

Семинар 4

Конкретные векторные пространства

Основной объект изучения – пространство столбцов \mathbb{R}^n . Любая матрица $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ определяет отображение $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$ заданное $x \mapsto Ax$. В каком-то смысле это единственный пример, а потому – самый важный.

Однако есть и другие, внешне не похожие, примеры:

1. Матрицы $M_n(\mathbb{R})$. В качестве отображений нужно рассматривать $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_m(\mathbb{R})$ заданное по правилу $X \mapsto \sum_i P_i X Q_i$, где $P_i, Q_i^t \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
2. Решения СЛУ $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$ для некоторой $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Хороший вопрос: какие тут должны быть отображения между решениями?
3. Еще более интересный вопрос, а какие должны быть отображения между $M_n(\mathbb{R})$ и $\{y \in \mathbb{R}^m \mid Ay = 0\}$?

Именно поэтому нужна общая теория, которая бы помогла нам одним языком описать все эти случаи и придумать правильные определения, когда они не очевидны.

Абстрактные векторные пространства

В определении векторного пространства надо зафиксировать откуда берутся коэффициенты. Вариантов несколько: вещественные числа \mathbb{R} , комплексные числа \mathbb{C} , рациональные числа \mathbb{Q} .¹ Для простоты, все определения будем формулировать с вещественными числами.²

Определение. Векторное пространство над \mathbb{R} это следующие данные:

1. множество V .³
2. операция сложения векторов, т.е. отображение $+: V \times V \rightarrow V$ вида $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$.
3. операция умножения векторов на число, т.е. отображение $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ вида $(r, v) \mapsto rv$.

И эти данные удовлетворяют следующим аксиомам:

1. Для любых $v, u, w \in V$ верно $(v + u) + w = v + (u + w)$.
2. Существует вектор $0 \in V$ такой, что для любого вектора $v \in V$ имеем $0 + v = v + 0 = v$.
3. Для любого вектора $v \in V$ существует вектор $-v$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = 0$.
4. Для любых векторов $v, u \in V$ верно $v + u = u + v$.
5. Для любых $r \in \mathbb{R}$ и $v, u \in V$ верно $r(v + u) = rv + ru$.
6. Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ верно $(r_1 + r_2)v = r_1v + r_2v$.
7. Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ верно $(r_1 r_2)v = r_1(r_2 v)$.
8. Для любого $v \in V$ верно $1v = v$.

Обычно элементы V называют *векторами*, а элементы \mathbb{R} называют *скалярами*. Даже в абстрактном случае, полезно думать геометрически, представляя себе в первую очередь \mathbb{R}^n как главный пример.

Определение. Пусть V – векторное пространство над \mathbb{R} , тогда подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством, если

1. Если $u, v \in U$, то и $v + u \in U$.
2. Если $r \in \mathbb{R}$ и $v \in U$, то и $rv \in U$.

Стоит отметить, что всякое подпространство само является векторным пространством.

¹На самом деле годится все что угодно, если в этом «чем угодно» можно складывать, вычитать, умножать и делить. Такие объекты называются *полями*.

²Определение векторного пространства может показаться жутко сложным и формальным. Не стоит бросаться учить наизусть все, что в нем находится. Главное понимать как с ним работать. Действительно, никто из нас не знает строгого определения \mathbb{R} , но это не мешает нам с ним работать!

³Это будет как раз множество векторов.

Примеры Пространства:

1. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
2. Пусть $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
3. Пусть $V = \{0\} = \mathbb{R}^0$.
4. Пусть $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ – множество многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения и умножения на число.
5. Пусть $C[0, 1] = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ непрерывна}\}$ – множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, тогда оно является векторным пространством над \mathbb{R} .

Подпространства (а значит тоже пространства):

1. $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$ для некоторой $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
2. $\{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\}$ для некоторых $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.

Линейные отображения

Сами по себе векторные пространства не интересны. Нам бы хотелось уметь их сравнивать между собой. Для этого нам нужны линейные отображения. Кроме того, многие вопросы, возникающие в линейной алгебре формулируются именно в терминах линейных отображений.

Определение. Пусть V и U – векторные пространства над \mathbb{R} . Отображение $\phi: V \rightarrow U$ называется линейным, если

1. $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$ для любых $v_1, v_2 \in V$.
2. $\phi(rv) = r\phi(v)$ для любых $r \in \mathbb{R}$ и $v \in V$.

Множество всех линейных отображений из V в U обозначается $\text{Hom}(V, U)$. Если надо подчеркнуть какие скаляры имеются в виду, можно написать $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, U)$.

Примеры

1. Любое линейное отображение $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ задается в виде $\phi(x) = Ax$, где $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Таким образом множество $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, U)$ отождествляется с множеством матриц $M_{m,n}(\mathbb{R})$.
2. Любое линейное отображение $\phi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_m(\mathbb{R})$ задается единственным образом в виде $\phi(X) = \sum_{i,k=1}^m \sum_{j,l=1}^n a_{ijkl} E_{ij} X E_{lk}$, где E_{ij} – матричная единица, т.е. матрица такая, что на i -ой строке j -ом столбце стоит 1, а все остальные элементы равны 0.

Линейные отображения нужны, чтобы «сравнивать» векторные пространства друг с другом и чтобы строить новые.

Определение. Пусть V и U – векторные пространства и $\phi: V \rightarrow U$ – линейное отображение. Мы говорим, что оно является *изоморфизмом* (а пространства V и U *изоморфными*), если существует $\psi: U \rightarrow V$ – линейное отображение такое, что $\phi\psi = \text{Id}$ и $\psi\phi = \text{Id}$.⁴

Про изоморфные пространства надо думать как про одинаковые. На множество V можно смотреть как на «имена векторов», соответственно, U – множество «новых имен», а ϕ – это переименование наших векторов. А раз это всего лишь переименование, то от него ничего не должно зависеть. Потому изучать V – это все равно, что изучать U .

⁴Другими словами ϕ обратимо, где обратный $\phi^{-1} = \psi$.

Линейная зависимость

Пусть V – векторное пространство над \mathbb{R} . Главный вопрос: как надо про него думать? Ответ прост: это куча из элементов и эти элементы можно складывать и умножать на числа. То есть, мы всегда можем вытащить элементы⁵ $v_1, \dots, v_n \in V$ и начать их складывать с коэффициентами, получив некий новый вектор $r_1 v_1 + \dots + r_n v_n \in V$, где $r_i \in \mathbb{R}$. Поэтому все, что можно сказать про векторное пространство, обязательно формулируется в терминах таких выражений. Поэтому предлагается изучать подобные выражения.

Пусть $v_i \in V$ и $r_i \in \mathbb{R}$ как выше, тогда выражение $r_1 v_1 + \dots + r_n v_n$ называется *линейной комбинацией* векторов v_1, \dots, v_n . Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все $r_i = 0$, в противном случае *нетривиальной*. Вектора v_1, \dots, v_n называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю (нулевому вектору), т.е. v_1, \dots, v_n – линейно зависимы, если существуют $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ так, что хотя бы один из r_i не равен нулю и $r_1 v_1 + \dots + r_n v_n = 0$. В противном случае вектора называются *линейно независимыми*.

Примеры

1. Рассмотрим $V = \mathbb{R}^3$ и пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Тогда вектора v_1, v_2, v_3 линейно независимы. Вектора v_1, v_2, v_4 тоже линейно независимы. Но вот вектора v_1, v_2, v_3, v_4 уже зависимы, так как $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$. Также зависимы вектора v_1, v_2 и v_5 , ибо $v_1 + v_2 - v_5 = 0$.

2. Один вектор $v \in V$ линейно зависим тогда и только тогда, когда он равен нулю.
3. Два вектора $v, u \in V$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. либо $v = \lambda u$ либо $u = \lambda v$.

Базис

Утверждение. Пусть V – векторное пространство над \mathbb{R} и пусть $v_1, \dots, v_n \in V$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Вектора v_1, \dots, v_n линейно независимы и любой вектор $u \in V$ является их линейной комбинацией.
2. Вектора v_1, \dots, v_n линейно независимы и для любого $u \in V$ вектора v_1, \dots, v_n, u уже линейно зависимы.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2). Возьмем любой $u \in V$, тогда $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, тогда $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - u = 0$ – линейная зависимость между векторами.

(2) \Rightarrow (1). Пусть $u \in V$, тогда существует какая-то линейная зависимость $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu u = 0$. Если $\mu = 0$, то вектора v_i линейно зависимы, но это не так. Значит $\mu \neq 0$. Тогда на него можно поделить и получим $u = -\frac{\lambda_1}{\mu} v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\mu} v_n$. \square

Если в векторном пространстве V существует система векторов v_1, \dots, v_n обладающая одним из свойств выше, то мы будем называть такую систему векторов *базисом* пространства V .

Описание всех векторных пространств с базисами

Пусть V – векторное пространство над \mathbb{R} и пусть у нас есть базис $v_1, \dots, v_n \in V$. Тогда любой вектор $u \in V$ единственным образом представляется в виде $u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Надо лишь объяснить единственность. Если $u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$, то $(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0$ – линейная комбинация равна нулю. Но так как v_i линейно независимы, это может быть лишь тривиальная линейная комбинация, т.е. все $a_i - b_i = 0$. Таким образом получаем отображение биективное линейное отображение $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. То есть V и \mathbb{R}^n становятся изоморфными.

Теперь важное замечание. Базис существует всегда! Только не всегда он состоит из конечного числа векторов. Я не хочу обсуждать бесконечные базисы. Однако, важно понимать следующее.

⁵называемые векторами

Утверждение. Пусть V – векторное пространство. Любые два базиса V имеют одинаковое число элементов.⁶

Если V – векторное пространство, то число элементов в базисе называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Если конечного базиса нет, будем писать $\dim V = \infty$.⁷

Примеры Для простых пространств размерность в точности равна числу коэффициентов, которые необходимы для задания векторов: $\dim \mathbb{R}^n = n$ или $\dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$. Чуть позже мы увидим, что для $V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\dim V$ равна числу свободных переменных СЛУ $Ay = 0$. То есть это число характеризует на сколько много есть решений у системы.

Утверждение. Пусть V – векторное пространство и пусть $U \subseteq V$ – подпространство.

1. $\dim U \leq \dim V$. В частности, если V обладает конечным базисом, то и U обязательно обладает конечным базисом.
2. $\dim U = \dim V$ тогда и только тогда, когда $U = V$.

Размерность – это величина, показывающая на сколько векторное пространство большое и характеризует «количество степеней свободы» в пространстве. Кроме того, это понятие согласовано с нашей интуицией: прямая \mathbb{R}^1 имеет размерность 1, плоскость \mathbb{R}^2 – размерность 2, а пространство \mathbb{R}^3 – размерность 3.

Смысл базиса

Напомню, что «по-простому» векторное пространство – это все что угодно, где элементы можно складывать и умножать на числа. Формально надо проверить еще какие-то аксиомы, но все, что возникает в реальной жизни, обязательно будет удовлетворять им. Главные примеры – \mathbb{R}^n и $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Пусть V – векторное пространство. Напомню, что базис – это набор векторов v_1, \dots, v_n который линейно независим и через них все выражается. То есть уравнение $x_1v_1 + \dots + x_nv_n = 0$ имеет только нулевое решение $x_i = 0$ и любой вектор $v \in V$ представляется (по безысходности единственным образом) в виде $v = \lambda_1v_1 + \dots + \lambda_nv_n$. Смысл базиса вот в чем: если вы его выбрали, то вы можете отождествить V с \mathbb{R}^n следующим образом:

если $v = \lambda_1v_1 + \dots + \lambda_nv_n$, то ему соответствует единственный столбец $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Таким образом, про любое

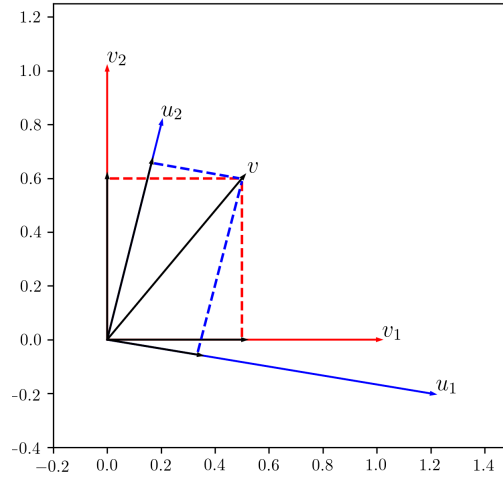
векторное пространство, когда это необходимо, можно думать как просто про \mathbb{R}^n . Но надо помнить, что (1) часто необязательно выбирать базис и без выбора базиса задачи могут проще решаться и (2) базис можно выбрать не единственным образом, и если его выбрать по-другому вычисления могут стать либо проще либо сложнее (как повезет).

Смена базиса

На рисунке ниже изображена плоскость с двумя базисами: красный v_1, v_2 и синий u_1, u_2 . При этом вектор v можно разложить как по одному, так и по другому базису. В зависимости от этого у него будут разные координаты.

⁶Это утверждение верно и для конечных и для бесконечных базисов, но для работы с бесконечными базисами надо знать как сравнивать бесконечные множества.

⁷На самом деле, теория множеств позволяет различать какие-то из бесконечных множеств, но мы этого делать не будем.



Давайте теперь поговорим, как это устроено в общем случае. Пусть у нас есть векторное пространство V . Можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$ для удобства. Пусть у нас в V есть два базиса: e_1, \dots, e_n и f_1, \dots, f_n .⁸ И пусть у нас есть вектор $v \in V$. Тогда он раскладывается по обоим базисам:

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (e_1 \ \dots \ e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n = (f_1 \ \dots \ f_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Вопрос: а как связаны координаты x_i и координаты y_i ? Вот на этот вопрос мы и попытаемся ответить. Для начала надо знать, как связаны базисы e_i и f_i . По определению базиса для e_i каждый вектор f_i представляется в виде:

$$f_i = c_{1i} e_1 + \dots + c_{ni} e_n = (e_1 \ \dots \ e_n) \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

Если положить $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, то предыдущий набор равенств можно записать кратко в виде:

$$(f_1 \ \dots \ f_n) = (e_1 \ \dots \ e_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = (e_1 \ \dots \ e_n) C$$

Такая матрица называется *матрицей перехода* от e_i к f_i . Теперь запишем наш вектор v так

$$v = (f_1 \ \dots \ f_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (e_1 \ \dots \ e_n) C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v = (e_1 \ \dots \ e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Так как разложение по базису e_i однозначно (по определению базиса), то получаем связь на координаты

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Запоминать это правило надо так: если от базиса e к базису f мы перешли с помощью умножения справа на матрицу C , то на координатах у нас отображение в обратную сторону с помощью умножения на матрицу C слева (то есть тоже с другой стороны). Еще полезно держать перед глазами вот эту таблицу.

базис	новый \xleftarrow{C} старый
координаты	новые \xrightarrow{C} старые

⁸Напомним, что базисы обязательно имеют одинаковый размер.

Смена координат в \mathbb{R}^n

В случае, когда мы работаем в \mathbb{R}^n вот как можно думать про равенство

$$(f_1 \dots f_n) = (e_1 \dots e_n) C$$

В этом случае каждый вектор f_i – это вектор столбец высоты n . Потому левая часть равенства (когда там записаны n столбцов) представляет из себя матрицу n на n . То есть $(f_1 \dots f_n) \in M_n(\mathbb{R})$. Аналогично можно думать, что $(e_1 \dots e_n) \in M_n(\mathbb{R})$. Таким образом можно найти матрицу перехода: $C = (e_1 \dots e_n)^{-1}(f_1 \dots f_n)$. Тут есть важный частный случай, предположим, что e_i – стандартный базис, т.е. e_i имеет 1 на i -ом месте и нули в остальных местах. Тогда матрица перехода $C = (f_1 \dots f_n)$. То есть C составлена из координат f_i в стандартном базисе.

Линейные оболочки

Пусть V – векторное пространство. Для простоты можно думать, что это \mathbb{R}^n . И пусть у нас задан произвольный набор векторов $v_1, \dots, v_k \in V$.⁹ Понятно, что конечный набор не образует подпространство, но можно рассмотреть наименьшее подпространство, содержащее данные вектора. Это подпространство обозначается $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ и состоит из всех линейных комбинаций v_i , т.е.

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in V \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

Заметим, что $\dim \langle v_1, \dots, v_k \rangle \leq k$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда v_i линейно независимы.

Пусть вектора v_1, \dots, v_k линейно зависимы. Выделим среди них наибольшее линейно независимое подмножество. После перенумерации векторов, можно считать, что это v_1, \dots, v_m , где $m \leq k$. Тогда каждый вектор v_j при $j > m$ будет линейно выражаться через первые m векторов. Последнее означает, что $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, но теперь вектора справа линейно независимы.

Выделение базиса из системы векторов

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Среди векторов v_1, \dots, v_m найти базис пространства V и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм

1. Запишем вектора v_1, \dots, v_m по столбцам в матрицу $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Например, при $n = 3$, $m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть k_1, \dots, k_r – номера главных позиций в матрице A' . Тогда вектора v_{k_1}, \dots, v_{k_r} образуют базис V . Например, в примере выше это вектора v_1 , v_2 и v_4 .
4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A' . Тогда в i -ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

⁹Вектора могут быть любые, могут быть линейно зависимыми или независимыми, могут быть хоть все нулевыми или просто одинаковыми.

Пример Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки. $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

Подпространства в \mathbb{R}^n

Мы хотим понять как устроены все возможные подпространства в \mathbb{R}^n . Для начала надо понять, а как вообще задавать подпространства в \mathbb{R}^n . Существует два способа:

1. С помощью образующих векторов: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в виде $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, где $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ – некоторые вектора. В этом случае часто бывает полезно, чтобы вектора v_i были линейно независимыми.
2. С помощью СЛУ: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в виде $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ – некоторая матрица. В этом случае часто бывает полезно, чтобы строки матрицы A были линейно независимыми.

Любое пространство можно задать любым из этих двух способов, а значит, если пространство задано одним из этих способов, его можно задать и другим.

Фундаментальная система решений (ФСР)

Так как \mathbb{R}^n обладает конечным базисом, то и $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, тоже обладает конечным базисом, причем количество базисных элементов не превосходит n . Любой базис такого пространства называется *фундаментальной системой решений*. Наша задача научиться находить его.

Дано Матрица $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Задача Найти базис пространства $U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.

Алгоритм

1. Приведем матрицу A к улучшенному ступенчатому виду. Пусть например она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36} \end{pmatrix}$$

2. Теперь $\dim U$ равна количеству свободных переменных. ФСР строится так: для каждой свободной переменной будет свой базисный вектор. Такую свободную переменную полагаем 1, а остальные свободные переменные 0. После чего рассчитываем значения главных переменных. В примере выше, свободные переменные x_2, x_4 и x_6 . Тогда ФСР

$$v_2 = \begin{pmatrix} -a_{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -a_{14} \\ 0 \\ -a_{24} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} -a_{16} \\ 0 \\ -a_{26} \\ 0 \\ -a_{36} \\ 1 \end{pmatrix},$$

В векторах выше подчеркнуты позиции свободных переменных, которые мы задаем сами.