

Année 2008 - 2009



## **TREX**

Filtrage des images par transformation de Fourier Optique

Koly Romain  
Lecrubier Vincent

## Table des matières

1 - Introduction.....	4
2 - Montage expérimental.....	5
2.1 - Théorie	5
2.2 - Montage	5
3 - Diffraction.....	6
3.1 - Trou circulaire	6
3.2 - Trous circulaires	8
3.3 - Fente	9
3.4 - Double fente	12
3.5 - Réseau	14
3.6 - Double Réseau	17
4 - Filtrage.....	20
4.1 - Réseau	20
4.2 - Photographie Tramée	21
4.3 - Multiplexe	24
4.4 - Lignes de directions différentes	29
5 - Fonction de transfert de modulation.....	35
6 - Conclusion.....	36
7 - Annexes.....	37
7.1 - Fonction usuelles	37



# 1 Introduction

L'optique de Fourier est un domaine de l'optique ondulatoire se basant sur la notion de transformé de Fourier. L'outil de base de cette optique ondulatoire est le principe de Huygens-Fresnel permettant de calculer l'intensité dans les phénomènes d'interférence et de diffraction. On peut notamment retrouver des résultats classiques tels que les fentes d' Young et la tache d' Airy grâce à ce principe. Une approche plus ludique de ce principe consiste à effectuer l'observation à très grande distance (théoriquement à l'infini), afin d'obtenir une modélisation simplifiée connue sous le nom d'approximation de Fraunhofer.

La conséquence principale de cette approximation consiste en le résultat suivant: une onde plane en incidence normale sur un objet formera, « à l'infini », sa transformée de Fourier. Plus exactement, elle forme la transformée de Fourier du facteur de transmission de l'objet.

Dans la pratique, une observation à l'infini est impossible, on choisit donc d'utiliser une lentille convergente. En effet, on peut montrer que la diffraction de Fraunhofer est aussi valable dans le plan focal image d'une lentille.

La transformée de Fourier a pour principal intérêt d'étudier un phénomène dans le domaine fréquentiel. En acoustique, elle permet de passer de l'étude d'une onde selon son évolution temporelle à son étude fréquentielle. En optique de Fourier, la transformée de Fourier s'effectue par rapport à l'espace. On a donc défini des fréquences spatiales conjuguées aux coordonnées spatiales. Et ainsi, on visualise les fréquences spatiales dans le plan de Fourier.

Dans un premier temps nous avons cherché à valider cette théorie de l'optique ondulatoire de manière expérimentale, en tentant de reconnaître les caractéristiques d'objets simples (fentes, trous, réseaux...) diffractés dans le plan de Fourier.

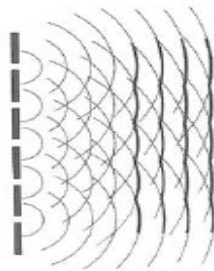
Ensuite, nous nous sommes intéressés à la principale application de l'optique de Fourier: le filtrage spatial. Nous avons cherché différents filtres permettant de modifier l'image observée en modifiant le spectre spatial de l'objet. Nous avons, par exemple utilisé un filtre passe bas (modélisé par une fente) pour gommer les contours de l'image objet, ou encore un filtre spatial permettant de supprimer les rayures sur une image.

## 2 Montage expérimental

### 2.1 Théorie

Le principe de Huygens-Fresnel a été énoncé par Huygens en 1618 et précisé par Fresnel en 1818:

*« Chaque point d'un front d'onde non obstrué dans un certain temps sert de source d'une ondelette sphérique de même fréquence. L'amplitude de l'onde en n'importe quel point derrière le front résulte de la superposition de toutes ces ondelettes (en considérant leurs amplitudes et leurs phases). »*



*Illustration: La propagation d'une onde vue comme la superposition d'ondelettes.*

#### Théorie de Rayleigh-Sommerfeld:

D'un point de vue calculatoire le principe de Huygens-Fresnel n'est pas très confortable, ainsi en 1896 Sommerfeld a développé une formule mathématique correspondant au principe de Huygens-Fresnel pour un diaphragme plan quelconque:

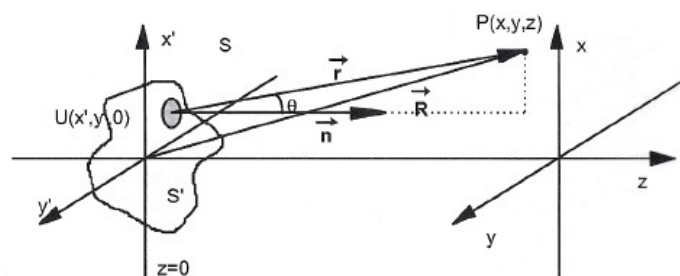
$$U(P(x, y, z)) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S'} U(x', y', 0) \cdot \frac{(\exp(ikr))}{r} \cdot \cos \theta \cdot dx' dy'$$

#### Notations:

Le terme  $U(P)/U$ : Champ scalaire dans le diaphragme / plan de diffraction.

Le terme  $r$ : distance entre le point  $(x', y', 0)$  et  $P(x, y, z)$ .

Le terme  $\theta$ : angle entre la normale à la surface du diaphragme et  $\vec{r}$ .



*Illustration de la formule de Rayleigh-Sommerfeld.*

Interprétation de la formulation précédente:

- L'intégrale représente la superposition des ondelettes.
- Le terme en  $1/r$  représente la conservation de l'énergie pour une onde sphérique.
- Le terme  $\cos(\theta)$  correspond à l'inclinaison de la surface d'intégration du diaphragme vue par le point  $P(x,y,z)$ .
- Le terme  $\exp(jkr)$  correspond à la variation de phase de l'onde sur le trajet  $\vec{r}$ .
- Le terme  $\frac{1}{(i\lambda)}$  correspond à un terme correctif pour l'amplitude et la phase.

**Approximation de Fresnel:**

- On choisit de travailler à faible inclinaison  $\theta$ :  
 $\cos\theta=1$  et  $1/r = 1/z$
- On choisit de travailler près de l'axe optique si il existe ou bien  $x \ll z$ ,  $(x-x') \ll 1$  et  $y \ll z$ ,  $(y-y') \ll z$  ( On suppose que la taille du diaphragme est petite selon  $x'$  et  $y'$  par rapport à  $z$ ).

On en déduit la relation suivante:

$$kr = kz. \left(1 + \frac{1}{2z^2} \cdot ((x-x')^2 + (y-y')^2)\right)$$

D'où la formulation dans l'approximation de Fresnel suivante:

$$U(P(x, y, z)) = \frac{\exp(ikz)}{(i\lambda)} \iint_{S'} U(x', y', 0) \exp\left(\frac{ik}{2z} \cdot ((x-x')^2 + (y-y')^2)\right) dx' dy'$$

**Approximation de Fraunhofer:**

L'approximation de Fraunhofer consiste en une hypothèse supplémentaire au cas précédent:

Les dimensions de  $x'$  et  $y'$  sont souvent très petites devant  $z$ , on va donc négliger les termes quadratiques:

$$kz. \left(1 + \frac{1}{2z^2} \cdot ((x-x')^2 + (y-y')^2)\right) = kz + k \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{2z} - k \cdot \frac{(xx' + yy')}{z} + k \cdot \frac{(x'^2 + y'^2)}{2z}$$

$$\text{Avec } k \cdot \frac{(x'^2 + y'^2)}{2z} \ll 1$$

On obtient alors:

$$U(P(x, y, z)) = \frac{\exp ik \left( z + \frac{(x^2 + y^2)}{2z} \right)}{(i\lambda)} \iint_{S'} U(x', y', 0) \exp\left(\frac{-ik}{z} \cdot (xx' + yy')\right) dx' dy'$$

### Interprétation des approximation:

On définit le nombre  $Nf = \pi \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{(\lambda \cdot z)}$ , appelé le nombre de Fresnel, et ainsi:

- Si  $Nf \ll 1$  alors on peut utiliser l'approximation de Fraunhofer.
- Si  $Nf \approx 1$  alors on utilise l'approximation de Fresnel.
- Si  $Nf \gg 1$  alors on se retrouve dans le domaine de l'optique géométrique.

### Transformation de Fourier:

On définit la transformée de Fourier par la formule suivante:

$$TF(f(x, y)) = F(f_x, f_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \cdot \exp(-i2\pi(x \cdot f_x + y \cdot f_y)) dx dy$$

$$f_x = \frac{x}{\lambda f}$$

$$f_y = \frac{y}{\lambda f}$$

Expression de l'approximation de Fraunhofer à l'aide de la transformé de Fourier:

$$U(P(x, y, z)) = \frac{\exp ik \left( z + \frac{(x^2 + y^2)}{2z} \right)}{(i\lambda)} \iint_{S'} U(x', y', 0) \exp(-i2\pi(f_x \cdot x' + f_y \cdot y')) dx' dy'$$

Donc:

$$U(P(x, y, z)) = \frac{\exp ik \left( z + \frac{(x^2 + y^2)}{2z} \right)}{(i\lambda)} TF(U)(f_x, f_y)$$

D'où l'expression de l'intensité:

$$I(x, y, z) = \frac{1}{(\lambda^2 z^2)} \cdot TF(U)(f_x, f_y) \cdot \overline{TF}(U)(f_x, f_y)$$

### 2.1.1 Limitation du système

Nous avons tout au long de notre travail expérimental utilisé l'approximation de Fraunhofer, c'est pourquoi nous avons dû nous limiter aux phénomènes de diffraction se situant près de l'axe optique du système pour obtenir des résultats cohérents.

## 2.2 Montage et réglage

On a réalisé un montage sur un banc optique, permettant à la fois l'observation de l'image filtrée et de son spectre.

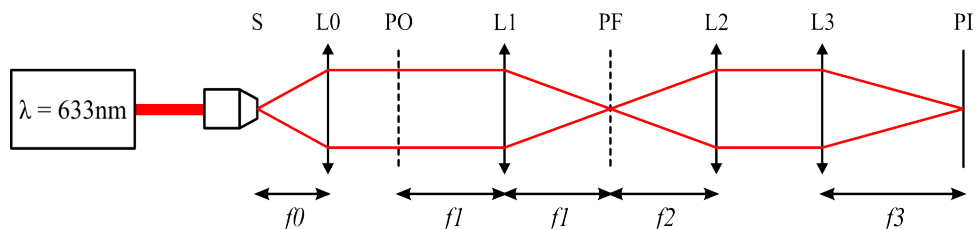


Illustration du montage optique dans sa configuration « observation spectrale ».

#### Description des différents composants:

- Laser de longueur d'onde 633nm.
- Objectif de microscope.
- Lentille L0 de focale 250mm.
- Une pupille diffractante.
- Une lentille L1 de focale 150mm.
- Une lentille L2 de focale 150mm.
- Une lentille L3 de focale 1m.

#### Rôle des différents composants:

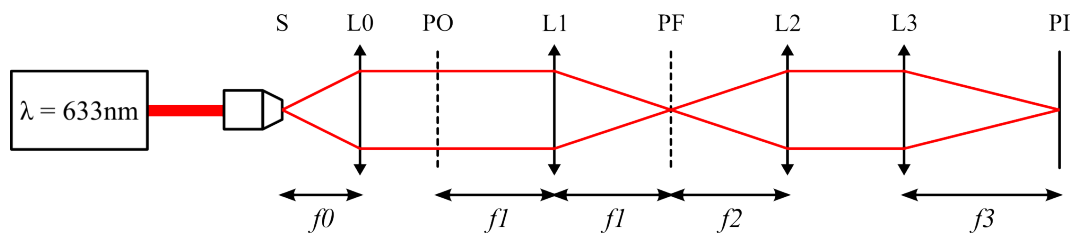
- Le trou: permet d'éliminer les défauts de l'objectif ( les poussières présentes sur l'objectif pourraient créer de la diffraction parasite) et de limiter le faisceau (il crée une source secondaire).
- L'optique de collimation (L0): permet d'obtenir une onde plane.
- La pupille: permet la diffraction.
- L'optique de Fourier (L1): La lentille permet de simuler une observation à l'infini ( on se placera par la suite dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer = Observation loin de la pupille).
- Ecran: Il est situé dans le plan de Fourier et permet l'observation de la figure de diffraction.

#### Réglage du banc optique:



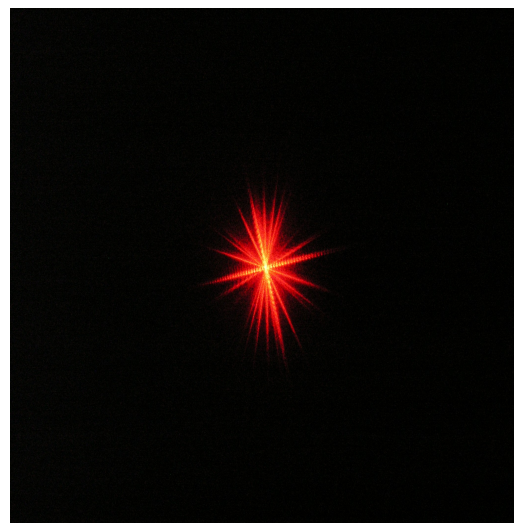
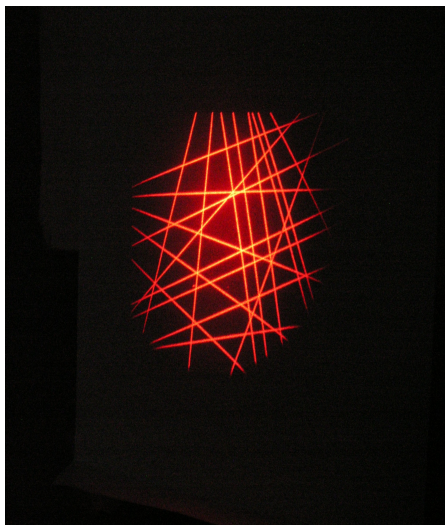
- Régler l'alignement du faisceau laser avec le banc optique. Il suffit pour cela de s'éloigner du laser et d'éliminer l'angle entre le laser et l'axe optique.
- Régler L0 par auto-collimation.
- Régler L1 à l'aide d'une règle (à la distance  $f_1$  de la pupille).
- Régler L3 à l'aide d'une règle (à la distance  $f_3$  de l'écran d'observation).
- Intercaler L2, le réglage est obtenue lorsque l'image formée sur l'écran est nette).
- Placer le filtre spatial (vérifier l'alignement et la mise au point).

### 2.2.1 Observation du spectre

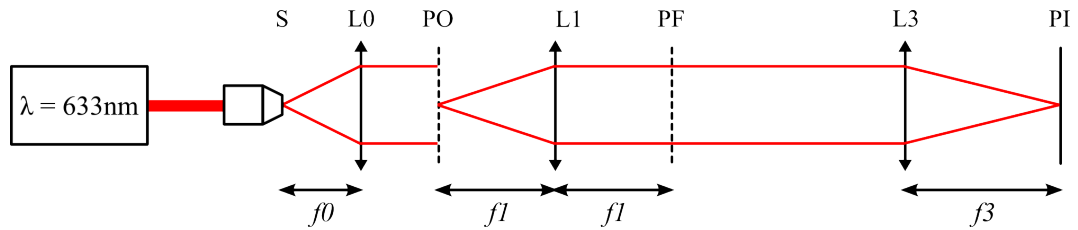


Considérons l'exemple d'une pupille constitué de  $N$  droites réparties aléatoirement.

Nous avons sur la photographie de droite l'image de la pupille et sur la photographie de gauche son spectre observé dans le plan de Fourier grâce à ce montage.

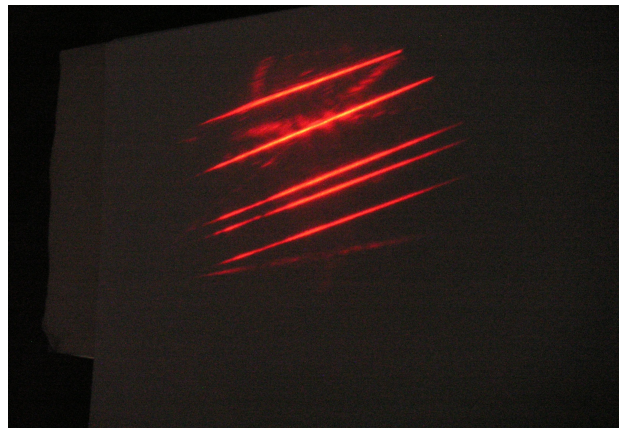
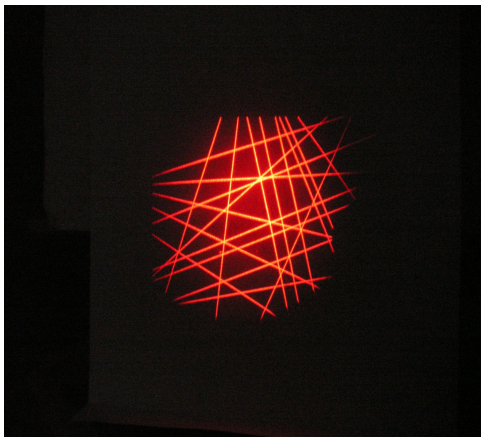


### 2.2.2 Observation de l'image filtrée



Considérons l'exemple d'une pupille constitué de  $N$  droites réparties aléatoirement.

Nous avons sur la photographie de droite l'image de la pupille et sur la photographie de gauche l'image de la pupille filtrée spatialement (on voit que seule une direction a été sélectionnée) et observée dans le plan de Fourier grâce à ce montage.



## 3 Diffraction

### 3.1 Trou circulaire

#### 3.1.1 Objet

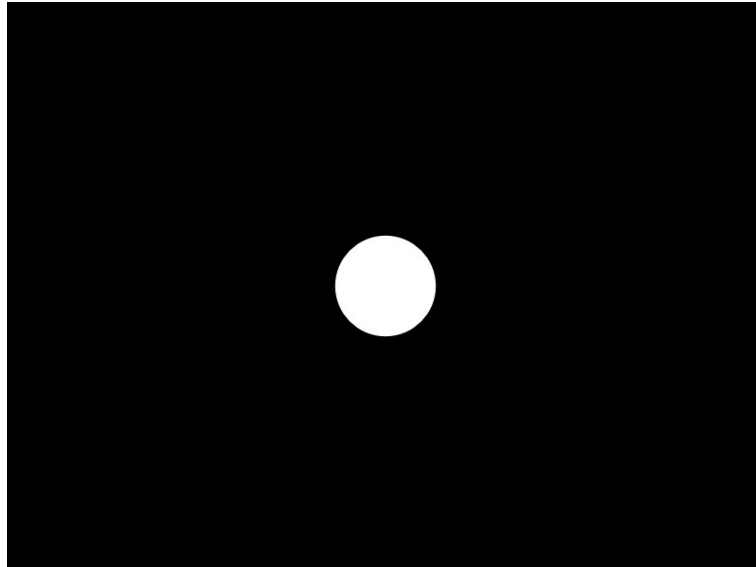
La pupille est constituée d'un trou circulaire de rayon  $r$  réalisé sur une surface opaque.

Le rayon  $r$  est de l'ordre du dixième de millimètre afin que l'objet comporte de hautes fréquences.

La fonction pupillaire s'écrit donc :

$$h(x, y) = \text{cercle}\left(\frac{x}{2r}, \frac{y}{2r}\right)$$

$$h(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x^2 + y^2}{(2r)^2}\right)$$



*Illustration 1: Pupille circulaire*

#### 3.1.2 Calcul de la transformée de Fourier

Le montage nous permet d'observer dans le plan image de la lentille L1 la transformée de Fourier de la fonction pupillaire.

D'après la transformée de Fourier d'une fonction Cercle, on trouve la transformée de Fourier de la fonction pupillaire :

$$H(v_x, v_y) = \frac{2J_1\left(2\pi\sqrt{(v_x r)^2 + (v_y r)^2}\right)}{2\pi\sqrt{(v_x r)^2 + (v_y r)^2}}$$

Soit, en posant la fonction  $J_1 c(x) = \frac{J_1(x)}{x}$  :

$$H(v_x, v_y) = J_1 c\left(2\pi\sqrt{(v_x r)^2 + (v_y r)^2}\right)$$

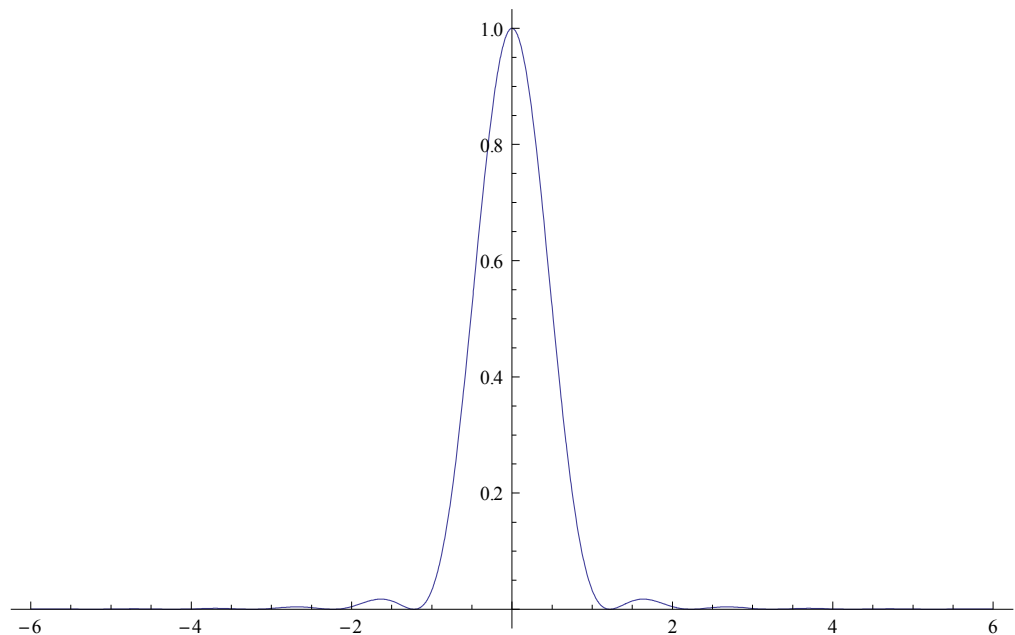
D'où l'amplitude dans le plan image :

$$A(x, y) = J_1 c \left( \frac{2 \pi r}{\lambda f} \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

On trouve donc une image ressemblant la simulation suivante, appelée tache d'Airy.



*Illustration 2: Tache d'Airy*



*Illustration 3: Fonction de Bessel  $J_1$  cardinal au carré représentant l'intensité*

Le premier zéro de la fonction  $J_1 c$  se trouve pour une valeur de  $x = 3,83$ .  
Le premier cercle noir de la figure croiera donc l'axe des x pour une valeur de x satisfaisant la relation :

$$\frac{2 \pi r x}{\lambda f} = 3,83$$

D'où :

$$2 r x = 1,22 \lambda f$$

Donc, en notant  $2r=d$  le diamètre du trou circulaire, et  $r_1$  le rayon du premier cercle noir sur la figure de diffraction, on trouve la formule permettant de déterminer le diamètre du trou circulaire par observation de la figure de diffraction :

$$d = 1,22 \frac{\lambda f}{r_1}$$

### 3.1.3 Observation pratique

L'observation concorde avec nos calculs, on peut en déduire le diamètre du plus petit trou, en tenant compte du grossissement  $G$  effectué par le système :

$$d = 1,22 \frac{\lambda f}{r_1 / G}$$

$$d = 1,22 \frac{633 \text{ nm} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 6}{16 \text{ mm}}$$

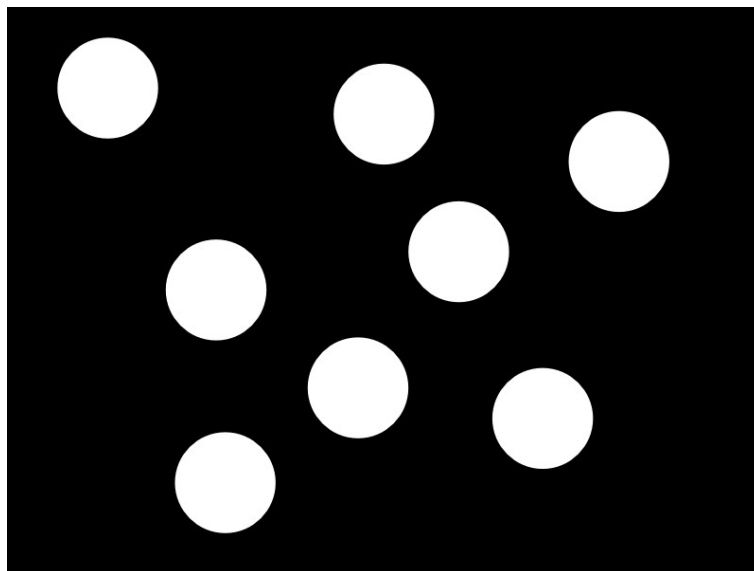
$$d = 72 \mu\text{m}$$

Cependant, selon le trou choisi, l'observation montre parfois une figure imparfaitement circulaire, cela est dû au fait que le trou n'est pas parfaitement circulaire, ce qui n'est pas visible à l'œil nu. L'observation permet donc de « voir » des détails microscopique, ce qui est un de ses premiers avantages.

## 3.2 Trous circulaires

### 3.2.1 Objet

L'objet est une diapositive opaque percée de  $n$  trous semblable au trou étudié précédemment, répartis de manière pseudo aléatoire.



*Illustration 4: Exemple avec 8 trous circulaires*

On peut donc écrire la fonction pupillaire comme la convolution de la fonction trou circulaire de rayon  $r$  par une somme de  $n$  Diracs bidimensionnels répartis aléatoirement. On notera  $(x_k, y_k)$  les coordonnées du centre du trou d'index  $k \in [1, n]$

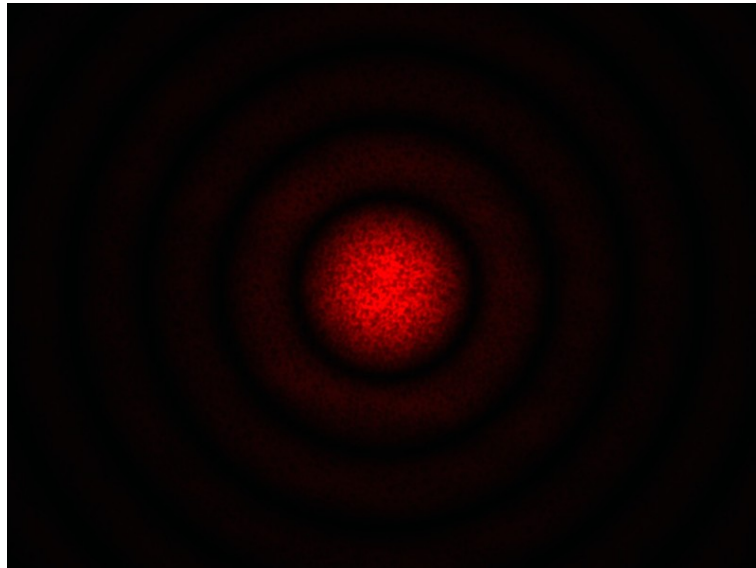
$$h(x, y) = \left( \text{cercle} \left( \frac{x}{2r}, \frac{y}{2r} \right) \right) * \left( \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k, y - y_k) \right)$$

### 3.2.2 Calcul de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction pupillaire sera donc le produit du spectre du trou unique par le spectre de la somme des distributions de Dirac. Nous avons vu plus haut le spectre du trou unique, et nous remarquons que la somme de Dirac a pour transformée de Fourier une somme d'exponentielles complexes toutes différentes. Le spectre sera donc de la forme :

$$H(v_x, v_y) = \left( J_1 c \left( \sqrt{(v_x r)^2 + (v_y r)^2} \right) \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n e^{i(v_x x_k + v_y y_k)} \right)$$

La somme d'exponentielles, causée par les interférences entre les trous qui agissent comme autant de sources cohérentes, aura pour effet de donner un aspect granuleux au spectre obtenu. Cet aspect granuleux est connu sous le nom anglais de « Speckle ».



*Illustration 5: Tache d'Airy avec Speckle*

### 3.2.3 Observation pratique

En réalité, on observe bien le phénomène de Speckle, qui est un phénomène d'interférence semblables à celles causées par des trous de Young, et donc non localisées. Pour observer plus aisément le Speckle, il est intéressant d'éloigner l'écran de sa position permettant l'observation du spectre. On perd ainsi la forme du spectre en tache d'Airy, mais le Speckle est plus grand lorsque la distance augmente.

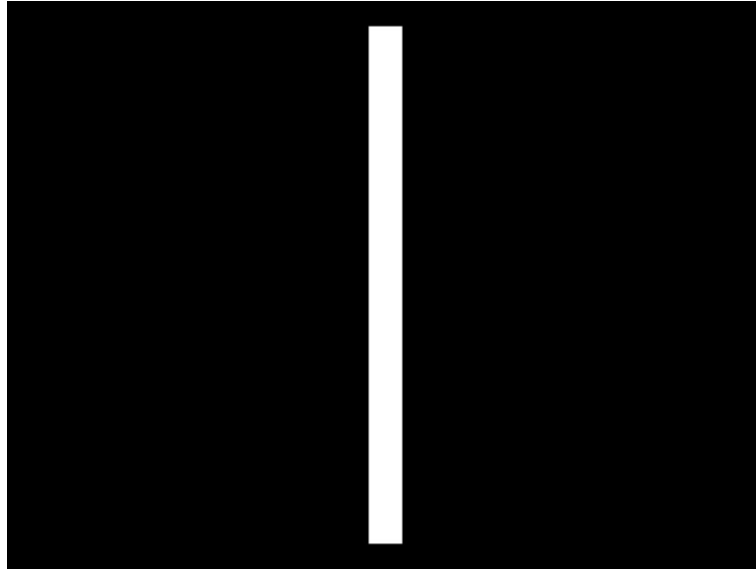
## 3.3 Fente

### 3.3.1 Objet

L'objet est une simple fente de forme rectangulaire, de hauteur  $h$  et de largeur  $l$ , que l'on assimile pour le moment à un rectangle fini.

La fonction pupillaire s'écrit :

$$h(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{h}\right)$$



*Illustration 6: Fente*

### 3.3.2 Calcul de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction pupillaire vaut donc :

$$H(v_x, v_y) = \text{sinc}(\pi v_x l) \cdot \text{sinc}(\pi v_y h)$$

D'où l'amplitude dans le plan de Fourier:

$$A(x, y) = a_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi x l}{\lambda f}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi y h}{\lambda f}\right)$$

Dans le cas d'une fente fine, on a, par définition:  $l \ll h$  .

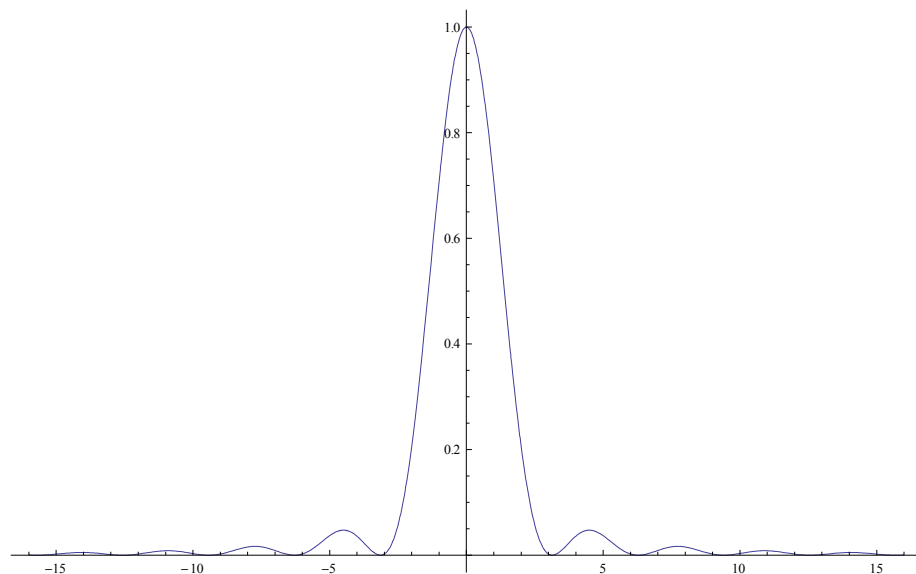
L'amplitude se simplifie donc en :

$$A(x, y) = a_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi x l}{\lambda f}\right) \cdot \delta(y)$$

Nous devrions donc observer une image ressemblant à cette simulation :



*Illustration 7: Figure de diffraction d'une fente fine*



*Illustration 8: Fonction sinus cardinal au carré représentant l'intensité*

La première bande sombre se situe au niveau du premier zéro de la fonction sinus cardinal, lorsque son argument vaut  $\pi$  :

$$\frac{\pi x l}{\lambda f} = \pi$$

$$x l = \lambda f$$

Donc, en notant  $2x_1$  la largeur de la tache centrale dans le plan de Fourier, on trouve la largeur  $l$  de la fente en fonction de la largeur de la tache centrale :

$$l = \frac{\lambda f}{x_1}$$

En tenant compte du grossissement du système, on obtient :

$$l = \frac{\lambda f}{x_1 / G}$$



### 3.3.3 Observation pratique

L'observation concorde parfaitement avec le calcul et nous permet de déterminer la largeur de la tache centrale :

$$l = \frac{633 \text{ nm} \cdot 250 \text{ mm} \cdot 6}{16 \text{ mm}}$$

$$l = 59 \mu\text{m}$$

## 3.4 Double fente

### 3.4.1 Objet

Les fentes sont de forme rectangulaire, de hauteur  $h$  et de largeur  $l$ , dont les centres sont écartés d'une distance  $e$ .

La fonction pupillaire s'écrit :

$$h(x, y) = \left( \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{h}\right) \right) * \left( \delta\left(x - \frac{e}{2}, y\right) + \delta\left(x + \frac{e}{2}, y\right) \right)$$



Illustration 9: Double fente

### 3.4.2 Calcul de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction pupillaire vaut donc :

$$H(v_x, v_y) = \text{sinc}(\pi v_x l) \cdot \text{sinc}(\pi v_y h) \cdot \left( e^{-i \frac{v_x e}{2}} + e^{i \frac{v_x e}{2}} \right)$$

$$H(v_x, v_y) = \text{sinc}(\pi v_x l) \cdot \text{sinc}(\pi v_y h) \cdot 2 \cos(2 \pi v_x e/2)$$

D'où l'amplitude dans le plan de Fourier :

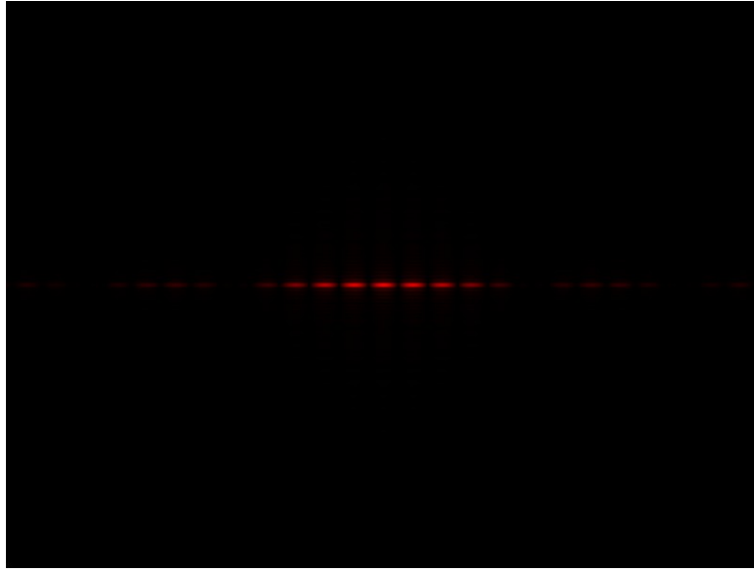
$$A(x, y) = a_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi x l}{\lambda f}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi y h}{\lambda f}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x e}{\lambda f}\right)$$

Dans le cas d'une fente fine, on a, par définition:  $l \ll h$ .

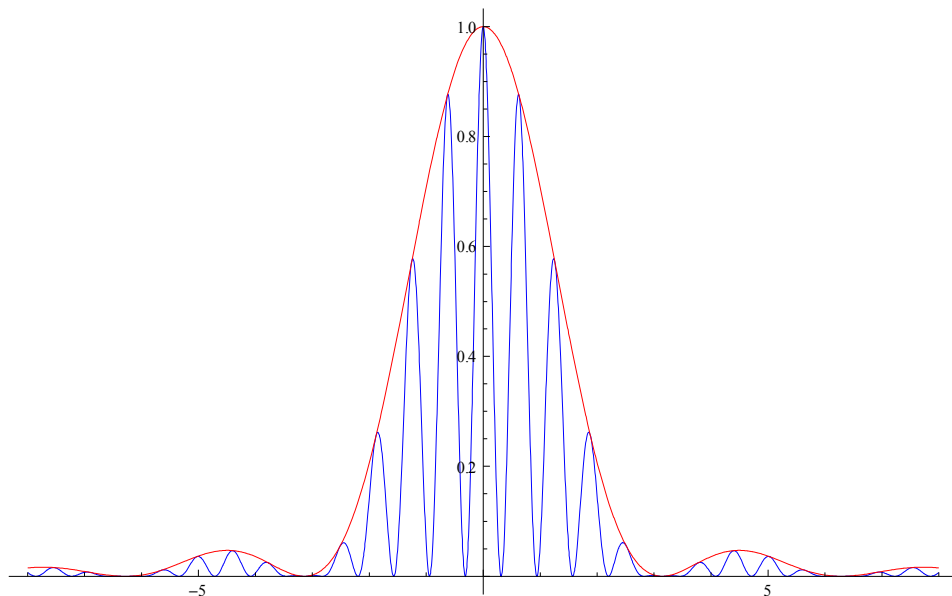
L'amplitude se simplifie donc en :

$$A(x, y) = a_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi x l}{\lambda f}\right) \cdot \delta(y) \cdot \cos\left(\frac{\pi x e}{\lambda f}\right)$$

Nous devrions donc observer une image ressemblant à cette simulation :



*Illustration 10: Figure de diffraction d'une double fente*



*Illustration 11: Profil de l'intensité lumineuse dans la figure de diffraction*

La largeur de la grande tache centrale (enveloppe rouge) notée  $2x_1$  nous permet donc de connaître la largeur des fentes, grâce à la formule déduite des calculs précédents :

$$l = \frac{\lambda f}{x_1}$$

En tenant compte du grossissement du système, on obtient :

$$l = \frac{\lambda f}{x_1 / G}$$

La largeur des petites raies (courbe bleue) notée  $x_2$  nous permet de connaître l'espacement des fentes, grâce à la formule déduite des calculs précédents :

$$e = \frac{\lambda f}{x_2}$$

En tenant compte du grossissement du système, on obtient :

$$e = \frac{\lambda f}{x_2/G}$$

### 3.4.3 Observation pratique

Le résultat obtenu est la superposition du spectre d'une fente avec la figure d'interférence due aux 2 fentes. C'est le résultat de l'expérience des fentes de Young, que nous avons reproduites, avec une approche différente du problème.

L'observation correspond encore une fois bien aux calculs, les mesures nous permettent de déduire l'espacement et la largeur des fentes.

$$e = l$$

$$l = l$$

Plus l'espacement des fentes est grand par rapport à leur largeur, plus les oscillations dues au terme en sinus seront nombreuses dans la tache centrale.

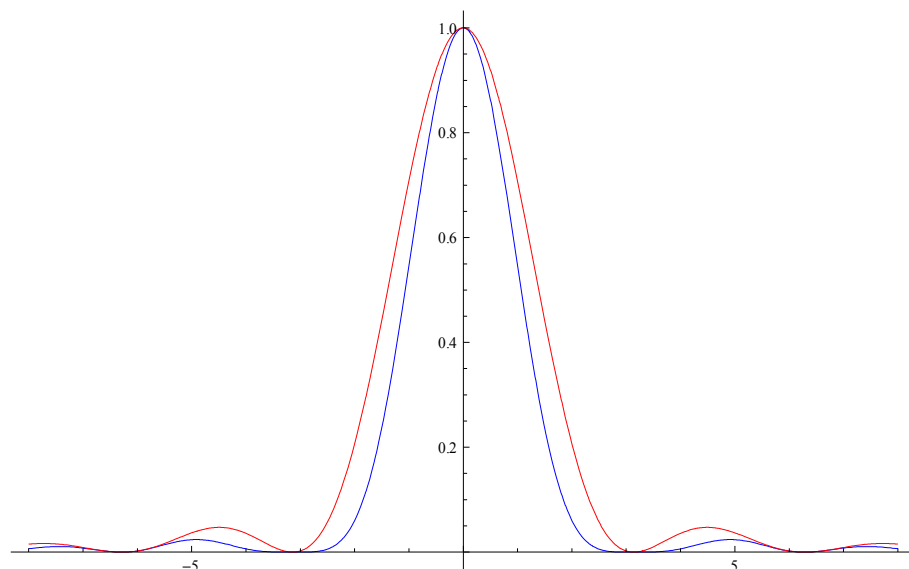


Illustration 12: Profil de l'intensité dans le cas où  $e = 2l$

## 3.5 Réseau

### 3.5.1 Objet

Le problème du réseau est similaire au problème de la double fente.

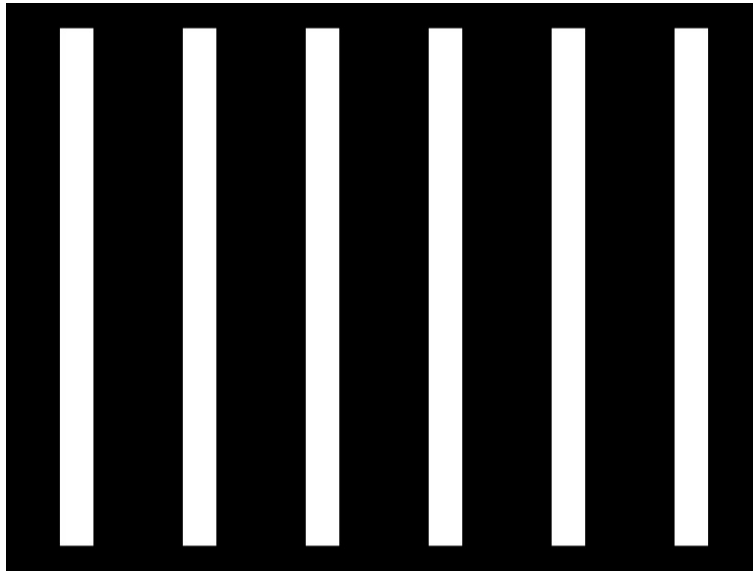
Les fentes sont de forme rectangulaire, de hauteur  $h$  et de largeur  $l$ , dont les centres sont écartés d'une distance  $p$ , appelée pas du réseau.

La fonction pupillaire s'écrit :

$$h(x, y) = \left( \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{h}\right) \right) * \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kp, y) \right)$$

Soit, en utilisant la fonction peigne de Dirac de pas  $p$  :

$$h(x, y) = \left( \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{h}\right) \right) * (\| \|_p(x) \cdot \delta(y))$$



*Illustration 13: Un réseau de diffraction*

### 3.5.2 Calcul de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction pupillaire vaut donc :

$$H(v_x, v_y) = \text{sinc}(\pi v_x l) \cdot \text{sinc}(\pi v_y h) \cdot \| \|_{lp}(v_x)$$

D'où l'amplitude dans le plan de Fourier :

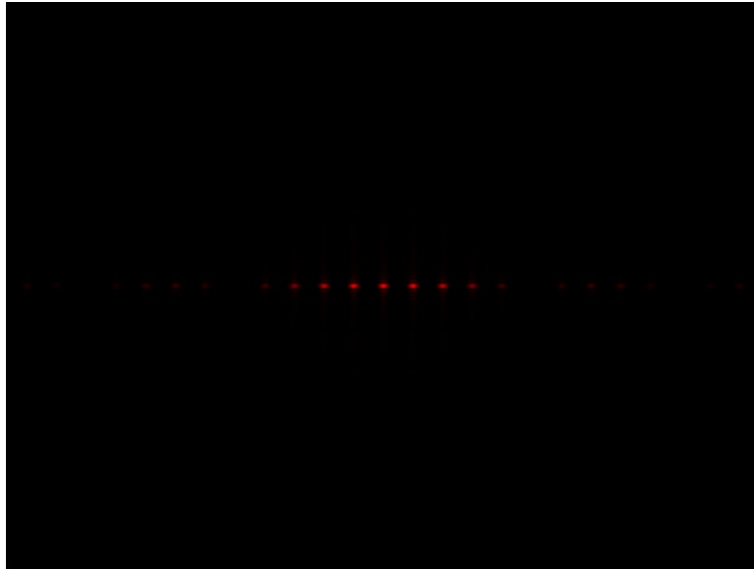
$$A(x, y) = a_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi x l}{\lambda f}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi y h}{\lambda f}\right) \cdot \| \|_{lp}\left(\frac{x}{\lambda f}\right)$$

Dans le cas d'une fente fine, on a, par définition:  $l \ll h$  .

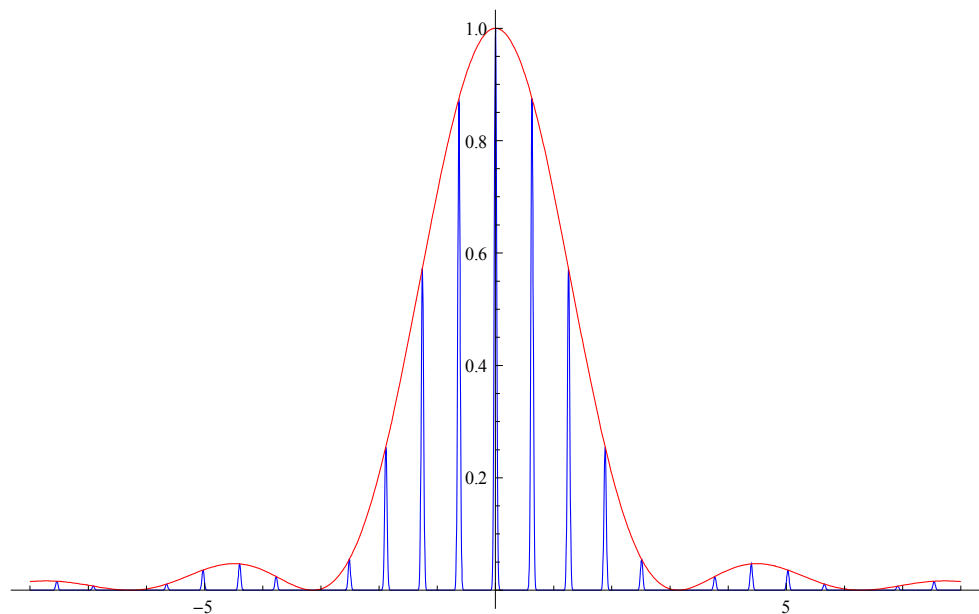
L'amplitude se simplifie donc en :

$$A(x, y) = a_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi x l}{\lambda f}\right) \cdot \delta(y) \cdot \| \|_{lp}\left(\frac{x}{\lambda f}\right)$$

Nous devrions donc observer une image ressemblant à cette simulation :



*Illustration 14: Figure de diffraction d'un réseau*



*Illustration 15: Profil de l'intensité dans la figure de diffraction d'un réseau*

La largeur de la grande tache centrale (enveloppe rouge) notée  $2x_1$  nous permet donc de connaître la largeur des fentes du réseau, grâce à la formule déduite des calculs précédents :

$$l = \frac{\lambda f}{x_1}$$

En tenant compte du grossissement du système, on obtient :

$$l = \frac{\lambda f}{x_1 / G}$$

L'espacement des points lumineux (courbe bleue) noté  $x_2$  nous permet de connaître le pas du réseau, grâce à la formule déduite des calculs précédents :

$$p = \frac{\lambda f}{x_2}$$

En tenant compte du grossissement du système, on obtient :

$$p = \frac{\lambda f}{x_2 / G}$$

### 3.5.3 Observation pratique

L'observation est très similaire à l'observation de la double fente, à la différence près que les raies sont plus « pointues ». Il ne s'agit d'une alternance de taches claires et sombres, mais d'une série de points lumineux.

On trouve les valeurs du pas du réseau et de la largeur des fentes.

## 3.6 Double Réseau

### 3.6.1 Objet

L'objet est un double réseau, c'est à dire la superposition d'un réseau vertical de pas  $p_x$  dont les fentes ont une largeur  $l_x$  et d'un réseau horizontal de pas  $p_y$  dont les fentes ont la largeur  $l_y$ .

La fonction pupillaire sera donc le produit de la fonction pupillaire du réseau horizontal par la fonction du réseau vertical. Nous avons étudié plus haut la fonction pupillaire d'un réseau, nous ne la détaillerons donc pas ici. La fonction pupillaire s'écrit :

$$h(x, y) = h_{horizontal}(x, y) \cdot h_{vertical}(x, y)$$

$$h(x, y) = \left( \text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) * ([\![\!]_{p_x}(x) \cdot \delta(y)) \right) \cdot \left( \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) * ([\![\!]_{p_y}(y) \cdot \delta(x)) \right)$$

Une autre approche consiste à voir la fonction pupillaire comme la convolution d'un petit rectangle par un peigne de Dirac bidimensionnel.

$$h(x, y) = [\![\!]_{p_x, p_y}(x, y) * \text{rectangle}_{l_x, l_y}(x, y)$$

$$h(x, y) = ([\![\!]_{p_x}(x) \cdot [\![\!]_{p_y}(y)) * \left( \text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) \right)$$

Les deux expressions de la fonction pupillaires sont équivalentes, bien qu'elle viennent de raisonnements différents, et donnent ce résultat :

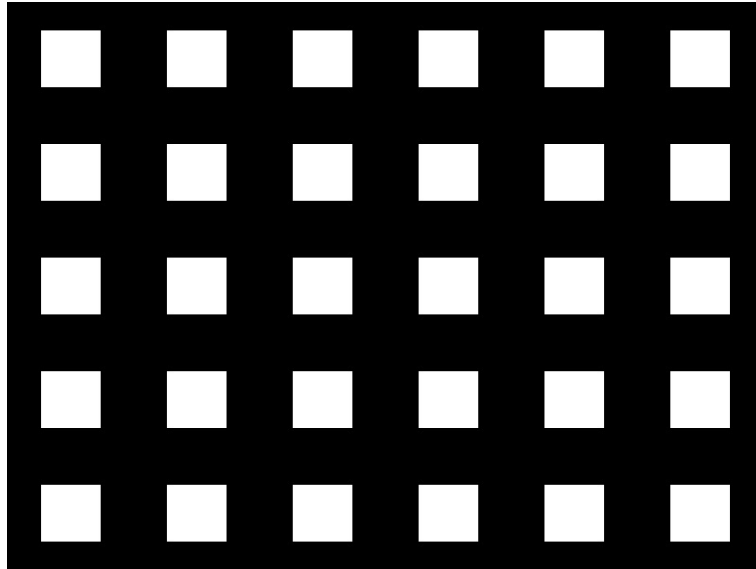


Illustration 16: Double réseau carré

### 3.6.2 Calcul de la transformée de Fourier

Selon l'approche choisie, la transformée de Fourier de l'image de l'objet se calcule donc facilement, soit par convolution des spectres des deux réseaux :

$$H(v_x, v_y) = H_{horizontal}(v_x, v_y) * H_{vertical}(v_x, v_y)$$

Soit par multiplication des spectres d'un rectangle par un peigne de Dirac.

$$H(v_x, v_y) = \left( \prod_{1/p_x}(v_x) \prod_{1/p_y}(v_y) \right) \cdot \left( \text{sinc}(2\pi v_x l_x) \text{sinc}(2\pi v_y l_y) \right)$$

L'allure du spectre est donc facile à comprendre à partir de ces formules, le spectre ressemblera à l'image suivante.

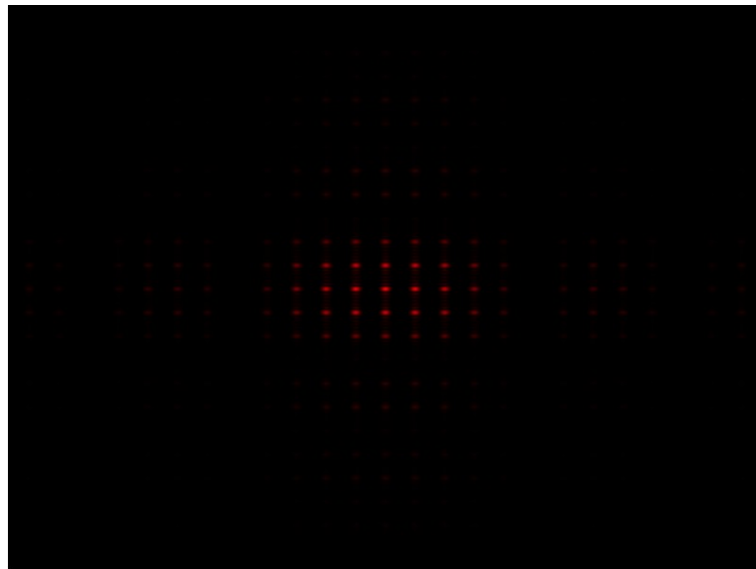


Illustration 17: Figure de diffraction d'un double réseau

Attention, évidemment, l'espacement horizontal des trous nous permet de mesurer le pas vertical du réseau, et vice versa.

L'allure de l'enveloppe, similaire au spectre d'une ouverture rectangulaire, nous informera sur la forme et les dimensions des fenêtres rectangulaires.

### 3.6.3 Observation pratique

L'observation concorde avec le calculs, mais le réseau fourni pour l'expérience était de plus orienté à  $45^\circ$ . l'observation nous a permis de trouver que le réseau était carré, i.e.  $p_x = p_y$ .

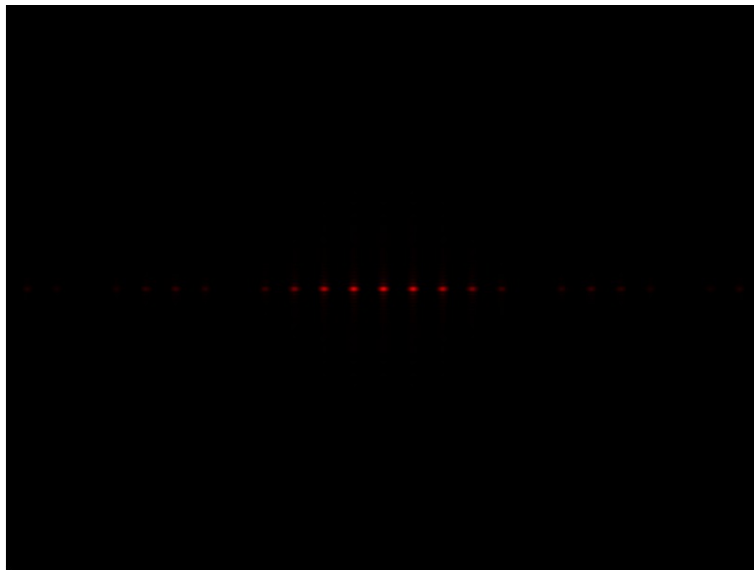


## 4 Filtrage

### 4.1 Réseau

#### 4.1.1 Figure de diffraction complète

Nous avons étudié la figure de diffraction complète d'un réseau plus haut. Cette figure est représentée ci dessous, on distingue plusieurs point lumineux correspondant aux ordres dans la décomposition en série de Fourier de la fonction de transparence du réseau. Le point central correspond à l'ordre zéro, alors que les autres correspondent aux ordres 1,2,3... vers la droite et -1,-2,-3... vers la gauche.



*Illustration 18: Figure de diffraction d'un réseau*

Le filtrage va consister en la sélection de certains de ces ordres uniquement. Pour cela, nous positionnerons dans le plan de Fourier un filtre, opaque partout sauf au niveau des ordres que nous souhaitons laisser passer.

#### 4.1.2 Image non filtrée

Si on laisse passer tous les ordres, on retrouve naturellement en sortie l'image du réseau, non altérée.

#### 4.1.3 Filtrage ne sélectionnant qu'un seul ordre

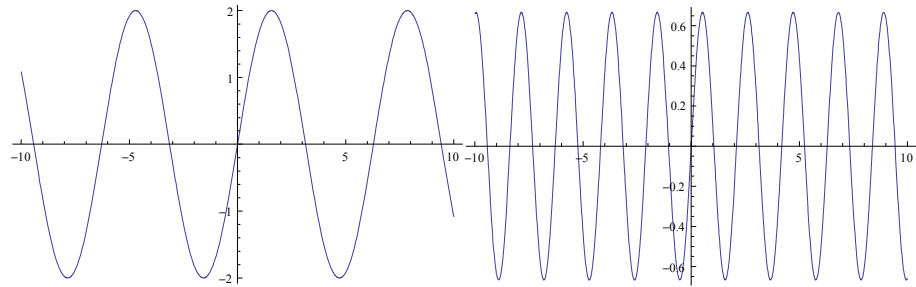
Si on ne laisse passer qu'un seul ordre, par exemple l'ordre zéro, on trouvera en sortie seulement la valeur moyenne de l'image. On ne pourra pas distinguer le pas du réseau. L'image sera uniforme.

#### 4.1.4 Filtrage sélectionnant plusieurs ordres.

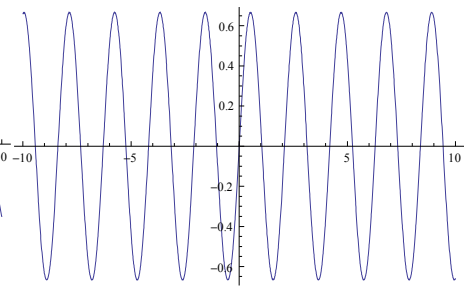
Si on laisse passer deux ordres, on retrouvera en sortie une figure similaire à la figure visible dans l'expérience des trous de Young. En effet, on aura reproduit l'expérience, les deux ordres que l'on aura laissé passé étant équivalent à deux sources ponctuelles. On aura donc des franges d'interférence, de profil sinusoïdal, dont la largeur dépendra des ordres que l'on a laissé passer.

Si l'on ne laisse passer que les ordres 1 et -1, on obtiendra des franges d'interférence dont la fréquence spatiale correspond au pas du réseau. Si l'on ne laisse passer que les ordres 2 et -2, on obtiendra des franges d'interférence dont la fréquence sera le double de celle du réseau. Et d'une manière générale, si on laisse passer les ordres  $n$  et  $-n$ , on obtiendra des franges de fréquence spatiale égale à  $n$  fois celle du réseau.

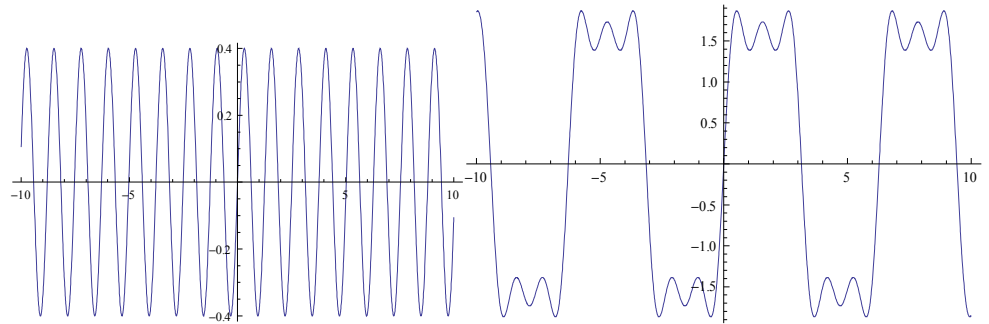
On comprend donc que si on laisse passer tous les ordres, on retrouve la série de Fourier de la fonction pupillaire.



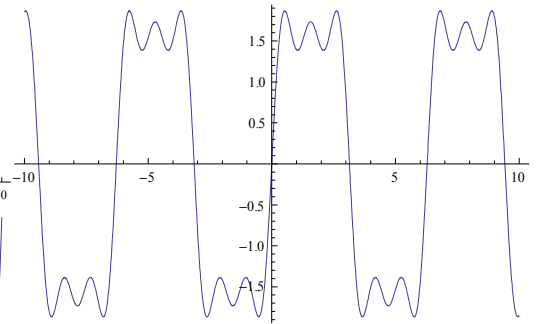
*Illustration 19: Ordres 1 et -1*



*Illustration 20: Ordres 2 et -2*



*Illustration 21: Ordres 3 et -3*



*Illustration 22: Tous les ordres de -3 à 3*

Si on laisse passer que les ordres  $n$  et  $p$ , on obtiendra des franges d'interférence dont la fréquence sera celle du réseau multipliée par  $\frac{|n-p|}{2}$ .

## 4.2 Photographie Tramée

### 4.2.1 Objectif du filtrage

L'objectif du filtrage présenté ici sera d'obtenir une image nette et détramée, à partir d'un diapositive tramée. Le tramage consiste ici en la superposition de la photographie originale à une réseau dont les fentes sont écartées d'une distance égale à leur largeur. La photographie originale et sa version tramée apparaissent ici :



*Illustration 23: Image originale*

*Illustration 24: Image Tramée*

#### 4.2.2 Figure de diffraction

En notant  $T(x, y)$  la transparence de la photographie originale au point  $(x, y)$ , on trouve la fonction pupillaire, qui est le produit de la transparence de la photographie par la transparence du réseau.

$$h(x, y) = t(x, y) \cdot \text{rect}\left(\frac{x}{e}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{e}\right)$$

La TF de la fonction pupillaire est :

$$H(\nu_x, \nu_y) = T(\nu_x, \nu_y) * (\text{sinc}(\nu_x \cdot e) \cdot \text{sinc}(\nu_y \cdot e))$$

La convolution du spectre de la photographie originale par un peigne de Dirac a pour effet que le spectre de la photographie tramée est composé de plusieurs copies du spectre de l'image originale.

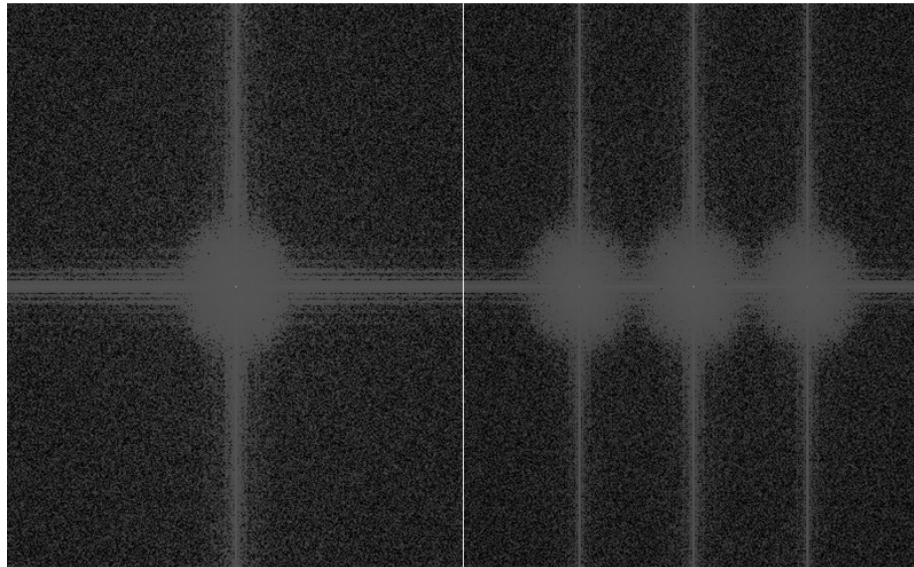
Pour que les différentes copies du spectre de l'image originale ne se recouvrent pas, le théorème de Shannon nous dit qu'il faut que le pas du peigne de Dirac soit supérieur au double de la largeur du spectre de l'image originale. En posant  $\nu_{x \text{ Max}}$  la largeur du spectre de l'image originale selon l'axe des x, On trouve donc la condition suivante :

$$\frac{1}{e} > 2 \nu_{x \text{ Max}}$$

Soit :

$$e < \frac{1}{2 \nu_{x \text{ Max}}}$$

L'interprétation de cette condition est évidente : L'image originale ne doit pas contenir de détails dont la fréquence spatiale est supérieure au pas du tramage, car dans ces conditions, des artefacts se produiront à cause du recouvrement du spectre : C'est le phénomène de Moiré.



*Illustration 25: Spectre de l'image originale*

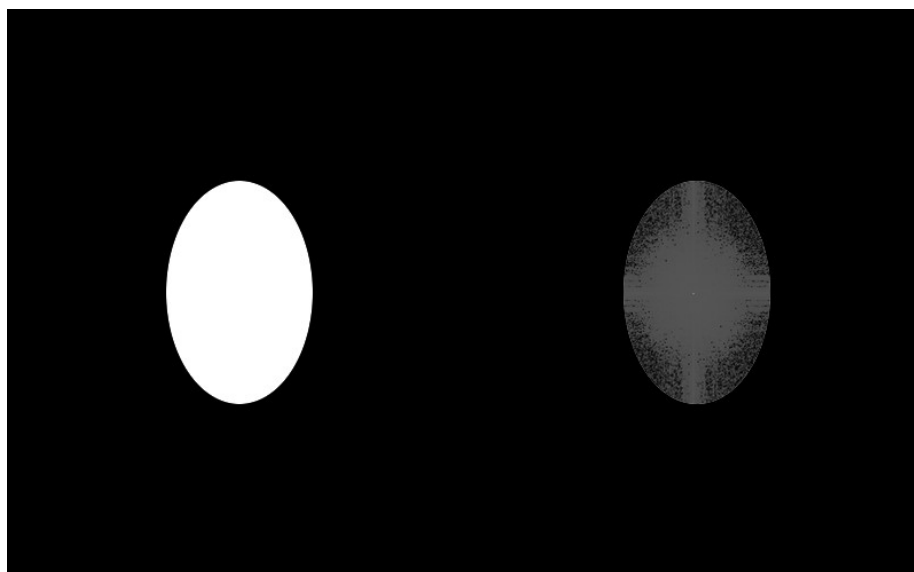
*Illustration 26: Spectre de l'image tramée*

### 4.2.3 Filtre

Le filtre consiste en un film opaque contenant un trou transparent répondant à certaines conditions :

- Le trou doit être d'une taille suffisamment grande pour faire passer tout le spectre de l'image originale
- Le trou doit être d'une taille suffisamment petite pour ne pas laisser passer plus d'une copie du spectre de l'image originale.
- Idéalement, le trou transparent devrait avoir exactement la forme de l'enveloppe du spectre de l'image originale.

Ce film a pour objectif de ne sélectionner qu'une seule copie du spectre de l'image originale. Dans le plan image, on retrouve alors l'image originale détramée.



*Illustration 27: Filtre utilisé pour le détramage*

*Illustration 28: Spectre après filtrage pour le détramage*

#### 4.2.4 Résultat

A condition que le critère de Shannon soit respecté dans la photographie tramée, on retrouve en sortie l'image originale complètement détramée, mais légèrement moins lumineuse, car une partie de l'énergie a été absorbée par le filtre.

A la suite de cette expérience, il est intéressant de remarquer que l'on peut interpréter le tramage de l'image de la photographie en l'absence de filtre comme le résultat de l'interférence entre les différentes copies du spectre de la photographie originale dans le plan de Fourier.

Si on ne laisse passer qu'un seul exemplaire du spectre, il n'y a pas d'interférence, donc pas de tramage dans l'image filtrée. Alors que si on laisse passer plusieurs copies du spectre original, ces différentes copies au niveau du plan de fourrier interfèrent, comme des trous de Young, et on obtient une image tramée en sortie à cause des franges d'interférence.



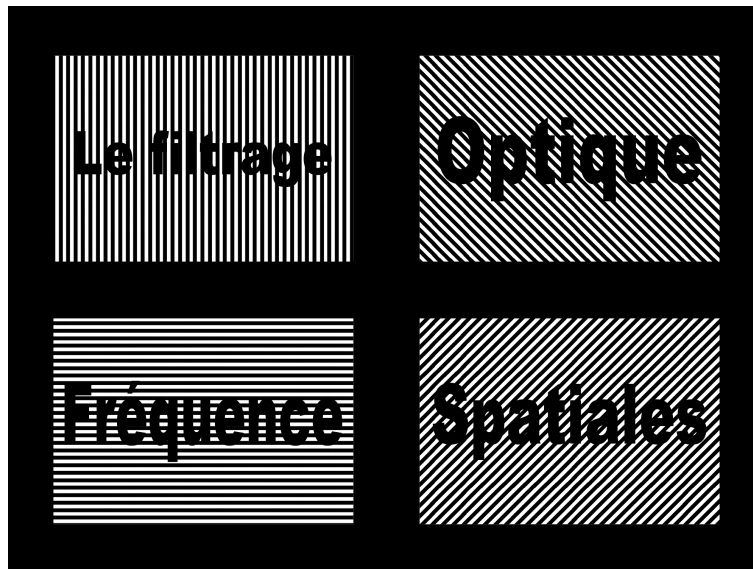
*Illustration 29: Image tramée*

*Illustration 30: Résultat du filtrage*

### 4.3 Multiplexe

#### 4.3.1 Objectifs du filtrage

Pour cette expérience, on dispose d'une diapositives contenant 4 mots, chacun étant sur un font tramé selon une direction différente ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ).



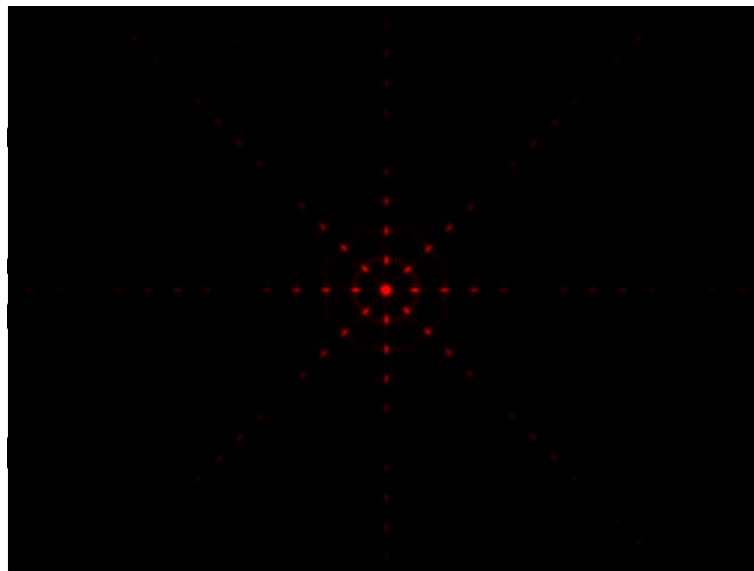
*Illustration 31: La diapositive "Multiplexe"*

Nous avons plusieurs objectifs :

- Ne sélectionner qu'un mot, tramé.
- Ne sélectionner qu'un mot, détramé.
- Détramer toute l'image.
- Détramer un seul mot

#### 4.3.2 Figure de diffraction

Le spectre de l'objet ressemble à la figure suivante :



*Illustration 32: Spectre du multiplexe*

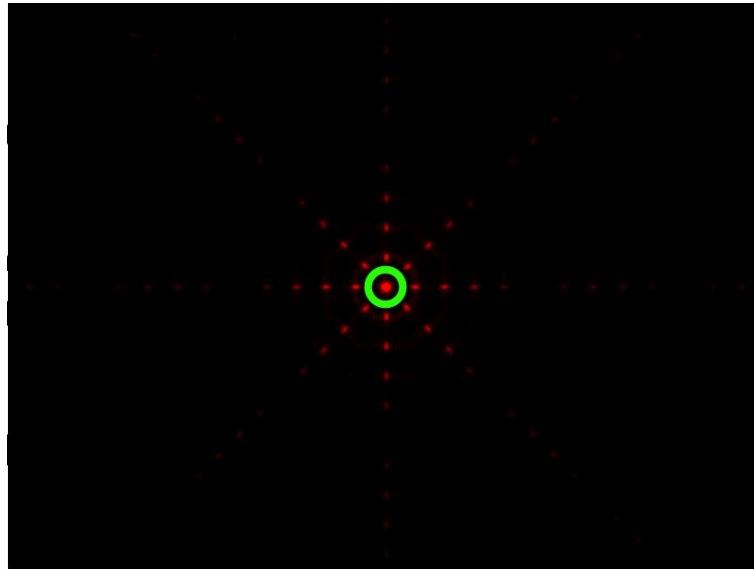
Nous remarquons que le spectre est en étoile. La ligne horizontale contient le spectre du mot tramé verticalement. La ligne à  $45^\circ$  contient le spectre du mot tramé à  $135^\circ$ . La ligne verticale contient le spectre du mot tramé horizontalement. La ligne à  $135^\circ$  contient le spectre du mot tramé à  $45^\circ$ .

Ces spectres sont étalés selon une direction, à cause du tramage qui est fin, et génère donc de hautes fréquences dans la direction perpendiculaire. Comme pour

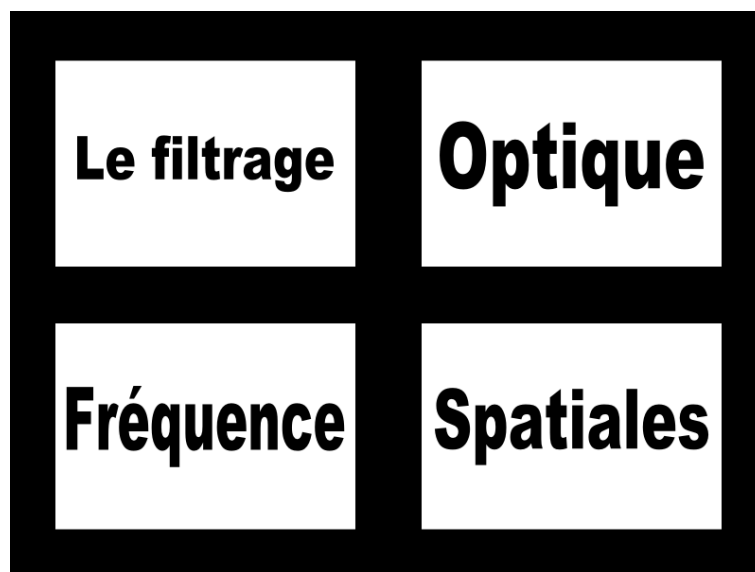
un réseau, on retrouve donc les différents ordres de la série de Fourier pour chaque tramage. Au centre se retrouvent tout les ordres zéro de chaque réseau.

#### 4.3.3 Détramage de l'image.

Pour détramer toute l'image, il faudra donc sélectionner l'ordre 0. Si l'on bloque tous les autres ordres, il n'y aura pas d'interférences, et l'image sera transmise en intégralité



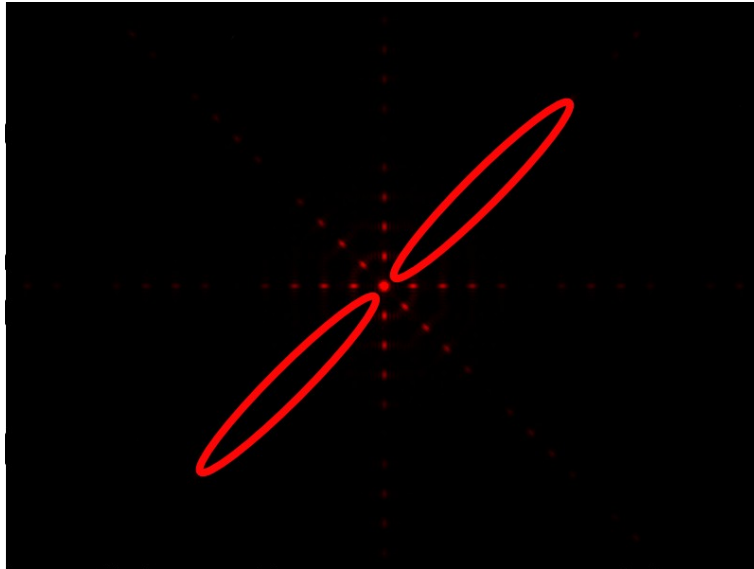
*Illustration 33: Filtre utilisé pour le détramage*



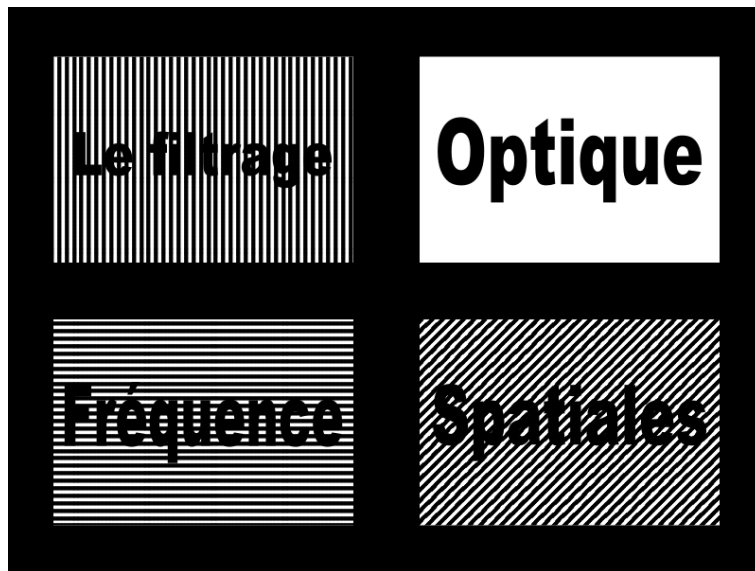
*Illustration 34: Multiplexe après détramage*

#### 4.3.4 Détramage d'un seul mot.

Pour détramer un seul mot, on ne conserve que l'un de ses ordres. Comme nous souhaitons conserver les autres mots, nous devons laisser passer l'ordre zéro. Nous supprimerons donc les autres ordres, seulement pour le mot en question.



*Illustration 35: Filtre utilisé pour le détramage d'un seul mot*

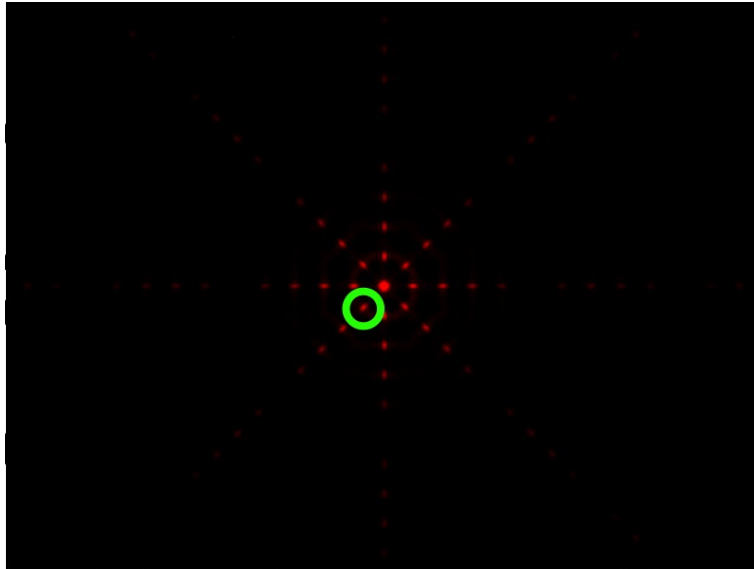


*Illustration 36: Résultat après détramage d'un seul mot*

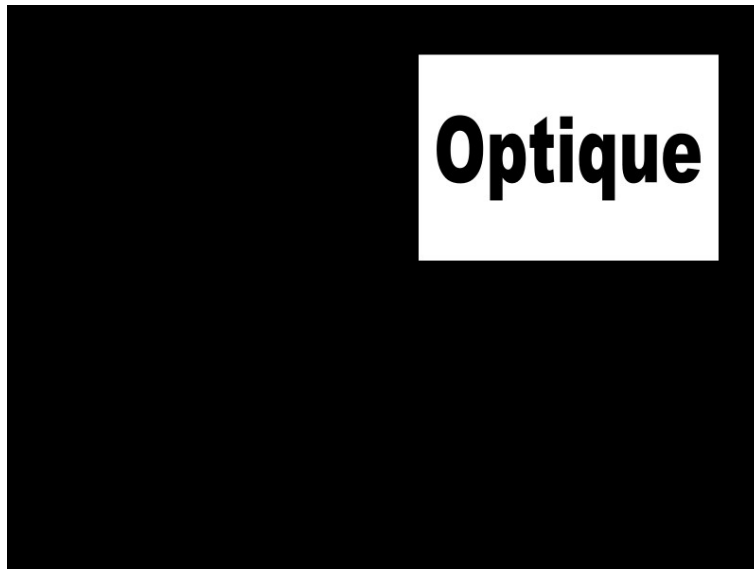
#### 4.3.5 Sélection et détramage d'un seul mot.

Ici, il faut cacher tous les mots sauf un. Il faut donc bloquer tout le spectre de 3 mots, y compris l'ordre zéro. Pour détramer notre mot, il ne faut sélectionner qu'un seul de ses ordres. Nous prendrons l'ordre 1 ou -1, car ce sont les plus lumineux.





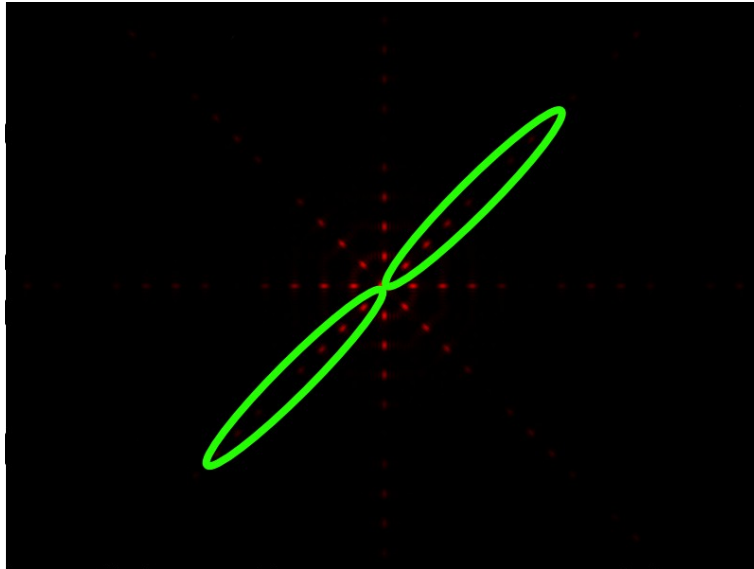
*Illustration 37: Filtre utilisé pour la sélection et le détramage d'un seul mot*



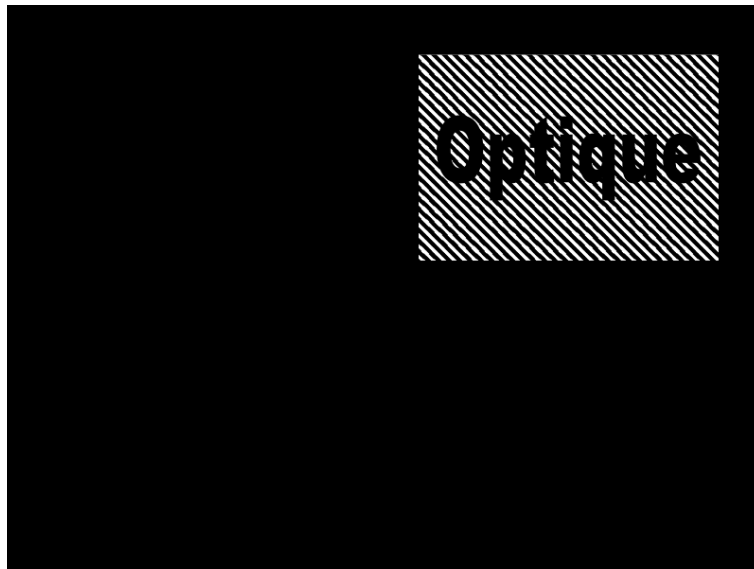
*Illustration 38: Multiplexe après la sélection et le détramage d'un seul mot*

#### **4.3.6 Sélection d'un seul mot sans détramage**

Nous souhaitons ici ne conserver qu'un mot, sans le détramer. Il faut donc sélectionner tout son spectre afin de conserver les franges d'interférences qui reproduisent le tramage. Nous bloquons tous les spectres des autres mots, y compris l'ordre zéro, afin de ne pas laisser apparaître les autres mots.



*Illustration 39: Filtre utilisé pour la sélection d'un seul mot*



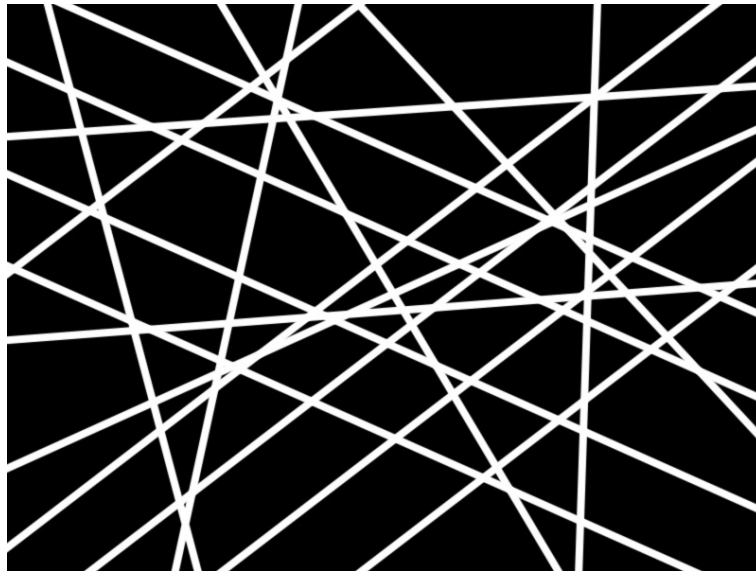
*Illustration 40: Image après sélection d'un seul mot*

## **4.4 Lignes de directions différentes**

### **4.4.1 Objectif du filtrage**

L'objectif de ce filtrage est, de sélectionner des directions particulières dans l'image d'un objet. Pour tester ce filtre, nous utilisons un objet composé de droites transparentes sur fond opaque, disposée selon des direction différentes et variées, mais avec deux directions privilégiées.

On désire réaliser un filtrage sur l'image de cet objet afin de ne retenir que les lignes orientées selon une direction choisie.



*Illustration 41: Diapositive contenant les droites*

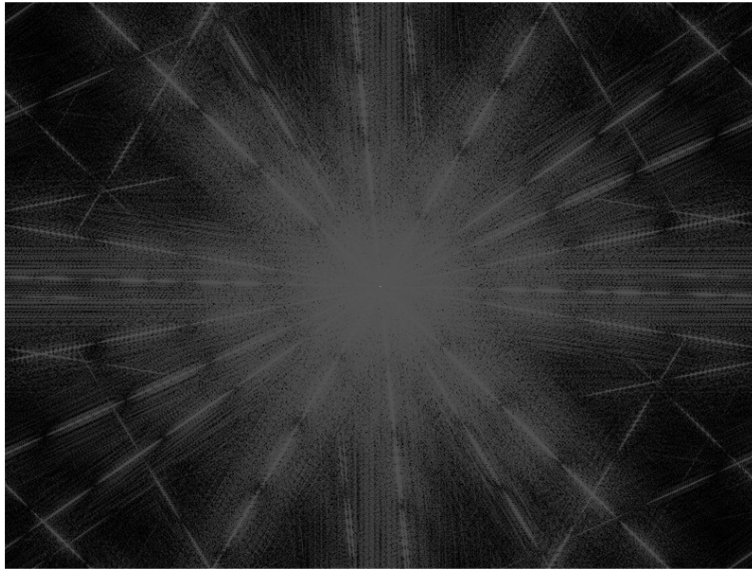
#### **4.4.2 Figure de diffraction**

L'objet étant un ensemble de fentes de directions différentes, la fonction pupillaire s'écrit comme la somme de fonctions représentant des fentes, Orientées différemment, et non nécessairement concourantes.

Si l'on décompose l'objet en ses différentes composantes, par linéarité de la transformation de Fourier, on comprend que pour chaque droite de l'objet, on retrouvera un spectre de fente dans le spectre. On l'a vu plus haut, ce spectre est une droite perpendiculaire dont l'intensité varie en sinus cardinal si la ligne a une largeur non nulle. Cette droite passera nécessairement par l'axe optique, correspondant aux fréquences nulles.

Si l'on additionne tous ces spectres, on devrait donc trouver une sorte d'étoile, comportant autant de branches qu'il y a de droites sur l'image originale.

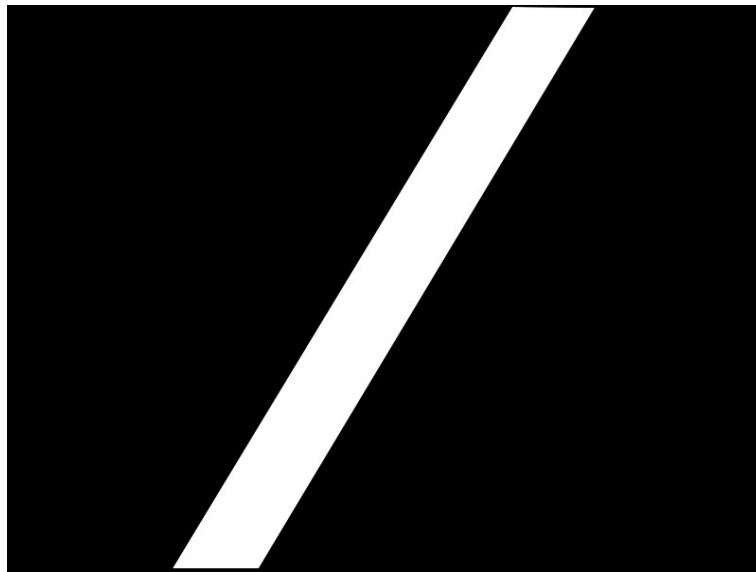
Cependant, on remarque dans le spectre que certaines branches, correspondant chacune à une direction, comportent des raies, formant des sortes d'anneaux noirs concentriques sur le spectre. Ceci est dû à la superposition des spectres des lignes parallèles, qui interfèrent, comme des fentes de Young.



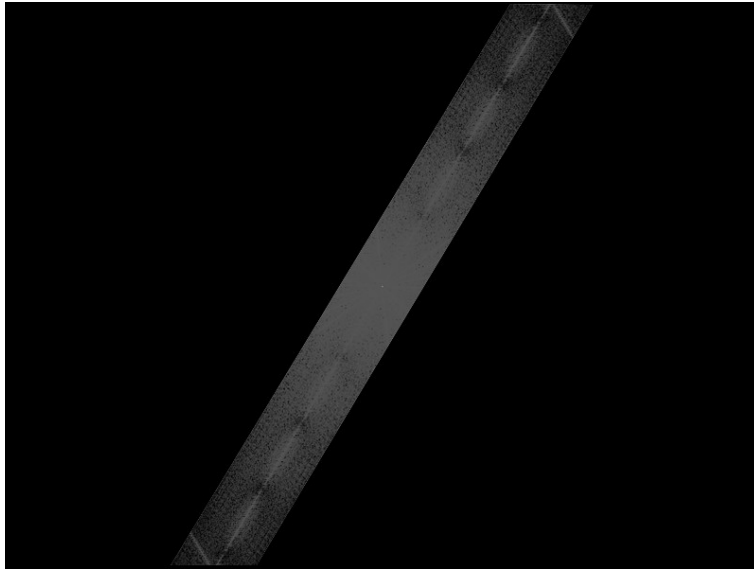
*Illustration 42: Spectre de la figure, calculé numériquement*

#### **4.4.3 Premier Filtre**

Après avoir étudié le spectre, nous comprenons que si nous souhaitons retrouver sur l'image filtrée que les lignes correspondant à une direction, il faut ne sélectionner dans le spectre que la branche perpendiculaire à cette direction.



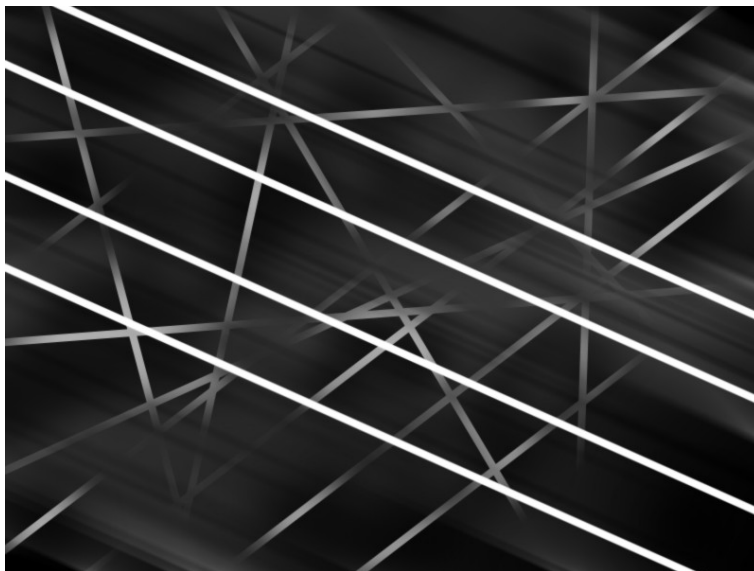
*Illustration 43: Premier filtre*



*Illustration 44: Spectre après passage dans le premier filtre*

#### **4.4.4 Résultat du premier filtre**

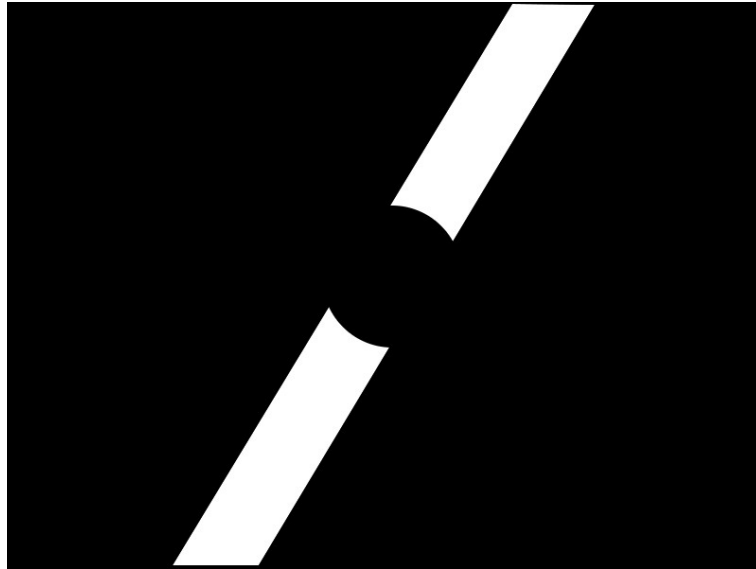
Cependant, on remarque que, ainsi, le filtrage n'est pas parfait, les lignes non parallèles à la direction désirées sont faiblement présente sur l'image filtrée. Ceci est dû au fait que le filtre n'élimine pas la zone proche de l'axe optique, correspondant aux faibles fréquences, où concourent toutes les lignes. Le filtre n'élimine donc pas tout le spectre des droites indésirables.



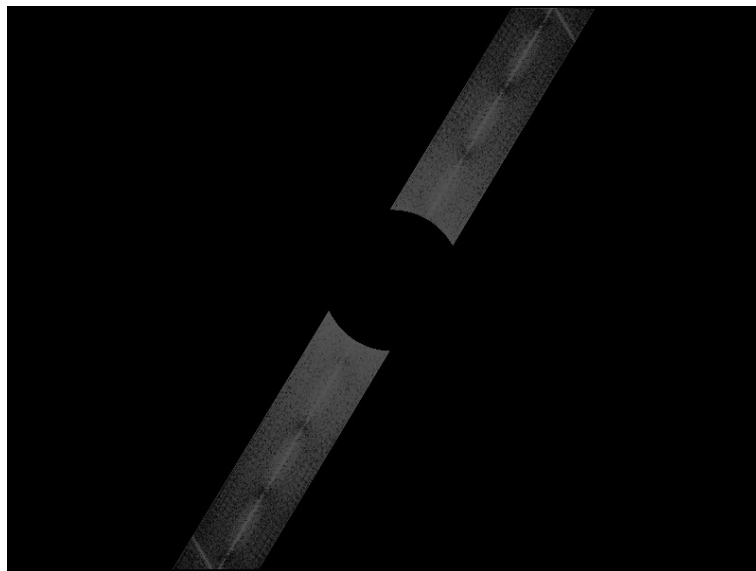
*Illustration 45: Résultat du premier filtrage : des lignes parasites subsistent*

#### **4.4.5 Deuxième Filtre**

Afin de remédier à ce problème, il faut ajouter un filtre passe haut, qui bloquera les fréquences proches de 0.



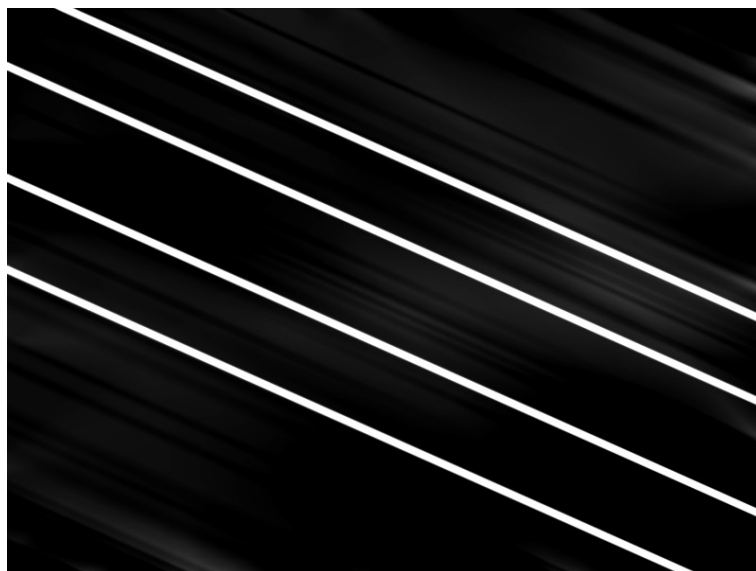
*Illustration 46: Deuxième filtre*



*Illustration 47: Spectre après le deuxième filtrage*

#### **4.4.6 Résultat du deuxième filtre**

Le filtre ne sélectionne donc que la partie du spectre correspondant uniquement à la direction désirée, le filtrage est quasiment parfait.



*Illustration 48: Résultat du second filtrage : toutes les lignes parasites sont éliminées*

## 5 Fonction de transfert de modulation

La fonction de transfert de modulation permet d'établir un lien entre l'objet et l'image observée par diffraction.

### 5-1-D'une manière générale (valable en optique cohérente et incohérente):

En notant  $h$  la réponse impulsionnelle du système on peut écrire la relation suivante:

$$U_i(x_i, y_i) = \iint h(x_i - x_0, y_i - y_0) U_g(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

Avec  $U_i$  l'amplitude de l'image et  $U_g$  l'amplitude prévue par l'optique géométrique.

Donc, en passant à l'intensité:

$$I_i = U_i * \overline{U_i} = \iint |h(x_i - x_0, y_i - y_0)|^2 * I_g(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

### 5-2- En optique cohérente

On a encore:

$$U_i(x_i, y_i) = \iint h(x_i - x_0, y_i - y_0) U_g(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

Et on définit la fonction de transfert optique  $H$ , de la manière suivante:

$$H(f_x, f_y) = \iint h(x_i, y_i) * \exp(j2\pi(f_x x_i + f_y y_i)) dx_i dy_i$$

On peut aussi écrire la réponse impulsionnelle de la manière suivante:

$$h = \iint P(\lambda \cdot di \cdot u_x, \lambda \cdot di \cdot u_y) * \exp(-j2\pi(u_x x_i + u_y y_i)) dx_i dy_i$$

Avec:

$$u_x = \frac{x}{\lambda} \cdot di \quad u_y = \frac{y}{\lambda} \cdot di$$

Et où  $P$  est le facteur de transmission de la pupille.

On obtient alors:

$$H(f_x, f_y) = TF(TF(P(\lambda \cdot di \cdot u_x, \lambda \cdot di \cdot u_y))) = P(-\lambda \cdot di \cdot u_x, -\lambda \cdot di \cdot u_y)$$

Et finalement en considérant des systèmes symétrique par rapport à l'axe  $x$  et l'axe  $y$  (ce qui est souvent le cas)

$$H(f_x, f_y) = P(\lambda \cdot di \cdot u_x, \lambda \cdot di \cdot u_y)$$

### Exemples d'utilisations de la fonction de transfert de modulation:



Avec une pupille rectangulaire de dimension l par l':

$$P(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{l}\right)$$

On obtient la fonction de transfert optique:

$$H(f_x, f_y) = \text{rect}\left(\lambda \cdot \frac{d_i f_x}{l}\right) \cdot \text{rect}\left(\lambda \cdot \frac{d_i f_y}{l}\right)$$

Et avec une pupille circulaire de diamètre l:

$$P(x, y) = \text{cir}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\left(\frac{l}{2}\right)}\right)$$

On obtient la fonction de transfert optique:

$$H(f_x, f_y) = \text{cir}\left(\lambda \cdot d_i \cdot \frac{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}{\left(\frac{l}{2}\right)}\right)$$

### 5-3- En éclairage incohérent:

En optique incohérent nous avons la relation suivante sur les intensités:

$$I_i = K \cdot \iint |h(x_i - x_0, y_i - y_0)|^2 * I_g(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

Avec les notations suivantes:

- $I_i$  Intensité de l'image issue de la pupille.
- $I_g$  Intensité prévue par l'optique géométrique,  $I_g = U_g \cdot \overline{U_g}$ .

On définit alors la fonction de transfert optique H de la manière suivante:

$$H(f_x, f_y) = \frac{(\iint h(x_i, y_i) \cdot \exp(-j2\pi(f_x x_i + f_y y_i)) dx_i dy_i)}{(\iint |h(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i)}$$

Que l'on peut écrire:

$$H(f_x, f_y) = \frac{(TF(|h|^2))}{(TF(|h|^2), f_x=0, f_y=0)}$$

H est alors le facteur de pondération complexe qui, du fait de la traversée du système, affecte la composante de fréquence  $f_x, f_y$ .

Nous pouvons aussi rendre l'expression de la FTO symétrique en effectuant un

changement de variable:

$$H(f_x, f_y) = \frac{(\iint H(\xi + \frac{f_x}{2}, \eta + \frac{f_y}{2}) \cdot \overline{H}(\xi - \frac{f_x}{2}, \eta - \frac{f_y}{2}) d\xi d\eta)}{(\iint H(\xi, \eta) d\xi d\eta)}$$

#### 5-4- Résultats généraux sur la FTM:

On peut désormais définir la fonction de transfert de modulation à partir de la fonction de transfert optique:

$$FTM = |FTO|$$

Pour la fonction de transfert de modulation, nous avons les résultats généraux suivant:

$$FTM(0,0) = 1$$

$$H(-f_x, -f_y) = \overline{H}(f_x, f_y)$$

$$|H(f_x, f_y)| \leq 1$$

## 6 Conclusion

## 7 Annexes

### 7.1 Fonction usuelles

Distribution rectangulaire :

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Distribution de Dirac unidimensionnelle :

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Distribution de Dirac bidimensionnelle :

$$\int_a^b \int_c^d \delta(x, y) dy dx = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\delta(x, y) = \delta(x) \delta(y)$$

Peigne de Dirac unidimensionnel :

$$|||_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k p)$$

Distribution en disque unitaire :

$$\text{cercle}(x, y) = \text{rect}(x^2 + y^2)$$