Линейная алгебра

Дима Трушин

Семинар 2

Подстановка матриц в многочлен

Пусть $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ – многочлен с вещественными коэффициентами, а $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда можно определить $p(A) = a_0 E + a_1 A^1 + \ldots + a_n A^n$, где E – единичная матрица. Множество всех многочленов с вещественными коэффициентами я буду обозначать $\mathbb{R}[x]$.

Задача. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ найдется многочлен $p(x)$ степени $n^2 + 1$ такой, что $p(A) = 0$. [1]

Подстановка матрицы в многочлены помогает построить из исходной матрицы другие с заданным свойством, а многочлен зануляющий нашу матрицу может стать неплохой исходной точкой для подобных манипуляций.

Свойства подстановки в многочлен

1. Если $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $f \in \mathbb{R}[x]$ – многочлен, то $f(C^{-1}AC) = C^{-1}f(A)C$ для любой обратимой $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Если $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $f, g \in \mathbb{R}[x]$ – многочлены, то матрицы $f(A)$ и $g(A)$ коммутируют между собой.

Спектр матрицы

Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ определим вещественный спектр матрицы A следующим образом:

$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda E \text{ не обратима}\}$$

Аналогично определяются спектры в рациональном, комплексном и прочих случаях. Обычно в литературе под просто спектром подразумевают именно комплексный спектр! Это определение спектра принадлежит функциональному анализу. На самом деле этот спектр совпадает со множеством собственных значений матрицы, о которых речь пойдет чуть позже.

Примеры

1. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Тогда $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

2. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Прямое вычисление показывает, что $A^2 = -E$, то есть многочлен $f(x) = x^2 + 1$ зануляет A. Как будет видно ниже, вещественный спектр этой матрицы пуст $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \varnothing$, а комплексный спектр $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A = \{i, -i\}$.

[1] На самом деле можно показать, что найдется многочлен степени n.

Минимальный многочлен Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – некоторая матрица. Рассмотрим множество всех ненулевых многочленов зануляющих A. Формально мы смотрим на множество

$$M = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(A) = 0,\, f \neq 0\}$$

Пусть $f_{min} \in M$ – многочлен самой маленькой степени и со старшим коэффициентом 1. Тогда он называется минимальным многочленом матрицы A. Обратите внимание, что минимальный многочлен зависит от того, с какими коэффициентами мы его рассматриваем. Комплексный и вещественный минимальный многочлен могут быть разными.

Утверждение. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, тогда верны следующие утверждения:*

1. *Минимальный многочлен f_{min} существует и единственный, при этом $\deg f_{min} \leqslant n$.*
2. *Минимальный многочлен делит любой другой многочлен зануляющий A.*
3. *$\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A$ тогда и только тогда, когда $f_{min}(\lambda) = 0$.*
4. *Для любого зануляющего многочлена $g \in \mathbb{R}[x]$, то есть $g(A) = 0$, верно $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq$ корни g.*

Диагонлизуемость

Утверждение. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $g \in \mathbb{R}[x]$ – зануляющий многочлен для A, то есть $g(A) = 0$. Если он раскладывается на линейные множители $g(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_k)$ и все λ_i различны, то существует обратимая матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $C^{-1}AC$ будет диагональной и на диагонали будут числа из множества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ (но может быть не все из них и часть может повторяться).*

Обратите внимание, что здесь очень важно, чтобы корни λ_i были различными! Если это условие не выполнено, то утверждение не верно. Например, возьмем матрицу $J_n(\lambda)$. У нее минимальный многочлен будет $(x-\lambda)^n$, но про нее можно доказать, что нельзя сопряжением ее сделать диагональной. Я затрону этот вопрос позже, когда будет изучать геометрический смысл этой операции.

Квадратные корни из единицы Это соображение полезно, если вы хотите решать различные матричные уравнения. Например, пусть мы хотим найти все возможные $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $A^2 = E$, то есть хотим найти все квадратные корни из единицы в матрицах. Тогда это означает, что $g(x) = x^2 - 1$ зануляет матрицу A. При этом $g(x) = (x - 1)(x + 1)$. Это значит, что найдется обратимая матрица C такая, что $C^{-1}AC$ будет диагональной с числами 1 и -1 на диагонали. Кроме того, если у диагональной матрицы 1 и -1 не идут подряд, то мы ее можем сопрячь некоторой матрицей так, что 1 и -1 пойдут подряд. То есть мы показали, что если A является решением уравнения $A^2 = E$, то найдется такая невырожденная матрица C, что

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \text{ следовательно } A = C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} C^{-1}$$

Здесь подразумевается, что блоки с единичной и минус единичной матрицей могут быть пустыми (то есть только одни единицы или минус единицы допустимы).

С другой стороны. Легко видеть, что матрицы полученного вида являются решениями данного уравнения

$$A^2 = C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} C^{-1} = C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}^2 C^{-1} = CEC^{-1} = E$$