Линейная алгебра

Дима Трушин

Семинар 5

Ранг системы векторов

Пусть V – некоторое векторное пространство. Системой векторов называется последовательность $(v_1, \ldots, v_k)$ из векторов V, в которой векторы v_i могут повторяться.[1]

По определению рангом системы $(v_1, \ldots, v_k)$ называется максимальное количество линейно независимых векторов в этой системе. Ранг такой системы будет обозначаться $\operatorname{rk}(v_1, \ldots, v_k)$.

Утверждение. *Если $(v_1, \ldots, v_k)$ – некоторая система векторов в векторном пространстве V, то $\operatorname{rk}(v_1, \ldots, v_k) = \dim\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$.*

Матричный ранг

Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – некоторая матрица. Сейчас я определю пять разных определений ранга матрицы. Все эти ранги между собой совпадают и полученная величина будет просто называться рангом матрицы A и обозначаться $\operatorname{rk} A$.

Определение. Пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^m$ – столбцы матрицы A, то есть $A = (A_1|\ldots|A_n)$. Тогда столбцовым рангом матрицы A называется ранг системы $(A_1, \ldots, A_n)$, то есть $\operatorname{rk}_{\text{столб}} A = \operatorname{rk}(A_1, \ldots, A_n)$.

Определение. Пусть $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ – строки матрицы A, то есть $A^t = (A_1|\ldots|A_m)$. Тогда строковым рангом матрицы A называется ранг системы $(A_1, \ldots, A_m)$, то есть $\operatorname{rk}_{\text{стр}} A = \operatorname{rk}(A_1, \ldots, A_m)$.

Определение. Факториальным рангом матрицы A называется следующее число

$$\min\{k \mid A = BC,\ \text{где } B \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R}),\, C \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})\}$$

то есть это минимальное число k такое, что матрица A представима в виде произведения матриц BC, где общая размерность для B и C, по которой они перемножаются, есть k.

Определение. Тензорным рангом матрицы A называется следующее число

$$\min\{k \mid A = x_1y_1^t + \ldots + x_ky_k^t,\ \text{где } x_i \in \mathbb{R}^m,\, y_i \in \mathbb{R}^n\}$$

то есть это минимальное число k такое, что матрица A представима в виде суммы k «тощих» матриц вида xy^t, где $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Если я в матрице A выделю какой-нибудь набор из k строк и одновременно набор из k столбцов, а потом возьму матрицу составленную из элементов на пересечении этих строк и столбцов, то я получу квадратную матрицу размера k. Такие матрицы мы будем называть квадратными подматрицами матрицы A.

Определение. Минорным рангом матрицы A называется размер наибольшей невырожденной квадратной подматрицы.[2]

Главное для нас следующее утверждение.

Утверждение. *Для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ все пять видов ранга совпадают и не превосходят $\min(m, n)$.*

[1] В подобной ситуации повторяющиеся векторы различаются по индексу – «ключу».

[2] На самом деле можно дать более сильное определение, а именно, минорный ранг – это размер любой максимальной невырожденной подматрицы. То есть мы берем какую-то квадратную подматрицу, которая невырождена, а любая большая подматрица уже вырождена. Оказывается, что все максимальные невырожденные подматрицы имеют одинаковый размер и он называется минорным рангом.

Примеры

1. В начале заметим, что матрица имеет ранг 0 тогда и только тогда, когда $A = 0$.

2. Ранг матрицы A равен единице тогда и только тогда, когда она не нулевая и все столбцы пропорциональны одному общему столбцу (или что эквивалентно, все строки пропорциональны одной общей строке). Если воспользоваться определением факториального ранга, то мы видим, что тогда матрица A имеет вид $A = xy^t$, где $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$ – ненулевые вектора.

Свойства ранга

Прежде всего надо запомнить как ранг связан с матричными операциями.

Утверждение. *Пусть* $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$*, тогда*

$$|\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B| \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Надо понимать, что, во-первых, все эти эффекты можно увидеть на диагональных матрицах; во-вторых, все границы неравенств достигаются. Смысл этого утверждения вот в чем: если вы шевелите матрицу A с помощью матрицы B, то ранг A может измениться не более чем на ранг B в любую сторону. Теперь посмотрим на матрицы: $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ и $C = -A$. Тогда $\operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ и $\operatorname{rk}(A+C) = \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} C$.

Утверждение. *Пусть* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *и* $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$*, тогда*

$$\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n \leqslant \operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$$

Как и в предыдущем случае, все обе границы неравенства достигаются и все можно пронаблюдать на диагональных матрицах. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ и $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\operatorname{rk}(AA) = \operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - 2$.

Утверждение. *Пусть* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *– квадратная матрица. Тогда* $\operatorname{rk} A = n$ *тогда и только тогда, когда* A *невырождена, т.е.* $\det A \neq 0$.

Таким образом на ранг можно смотреть как на степень невырожденности матрицы A. Самый высокий ранг у невырожденных матриц, самый маленький у нулевой, но есть еще и промежуточные состояния.

Утверждение. *Если матрица* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *находится в ступенчатом виде и имеет* k *ступенек, то ее ранг равен* k.

Это утверждение вместе со следующим дают эффективный способ считать ранг.

Утверждение. *Для любой матрицы* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *и любых невырожденных матриц* $C \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ *и* $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *верно:* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(CA) = \operatorname{rk}(AD)$.[3]

В частности ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов и строк. Обычно этим пользуются для нахождения ранга. Более того, если $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ имеет ранг r, то элементарными преобразованиями строк и столбцов она приводится к виду

$$A \mapsto \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } E \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R}) \text{ – единичная матрица}$$

Следствием данного замечания является следующее.

Утверждение. *Для любых матриц* $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ *и* $B \in \mathrm{M}_{s\,t}(\mathbb{R})$ *имеем*

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

[3] В частности ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

Линейные отображения

Пусть V и U – векторные пространства, например, можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$, а $U = \mathbb{R}^m$. Напомню, что линейным отображение $\phi\colon V \to U$ – это отображение, удовлетворяющее двум условиям: (1) $\phi(v+u) = \phi(v) + \phi(u)$ для всех $v, u \in V$ и (2) $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ для всех $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Если при этом ϕ бьет из одного пространства, в то же самое, т.е. $\phi\colon V \to V$, то ϕ называется *линейным оператором*. Напомню, что множество всех линейных отображений из V в U обозначается $\operatorname{Hom}(V, U)$.

Правильно думать про линейные операторы как про «линейные деформации пространства V». Например, в $\mathbb{R}^n$ мы можем делать растяжения вдоль координатных осей (на самом деле растяжения вдоль любых прямых годятся). Или можем делать повороты вокруг каких-то прямых. Можно «наклонить» одну координатную ось, зеркальная симметрия, симметрия относительно прямой, плоскости, проекция вектора на прямую, плоскость и еще куча других преобразований описывается линейными операторами.

Важный вопрос: а как задавать линейные отображения и операторы? Оказывается для этого достаточно знать куда отправляется базис.

Утверждение. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис векторного пространства V и $u_1, \ldots, u_n$ – произвольный набор векторов другого пространства U. Тогда существует единственное линейное отображение $\phi\colon V \to U$ такое, что $\phi(e_i) = u_i$.*

Доказательство. Действительно, пусть $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ – произвольный вектор из V. Тогда, если ϕ существует, то он должен действовать по правилу

$$\phi(v) = \phi(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1\phi(e_1) + \ldots + x_n\phi(e_n) = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$$

С другой стороны, легко видеть, что данное равенство однозначно задает линейное отображение. $\square$

В частности этот критерий позволяет отвечать на вопросы следующего вида: существует ли отображение $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, со следующим свойством

$$\phi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \phi\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad \phi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

В данном случае векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

являются базисом, а

$$v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

По утверждению, векторы v_1 и v_2 можно отправить куда угодно и тогда найдется единственное $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ со свойствами

$$\phi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \phi\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

Теперь осталось лишь проверить, удовлетворяет ли наше ϕ последнему свойству. С одной стороны мы хотим, чтобы

$$\phi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

С другой стороны, как мы выяснили $v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Значит

$$\phi(v_3) = \frac{1}{2}(\phi(v_1) + \phi(v_2)) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Не сходится. Значит, не существует. Если бы сошлось, то существовал бы. Отметим, что наивный подход заключается в том, чтобы задать отображение ϕ в виде $x \mapsto Ax$, где $A = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$. Тогда условия на ϕ можно переписать как систему линейных уравнений на a, b, c, d. Три вектора, по две координаты, будет всего 6 условий и 4 неизвестные. Это намного неприятнее, чем предложенный выше метод.

Линейные отображения между $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$

В случае $V = \mathbb{R}^n$ и $U = \mathbb{R}^m$ мы можем полностью описать линейные отображения в терминах матриц. Действительно, пусть (в обозначениях предыдущего утверждения) $\phi(e_i) = u_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, где e_i – стандартный базисный вектор $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \phi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Пристально вглядевшись в то, что мы только что сделали, можно получить следующее.

Утверждение. *Отображение $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, которое каждой матрице A ставит в соответствие линейное отображение ϕ_A, действующее $\phi_A(x) = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$, является изоморфизмом векторных пространств, т.е. это правило биективно и $\phi_{A+B} = \phi_A + \phi_B$ и $\phi_{\lambda A} = \lambda\phi_A$.*

Заметим, что под действием биекции из упражнения выше операция композиции линейных отображений соответствует операции умножения матриц: если $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,k}(\mathbb{R})$, то они соответствуют $\phi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $\phi_B\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Тогда $\phi_A\phi_B\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ совпадает с ϕ_{AB}. Таким образом, как только в пространствах V и U выбраны базисы, нет разницы между изучением линейных отображений и матриц.

Удобный формализм

Матрица линейного отображения Пусть у нас есть линейное отображение $\phi\colon V \to U$ и пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис V и $f_1, \ldots, f_m$ – некоторый базис U. Тогда каждый вектор $\phi(e_i)$ является линейной комбинацией векторов f_i, т.е. $\phi(e_i) = a_{1i}f_1 + \ldots + a_{mi}f_m$. Это можно записать в матричном виде так

$$\begin{pmatrix} \phi(e_1) & \ldots & \phi(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или еще короче

$$\phi\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{pmatrix} A$$

Здесь $\phi(e_1, \ldots, e_n)$ имеется в виду покомпонентное умножение вектора из e_i на ϕ слева. Это одна из форм блочного умножения матриц. Матрица A в этом случае называется матрицей линейного отображения ϕ в базисах e_i и f_i.

Действие линейного отображения в координатах Пусть теперь $v \in V$ – некоторый вектор, который раскладывается по базису $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (e_1, \ldots, e_n)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\phi(v) = \phi(e_1, \ldots, e_n)x = (f_1, \ldots, f_m)Ax$$

То есть вектор $\phi(v)$ раскладывается по базису f_i с координатами Ax. Значит в координатах, наше линейное отображение задается по правилу $x \mapsto Ax$. На этот факт можно смотреть так. Если есть отображение $\phi\colon V \to U$, то после выбора базиса в V оно превращается в $\mathbb{R}^n$, после выбора базиса в U оно превращается в $\mathbb{R}^m$, а ϕ должен превратиться в отображение умножения на некоторую матрицу слева. Так вот матрица линейного оператора для ϕ – это в точности та самая матрица, в которую превратился ϕ после выбора базиса.

Смена базиса и линейные отображения

Линейные отображения – это отображения прежде всего и потому они ничего не знают про выбор базиса. С другой стороны, такие отображения задаются разными матрицами в разных базисах. Тут есть пара вещей которые надо понимать: (1) как меняется матрица линейного отображения и (2) смена базиса позволяет упростить вид матрицы.

Начнем с первого вопроса. Тут есть две ситуации: $\phi\colon V \to U$ и $\phi\colon V \to V$, т.е. случай общего линейного отображения и случай линейного оператора. Главная разница в том, что в первом случае мы можем менять одновременно два базиса и в области определения ϕ и в области куда ϕ бьет. Во втором случае, базисы меняются одновременно.

Утверждение. *Пусть* $e_1, \ldots, e_n$ *и* $e'_1, \ldots, e'_n$ *– два базиса* V*, также* $f_1, \ldots, f_m$ *и* $f'_1, \ldots, f'_m$ *– два базиса* U*. Пусть*

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C \text{ и } (f'_1, \ldots, f_m) = (f_1, \ldots, f_m)D$$

где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *и* $D \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ *– матрицы перехода. Если* ϕ *задается матрицей* A *в базисах* e_i *и* f_i*, то в базисах* e'_i *и* f'_i *он задается матрицей* $D^{-1}AC$*.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся замечанием из предыдущего раздела. Нам известно, что $\phi(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_m)A$, а надо найти матрицу A' такую, что $\phi(e'_1, \ldots, e'_n) = (f'_1, \ldots, f'_m)A'$. Давайте посчитаем:

$$\phi\begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{pmatrix} AC = \begin{pmatrix} f'_1 & \ldots & f'_m \end{pmatrix} D^{-1}AC$$

Значит $A' = D^{-1}AC$, что и требовалось. ☐

Следствие. *Если* $\phi\colon V \to V$ *в базисе* $e_1, \ldots, e_n$ *записывается матрицей* A*, то в базисе* $e'_1, \ldots, e'_n$ *заданном* $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$*,* ϕ *записывается матрицей* $C^{-1}AC$*.*

Смена базиса в координатах

Пусть теперь $V = \mathbb{R}^n$ и $U = \mathbb{R}^m$, также $e_1, \ldots, e_n$ обозначает стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $f_1, \ldots, f_m$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^m$. Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ – другой базис $\mathbb{R}^n$. Это вектор столбцы, из которых я могу соорудить матрицу $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, поставив e'_i подряд в качестве столбцов.[4] Аналогично, если $f'_1, \ldots, f'_m$ – другой базис из $\mathbb{R}^m$ я могу составить из них матрицу $D \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Обе матрицы C и D невырождены.

Любой вектор $v \in \mathbb{R}^n$ можно записать как

$$v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ в этом случае мы говорим, что задали его в координатах } x_i$$

С другой стороны, мы можем записать v так

$$v = y_1e'_1 + \ldots + y_ne'_n = C\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ в этом случае мы говорим, что задали его в координатах } y_i$$

Аналогично в пространстве $\mathbb{R}^m$ любой вектор u может быть записан в двух системах координат:

$$u = w_1f_1 + \ldots + w_mf_m = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \text{ или } u = z_1f'_1 + \ldots + z_mf'_m = D\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Пусть теперь наше отображение $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задано матрицей A, то есть вектор в координатах x_i переходит в вектор в координатах w_i по правилу

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ или кратко } x \mapsto w = Ax$$

Мы хотим переписать ϕ в координатах y_i и z_i, то есть записать отображение ϕ в виде $y \mapsto z = A'y$. Для этого надо пройти по следующей диаграмме

$$\begin{tikzcd}
x = Cy \arrow[r, mapsto] & w = Ax = ACy \arrow[d, mapsto] \\
y \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & z = D^{-1}w = D^{-1}ACy
\end{tikzcd}$$

Стартуем с координат y (левый нижний угол). По ним сначала рассчитываем координаты x (вверх по диаграмме). Потом действуем отображением ϕ с помощью матрицы A и получаем вектор $\phi(v)$ в координатах w (вправо по стрелке). Потом пересчитываем координаты w в координаты z (вниз по диаграмме). В результате получаем, что $y \mapsto z = D^{-1}ACy$, т.е. $A' = D^{-1}AC$.

[4] В этом случае мы также имеем $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$. Это лишь другой способ описать ту же конструкцию, что и в предыдущем пункте. В столбцах матрицы C стоят координаты векторов e'_i относительно стандартного базиса e_i.

Образ и ядро отображения

Если $\phi\colon V \to U$ – линейное отображение (как и выше $V = \mathbb{R}^n$ и $U = \mathbb{R}^m$), то с ним можно связать два подпространства. Первое из них – *ядро* ϕ, а именно: $\ker\phi = \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$.[5] Второе – *образ* ϕ: $\operatorname{Im}\phi = \phi(V) \subseteq U$, то есть все, что можно получить из V, применив к нему ϕ.

Связь со СЛУ Пусть ϕ задается матрицей $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, то есть наше отображение имеет вид $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ по правилу $x \mapsto y = Ax$, здесь $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$.

- **Ядро** – это пространство решений однородной системы линейных уравнений $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.
- **Образ**. Введем следующие обозначения для столбцов матрицы A: $A = (A_1|\ldots|A_n)$. Тогда по определению в образе ϕ лежат все возможные векторы вида Ax. Давайте распишем это так:

  $$\operatorname{Im}\phi = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \langle A_1, \ldots, A_n\rangle$$

  То есть образ – это линейная оболочка столбцов матрицы A. Если $e_1, \ldots, e_n$ – это стандартный базис $\mathbb{R}^n$, то есть все координаты e_i кроме i-ой равны нулю, а i-я равна единице, тогда i-ый столбец матрицы A – это образ вектора e_i.
- **Прообраз вектор**. Пусть мы зафиксировали вектор $b \in \mathbb{R}^m$ и хотим найти все векторы $x \in \mathbb{R}^n$ такие, что они переходят в b под действием ϕ. Тогда это означает, что нам надо решить уравнение $Ax = b$, то есть решение неоднородной системы означает, что мы ищем прообраз к некоторому вектору.
- **Связь между ОСЛУ и СЛУ**. Пусть x_0 – произвольное решение для $Ax = b$ и $\ker\phi = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ – решения однородной системы. Тогда все решения системы $Ax = b$ имеют вид $x_0 + z$, где $z \in \ker\phi$. То есть прообраз любого вектора b является сдвигом ядра отображения ϕ. Однако, обратите внимание, прообраз вектора b может быть пуст, а ядро всегда не пусто, в нем как минимум всегда найдется нулевой вектор. Таким образом ядро отвечает за единственность решения, если оно есть.

  Полезно понимать, что для любого b найдется прообраз относительно ϕ, если в системе $Ax = 0$ (или $Ax = b$) количество главных переменных равно количеству строк матрицы A, то есть m. В терминах ранга это означает, что $\operatorname{rk} A = m$.

Свойсва ядра и образа

Утверждение. *Пусть V и U – векторные пространства и $\varphi\colon V \to U$ – линейное отображение. Тогда*

1. *φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\varphi = U$.*
2. *φ инъективно тогда и только тогда, когда $\ker\varphi = 0$.*
3. *$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$.*

Доказательство. (1) Это просто переформулировка сюръективности на другом языке.

(2) Так как $\ker\varphi = \varphi^{-1}(0)$ и прообраз всегда содержит 0, то из инъективности вытекает, что $\ker\varphi = 0$. Наоборот, пусть $\varphi(v) = \varphi(v')$, тогда $\varphi(v) - \varphi(v') = 0$. А значит, $\varphi(v - v') = 0$. То есть $v - v'$ лежит в ядре, а значит равен 0, что и требовалось.

(3) Этот пункт я пояснять не буду.

□

Еще полезно понимать, что если в пространствах V и U задать пару подпространств $V' \subseteq V$ и $U' \subseteq U$ такую, что $\dim V' + \dim U' = \dim V$, то найдется (и не одно) линейное отображение $\phi\colon V \to U$ такое, что $\ker\phi = V'$, а $\operatorname{Im}\phi = U'$.

[5] В англоязычной технической литературе ядро еще называют nullspace, что можно перевести как нулевой пространство.