Семинар 1

Задачи:

1. Сколько способов пройти из $(0, 0, 0)$ в $(n, 2n, 3n)$, если можно делать шаги на $+1$ по любой из осей?

2. Найдите определитель матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = C_{i+j-2}^{i-1}$.

3. За время обучения в ШАД Михаил 20 раз решал задачи классификации. В каждой задаче он использовал ансамбль из пяти различных классификаторов, причем никакую пару классификаторов он не применял более одного раза. Каково минимально возможное число известных Михаилу классификаторов?

4. В школе ученики писали контрольную. Учитель заметил следующую закономерность: с вероятностью $0,36$ ученики зевают на контрольной, с вероятностью $0,3$ пишут ее на отлично. Другое любопытное наблюдение: зевающие ученики пишут контрольную на отлично всего лишь с вероятностью $0,22$. Найдите

   (a) С какой вероятностью ученик одновременно зевал и написал контрольную на отлично.

   (b) С какой вероятностью среди написавших контрольную на отлично ученики зевали.

   Решение. Введем следующие события

   - A = «ученик зевал»
   - B = «ученик написал контрольную на отлично»

   Тогда нам дано

   - $P(A) = 0,36$
   - $P(B) = 0,3$
   - $P(B \mid A) = 0,22$

   В пункте (a) нам надо найти $P(A \cap B)$ в пункте (b) нам надо найти $P(A \mid B)$.

   (a) Воспользуемся равенством $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = 0,22 \cdot 0,36 = 0,0792$

   (b) Воспользуемся формулой

   $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,22 \cdot 0,36}{0,3} = 0,264$$

   Ответ: (a) 0,0792, (b) 0,264 ☐

5. Василий решил покрасоваться перед Василисой и утверждает, что бросив два кубика, у него обязательно выпадет шестерка. Василиса со своей стороны решила поддаться Василию и будет игнорировать все его броски, если на кубиках выпали одинаковые числа. Найдите вероятность того, что Василий произведет впечатление на Василису в этих условиях.

   Решение. Опишем вероятностное пространство для бросания двух кубиков. Пространство элементарных исходов Ω выглядит так

   $$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}$$

   Василиса игнорирует все исходы, когда выпали одинаковые числа, то есть она смотрит только на исходы из следующего события B

   $$\begin{matrix} & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & \end{matrix}$$

Василий стремится выбросить хотя бы одну шестерку, то есть его интересует следующее событие A

$$\begin{array}{cccccc} &&&&& (1,6)\\ &&&&& (2,6)\\ &&&&& (3,6)\\ &&&&& (4,6)\\ &&&&& (5,6)\\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array}$$

По условию задачи нас интересует вероятность $P(A \mid B)$, то есть вероятность выкинуть хотя бы одну шестерку, при условии, что выпали разные числа. Тогда

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{5+5}{6 \cdot 6 - 6} = \frac{1}{3}$$

Здесь я пользуюсь тем, что $P(B) = |B|\frac{1}{36}$, то есть количество элементов в событии умножить на вероятность одного элемента.

Ответ: $\frac{1}{3}$ $\square$

6. В некотором прекрасном городе «Икс» население выросло аж до 10 человек. По этому прекрасному случаю в нем открылся парк аттракционов, где можно попрыгать на батуте. Оказалось, что батут обязательно рвется, если на нем находится 5 человек, в случае 4 человек он рвется с вероятностью $0,8$, в случае 3 человек с вероятностью $0,6$, в случае 2 человек с вероятностью $0,4$, в случае 1 человека с вероятностью $0,2$ и производитель гарантирует, что их надежные и качественные батуты сами по себе не рвутся. Несмотря на праздничное событие, жители города «Икс» очень заняты, каждый из них может прийти в парк с вероятностью $0,5$. Узнайте, какова вероятность того, что уже в первый день бизнес с батутом накроется.

Решение. Давайте введем следующие события

- A = «батут рвется»
- B_k = «пришло k человек»

Тогда нам дано, что

- $P(A \mid B_0) = 0$
- $P(A \mid B_1) = 0,2$
- $P(A \mid B_2) = 0,4$
- $P(A \mid B_3) = 0,6$
- $P(A \mid B_4) = 0,8$
- $P(A \mid B_k) = 1$ при $k \geqslant 5$.

Нам надо найти $P(A)$. Так как у нас всего 10 человек, то события $B_0, B_1, \ldots, B_{10}$ образуют покрытие вероятностного пространства непересекающимися событиями. Значит можно применить формулу полной вероятности

$$P(A) = P(A \mid B_0)P(B_0) + P(A \mid B_1)P(B_1) + \ldots + P(A \mid B_{10})P(B_{10})$$

Подставляя все условные вероятности мы видим, что

$$P(A) = 0,2P(B_1) + 0,4P(B_2) + 0,6P(B_3) + 0,8P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) + P(B_7) + P(B_8) + P(B_9) + P(B_{10})$$

И нам осталось лишь подсчитать вероятности $P(B_k)$. Но прежде чем это сделать, давайте заметим одну интересную вещь. Давайте посчитаем $P(\bar{A})$, а потом получим $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, тогда

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \mid B_0)P(B_0) + P(\bar{A} \mid B_1)P(B_1) + \ldots + P(\bar{A} \mid B_{10})P(B_{10})$$

Но мы знаем, что $P(A \mid B_k) + P(\bar{A} \mid B_k) = 1$, а значит

$$P(\bar{A}) = P(B_0) + 0,8P(B_1) + 0,6P(B_2) + 0,4P(B_3) + 0,2P(B_4)$$

В этом случае сумма получается гораздо короче и считать будет приятнее.

Давайте посчитаем вероятности $P(B_k)$. Как обычно в подобных задачах вам никто и никогда не признается, какое распределение на гражданах имеется в виду. Это все потому что обычно подразумевается самый естественный выбор распределения, который только можно сделать. Давайте рассмотрим все возможные ситуации. Пронумеруем людей от одного до десяти, тогда все возможные исходы для прихода людей задаются последовательностями $(a_1, \ldots, a_{10})$, где $a_i \in \{0, 1\}$. Здесь $a_k = 1$ означает, что k-ый человек пришел и $a_k = 0$ означает, что k-ый человек не пришел. Так как нам ничего не сказано про то, какое из этих событий происходит с какой вероятностью, то мы естественно должны предположить (и у нас нет другого выбора), что все эти события равновероятно.[1] Так как у нас всего 2^{10} вариантов, то вероятность одного исхода равна $1/2^{10}$.

Событие $B_0 = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ состоит из одного исхода, потому $P(B_0) = 1/2^{10}$.

Событие B_1 состоит из исходов вида $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, когда встречается ровно одна единичка. Так как для каждой единички 10 вариантов, то $P(B_1) = 10/2^{10}$.

Событие B_2 состоит из исходов, в которых встречается две единицы. Так как всего C_{10}^2 пар единиц, то $P(B_2) = C_{10}^2/2^{10}$.

В общем случае $P(B_k) = C_{10}^k/2^{10}$.

Тогда

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^0 + 0,8C_{10}^1 + 0,6C_{10}^2 + 0,4C_{10}^3 + 0,2C_{10}^4}{2^{10}}$$

то есть

$$P(\bar{A}) = \frac{1 + 0,8 \cdot 10 + 0,6 \cdot 45 + 0,4 \cdot 120 + 0,2 \cdot 210}{1024} = \frac{126}{1024}$$

А значит

$$P(A) = 1 - \frac{126}{1024} = \frac{898}{1024} \approx 0,876953125$$

То есть вероятность того, что бизнес накроется в первый же день мягко говоря неутешительно велика.

Ответ: $\frac{898}{1024}$ □

7. Хитрый Дмитрий и Василий Упрямый решили участвовать в телешоу. Во время передачи игроку даются 3 шкатулки и в одной из них лежит супер-приз. Сначала игрок выбирает одну из шкатулок, но не открывает ее. После этого ведущий открывает из оставшихся одну пустую. В этот момент игроку разрешается изменить свой выбор. После чего выбранная шкатулка открывается. Василий Упрямый принял решение, что несмотря ни на что, не поменяет свой первоначальный выбор, а Хитрый Дмитрий наоборот решил, что обязательно поменяет свой изначальный выбор. Выясните, у кого из участников больше шансов выиграть в телешоу и такой уж ли Дмитрий хитрый.

Решение. Тут есть несколько способов объяснять решение. Давайте я приведу два: первое будет идейное не вычислительное, а второе – сухое через условную вероятность. Оба решения полезны, потому что раскрывают разные стороны пользования теорией вероятности.

Первое решение. На раунд игры можно смотреть таким образом, в начале Василий и Дмитрий вместе выбирают одну шкатулку вместе. После этого ведущий выбирает какую-то другую шкатулку, а далее Дмитрий меняет свой выбор на оставшуюся третью шкатулку. В итоге после такого раунда все шкатулки разделились между Василием, ведущим и Дмитрием. Причем шкатулка ведущего всегда пустая. Значит если выигрывает Василий, то проигрывает Дмитрий и наоборот. Вероятность для выбора Василия посчитать легко – $1/3$. А значит вероятность выиграть у Дмитрия будет $2/3$ как $1 - 1/3$.

Второе решение. Как и в первом решении, стратегия Василия не представляет трудностей. Три шкатулки, а значит вероятность угадать – $1/3$. Что касается Дмитрия введем следующие события

- A = «угадал при первом выборе»
- B = «выиграл»

[1] Позже, когда я расскажу про независимость событий, вы узнаете, что эта гипотеза равносильно тому что каждый человек приходит или не приходит с вероятностью $1/2$ и все люди приходят независимо друг от друга. Подобная точка зрения еще больше проливает свет на то, почему такая гипотеза о равномерности всегда подразумевается в подобных задачах.

Тогда нам надо посчитать $P(B)$. Воспользуемся формулой полной вероятности относительно A и $\bar{A}$, получим

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})$$

Вероятность угадать при первом выборе совпадает с вероятностью угадать Василием, то есть $P(A) = 1/3$ и $P(\bar{A}) = 2/3$. Давайте поймем, чему равны вероятности $P(B \mid A)$ и $P(B \mid \bar{A})$.

Событие $B \mid A$ означает «выиграл при условии, что угадал в первом выборе». Но это не возможно, так как если при первом выборе Дмитрий угадал, а потом поменял свой выбор, то он заведомо выбрал неверную шкатулку, потому $P(B \mid A) = 0$.

Событие $B \mid \bar{A}$ означает «выиграл при условии, что не угадал в первом выборе». В этом случае, так как ведущий из оставшихся двух открывает заведомо пустую шкатулку, то Дмитрий всегда сменит свой выбор на шкатулку, в которой есть приз и выиграет, то есть $P(B \mid \bar{A}) = 1$. Значит

$$P(B) = 0\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Ответ: У Василия вероятность выигрыша составляет $\frac{1}{3}$, а у Дмитрия – $\frac{2}{3}$ □

8. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла $0,5$). Улоф подбрасывает ее n раз, а Рави – $n+1$. Найдите вероятность того, что у Рави будет больше орлов, чем у Улофа.

   Решение. **Ответ:** $\frac{1}{2}$ □

9. Рассмотрим случайную перестановку на n элементах. Докажите, что данные k элементов окажутся в одном цикле с вероятностью $\frac{1}{k}$.

   Решение. □

10. Черный куб покрасили снаружи белой краской, затем разрезали на 27 одинаковых маленьких кубиков и как попало сложили из них большой куб. С какой вероятностью все грани этого куба будут белыми?

    Решение. **Ответ:** $\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 6! \cdot 4^6 \cdot 24}{27! \cdot 24^{27}}$ □

11. Дано множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Среди всех его подмножеств равновероятно выбирается k его подмножеств.Найдите вероятность того, что $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \varnothing$.

    Решение. **Ответ:** $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n$ □

12. У вас имеется неограниченное число костей в форме всех возможных правильных многогранников. Можно ли, однократно бросив некоторый набор таких костей, симулировать бросок (а) правильной семигранной кости? (б) правильной 15-гранной кости?

    Решение. **Ответ:** (а) нельзя, (б) можно □

13. Игра состоит из одинаковых и независимых конов, в каждом из которых выигрыш происходит с вероятностью p. Когда игрок выигрывает, он получает 1 доллар, а когда проигрывает — платит 1 доллар. Как только его капитал достигает величины N долларов, он объявляется победителем и удаляется из казино. Найдите вероятность того, что игрок рано или поздно проиграет все деньги, в зависимости от его стартового капитала K.

    Решение. **Ответ:** P(«проиграть при стартовом капитале k») $= 1 - \frac{1-q^k}{1-q^N}$, где $q = \frac{1-p}{p}$, при $0 \leqslant k \leqslant N$. □

14. Вероятность попадания одной пули в бочку с бензином равна p. При одном попадании бочка взрывается с вероятностью p_1, при двух и более - взрывается наверняка. Найти вероятность того, что бочка рванет при n выстрелах.

Решение. **Ответ:** $1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}(1-p_1)$ $\square$

15. Завод выпускает изделия с вероятностью брака $0,04$. Первый контролер находит брак из брака с вероятностью $0,92$, второй – $0,98$. Найти вероятность, с которой признанное годным изделие будет бракованным.

   Решение. Здесь есть неоднозначность в задаче. Можно ее понимать так, что контролеры проверяют друг за другом (каждую деталь сначала проверяет первый, потом второй и деталь признается годным, если оба признали годным), либо можно понимать так, что половину деталей проверяет один контролер, а другую половину проверяет второй контролер.

   Ответ: Если считать, что контролеры проверяют друг за другом, то $P($«деталь бракованная» $\mid$ «деталь признана годной
   $\frac{1}{15001}$. Если считать, что каждый контролер проверяет половину всех деталей, то $P($«деталь бракованная» $\mid$ «деталь признана годной»$) = \frac{1}{481}$ $\square$

16. На отрезок $[0, L]$ бросают три точки. Найти вероятность того, что третья окажется между первыми двумя.

   Решение. **Ответ:** $\frac{1}{3}$ $\square$

17. Показать, что события A и B независимы тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ и B независимы.

   Решение. $\square$

18. Привести примеры, показывающие, что, вообще говоря, равенства

$$P(B \mid A) + P(B \mid \overline{A}) = 1 \quad \text{и} \quad P(B \mid A) + P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1$$

   неверны.

   Решение. $\square$

19. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – независимые события с $P(A_i) = p_i$.

   (a) Показать, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

   (b) Пусть P_0 – вероятность того, что ни одно из событий $A_1, \ldots, A_n$ не произойдет. Показать, что

$$P_0 = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

   Решение. $\square$

20. Пусть A и B – независимые события. В терминах $P(A)$ и $P(B)$ выразить вероятность событий

   (a) Не произойдет ни одно из событий A, B.
   (b) Произойдет в точности одно из событий A, B.
   (c) Одновременно произойдут оба события A, B.

   Решение. $\square$

21. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя, т.е. A и $\overline{A}$ независимы.

   (a) Показать, что тогда $P(A)$ равна 0 или 1.
   (b) Показать, что если события A и B независимы и $A \subseteq B$, то или $P(A) = 0$, или $P(B) = 1$.
   (c) Пусть событие A таково, что $P(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

Решение. □

22. Показать, что если $P(A \mid C) > P(B \mid C)$ и $P(A \mid \overline{C}) > P(B \mid \overline{C})$, то $P(A) > P(B)$.

23. Показать, что
$$P(A \mid B) = P(A \mid BC)P(C \mid B) + P(A \mid B\overline{C})P(\overline{C} \mid B).$$
Здесь предполагается, что $BC = B \cap C$.

Решение. □

24. Пусть событие A не зависит[2] от событий B_n, $n \geqslant 1$, при этом $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. Убедиться в том, что события A и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ являются независимыми.

Решение. □

25. Пусть A, B, C – попарно независимые равновероятные события, причем $A \cap B \cap C = \varnothing$. Найти максимальное возможное значение для вероятности $P(A)$.

Решение. **Ответ:** $\frac{1}{2}$ □

26. На единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ выбирается случайная точка P (из равномерного распределения). В единичном круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ выбирается случайная точка Q (также из равномерного распределения). Пусть R – прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат и диагональю PQ. Какова вероятность того, что весь прямоугольник лежит в единичном круге?

Решение. **Ответ:** $\frac{4}{\pi^2}$ □

27. На плоскости зафиксированы две точки A и B на расстоянии 2. Пусть C – случайно выбранная точка круга радиуса R с центром в середине отрезка AB. С какой вероятностью треугольник ABC будет тупоугольным?

Решение. **Ответ:** При $R \leqslant 1$ вероятность равна 1. При $R \geqslant 1$ вероятность равна
$$\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{R} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{R} \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} + \frac{1}{R^2}$$
□

28. На плоскости, однородно покрытой прямоугольниками со сторонами 10 и 20, рисуют случайную окружность радиуса 4. Найдите вероятность того, что окружность имеет общие точки ровно с тремя прямоугольниками.

Решение. **Ответ:** $\frac{8-2\pi}{25}$ □

29. На отрезке $[0, 1]$ в точках x, y, независимо выбранных из равномерного распределения, находится два детектора элементарных частиц. Детектор засекает частицу, если она пролетает на расстоянии не более $1/3$ от него. Известно, что поля восприятия детекторов покрывают весь отрезок. С какой вероятностью $y > 5/6$?

Решение. **Ответ:** $\frac{1}{8}$ □

[2] Имеется в виду попарная независимость.