Семинар 1

Общая информация:

- Источник учебников: bookfi.net
- Задачник – Кострикин. Сборник задач по Алгебре. Третье издание. 2009г.

Задачи:

1. Задачник. §8, задача 8.1 (г).
2. Задачник. §8, задача 8.2 (з).
3. Задачник. §8, задача 8.7.
4. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.
5. Пусть $A_i \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – матрицы. Какое наименьшее число k надо взять, чтобы обязательно существовало ненулевое решение для уравнения $x_1 A_1 + \ldots + x_k A_k = 0$.
6. Задачник. §17, задача 17.1 (а, б).
7. Задачник. §17, задача 17.4 (в).
8. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица вида
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad (a) \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad (b) \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$
Найдите все матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирующие с A.
9. Найти множество матриц в $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирующих со всеми матрицами из $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
10. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.
   (b) Доказать, что для любого k верна формула
$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \ldots & C_k^{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \ldots & C_k^{n-2} \lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1 \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.

где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

11. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и пусть существуют такие матрицы $C_1, C_2 \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$, что $C_1 A = E_n$ и $AC_2 = E_m$, где $E_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица. Покажите, что $n = m$.[2]

12. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица (найти явный вид обратной матрицы).

13. Пусть A – невырожденная вещественная матрица n на n, все элементы которой положительны. Докажите, что число нулей среди элементов матрицы A^{-1} не превосходит $n^2 - 2n$.

14. При каких $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет решение уравнение $[A, B] = \lambda E$?

15. Задачник. §18, задача 18.3 (а, д).

16. Задачник. §18, задача 18.9 (и).

17. Задачник. §17, задача 17.24.

18. Задачник. §19, задача 19.15.

19. Задачник. §19, задача 19.16.

20. Задачник. §19, задача 19.20.

21. Задачник. §19, задача 19.21.

22. Задачник. §18, задача 18.17.

23. Пусть $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, E – единичная матрица размера n и для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $XX^t = \lambda E$. Верно ли, что $X^t X = \lambda E$?

24. Найдите явный вид обратной матрицы:

    (a) $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

    (b) $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, причем A и C обратимы.

25. Найти матрицу обратную к данной:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Найдите многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени 3 со старшим коэффициентом 1 зануляющий следующую матрицу
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2] Смысл этой задачи в том, чтобы показать, что обратимыми могут быть только квадратные матрицы.