Семинар 3

Задачи:

1. Пусть ξ – случайная величина такая, что $P(\xi = -1) = \frac{1}{4}$ и $P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$ и для любых точек $a, b \in [0, 1]$ с условием $a < b$ верно $P(\xi \in [a, b]) = \frac{b-a}{2}$. Нарисуйте график функции распределения $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$.

2. В равностороннем треугольнике ABC площади 1 выбираем точку M. Найти математическое ожидание площади ABM.

3. Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина, принимающая значения на отрезке от 0 до 1?

4. Найдите математическое ожидание числа неподвижных точек для случайной перестановки на n элементах.

5. Отрезок $[0, 1]$ разбит двумя случайными точками на три части. Найдите математическое ожидание длины меньшей из частей.

6. Рассмотрим случайную перестановку $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ натуральных чисел от 1 до n. Пару чисел (i, j) назовем «обменом», если выполняются соотношения $p_i = j, p_j = i$. Вычислите математическое ожидание количества обменов в перестановке P (перестановка выбирается случайно равновероятно из множества всех перестановок от 1 до n).

7. На окружности выбираются две случайные точки A и B. Найдите математическое ожидание площади меньшего из сегментов, на которые хорда AB разбивает круг.

8. Робот движется по клеткам бесконечной шахматной доски. Один его шаг – это перемещение на случайную из восьми соседних клеток. Найдите математическое ожидание модуля разности между количеством черных и количеством белых клеток, на которых робот побывал за n шагов (каждая клетка считается столько раз, сколько на ней побывал робот). Ответ представьте в виде компактного выражения.

9. В ряд расположены m предметов. Случайно выбираются k предметов, $k < m$. Случайная величина X равна количеству таких предметов i, что i выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание X.

10. Случайная величина X равна длине цикла, содержащего одновременно элементы 1 и 2, при случайной перестановке множества $1, 2, \ldots, n$. Если такого цикла нет, то $X = 0$. Найдите распределение случайной величины X и ее математическое ожидание.

11. На отрезок бросаются две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

12. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ с плотностью $p(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$.

13. Найти математическое ожидание и дисперсию числа смен успеха на неуспех и неуспеха на успех в схеме Бернули.

14. Пусть ξ_1, ξ_2 – случайные пуассоновские величины с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, причем $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Доказать, что для любого $t > 0$ выполняется $P(\xi_1 \leqslant t) \geqslant P(\xi_2 \leqslant t)$.

15. Пусть ξ – геометрически распределенная случайная величина. Найти распределение величины $\eta = \xi^{\frac{1+(-1)^\xi}{2}}$.

16. Пусть $\mathbb{E}\xi = 0$. Доказать, что $\mathbb{E}|\xi| \leqslant \frac{1}{2}(\mathbb{D}\xi + 1)$.

17. Показать, что $\inf\limits_{-\infty<a<\infty} \mathbb{E}(\xi - a)^2$ достигается при $a = \mathbb{E}\xi$ и, следовательно, $\inf\limits_{-\infty<a<\infty} \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{D}\xi$.

18. Пусть $P_\xi(x) = P(\xi = x)$ и $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$. Показать, что для $a > 0$ и $-\infty < b < \infty$

$$P_{a\xi+b}(x) = P_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{и} \quad F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Показать также, что для $y \geqslant 0$

$$F_{\xi^2}(y) = F_\xi(+\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y}) + P_\xi(-\sqrt{y})$$

и для $\xi^+ = \max(\xi, 0)$

$$F_{\xi^+}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ F_\xi(x), & x \geqslant 0 \end{cases}$$

19. Привести пример двух случайных величин ξ и η, имеющих одну и ту же функцию распределения ($F_\xi = F_\eta$), но таких, что $P(\xi \neq \eta) > 0$.

20. Пусть ξ, η и ζ – случайные величины, причем функции распределения величин ξ и η совпадают. Верно ли, что тогда функции распределения величин $\xi\zeta$ и $\eta\zeta$ совпадают?