Семинар 4

Задачи:

1. Задачник. §7, задача 7.2 (б, ж).
2. Задачник. §7, задача 7.4.
3. Задачник. §7, задача 7.10.
4. Задачник. §7, задача 7.11.
5. Задачник. §7, задача 7.14.
6. Для матрицы из задачи 16.11 из §16 найдите ее ранг через ранги матриц A и B.
7. Пусть A и B – квадратные матрицы. Верно ли, что $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} BA$?
8. Пусть коэффициенты квадратной матрицы A имеют вид $a_{ij} = (i-j)^2$. Найдите ранг матрицы A.
9. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Покажите, что $n - \operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} A^2$.
10. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – матрица ранга r.
    (a) Показать, что любой минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и линейно независимых столбцов, отличен от 0.
    (b) Пусть $1 \leqslant k < r$. Привести пример, когда минор, стоящий на пересечении k линейно независимых столбцов и k линейно независимых строк равен 0.
11. Опишите все матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ имеющие ранг 1.
12. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(F)$ – произвольная матрица и $\hat{A}$ – ее присоединенная матрица. Найдите $\operatorname{rk}(\hat{A})$ в зависимости от $\operatorname{rk}(A)$.
13. Привести пример матрицы $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ и матриц $B_i \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{rk} A = 3$, $\operatorname{rk} B_i = 2$ и $\operatorname{rk}(A+B_i) = i$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$.
14. Дана матрица
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & -3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 0 & 6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 12 & -1 & 9 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$
Разложить ее в самую короткую сумму матриц ранга 1.
15. Даны числа $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, разложить матрицу
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
в самую короткую сумму матриц ранга 1.
16. Найдите ранг следующей матрицы в зависимости от параметра $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Найдите ранги следующих матриц в зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

18. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$

Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

19. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Существует ли линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$, где

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

20. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n и пусть $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ – отображение дифференцирования по переменной x. Найти матрицу отображения в базисе $(1, x, \dots, x^n)$.

21. Задачник. §39, задача 39.15 (и).

22. Привести пример или доказать, что такого примера не существует:
    (a) $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такой, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\phi$
    (b) $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ такой, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\phi$

23. Найти матрицу какого-нибудь линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такого, что выполнены следующие условия: $\ker\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\operatorname{Im}\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

24. Задачник. §39, задача 39.20.