LEIC

Álgebra Linear e Geometria Analítica - 2020/21 - SV

---

5 - Aplicações Lineares

5.1 Verifique se as seguintes aplicações são ou não lineares:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_1(x,y) = (x-y, 2y, 1)$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_2(x,y) = (x-y, 2y, 2x+3y)$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_3(x,y) = |x+y|$

(d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_4(x,y,z) = (2z+1, x+2y)$

(e) $f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_5(x,y,z) = (xy, 2y, x+z)$

(f) $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_6(x,y) = (x^2, 0)$

(g) $f_7 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_7(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 0 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix}$

(h) $f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_8(a,b) = (2a-b, a+6b)$

(i) $f_9 : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $f_9\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+w & y-z \\ 0 & 2z+w \end{bmatrix}$

(j) $f_{10} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que $f_{10}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3b \\ a^2 \\ c-d \end{bmatrix}$

(k) $f_{11} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_{11}\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x+w, y+z)$

(l) $f_{12} : \mathbb{R}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $f_{12}(X) = AX$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

5.2 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(1,0,0,0) = (2,-1), \quad f(0,1,0,0) = (-2,0), \quad f(0,0,1,0) = (3,-2) \quad \text{e} \quad f(0,0,0,1) = (1,1).$$

Determine a expressão geral de f e calcule $f(1,3,4,-2)$.

5.3 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,0) = (2,3,-2), \quad T(1,1,0) = (4,1,4) \quad \text{e} \quad T(1,1,1) = (5,1,-7).$$

Determine a expressão geral de T e calcule $T(2,0,1)$.

5.4 Considere a função linear $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(-2,1) = (-1,2,0) \quad \text{e} \quad g(1,3) = (0,-3,5).$$

Determine a expressão geral de g e calcule $g(2,-3)$.

5.5 Determine o Núcleo e a Imagem das aplicações lineares do exercício 1.

5.6 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$. Quais dos seguintes vetores:

(a) $(1, -4)$, $(5, 0)$, $(-3, 12)$ pertencem à Imagem de f?

(b) $(5, 10)$, $(3, 2)$, $(1, 1)$ pertencem ao Núcleo de f?

5.7 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(x, y, z, w, t) = (x - z + 3w - t, x + 3w - t, 2x - z + 5w - t, -z + w)$$

(a) Calcule a imagem do vetor $(1, 0, -1, 2, 3)$.

(b) Determine a dimensão e uma base dos subespaços $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Nuc}(T)$.

(c) Defina analiticamente os subespaços Imagem e Núcleo de T.

(d) T é sobrejetiva? E injetiva? Justifique.

(e) Determine todos os vetores que têm por imagem o vetor $(2, 2, 4, 1)$.

5.8 Defina analiticamente os subespaços Imagem e Núcleo da aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

Diga, justificando, se g é um automorfismo (endomorfismo bijetivo) de $\mathbb{R}^3$.

5.9 Dada a função linear $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h(x, y) = (y, 0)$, prove que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Nuc}(h)$.

5.10 Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Prove que:

(a) se $n > m$ então f não é injetiva;

(b) se $n < m$ então f não é sobrejetiva;

(c) se $n = m$ então f é injetiva se e só se é f sobrejetiva.

5.11 Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $T_3 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que

$$T_1(x, y, z) = (x + y - z, -2x + z), \quad T_2(x, y) = (x, x + y, 0, -y) \quad \text{e} \quad T_3(x, y, z, w) = (x - w, 2y - z, 3x + z).$$

Defina as seguintes aplicações lineares:

(a) $T_2 \circ T_1$

(b) $T_3 \circ T_1$

(c) $T_1 \circ T_3$

(d) $T_1 \circ T_3 \circ T_2$

(e) $T_3 \circ T_2 \circ T_1$

5.12 Seja p a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy:

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } p(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Prove que:

(a) $p \circ p = p$;

(b) a Imagem de p é um plano e calcule a sua equação geral;

(c) o Núcleo de p é uma reta e calcule as suas equações reduzidas.

5.13 Prove que a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y - z, x + 2y - z)$ é:

(a) bijetiva (injetiva e sobrejetiva);

(b) invertível e defina a aplicação linear inversa de g.

5.14 Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ a matriz canónica da aplicação linear T.

(a) Calcule a dimensão e uma base da Imagem e do Núcleo de T para todos os valores reais de a.

(b) Considere $a = 1$.

i. Prove que T não é injetiva e indique dois vetores que têm a mesma imagem.

ii. Determine todos os valores reais de k para os quais $(1, 2, k)$ pertence à Imagem de T. Conclua, com base no resultado obtido, por que razão T não é sobrejetiva.

5.15 Sejam $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f_B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $f_C : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, as aplicações lineares cujas matrizes canónicas são, respetivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine as expressões gerais de f_A, f_B e f_C.

(b) Determine a característica e a nulidade de f_A, f_B e f_C.

(c) Justifique se f_A, f_B e f_C são injetivas ou sobrejetivas.

(d) Calcule uma base da Imagem e do Núcleo de f_A, f_B e f_C.

5.16 Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e considere o endomorfismo g de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definido por

$$g(X) = AX - XA$$

(a) Determine o Núcleo de g e indique uma base respetiva.

(b) Determine a Imagem de g e exiba uma sua base.

(c) Diga, justificando, se g é invertível.

5.17 Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ a aplicação linear tal que $f(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b - c \\ 2b & a \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $\text{Nuc} f = \{(0, 0, 0)\}$;

(b) Justifique que $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \text{Im} f$;

(c) Sem determinar $\text{Im} f$, justifique que f não é sobrejetiva;

(d) Indique uma base de $\text{Im} f$.

5.18 Considere a aplicação linear $h : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$h\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & x + y \\ z + w & 2w \end{bmatrix}$$

(a) Escreva a matriz de h em relação à base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathcal{B}_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$.

(b) Mostre que h é invertível e determine a expressão geral de h^{-1}.

5.19 Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(2, 0, 0) = (2, 0), \quad f(0, 1, 0) = (2, 1) \quad \text{e} \quad (2, -1, 1) \in \text{Nuc} f$$

e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é a respetiva matriz canónica.

(a) Mostre que $f(x, y, z) = (x + 2y, y + z)$, para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Caracterize o Núcleo e a Imagem de g. Será g injetiva? E sobrejetiva? Justifique.

(c) Determine $(f \circ g)(x, y)$, qualquer que seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e mostre que $f \circ g$ é um automorfismo de $\mathbb{R}^2$.

5.20 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e h o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é A.

(a) Mostre que h é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

(b) Escreva a matriz de h em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$.

(c) Determine $h^{-1}(x, y, z)$, qualquer que seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

5.21 Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Calcule a matriz de T relativamente à base:

(a) canónica de $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$.

5.22 Considere a função linear $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y, z) = (2x - y, 2y - z)$. Calcule a matriz de g relativamente às bases:

(a) canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 1))$.

5.23 Em $\mathbb{R}^{2\times 2}$, considere a base canónica, $\mathcal{B}_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$, e o endomorfismo f cuja matriz canónica é

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right)$ e $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$.

(b) Seja $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ uma nova base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

5.24 Seja $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz canónica de uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Calcule:

(a) a matriz de f relativamente às bases $\mathcal{B} = ((1, 3), (-2, 4))$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0))$;

(b) $[f(1, 3)]$ e $[f(-2, 4)]$;

(c) $[f(1, 3)]_{\mathcal{B}'}$ e $[f(-2, 4)]_{\mathcal{B}'}$.

5.25 Seja $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz canónica de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(a) Calcule a matriz de T relativamente à base ordenada $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 0))$;

(b) $\left[T(1,-1,0)\right]$, $\left[T(1,0,-1)\right]$ e $\left[T(1,0,0)\right]$;

(c) $\left[T(1,-1,0)\right]_{\mathcal{B}}$, $\left[T(1,0,-1)\right]_{\mathcal{B}}$ e $\left[T(1,0,0)\right]_{\mathcal{B}}$.

5.26 Considere a matriz $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, com $\mathcal{B} = ((1,3),(2,-1))$ e $B' = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Calcule a matriz canónica e defina a aplicação linear f.

5.27 Considere a matriz $M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, com $\mathcal{B} = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,-1),(0,1,-1),(1,-1,0))$. Calcule a matriz canónica e defina a função linear g.