Teoria da Computação

Autômatos de Pilha

Mirtha Lina Fernández Venero
mirtha.lina@ufabc.edu.br

outubro 2017

Sumário

Autômatos de Pilha

Equivalência de GLCs e APs

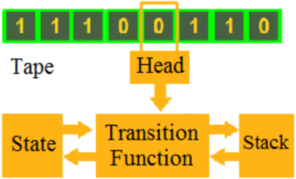
Linguagens livres e não livres de contexto

Bibliografia

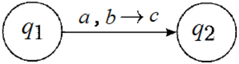
Autômatos de Pilha

Inventado por Anthony Gervin Oettinger in 1961

Definição: $\mathbf{A} = (\mathbf{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{q_0}, \delta, \mathbf{F})$



- Q conjunto *finito* de estados
- Σ alfabeto de entrada
- Γ alfabeto da pilha
- $q_0 \in Q$ estado inicial
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$ função de transição de estados



- $F \subseteq Q$ conjunto de estados finais ou de aceitação

A.G. Oettinger. Automatic Syntactic Analysis and the Pushdown Store. Proceedings of Symposia on Applied Mathematics, Vol. 12, Providence, RI, American Mathematical Society, 1961.

Exemplo de autômato de pilha determinístico

$$\mathbf{A1} = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, \$\}, \delta, q_1, \{q_1, q_4\})$$

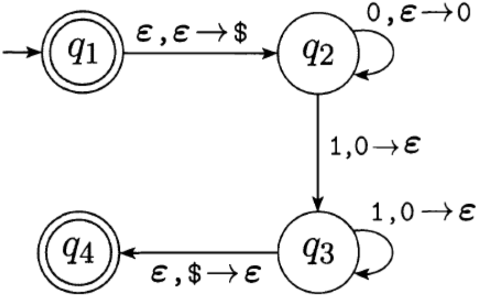
$$\delta(q_1, \epsilon, \epsilon) = \{(q_2, \$)\}$$

$$\delta(q_2, 0, \epsilon) = \{(q_2, 0)\}$$

$$\delta(q_2, 1, 0) = \{(q_3, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_3, 1, 0) = \{(q_3, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_3, \epsilon, \$) = \{(q_4, \epsilon)\}$$



Autômatos de Pilha

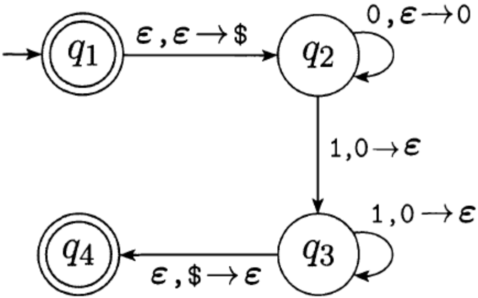
Características

- A memória do autômato é caracterizada por seus estados e uma pilha infinita
- A configuração é representada pelo estado atual, a porção não lida da entrada e o conteúdo da pilha
- Em cada passo, o autômato pode ler ou não **um** símbolo da entrada e empilhar/desempilhar ou não **um** símbolo da pilha

Processo de Reconhecimento

- Começar pelo **estado inicial** com a pilha vazia
- Ler cada símbolo da cadeia e mudar a configuração dependendo de δ até chegar no final da cadeia ou não ter como avançar. A cadeia é reconhecida se após ler todos seus símbolos, o último estado é final

Exemplo de reconhecimento da cadeia 000111

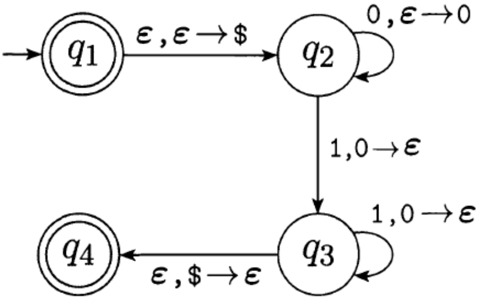


$(q1, 000111, \epsilon) \to (q2, 000111, \$) \to (q2, 00111, 0\$) \to$

$(q2, 0111, 00\$) \to (q2, 111, 000\$) \to (q3, 11, 00\$) \to$

$(q3, 1, 0\$) \to (q3, \epsilon, \$) \to (q4, \epsilon, \epsilon)$ **A1 aceita a cadeia!**

Exemplo de reconhecimento da cadeia 000101



$(q1, 000101, \epsilon) \to (q2, 000101, \$) \to (q2, 00101, 0\$) \to$

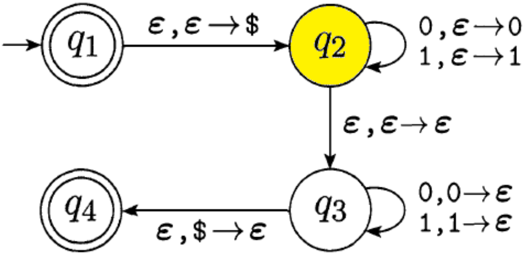
$(q2, 0101, 00\$) \to (q2, 101, 000\$) \to (q3, 01, 00\$)$

A1 não aceita a cadeia!

Exemplo de autômato de pilha não determinístico

$$\mathbf{A2} = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \$\}, \delta, q_1, \{q_1, q_4\})$$

$$\delta(q_1, \epsilon, \epsilon) = \{(q_2, \$)\}$$



$$\delta(q_2, 0, \epsilon) = \{(q_2, 0)\}$$

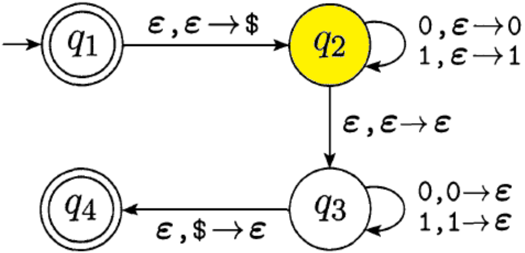
$$\delta(q_2, 1, \epsilon) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_2, \epsilon, \epsilon) = \{(q_3, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_3, 0, 0) = \{(q_3, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_3, 1, 1) = \{(q_3, \epsilon)\} \qquad \delta(q_3, \epsilon, \$) = \{(q_4, \epsilon)\}$$

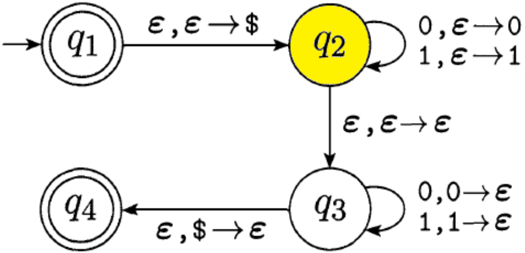
Exemplo de reconhecimento da cadeia 00



$(q1, 00, \epsilon) \rightarrow (q2, 00, \$) \rightarrow$

- $(q3, 00, \$) \rightarrow (q4, 00, \epsilon)$ **Não!**
- $(q2, 0, 0\$) \rightarrow$
  - $(q2, \epsilon, 00\$) \rightarrow (q3, \epsilon, 00\$)$ **Não!**
  - $(q3, 0, 0\$) \rightarrow (q3, \epsilon, \$) \rightarrow (q4, \epsilon, \epsilon)$ **OK! A2 aceita a cadeia**

Exemplo de reconhecimento da cadeia 01



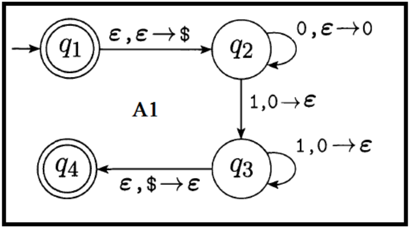
$(q1, 01, \epsilon) \to (q2, 01, \$) \to$

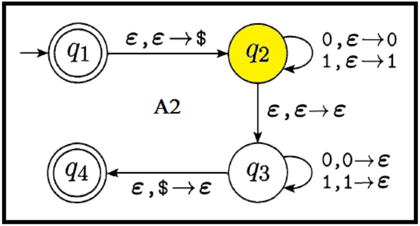
- $(q3, 01, \$) \to (q4, 01, \epsilon)$ **Não!**
- $(q2, 1, 0\$) \to$
  - $(q2, \epsilon, 10\$) \to (q3, \epsilon, 10\$)$ **Não!**
  - $(q3, 1, 0\$)$ **Não!**

A2 não aceita a cadeia

Linguagem aceita por um autômato de pilha A

O conjunto de todas as cadeias reconhecidas ou aceitas por A

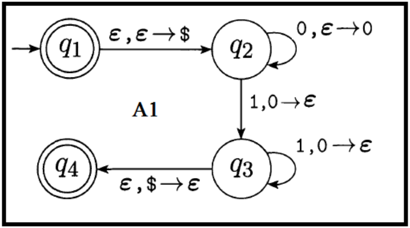


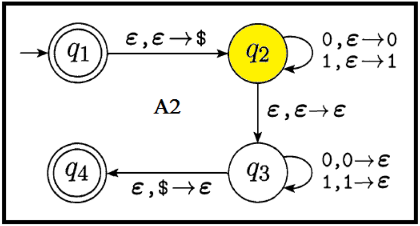


$L(A1) = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ $\quad$ $L(A2) = \{ww^r \mid w \in (0+1)^*\}$

Linguagem aceita por um autômato de pilha A

O conjunto de todas as cadeias reconhecidas ou aceitas por A



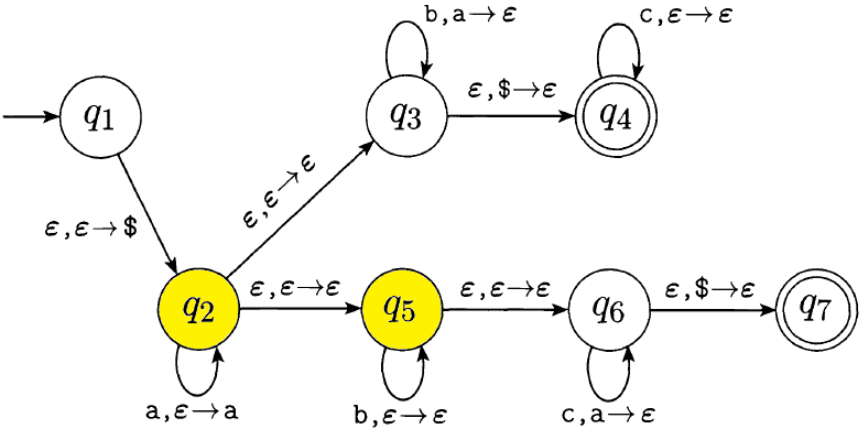


$L(A1) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ $\quad$ $L(A2) = \{ww^r \mid w \in (0+1)^*\}$

Exercício: Escreva AP para reconhecer as seguintes linguagens

- $L(A3) = \{a^n b^m \mid n \geq 0\} \cup \{a^n c^{2n} \mid m > n \geq 0\}$
- $L(A4) = \{w \mid w \in (a|b|c)^*, w = w^r\}$

Qual é a linguagem que reconhece o seguinte AP?



Universidade Federal do ABC

Sumário

Autômatos de Pilha

Equivalência de GLCs e APs

Linguagens livres e não livres de contexto

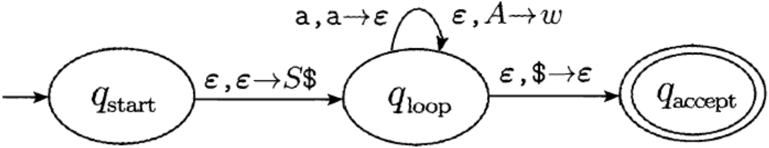
Bibliografia

Equivalência de GLCs e APs

Uma linguagem é livre de contexto se e somente se ela é reconhecida por algum autômato de pilha

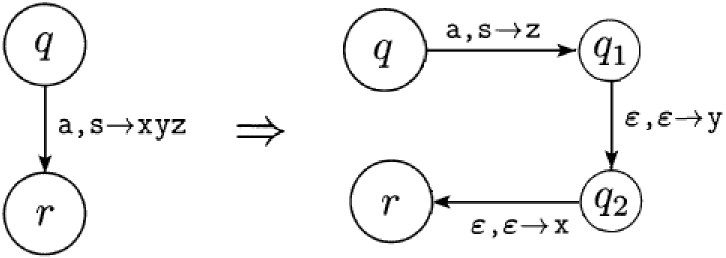
Ideia da Prova: $\Rightarrow$ Se uma linguagem L é livre de contexto então existe uma GLC que a gera. Precisamos construir um AP (não determinístico), a partir da GLC, que reconheça a linguagem.

- o alfabeto de entrada da GLC e AP coincidem
- O alfabeto da pilha inclui todos os símbolos terminais e não terminais da GLC além de \$
- Usar um estado com loops para cada regra e símbolo terminal



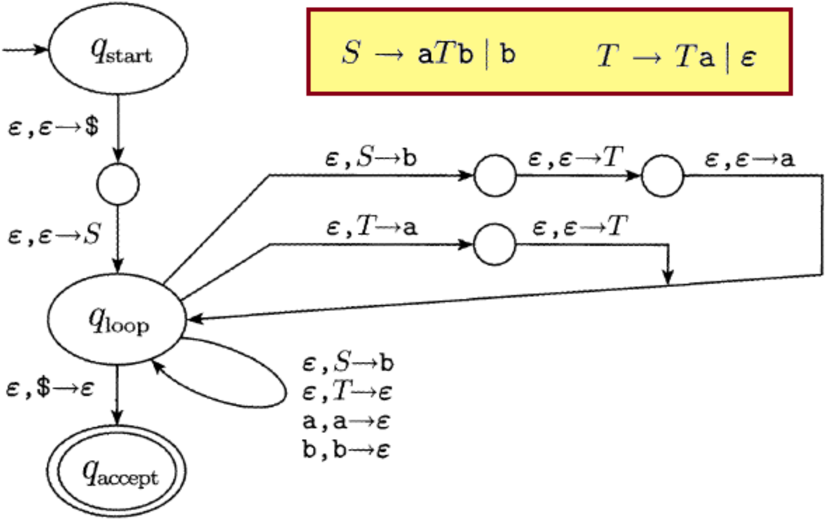
Equivalência de GLCs e APs

- acrescentar estados intermediários para definir de forma correta δ



Equivalência de GLCs e APs - Exemplo

$$S \rightarrow \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b} \qquad T \rightarrow T\mathtt{a} \mid \varepsilon$$



Sumário

Autômatos de Pilha

Equivalência de GLCs e APs

Linguagens livres e não livres de contexto

Bibliografia

Lema do bombeamento (Pumping Lemma)

Se L é uma linguagem livre de contexto, então existe um número p (comprimento do bombeamento) tal que se s é uma cadeia de tamanho pelo menos p, então ela pode ser dividida em cinco partes $s = uvxyz$ que satisfazem as seguintes condições

(1) para todo $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in L$

(2) $|vy| > 0$

(3) $|vxy| \leq p$

Lema do bombeamento (Pumping Lemma)

Se L é uma linguagem livre de contexto, então existe um número p (comprimento do bombeamento) tal que se s é uma cadeia de tamanho pelo menos p, então ela pode ser dividida em cinco partes $s = uvxyz$ que satisfazem as seguintes condições

(1) para todo $i \geq 0$, $uv^i xy^i z \in L$

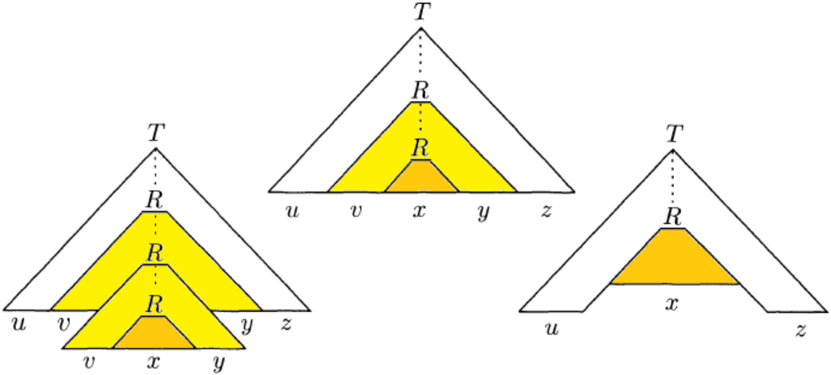
(2) $|vy| > 0$

(3) $|vxy| \leq p$

Ideia da Prova: Como achar o p? Se L é livre de contexto, existe uma GLC que gera L. Seja b o número máximo de símbolos na parte direita duma regra da gramatica. Se a árvore sintática duma cadeia gerada tem altura h então a árvore tem b^h folhas no máximo. Escolhendo $p = b^{|N|} + 1$ toda cadeia s tal que $|s| \geq p$ terá árvores de altura no mínimo $|N| + 1$

Lema do bombeamento (Pumping Lemma)

Ideia da Prova: Se a menor árvore de s tem altura no mínimo $|N| + 1$ então ela tem um caminho onde algum não terminal está repetido, garantindo (1). Escolher a menor árvore garante (2) enquanto escolher as ocorrências mais baixas de R garante (3).



Uso do Lema do bombeamento

Para provar que uma linguagem L não é livre de contexto podemos achar uma cadeia de L que não possa ser bombeada.

Exemplo: Prove que $L_1 = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$ não é LC

Prova: Suponhamos que L_1 é livre de contexto. Então pelo lema do bombeamento existe um comprimento do bombeamento p. Escolhemos $s = a^p b^p c^p$ e tentamos dividir $s = uvxyz$ para bombear. Por (3), vxy tem um ou dois tipos de símbolos.

- Se todos os símbolos são iguais então $uv^2xy^2z \notin L$ pois tem um símbolo com quatro ocorrências a mais
- Se v (ou y) tem mais dum tipo de símbolo então $uv^2xy^2z \notin a^*b^*c^*$
- Se x tem mais dum tipo de símbolo então $uv^2xy^2z \notin L$ pois tem um símbolo com duas ocorrências a menos

Uso do Lema do bombeamento

Para provar que uma linguagem L não é livre de contexto podemos achar uma cadeia de L que não possa ser bombeada.

Exemplo: Prove que $L_2 = \{ ww \mid w \in (0+1)^* \}$ não é LC

Prova: Suponhamos que L_2 é livre de contexto. Então pelo lema do bombeamento existe um comprimento do bombeamento p. Escolhemos $s = 0^p1^p0^p1^p$ e tentamos dividir $s = uvxyz$.

- Se todos os símbolos de uxy são iguais então $uv^2xy^2z \notin L$ pois ao dividir em duas metades o primeiro ou o último símbolo serão diferentes. O mesmo acontece se uxy está numa das metades
- Se uxy está no centro u e y têm símbolos diferentes. Então $uv^0xy^0z = 0^p1^i0^j0^p \notin L$ pois por (2), i ou j é diferente de p

Universidade Federal do ABC

Algumas propriedades

As linguagens livres de contexto são fechadas para as seguintes operações:

- união e concatenação; porém não intersecção
- intersecção ou diferença com uma linguagem regular
- fechamento de Kleene (*) e fechamento positivo (+)
- reverso e homomorfismos

Não existe algoritmo para:

- determinar se uma GLC é ambígua
- determinar se uma LLC é inerentemente ambígua
- determinar se duas LLCs são a mesma
- determinar se a intersecção de duas LLCs é vazia

Sumário

Autômatos de Pilha

Equivalência de GLCs e APs

Linguagens livres e não livres de contexto

Bibliografia

Universidade Federal do ABC

Bibliografia Básica

1. **M. Sipser, Introduction to the Theory of Computation, PWS Publishing Company, January 1997.**
2. J. E. Hopcroft, R Motwani and J. D. Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages and Computation,Addison-Wesley, Second edition, 2001.
3. Compilers: Principles, Techniques, and Tools (2nd Edition). Alfred Aho, Monica Lam, Ravi Sethi, and Jeffrey Ullman. Addison-Wesley, 2006