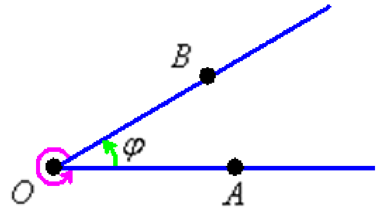
Вспоминаем основы тригонометрии

Внимание! Перед изучением этой информации настоятельно рекомендую ПОЛНОСТЬЮ прочитать пункт V *Приложения* ***Школьные материалы***.

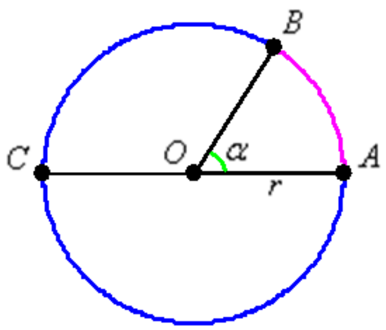
Итак, начнём с угла. **Угол** – это геометрическая фигура, образованная двумя *лучами*, исходящими из одной точки. Заметьте, что эта конструкция задаёт два угла (зелёная и малиновая стрелки), но из контекста задач обычно понятно, о каком угле идёт речь.



Обозначения: $\angle O$, $\angle AOB$, маленькие греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \varphi$ и др. Существуют и другие способы.

Угол чаще отсчитывают **против часовой стрелки**, такой порядок называют положительным направлением отсчёта или положительной ориентацией угла. «Открутку» угла можно провести и в противоположном направлении – от луча OB к лучу OA, в результате получится отрицательно ориентированный угол. К такому углу добавляется знак «минус», так, если $\varphi = 30^\circ$, то $-\varphi = -30^\circ$. Во многих задачах ориентация угла не имеет значения и его принимают положительным.

Углы измеряют в градусах, радианах и более редких единицах. В высшей математике в ходу радианы, и немногие помнят, что это такое. Изобразим на чертеже окружность произвольного радиуса $r \neq 0$ с центром в точке O:



Радиан – это угол α, **такой**, что длина *дуги* $\overset{\frown}{AB}$ *(малиновый цвет)*, **равна** *радиусу* r окружности. Радиан не зависит от радиуса окружности и примерно равен $\alpha \approx 57^\circ$.

Радианная мера угла – это **отношение** длины дуги $\overset{\frown}{l}$ между сторонами угла к радиусу окружности: $\alpha_{рад} = \dfrac{|\overset{\frown}{l}|}{r}$.

Выясним, сколько радиан содержит, например, *развёрнутый* угол $\angle AOC = 180^\circ$. Из известной формулы длины окружности $L = 2\pi \cdot r$ следует, что длина верхней *полуокружности* равна $|\overset{\frown}{AC}| = \pi \cdot r$, таким образом, **в 180 градусах содержится**: $\alpha_{рад} = \dfrac{|\overset{\frown}{AC}|}{r} = \dfrac{\pi \cdot r}{r} = \pi \approx 3{,}14$ радиан. Соответственно, полный оборот (360°) включает в себя $2\pi \approx 6{,}28$ радиан (примерно 6,28 углов α).

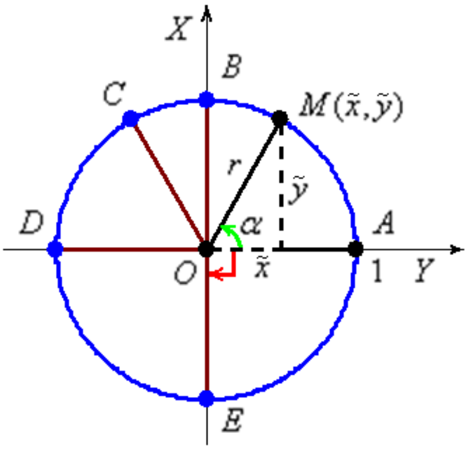
Для перевода градусов в радианы удобно использовать **формулу** $\alpha_{рад} = \dfrac{\alpha_{град} \cdot \pi}{180}$.

Переведём в радианы, например, угол $\alpha_{град} = 30^\circ$: $\alpha_{рад} = \dfrac{30 \cdot \pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}$ радиан.

Обратно, **радианы переводятся в градусы по формуле:** $\alpha_{град} = \alpha_{рад} \cdot \dfrac{180}{\pi}$. Например, переведём в градусы $\alpha_{рад} = \dfrac{\pi}{3}$: $\alpha_{град} = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{180}{\pi} = 60^\circ$.

В высшей математике почти все вычисления проводятся в радианах, поэтому первая формулу более актуальна.

В *Приложении* ***Школьные материалы*** (п. V*)* были определены синус, косинус, тангенс и котангенс **острого** угла и сейчас мы распространим эти отношения на произвольный угол. Изобразим на чертеже декартову систему координат и окружность *единичного* радиуса $r=1$ *(можно взять любой ненулевой радиус)* с центром в начале координат:



Рассмотрим **произвольную** точку $M(\tilde{x},\tilde{y})$, принадлежащую окружности, и *положительно ориентированный* угол $\alpha=\angle AOM$ *(зелёная стрелка)*.

Синусом угла α называют отношение *ординаты* точки M к радиусу окружности: $\sin\alpha=\dfrac{\tilde{y}}{r}$.

Косинусом угла α называют отношение *абсциссы* точки M к радиусу окружности: $\cos\alpha=\dfrac{\tilde{x}}{r}$.

Тангенс угла α – есть отношение $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ (если $\tilde{x}\neq 0$), и **котангенс**: $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ (если $\tilde{y}\neq 0$).

Так, **углам** $0°, 360°, 720°, \ldots$ *(да-да, угол можно «накручивать» и дальше!)* соответствуют точка $A(1,0)$, и поэтому: $\sin 0=\dfrac{0}{1}=0,\ \cos 0=\dfrac{1}{1}=1,\ \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{0}{1}=0$, и котангенса не существует, ибо ордината этой точки равна нулю.

Углу $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$ $(90°)$ соответствует точка $B(0,1)$, следовательно:

$\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{1}=1,\ \cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{0}{1}=0$, тангенса не существует, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{0}{1}=0$.

Углу $\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$ $(120°)$ соответствует точка $C\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, следовательно:

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3},\ \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Угол $\angle AOD=\pi$ $(180°)$ – **самостоятельно** *(сверьтесь по таблице ниже)*.

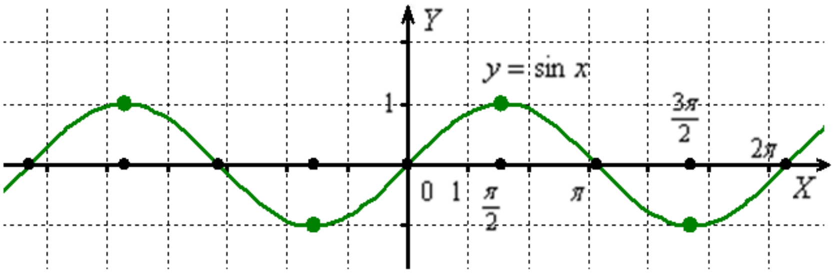
Аналогично для отрицательно ориентированных углов. В частности, **углу** $\angle AOE=-\dfrac{\pi}{2}$ $(-90°)$ *(красная стрелка на чертеже)*, соответствует точка $E(0,-1)$, следовательно: $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{-1}{1}=-1,\ \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{0}{1}=0$, тангенса не существует, $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{0}{1}=0$.

Если к этому углу прибавить 2π (оборот), то получится угол в $\dfrac{3\pi}{2}$ радиан (270 градусов) с теми же самыми значениями синуса, косинуса и котангенса.

В курсе математического анализа рассматриваются непрерывные функции $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg}x,\ y=\operatorname{ctg}x$, аргументы которых («иксы») измеряются в радианах

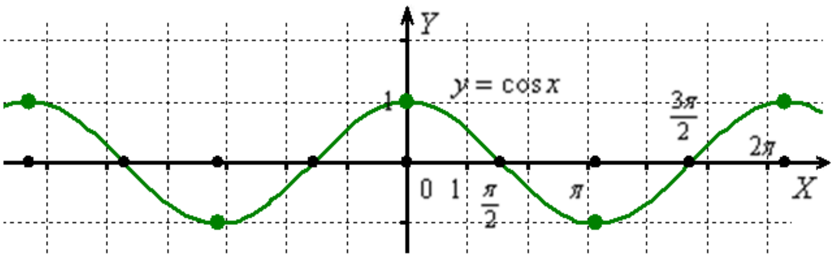
Эти функции определены для любого допустимого угла «икс» и периодичны:

1. График функции $y = \sin x$ называется **синусоидой**:



При его ручном построении следует проявить аккуратность, поскольку $\pi \approx 3{,}14$.

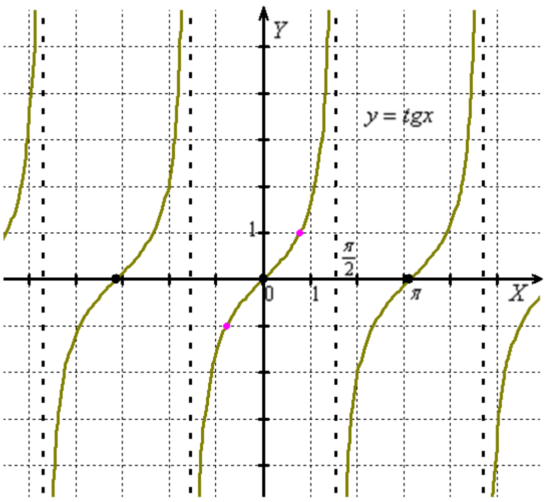
2. График $y = \cos x$ представляет собой синусоиду, сдвинутую на $\frac{\pi}{2}$ влево:

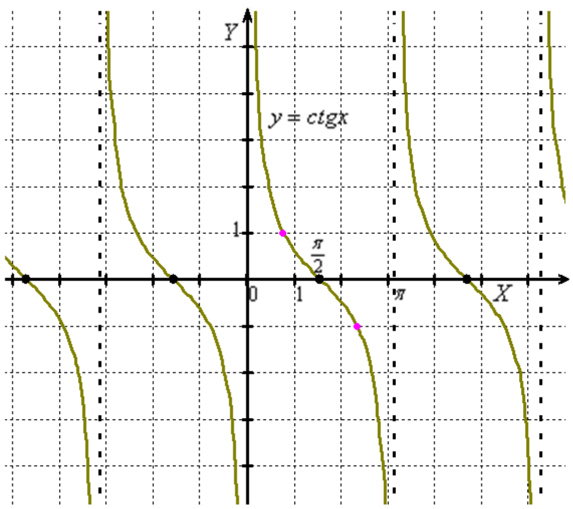


Синус и косинус *ограничены* и могут принимать значения лишь из отрезка $[0;1]$:

$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1$

3-4. График тангенса $y = \mathrm{tg}x$ *(слева)* и котангенса $y = \mathrm{ctg}x$:





В точках, через которые проходят пунктирные асимптоты, функции не определены.

При построении графиков желательно находить дополнительные опорные точки, в частности, для тангенса и котангенса таковыми являются:

$$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1, \; tg\frac{\pi}{4} = 1, \qquad ctg\frac{\pi}{4} = 1, \; ctg\frac{3\pi}{4} = -1.$$

Для нахождения значений тригонометрических отношений / функций удобно использовать специальную таблицу:

Таблица значений тригонометрических функций:

Функция	Аргумент x (угол φ)																
	0	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctgx$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Примечание: *прочерк «–» означает, что этого значения функции / отношения не существует.*

Запоминать эти значения без надобности не нужно, **но полезно помнить**, что:

$\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ *(см. чертежи выше)*, это ускорит решение заданий.

Если вам попался «плохой» угол (которого нет в таблице), то значение функции следует вычислить приближенно, например, с помощью *Приложения* ***Алгебраический Калькулятор***: $\sin\frac{\pi}{13} \approx 0{,}24$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{5} \approx 3{,}08$ и так далее *(в Экселе число «пи» обозначается так:* ***ПИ()****)*.

Важно! Синус и косинус могут принимать значения лишь от –1 до +1 включительно, и если у вас получилось другое число, ищите ошибку. Тангенс и котангенс могут быть любыми – от «минус» до «плюс» бесконечности.

Обратная задача: как найти угол, если известен его синус, косинус, тангенс или котангенс?

С помощью обратных функций: **арксинуса**, **арккосинуса**, **арктангенса** и **арккотангенса**:

$x = \arcsin y$, $x = \arccos y$, $x = \operatorname{arctg} y$, $x = \operatorname{arcctg} y$, при этом **в общем случае ориентироваться на вышеприведенную таблицу нельзя!!!**

Ориентируйтесь на таблицу и информацию, которая приведена ниже:

Таблица значений обратных тригонометрических функций:

Угол $x =$	Аргумент y (значение синуса, косинуса, тангенса или арктангенса)												
	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
$\arcsin y$	–	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	###	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	###	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	–
$\arccos y$	–	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	###	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	###	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	–
$\mathrm{arctg} y$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	###	###	$-\frac{\pi}{6}$	###	0	###	$\frac{\pi}{6}$	###	###	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arcctg} y$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	###	###	$\frac{2\pi}{3}$	###	$\frac{\pi}{2}$	###	$\frac{\pi}{3}$	###	###	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$ и так далее. **Внимание! Углы выражены в радианах и только в них!**

Значком «###» обозначены «плохие» углы, которые следует вычислить приближённо с помощью калькулятора:

$$\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx -0{,}71 \text{ радиан (!)}$$

То же самое касается значений «игрек», которых нет в таблице, например:

$$\arcsin\frac{1}{3}\approx 0{,}34 \text{ радиан}$$

Аргумент арксинуса и арккосинуса может быть лишь из промежутка $-1\le y\le 1$!

Аргументы арктангенса и арккотангенса могут быть любыми.