

Семинар 5

Задачи:

1. Пусть вероятностный эксперимент – бросание правильного кубика. Рассмотрим следующие случайные величины:

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если выпало нечетное число} \\ 0, & \text{если выпало четное число} \end{cases} \quad \text{и} \quad \eta = \begin{cases} 0, & \text{если выпало 3 или 6} \\ 1, & \text{если выпало 1 или 4} \\ 2, & \text{если выпало 2 или 5} \end{cases}$$

Найдите распределение случайного вектора (ξ, η) . Будут ли случайные величины ξ и η независимыми? А некоррелированными?

2. Каждая из случайных величин X и Y принимает два значения, причем $\text{cov}(X, Y) = 0$. Докажите, что X и Y независимы.
3. Пусть ξ и η – две случайные величины с $\mathbb{D}\xi > 0$, $\mathbb{D}\eta > 0$ и $\rho = \rho(\xi, \eta)$ – их коэффициент корреляции. Показать, что $|\rho| \leq 1$. При этом если $|\rho| = 1$, то найдутся такие константы a и b , что $\eta = a\xi + b$. Более того, если $\rho = 1$, то

$$\frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}} = \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}$$

(и, значит, в случае $\rho = 1$ константа $a > 0$), если же $\rho = -1$, то

$$\frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}} = -\frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}$$

(и, значит, в этом случае $a < 0$).

4. Найти свертку двух нормальных распределений с параметрами (a_1, σ_1^2) и (a_2, σ_2^2) .
5. Найти свертку двух равномерно распределенных на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ случайных величин.