Семинар 7

Задачи:

1. Задачник. §38, задача 38.4.
2. Задачник. §38, задача 38.6 (a).
3. Задачник. §37, задача 37.10 (a).
4. Задачник. §37, задача 37.21.
5. Задачник. §43, задача 43.15 (a).
6. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Методом Грама-Шмидта ортогонализуйте базис $1, x, x^2, x^3$.
7. Опишите все целочисленные ортогональные матрицы.
8. Опишите все ортогональные матрицы порядка n, состоящие из неотрицательных элементов.
9. Задачник. §43, задача 43.28.
10. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества и $a_{ij} = |A_i \cap A_j|$. Докажите, что матрица $A = (a_{ij})$ неотрицательно определена.
11. Есть неизвестная нам квадратичная форма Q в n-мерном пространстве. Разрешается задавать вопрос вида «Чему равно $Q(v)$?». Какое минимальное число вопросов надо задать, чтобы определить, является ли форма Q положительно определенной?
12. Дан неориентированный непустой граф G без петель. Пронумеруем все его вершины. Матрица смежности графа G с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) – это квадратная матрица A размера n, в которой значения элемента a_{ij} равно числу ребер из i-й вершины графа в j-ю вершину. Докажите, что матрица A имеет отрицательное собственное значение.
13. При каких натуральных n существует квадратная матрица порядка n с элементами 0, 1 такая, что ее квадрат – это матрица из одних единиц?
14. Квадратная матрица A такова, что $\mathrm{tr}(AX) = 0$ для любой матрицы X, имеющей нулевой след. Докажите, что матрица A является скалярной (то есть имеет вид λE для некоторого скаляра λ).
15. За столом сидят n старателей, перед каждым из которых находится кучка золотого песка. Каждую минуту происходит следующее: по общей команде каждый из них перекладывает в свою кучку половину песка из кучки левого соседа и половину – из кучки правого соседа. Опишите асимптотическое поведение кучек (а) при $n = 3$; (б) при произвольном n.
16. Пусть A и B – симметричные билинейные функции на двумерном вещественном пространстве, причем A положительно определена, а B отрицательно определена. Докажите, что любая непрерывная кривая в пространстве симметричных билинейных функций, соединяющая A и B, содержит функцию с вырожденной матрицей.
17. В пространстве многочленов с действительными коэффициентами степени не выше n задана квадратичная форма $Q(f) = f(1)f(2)$. Найдите ее сигнатуру (число единиц и минус единиц в нормальном виде).
18. Верно ли, что если матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ симметрична и положительно определена, то квадратичная форма $q(X) = \mathrm{tr}(X^t A X)$ на пространстве $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ будет положительно определенной?
19. Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ ($n > 1$), относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?