Семинар 6

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите с помощью какой матрицы:
   (a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$
2. Задачник. §39, задача 39.15 (з, м).
3. Задачник. §40, задача 40.15 (а, г).
4. Задачник. §40, задача 40.1 (в, е).
5. Задачник. §40, задача 40.10 (б).
6. Найдите собственные значения матрицы vv^t, где $v \in \mathbb{R}^n$.
7. Задачник. §40, задача 40.14.
8. Задачник. §40, задача 40.16 (а, в).
9. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix}2&0\\-1&1\end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Представить матрицу A в виде $A = C^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{smallmatrix}\right)C$, где $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ – невырожденная матрица, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   (b) Найти A^n для произвольного натурального n.
10. Пусть $a_n \in \mathbb{R}$ – последовательность чисел с натуральными индексами, удовлетворяющая соотношению $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ и $a_0 = a_1 = 1$.
    (a) Пусть $x_n = \left(\begin{smallmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Найдите матрицу $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ такую, что $x_n = Ax_{n-1}$.
    (b) Найдите формулу для элемента a_n.
11. Пусть A – матрица размера 9 на 9 такая, что $A^2 = E$. Определите ранг $E - A$, если $\mathrm{rk}(E + A) = 7$.
12. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ – корень $\chi_A(t)$ кратности k. Оцените $\mathrm{rk}(A - \lambda E)$.
13. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейное отображение, для которого существует $n+1$ собственных векторов таких, что любые n из них линейно независимы. Найдите всевозможные матрицы, которые могли бы задавать такое отображение.
14. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что для каждого ее столбца сумма его элементов равна числу λ. Покажите, что λ является собственным значением A.
15. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая матрица, что она не изменяется при повороте на 90° градусов.
    (a) Покажите, что для любого набора чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ можно найти n, что λ_i будут собственными значениями A.
    (b) Пусть v – собственный вектор для A отвечающий ненулевому собственному значению. Покажите, что $v_i = v_{n-i+1}$.
16. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ рассмотрим линейное отображение $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ по правилу $X \mapsto AXB$. Пусть $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}} A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ и $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}} B = \{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$. Покажите, что $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}} \phi = \{\lambda_i\mu_j \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$.
17. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти все комплексные собственные значения матрицы $\left(\begin{smallmatrix}0&-A\\A&0\end{smallmatrix}\right)$.

18. Для двух квадратных матриц A и B одного и того же размера n обозначим через $A \star B$ матрицу, определяемую следующим образом:

$$(A \star B)_{ij} = \begin{cases} (AB)_{ij}, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ b_{ij}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для матрицы A определим оператор $\Phi_A \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ по правилу $\Phi_A(B) = A \star B$.

(a) Может ли этот оператор иметь собственное значение 2 для какой-либо матрицы A?

(b) Какое наибольшее число различных собственных значений может иметь такой оператор (при фиксированном n)?

19. Линейный оператор $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таков, что A^3 – это оператор проекции. Какие собственные значения может иметь A? Верно ли, что A будет иметь диагональную матрицу в каком-либо базисе $\mathbb{R}^n$?

20. Решить матричное уравнение $X^2 = A$, где (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda \neq \mu$. (c) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Все матрицы из $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

21. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ – матрица с целочисленными коэффициентами. Покажите, что любое рациональное собственное значение является целым.

22. Покажите, что у матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ число $\frac{1}{4}(-3 + i\sqrt{5})$ не может является собственным значением.