Семинар 2

Задачи:

1. Задачник. §18, задача 18.3 (а, д).

2. Задачник. §18, задача 18.9 (и).

3. Задачник. §19, задача 19.20.

4. Задачник. §19, задача 19.21.

5. Найти матрицу обратную к данной:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Найдите явный вид обратной матрицы:
   (a) $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, причем A и C обратимы.

7. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, а $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$. Покажите, что[1]
   (a) верно
   $$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(AB) \cup \{0\} = \operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(BA) \cup \{0\}$$
   То есть спектр AB это тоже самое, что спектр BA с точностью до быть может нулевого значения.
   (b) если $m > n$, то верно
   $$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(AB) = \operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(BA) \cup \{0\}$$
   (c) если $m = n$, то верно
   $$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(AB) = \operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(BA)$$

8. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $f \in \mathbb{R}[x]$. Покажите:
   (a) $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} f(A) \supseteq f(\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A)$.[2]
   (b) Приведите пример матрицы A и многочлена f, когда во вложении выше строгое неравенство.

9. Найдите многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени 3 со старшим коэффициентом 1 зануляющий следующую матрицу
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$. Покажите, что $E - AB$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $E - BA$.

11. Пусть $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – кососимметрическая матрица (то есть $J^t = -J$) и $u \in \mathbb{R}^n$ – столбец. Найдите, при каких $\beta \in \mathbb{R}$ матрица $E + \beta u u^t J$ обратима.

[1] На самом деле это утверждение верно для любого спектра: рационального, комплексного и т.д.
[2] Для тех кто не боится комплексных чисел. Покажите, что $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} f(A) = f(\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A)$.