Семинар 2

Задачи:

1. Найти матрицу обратную к данной:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, а $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$. Покажите, что[1]

   (a) верно
   $$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(AB) \cup \{0\} = \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(BA) \cup \{0\}$$
   То есть спектр AB это тоже самое, что спектр BA с точностью до быть может нулевого значения.

   (b) если $m > n$, то верно
   $$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(AB) = \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(BA) \cup \{0\}$$

   (c) если $m = n$, то верно
   $$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(AB) = \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(BA)$$

3. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $f \in \mathbb{R}[x]$. Покажите:

   (a) $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} f(A) \supseteq f(\mathrm{spec}_{\mathbb{R}} A)$.[2]

   (b) Приведите пример матрицы A и многочлена f, когда во вложении выше строгое неравенство.

4. Найдите многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени 3 со старшим коэффициентом 1 зануляющий следующую матрицу
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$. Покажите, что $E - AB$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $E - BA$.

6. Пусть $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – кососимметрическая матрица (то есть $J^t = -J$) и $u \in \mathbb{R}^n$ – столбец. Найдите, при каких $\beta \in \mathbb{R}$ матрица $E + \beta u u^t J$ обратима.

[1] На самом деле это утверждение верно для любого спектра: рационального, комплексного и т.д.

[2] Для тех кто не боится комплексных чисел. Покажите, что $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}} f(A) = f(\mathrm{spec}_{\mathbb{C}} A)$.