M(f+g; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$f + g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(f+g)(x,y,z) = (3x + 2y + z, x + z, 2x)$

Composição de aplicações lineares

Se $f : U \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow W$ são aplicações lineares então

$$g \circ f : U \longrightarrow W \text{ tal que } (g \circ f)(u) = g\big(f(u)\big)$$

é uma aplicação linear.

Em particular se U, V e W têm dimensão finita e $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ são bases de U, V e W, respetivamente, então

$$M(g \circ f; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W) = M(g; \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) \times M(f; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V).$$

Composição de aplicações lineares

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que

$f(x,y) = (2y, x-y, -3x)$ e $g(x,y,z) = (2x+y, y-z, -x+2y+z)$.

$(g \circ f) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x,y) &= g\big(f(x,y)\big) \\
&= g(2y, x-y, -3x) \\
&= \big(2(2y)+(x-y),(x-y)-(-3x),-2y+2(x-y)+(-3x)\big) \\
&= (x+3y, 4x-y, -x-4y)
\end{aligned}$$

$$M_{g \circ f} = M_g \times M_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma aplicação linear

Se $f : U \longrightarrow V$ é uma aplicação linear **bijetiva** então a inversa de f:

$$f^{-1} : V \longrightarrow U \text{ tal que } (f^{-1} \circ f)(u) = u$$

é uma aplicação linear.
Em particular se U e V têm dimensão finita e $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$ são bases de U e V, respetivamente, então

$$M(f^{-1}; \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_U) = \big(M(f; \mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V)\big)^{-1}.$$

Inversa de uma aplicação linear

Prove que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x-y, -x+2y)$ é invertível e defina a função inversa de f.

$$\det(M_f) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

logo f é bijetiva e

$$M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

logo

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f^{-1}(x,y) = (2x+y, x+y)$$