Полезные школьные материалы для решения задач аналитической геометрии

I) Немного поговорим о вынесении множителя из-под квадратного корня.

Вот некоторые распространенные случаи:

$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$

Нередко под корнем получается достаточно большое число, например $\sqrt{5904}$.

Как быть в таких случаях? На калькуляторе проверяем, делится ли число на 4: $\frac{5904}{4}=1476$. Да, разделилось нацело, таким образом: $5904=4\cdot 1476$. А может быть, число 1476 ещё раз удастся разделить на 4? $\frac{1476}{4}=369$. Таким образом: $5904=4\cdot 4\cdot 369$. У числа 369 последняя цифра нечетная, поэтому разделить в третий раз на 4 явно не удастся. Пробуем поделить на девять: $\frac{369}{9}=41$. В результате:

$\sqrt{5904}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 9\cdot 41}=2\cdot 2\cdot 3\sqrt{41}=12\sqrt{41}$ Готово.

Вывод: если под корнем получилось неизвлекаемое нацело число, то пытаемся вынести множитель из-под корня – на калькуляторе проверяем, делится ли число на: 4, 9, 25, 49, 100 и т.д.

В ходе решения различных задач корни встречаются часто, всегда пытайтесь извлекать множители из-под корня во избежание более низкой оценки или ненужных проблем с доработкой ваших решений по замечанию преподавателя.

II) Заодно повторим возведение корней в квадрат и другие степени:

$(\sqrt{5})^2=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$

$(-\sqrt{2})^3=(-1)^3\cdot(\sqrt{2})^3=-1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

$(4\sqrt{2})^2=4^2\cdot(\sqrt{2})^2=16\cdot 2=32$

$(-5\sqrt{3})^2=(-1)^2\cdot 5^2\cdot(\sqrt{3})^2=1\cdot 25\cdot 3=75$

$(\sqrt{3})^3=\sqrt{3^3}=\sqrt{9\cdot 3}=3\sqrt{3}$

$(2\sqrt{2})^4=2^4\cdot\sqrt{2^4}=16\cdot 4=64$

$(\sqrt[3]{4})^2=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=2\cdot\sqrt[3]{2}$

Правила действий со степенями в общем виде можно найти в школьном учебнике по алгебре, но, думаю, из приведённых примеров всё или почти всё уже ясно.

III) Немного о действиях с дробями

Дроби можно (и нужно) сокращать:

$-\frac{6}{2}=-3$, $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ *(сократили на 2)*, $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ *(на 3)*, $-\frac{25}{10}=-\frac{5}{2}$ *(на 5)*, $\frac{70}{21}=\frac{10}{3}$ *(на 7)*.

Сложение / вычитание дробей:

1) Если знаменатели одинаковые, то никаких проблем – знаменатель остаётся таким же, а числители складываются: $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, например:

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$, $\frac{2}{7}+\frac{8}{7}=\frac{2+8}{7}=\frac{10}{7}$, $\frac{5}{11}-\frac{8}{11}=\frac{5-8}{11}=-\frac{3}{11}$

2) Если одно из чисел целое, то тоже никаких проблем: $\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{c\cdot b}{b}=\frac{a+c\cdot b}{b}$, например:

$\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{3}{3}=\frac{4}{3}$, $2+\frac{2}{5}=\frac{10}{5}+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$, $\frac{3}{10}-3=\frac{3}{10}-\frac{30}{10}=\frac{3-30}{10}=-\frac{27}{10}$

3) Если знаменатели разные $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ $(b\neq d)$, то сначала нужно привести дроби к общему знаменателю, проще всего по формуле $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}$, например:

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 2}{6}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$, $\frac{3}{5}-\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 7}{35}-\frac{6\cdot 5}{35}=\frac{21}{35}-\frac{30}{35}=\frac{21-30}{35}=-\frac{9}{35}$

$\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 2}{12}+\frac{3\cdot 6}{12}=\frac{10}{12}+\frac{18}{12}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$

В ряде случаев решение можно упростить, как, например, в последнем примере:

$\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5}{6}+\frac{9}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ *(домножили числитель и знаменатель 2-й дроби на 3).*

III) Упрощение многоэтажных дробей

1) Дробь $\frac{a}{b}$ делится на число c: $$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}$$	2) Число a делится на дробь $\frac{b}{c}$: $$\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a\cdot c}{b}$$
3) Дробь $\frac{a}{b}$ делится на дробь $\frac{c}{d}$: $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$	Все три правила применимы и справа налево, то есть из двухэтажной дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь

IV. Действия с пропорцией

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$ *(рассмотрим общий случай, когда a, b, c, d отличны от нуля)*

То, что находится внизу одной части – можно переместить наверх другой части.
То, что находится вверху одной части – можно переместить вниз другой части.

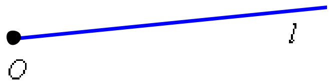
Крутим-вертим:

$$ad=bc,\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\quad a=\frac{bc}{d},\quad b=\frac{ad}{c},\quad c=\frac{ad}{b},\quad d=\frac{bc}{a}$$

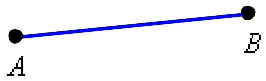
V. Вспоминаем основные геометрические фигуры:

1. Прямая. Она бесконечна:

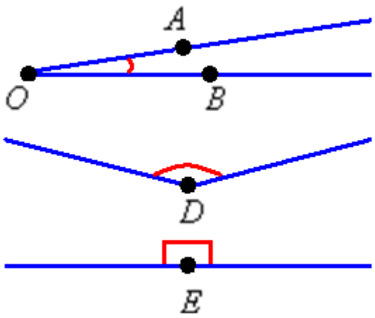
2. Луч.

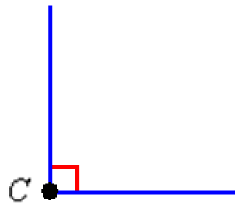


3. Отрезок.

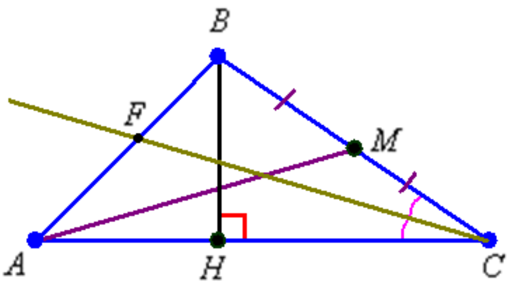


4. Угол – образован двумя *лучами*, исходящими из одной точки. Обозначается одной $\angle O$ или тремя $\angle BOA$ или маленькими греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \varphi$ и др. Угол измеряется в градусах и радианах *(см. Приложение **Тригонометрия**)*. Угол от 0 до 90° называют острым (например, $\angle O$), угол равный 90° – прямым ($\angle C$), от 90 до 180° – тупым ($\angle D$). Угол в 180° называется развёрнутым ($\angle E$), а угол, равный 360° – полным (т.к. совершается полный оборот)





5. Треугольник. Его стандартно обозначают значком Δ и тремя вершинами: ΔABC.
Сумма углов треугольника $\angle A+\angle B+\angle C=180°$ или π радиан.



Высота – это *перпендикуляр*, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону (или её продолжение). Например, BH.

У треугольника 3 высоты, они пересекаются в одной точке. Площадь треугольника равна половине произведения стороны *(длины)* на длину опущенной к ней высоты, в частности: $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BH|$ Существуют и другие формулы

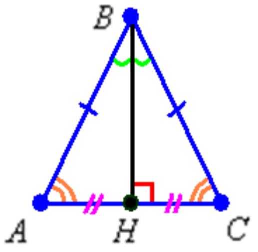
Медиана – это *отрезок*, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Например, AM - она делит сторону BC на 2 равные части ($BM=MC$)
Точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

Биссектриса – это *луч*, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла. Например, CF – она делит $\angle C$ на два равных угла ($\angle BCF=\angle FCA$). Биссектрисы тоже пересекаются в одной точке.

В общем случае точки пересечения высот, медиан и биссектрис не совпадают.

Частные случаи треугольников:

5.1. Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным.

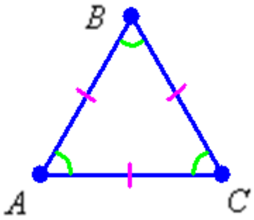


Равные стороны $(AB = BC)$ называют боковыми сторонами, а третью сторону (AC) – основанием.

Высота (BH), проведённая к основанию, одновременно является *медианой* $(AH = HC)$ и *биссектрисой* $(\angle ABH = \angle HBC)$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны $(\angle A = \angle C)$

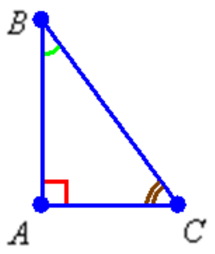
5.2. Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним.



Все углы этого треугольника тоже равны и каждый из них равен $60°$ ($\frac{\pi}{3}$ радиан).

Равносторонний треугольник также называют правильным треугольником

5.3. Треугольник с прямым углом называется прямоугольным.



Сторона, лежащая напротив прямого угла (BC), является самой длинной и называется гипотенузой, две другие стороны (AB и AC) называются катетами.

Теорема Пифагора: сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы: $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$

Коротко о тригонометрических отношениях:

Синусом острого угла называется отношение *противолежащего* катета к гипотенузе:

$$\sin \angle B = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \angle C = \frac{AB}{BC}$$

Косинусом острого угла называется отношение *прилежащего* катета к гипотенузе:

$$\cos \angle B = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \angle C = \frac{AC}{BC}$$

Тангенсом острого угла называется отношение *противолежащего* катета к *прилежащему:*

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{AC}{AB}, \quad \operatorname{tg} \angle C = \frac{AB}{AC}$$

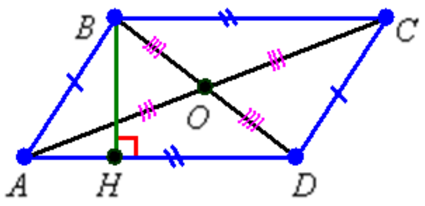
Котангенсом острого угла называется отношение *прилежащего* катета к *противолежащему* (предыдущие отношения наоборот).

Для острого угла φ справедливы следующие формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{ctg\varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

В тригонометрии перечисленные отношения определяются функциями – для произвольного угла, не только острого *(см. Приложение* ***Тригонометрия****).*

6. Параллелограмм – это четырёхугольник с попарно параллельными сторонами



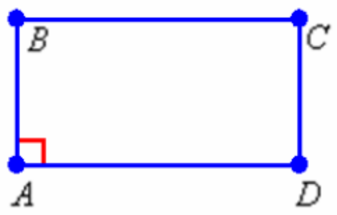
$AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$, кроме того, эти стороны равны: $AB = DC$, $BC = AD$. Углы при противоположных вершинах равны: $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Площадь параллелограмма равна произведению длины стороны на длину, опущенной к ней высоты: $S = |AD| \cdot |BH|$

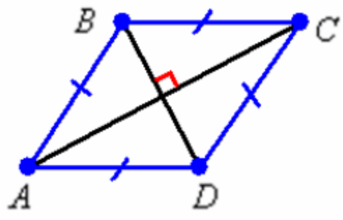
Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам: $AO = OC$, $BO = OD$.

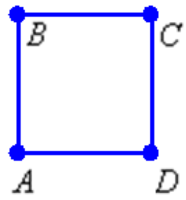
6.1. Прямоугольник – это параллелограмм с равными углами: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

6.2. Ромб – это параллелограмм с равными сторонами: $AB = BC = CD = AD$ *(рисунок посередине)*. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны: $AC \perp BD$.

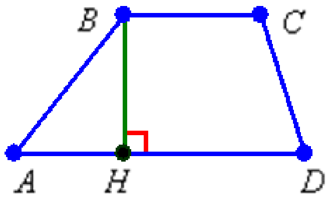
6.3. Квадрат – это параллелограмм с равными углами и сторонами *(рисунок справа)*.





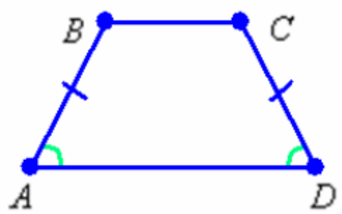


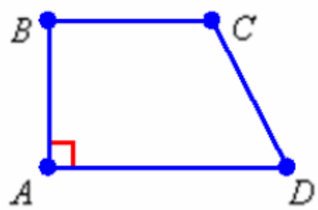
7. Трапеция – это четырёхугольник, у которого 2 стороны параллельны, а 2 другие -нет



Параллельные стороны (AD и BC) называют основаниями, а непараллельные (AB и CD) – боковыми сторонами.

Площадь трапеции равна полусумме оснований на высоту между ними: $S = \frac{1}{2}\left(|AD| + |BC| \right) \cdot |BH|$.

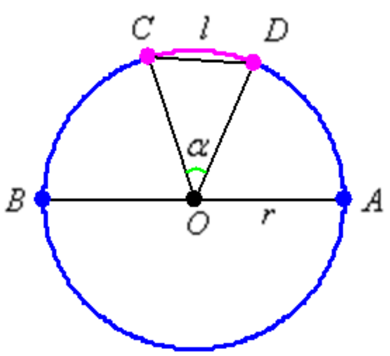




Трапецию с равными боковыми сторонами называют равнобокой или равнобочной *(слева)*.

Трапецию с прямыми углами при боковой стороне называют прямоугольной.

8. Окружность – это множество точек, равноудалённых от данной точки. Точка O называется центром окружности. Отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности (OA, OB, OC, OD) называется радиусом, его длину обозначим через r.



Длина окружности: $L = 2\pi \cdot r$, площадь **круга**: $S = \pi \cdot r^2$

Кусок окружности между двумя точками называется дугой, например $\overset{\frown}{l} = CD$, угол α называется центральным; длина дуги: $l = \alpha \cdot r$ *(α выражен в радианах)*.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой (например, CD). Хорда, проходящая через центр, делит окружность на две полуокружности и называется диаметром (например, AB). Длина диаметра обозначается через d, очевидно, что $d = 2r$.