

## Семинар 3

### Задачи:

1. Пусть  $\xi$  – случайная величина такая, что  $P(\xi = -1) = \frac{1}{4}$  и  $P(\xi = 2) = \frac{1}{4}$  и для любых точек  $a, b \in [0, 1]$  с условием  $a < b$  верно  $P(\xi \in [a, b]) = \frac{b-a}{2}$ . Нарисуйте график функции распределения  $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$ .

Решение. Ответ:

□

2. В равностороннем треугольнике  $ABC$  площади 1 выбираем точку  $M$ . Найти математическое ожидание площади  $ABM$ .

Решение. Ответ:  $\frac{1}{3}$

□

3. Какую наибольшую дисперсию может иметь случайная величина, принимающая значения на отрезке от 0 до 1?

Решение. Ответ:  $\frac{1}{4}$

□

4. Найдите математическое ожидание числа неподвижных точек для случайной перестановки на  $n$  элементах.

Решение. Ответ: 1

□

5. Отрезок  $[0, 1]$  разбит двумя случайными точками на три части. Найдите математическое ожидание длины меньшей из частей.

Решение. Ответ:  $\frac{1}{18}$

□

6. Рассмотрим случайную перестановку  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  натуральных чисел от 1 до  $n$ . Пару чисел  $(i, j)$  назовем «обменом», если выполняются соотношения  $p_i = j, p_j = i$ . Вычислите математическое ожидание количества обменов в перестановке  $P$  (перестановка выбирается случайно равновероятно из множества всех перестановок от 1 до  $n$ ).

Решение. Ответ:  $\frac{1}{2}$

□

7. На окружности выбираются две случайные точки  $A$  и  $B$ . Найдите математическое ожидание площади меньшего из сегментов, на которые хорда  $AB$  разбивает круг.

Решение. Ответ:  $\frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$ , где  $R$  – радиус окружности.

□

8. Робот движется по клеткам бесконечной шахматной доски. Один его шаг – это перемещение на случайную из восьми соседних клеток. Найдите математическое ожидание модуля разности между количеством черных и количеством белых клеток, на которых робот побывал за  $n$  шагов (каждая клетка считается столько раз, сколько на ней побывал робот). Ответ представьте в виде компактного выражения.

Решение. Ответ:

□

9. В ряд расположены  $m$  предметов. Случайно выбираются  $k$  предметов,  $k < m$ . Случайная величина  $X$  равна количеству таких предметов  $i$ , что  $i$  выбран, а все его соседи не выбраны. Найдите математическое ожидание  $X$ .

Решение. Ответ:

□

10. Случайная величина  $X$  равна длине цикла, содержащего одновременно элементы 1 и 2, при случайной перестановке множества  $1, 2, \dots, n$ . Если такого цикла нет, то  $X = 0$ . Найдите распределение случайной величины  $X$  и ее математическое ожидание.

Решение. Ответ:

□

11. На отрезок бросаются две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

Решение. Ответ:

□

12. Найти математическое ожидание и дисперсию величины  $\xi$  с плотностью  $p(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$ .

Решение. Ответ:

□

13. Найти математическое ожидание и дисперсию числа смен успеха на неуспех и неуспеха на успех в схеме Бернули.

Решение. Ответ:

□

14. Пусть  $\xi_1, \xi_2$  – случайные пуассоновские величины с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно, причем  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Доказать, что для любого  $t > 0$  выполняется  $P(\xi_1 \leq t) \geq P(\xi_2 \leq t)$ .

Решение.

□

15. Пусть  $\xi$  – геометрически распределенная случайная величина. Найти распределение величины  $\eta = \xi \frac{1+(-1)^\xi}{2}$ .

Решение. Ответ:

□

16. Пусть  $\mathbb{E}\xi = 0$ . Доказать, что  $\mathbb{E}|\xi| \leq \frac{1}{2}(\mathbb{D}\xi + 1)$ .

Решение.

□

17. Показать, что  $\inf_{-\infty < a < \infty} \mathbb{E}(\xi - a)^2$  достигается при  $a = \mathbb{E}\xi$  и, следовательно,  $\inf_{-\infty < a < \infty} \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{D}\xi$ .

Решение.

□

18. Пусть  $P_\xi(x) = P(\xi = x)$  и  $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$ . Показать, что для  $a > 0$  и  $-\infty < b < \infty$

$$P_{a\xi+b}(x) = P_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{и} \quad F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Показать также, что для  $y \geq 0$

$$F_{\xi^2}(y) = F_\xi(+\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y}) + P_\xi(-\sqrt{y})$$

и для  $\xi^+ = \max(\xi, 0)$

$$F_{\xi^+}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ F_\xi(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

Решение.

□

19. Привести пример двух случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ , имеющих одну и ту же функцию распределения ( $F_\xi = F_\eta$ ), но таких, что  $P(\xi \neq \eta) > 0$ .

Решение.

□

20. Пусть  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  – случайные величины, причем функции распределения величин  $\xi$  и  $\eta$  совпадают. Верно ли, что тогда функции распределения величин  $\xi\zeta$  и  $\eta\zeta$  совпадают?

Решение. Ответ: нет

□