

## Семинар 4

### Задачи:

1. Задачник. §34, задача 34.3 (а, в, д, е).
2. Задачник. §7, задача 7.2 (б, ж).
3. Задачник. §7, задача 7.4.
4. Задачник. §7, задача 7.10.
5. Задачник. §7, задача 7.11.
6. Задачник. §7, задача 7.14.
7. Для матрицы из задачи 16.11 из §16 найдите ее ранг через ранги матриц  $A$  и  $B$ .
8. Пусть  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы. Верно ли, что  $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} BA$ ?
9. Пусть  $A$  – матрица размера 9 на 9 такая, что  $A^2 = E$ . Определите ранг  $E - A$ , если  $\operatorname{rk}(E + A) = 7$ .
10. Пусть коэффициенты квадратной матрицы  $A$  имеют вид  $a_{ij} = (i - j)^2$ . Найдите ранг матрицы  $A$ .
11. Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Покажите, что  $n - \operatorname{rk} A \geq \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} A^2$ .
12. Пусть  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  – матрица ранга  $r$ .
  - (а) Показать, что любой минор, стоящий на пересечении любых  $r$  линейно независимых строк и линейно независимых столбцов, отличен от 0.
  - (б) Пусть  $1 \leq k < r$ . Привести пример, когда минор, стоящий на пересечении  $k$  линейно независимых столбцов и  $k$  линейно независимых строк равен 0.
13. Опишите все матрицы  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  имеющие ранг 1.
14. Пусть  $A \in M_n(F)$  – произвольная матрица и  $\hat{A}$  – ее присоединенная матрица. Найдите  $\operatorname{rk}(\hat{A})$  в зависимости от  $\operatorname{rk}(A)$ .
15. Привести пример матрицы  $A \in M_5(\mathbb{R})$  и матриц  $B_i \in M_5(\mathbb{R})$  таких, что  $\operatorname{rk} A = 3$ ,  $\operatorname{rk} B_i = 2$  и  $\operatorname{rk}(A + B_i) = i$  для  $1 \leq i \leq 5$ .
16. Даны числа  $x_1 \leq \dots \leq x_n$ , разложить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

в самую короткую сумму матриц ранга 1.

17. Найдите ранг следующей матрицы в зависимости от параметра  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Найдите ранги следующих матриц в зависимости от параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$