Семинар 7

Задачи:

- 1. Задачник. §38, задача 38.4.
- 2. Задачник. §38, задача 38.6 (a).
- 3. Задачник. §37, задача 37.10 (a).
- 4. Задачник. §37, задача 37.21.
- 5. Задачник. §43, задача 43.15 (a).
- 6. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f,g)=\int\limits_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1,x,x^2,x^3$.
- 7. Опишите все целочисленные ортогональные матрицы.
- 8. Опишите все ортогональные матрицы порядка n, состоящие из неотрицательных элементов.
- 9. Задачник. §43, задача 43.28.
- 10. Пусть A_1, A_2, \ldots, A_n конечные множества и $a_{ij} = |A_i \cap A_j|$. Докажите, что матрица $A = (a_{ij})$ неотрицательно определена.
- 11. Есть неизвестная нам квадратичная форма Q в n-мерном пространстве. Разрешается задавать вопрос вида «Чему равно Q(v)?». Какое минимальное число вопросов надо задать, чтобы определить, является ли форма Q положительно определенной?
- 12. Дан неориентированный непустой граф G без петель. Пронумеруем все его вершины. Матрица смежности графа G с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) это квадратная матрица A размера n, в которой значения элемента a_{ij} равно числу ребер из i-й вершины графа в j-ю вершину. Докажите, что матрица A имеет отрицательное собственное значение.
- 13. При каких натуральных n существует квадратная матрица порядка n с элементами 0, 1 такая, что ее квадрат это матрица из одних единиц?
- 14. Квадратная матрица A такова, что $\operatorname{tr}(AX)=0$ для любой матрицы X, имеющей нулевой след. Докажите, что матрица A является скалярной (то есть имеет вид λE для некоторого скаляра λ).
- 15. За столом сидят n старателей, перед каждым из которых находится кучка золотого песка. Каждую минуту происходит следующее: по общей команде каждый из них перекладывает в свою кучку половину песка из кучки левого соседа и половину из кучки правого соседа. Опишите асимптотическое поведение кучек (а) при n = 3; (б) при произвольном n.
- 16. Пусть A и B симметричные билинейные функции на двумерном вещественном пространстве, причем A положительно определена, а B отрицательно определена. Докажите, что любая непрерывная кривая в пространстве симметричных билинейных функций, соединяющая A и B, содержит функцию с вырожденной матрицей.
- 17. В пространстве многочленов с действительными коэффициентами степени не выше n задана квадратичная форма Q(f) = f(1)f(2). Найдите ее сигнатуру (число единиц и минус единиц в нормальном виде).
- 18. Верно ли, что если матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ симметрична и положительно определена, то квадратичная форма $q(X) = \mathrm{tr}(X^t A X)$ на пространстве $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ будет положительно определенной?
- 19. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ (n > 1), относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?