Линейная алгебра

Дима Трушин

Билинейные формы

Пусть V – векторное пространство, можно думать для простоты, что $V = \mathbb{R}^n$. Тогда *билинейная форма* на V – это отображение $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ такое,[1] что

1. $\beta(v_1 + v_2, u) = \beta(v_1, u) + \beta(v_2, u)$ для всех $v_1, v_2, u \in V$.
2. $\beta(\lambda v, u) = \lambda\beta(v, u)$ для всех $v, u \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\beta(v, u_1 + u_2) = \beta(v, u_1) + \beta(v, u_2)$ для всех $v, u_1, u_2 \in V$.
4. $\beta(v, \lambda u) = \lambda\beta(v, u)$ для всех $v, u \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Думать про эту процедуру надо так: у нас даны два вектора v и u из V, мы их «перемножаем» и получаем число $\beta(v, u) \in \mathbb{R}$. Самый важный пример билинейной формы – стандартное скалярное произведение: пусть даны два вектора $x, y \in \mathbb{R}^n$, зададим тогда $\beta(x, y) = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Основной план взаимодействия с билинейными формами такой. Среди всех билинейных форм мы выделим «хорошие» и назовем их скалярными произведениями. Эти товарищи будут иметь хороший геометрический смысл, с помощью которого мы определим *движения* в векторных пространствах. Но нашей конечной целью будет изучение самих движений с помощью скалярных произведений.

Как задавать билинейные формы

Пусть V – векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и β – билинейная форма на V. Тогда определим числа $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ – произведения базисных векторов, и составим из них матрицу $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда для любых векторов $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ и $u = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$ имеем

$$\beta(v, u) = \sum_{ij} x_i y_j \beta(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

В частности, если $V = \mathbb{R}^n$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$, а e_i – стандартный базис. То получаем $\beta(x, y) = x^t B y$.

Таким образом и линейные операторы и билинейные формы задаются матрицами. Основная разница между ними – как эта самая матрица меняется при замене базиса. Для операторов ответы мы знаем, для билинейных форм мы сейчас займемся данным вопросом.

Смена базиса

Пусть в векторном пространстве V заданы два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ с матрицей перехода $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, т.е. $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$. Пусть нам даны два вектора v и u в V. Тогда их можно разложить по базисным векторам следующим образом

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$v = x'_1 f_1 + \ldots + x'_n f_n = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad u = y'_1 f_1 + \ldots + y'_n f_n = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

[1] На самом деле можно рассматривать отображения $\beta\colon V \times U \to \mathbb{R}$, то есть можно перемножать вектора из разных пространств, но мы этого делать не будем.

Благодаря матрице перехода C, мы знаем, что

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = Cx' \text{ и } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = Cy'$$

Тогда в базисе e_i форма записывается в виде $\beta(v,u) = x^t By$, а в базисе f_i в виде $\beta(v,u) = (x')^t B' y'$. Но это одно и то же число посчитанное в разных базисах. Значит

$$(x')^t B' y' = x^t By = (Cx')^t BCy' = (x')^t C^T BCy'$$

для всех $x', y' \in \mathbb{R}^n$. Значит $B' = C^t BC$.[2]

Симметричность и кососимметричность

Форма $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется *симметричной*, если $\beta(v,u) = \beta(u,v)$ для всех $v, u \in V$. Она называется *кососимметричной*, если $\beta(v,u) = -\beta(u,v)$.

Если в координатах $\beta(x,y) = x^t By$, то $\beta(y,x) = y^t Bx$. Так как выражение $y^t Bx$ является числом, то оно не меняется при транспонировании, то есть $y^t Bx = (y^t Bx)^t = x^t B^t y$. Значит симметричность означает $x^t By = x^t B^t y$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. А это равносильно тому, что $B = B^t$. Такая матрица B называется *симметричной*. Аналогично, форма кососимметрична, тогда и только тогда, когда $B^t = -B$. В этом случае матрица B называется *кососимметричной*.

Характеристики билинейных форм

Как и выше $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ – билинейная форма. И пусть в некотором базисе она задана в виде $\beta(x,y) = x^t By$ для некоторой матрицы $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Посмотрим какие характеристики матрицы B не зависят от выбора базиса.

1. Ранг матрицы B не меняется при замене $B \mapsto C^t BC$, где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – невырожденная матрица.

2. Знак определителя B не меняется при замене $B \mapsto C^t BC$, где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – невырожденная матрица. Но сам определитель меняется на $\det(C)^2$. Потому можно лишь говорить о ситуации определитель меньше нуля, больше нуля или равен нулю.

3. Обратим внимание, что невырожденность матрицы B не меняется при замене $B \mapsto C^t BC$, где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – невырожденная матрица.

4. След матрицы B вообще говоря может стать каким угодно при замене $B \mapsto C^t BC$. Потому он не несет никакой информации.

5. Симметричность и кососимметричность матрицы B не зависят от замены $B \mapsto C^t BC$.

Ядра и ортогональные дополнения

Как и выше $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ – билинейная форма. Множества ${}^\perp V = \{v \in V \mid \beta(v, V) = 0\}$ и $V^\perp = \{v \in V \mid \beta(V, v) = 0\}$ называются *левым* и *правым ядрами* формы β. Эти подмножества являются подпространствами в V. Если в координатах форма задана $\beta(x,y) = x^t By$, то ${}^\perp\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t B = 0\}$ и $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By = 0\}$. В частности отсюда видно, что ядра имеют одинаковую размерность равную $n - \operatorname{rk} B$. Если форма симметричная или кососимметричная, то нет разницы между правыми и левыми ядрами. Ядра – это неинтересная часть пространства, которая «ортогональна» всему относительно этой формы.

Более обще, пусть $U \subseteq V$ – подпространство в V. Тогда его *левым ортогональным дополнением* является подпространство ${}^\perp U = \{v \in V \mid \beta(v, U) = 0\}$. Аналогично, *правое ортогональное дополнение* это $U^\perp = \{v \in V \mid \beta(U, v) = 0\}$. Если в координатах форма задана $\beta(x,y) = x^t By$ и $U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$. Пусть D – матрица составленная из столбцов u_i. Тогда ${}^\perp U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t BD = 0\}$ и $U^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid D^t By = 0\}$. Обычно ортогональные дополнения и ядра интересны в случае симметрических или кососимметрических форм, так как в этом случае левые и правые ортогональные дополнения равны между собой.

[2]Напомним, что матрица A линейного оператора $\phi\colon V \to V$ меняется по правилу $A' = C^{-1}AC$.

Симметричные формы

Утверждение. *Пусть $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – симметрическая билинейная форма заданная $\beta(x,y) = x^tBy$. Тогда существует такой базис, что матрица B диагональная и на диагонали стоят либо 1, либо -1, либо 0, т.е. блочно имеет вид $B' = \begin{pmatrix} E & & \\ & -E & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. При этом количество единиц и минус единиц на диагонали не зависит от базиса.*

На это утверждение еще можно смотреть так. Для любой симметрической матрицы $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ можно найти такую невырожденную матрицу $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, что матрица C^tBC имеет описанный диагональный вид.

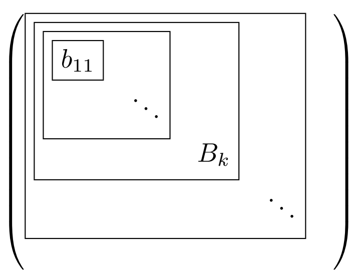
Суммарно количество единиц и минус единиц дает ранг матрицы B, то есть ранг билинейной формы. Тот факт, что количество единиц и минус единиц является инвариантом формы надо понимать так: у нас ранг как бы складывается из положительной и отрицательной части и размеры этих частей определены однозначно.

Количество единиц $\#1$ в таком виде называется положительным индексом инерции формы, количество минус единиц $\#-1$ – отрицательным индексом, а количество нулей $\#0$ – нулевым индексом. Вместе набор чисел $(\#1, \#-1, \#0)$ называется сигнатурой формы.

Определение сигнатуры формы

Для определения сигнатуры формы используется метод Якоби. Этот метод работает почти всегда и я поясню, что это значит и что делать, когда он не работает. Но прежде всего я хочу обратить внимание, что у него есть ограничения на входные данные. Матрица B обязательно должна быть невырождена. Это в частности означает, что метод работает только для форм у которых в сигнатуре только единицы и минус единицы и совсем нет нулей.

Метод Якоби Пусть $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – симметричная невырожденная матрица и $\beta(x,y) = x^tBy$. Выделим в матрице B верхние левые блоки:

$B =$ 

То есть B_k – подматрица состоящая из первых k строк и столбцов. Теперь определим числа $\Delta_k = \det(B_k)$, которые называются угловыми минорами. Если так получилось, что все числа Δ_k НЕ равны нулю, то мы строим последовательность

$$\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Тогда положительный индекс инерции для B равен количеству положительных чисел в этой последовательности, а отрицательный индекс инерции равен количеству отрицательных чисел в этой последовательности.

Что делать, если встретились нули Нам на самом деле надо чуть-чуть пошевелить матрицу B правильным образом. Мы можем сгенерировать случайную матрицу C. Она с вероятностью один будет невырожденной. Потом надо рассмотреть матрицу $B' = C^tBC$ и применить метод Якоби к матрице B' вместо B. Сделаю одно замечание по организации вычислений. В этом методе надо генерировать случайную матрицу C и НЕ проверять ее на невырожденность. Вместо этого, надо сразу применить метод Якоби к матрице B'. Если все Δ_k оказались не нулевые, то нам повезло и метод и так сработал (матрица C в этом случае автоматически окажется невырожденной). А если не повезло, то нам все равно надо будет генерировать новую матрицу C и не важно какой она была.

Продвинутый метод определения сигнатуры Пусть $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – симметричная матрица и $\beta(x,y) = x^tBy$. Тогда найдем спектр матрицы B с кратностями. В случае симметрической матрицы окажется, что спектр будет обязательно вещественным. Тогда количество положительных чисел в спектре с учетом кратности равно положительному индексу инерции, количество отрицательных чисел в спектре с кратностью равно отрицательному индексу инерции, а количество нулей – нулевому индексу. Надо понимать, что сам спектр не является корректно определенной величиной для билинейной формы, он может измениться кардинальной при смене базиса, но знаки собственных значений, оказывается, не изменятся.

Квадратичные формы

Если нам дана какая-то билинейная форма $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$, то отображение $Q\colon V \to \mathbb{R}$ вида $Q(x) = \beta(x, x)$ называется квадратичной формой. Если векторное пространство $V = \mathbb{R}^n$, то билинейная форма превращается в $\beta(x, y) = x^t By$, а соответствующая квадратичная форма в $Q(x) = x^t Bx$. Если расписать явно последнее выражение, то мы получим

$$Q(x) = \beta(x, x) = x^t Bx = \sum_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum_i b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j$$

Обратите внимание, что в отличие от билинейной формы, квадратичная форма не однозначно задается матрицей B. Действительно,

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 x_2$$

За счет этого эффекта, при переходе к квадратичным формам от билинейных, мы теряем часть информации. Однако, квадратичная форма однозначно задается симметрической матрицей B, то есть матрицей B с условием $B^t = B$. В примере выше – это последний случай.

Для полноты картины добавлю, что в случае симметричной матрицы B или что то же самое симметричной билинейной формы β, мы можем вернуться от квадратичной формы к билинейной с помощью так называемой поляризационной формулы, а именно

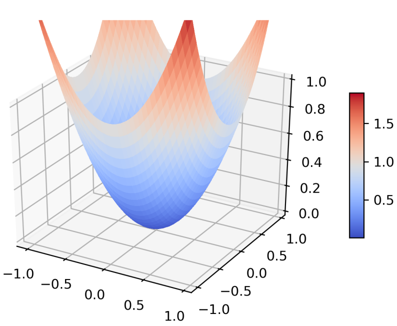
$$\beta(x, y) = \frac{Q(x + y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

Идейно это означает, что изучать симметричные билинейные формы – это то же самое, что изучать квадратичные формы. Но у квадратичных форм есть красивый геометрический смысл. Его мы и обсудим далее.

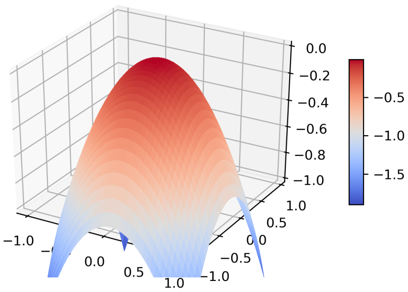
Графики квадратичных форм

Пусть $V = \mathbb{R}^2$. Тогда квадратичная форма $Q(x, y)$ задает функцию от двух переменных, а именно $z = Q(x, y)$. Давайте нарисуем ее графики в некоторых частных случаях.

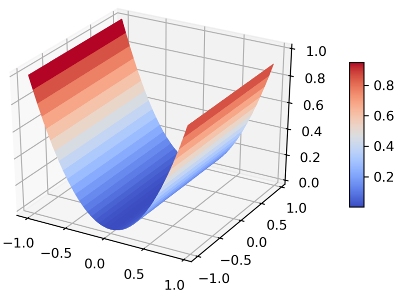
1. $z = x^2 + y^2$. Начало координат – точка минимума. Матричная запись $z = Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



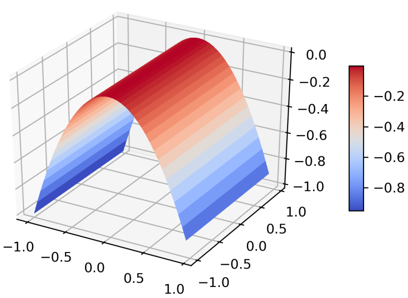
2. $z = -x^2 - y^2$. Начало координат – точка максимума. Матричная запись $z = Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



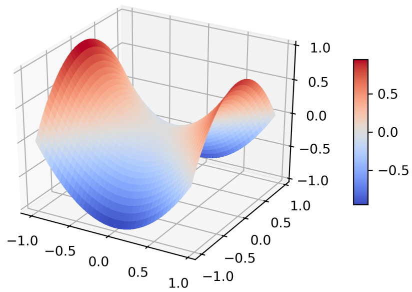
3. $z = x^2$. Минимум достигается на прямой $x = 0$. Матричная запись $z = Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



4. $z = -x^2$. Максимум достигается на прямой $x = 0$. Матричная запись $z = Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



5. $z = x^2 - y^2$. Начало координат – седловая точка. Матричная запись $z = Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Обратите внимание, что поведение графика зависит от знаков чисел на диагонали матрицы два на два. В общем случае поведение графика зависит от сигнатуры формы.

Классификация билинейных и квадратичных форм Ниже я все определения отразил в единой табличке. В ней подразумевается, что билинейная форма задана на пространстве размерности n.

Термин	**Обозначения**	**Условие**	**Индексы**
Положительная	$\beta > 0$ или $Q > 0$	$\forall x \neq 0 \Rightarrow Q(x) > 0$	$\#1 = n$
Отрицательная	$\beta < 0$ или $Q < 0$	$\forall x \neq 0 \Rightarrow Q(x) < 0$	$\# -1 = n$
Неотрицательная	$\beta \geqslant 0$ или $Q \geqslant 0$	$\forall x \Rightarrow Q(x) \geqslant 0$	$\# -1 = 0$
Неположительная	$\beta \leqslant 0$ или $Q \leqslant 0$	$\forall x \Rightarrow Q(x) \leqslant 0$	$\#1 = 0$
Неопределенная		$\exists x, y \Rightarrow Q(x) > 0$ и $Q(y) < 0$	$\#1 > 0$ и $\# -1 > 0$

Скалярные произведения

Билинейная форма $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется *скалярным произведением*, если она

1. симметрична $\beta(v, u) = \beta(u, v)$.
2. *положительно определена*, т.е. для любого ненулевого вектора $v \in V$ имеем $\beta(v, v) > 0$.

В этом случае пишут (v, u) вместо $\beta(v, u)$. Самый важный пример – стандартное скалярное произведение: $(x, y) = x^t y$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$. Векторное пространство, в котором зафиксировано какое-либо скалярное произведение называется *Евклидовым пространством.*

По определению скалярного произведения у него в сигнатуре присутствуют только единицы, а минус единиц и нулей нет. В частности это означает, что матрица скалярного произведения всегда невырождена. Кроме того это еще означает, что для любого скалярного произведения существует такой базис, что в нем матрица B становится единичной матрицей. По-другому, на этот факт можно смотреть так: какие-бы два евклидовых пространства одинаковой размерности вы ни взяли бы, они оказываются одинаковыми (формально изоморфными).

Углы и расстояния

Пусть V – евклидово пространство. Тогда *длина* вектора v это $|v| = \sqrt{(v, v)}$. Если $v, u \in V$ – два вектора, то определим *угол* $\alpha_{v,u}$ между этими векторами из равенства $\cos \alpha_{v,u} = \frac{(v,u)}{|v||u|}$.

Два вектора v и u называются *ортогональными*, если $(v, u) = 0$, т.е. угол между векторами $90°$. Базис $e_1, \ldots, e_n$ называется *ортогональным*, если любая пара векторов из базиса ортогональна, т.е. $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Базис называется *ортонормированным*, если он ортогонален и все вектора имеют длину 1, т.е. $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(e_i, e_i) = 1$. По определению матрицы билинейной формы $b_{ij} = (e_i, e_j)$, а значит в ортонормированном базисе скалярное произведение имеет вид $(x, y) = x^t y$.

Отртогонализация Грама-Шмидта

Дано Множество векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Задача Найти множество $u_1, \ldots, u_s$ такое, что u_i попарно ортогональны и $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$.

Алгоритм

1. Берем первый ненулевой вектор среди v_i. Пусть это будет v_1. Тогда полагаем $u_1 = v_1$.
2. Рассмотрим $v_2 - \frac{(v_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1$. Если этот вектор не ноль, то обозначим его за u_2. Если ноль, то выкинем v_2 и перенумеруем вектора так, что v_3 теперь будет вектором v_2. Повторяем этот шаг до тех пор, пока не найдем u_2 или пока не закончатся вектора v_i.
3. Рассмотрим $v_3 - \frac{(v_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 - \frac{(v_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2$. Если он не ноль, то обозначим его за u_3. Иначе как и в предыдущем пункте переходим к следующему вектору и повторяем этот шаг.
4. Для поиска u_i надо рассмотреть вектор $v_i - \frac{(v_i,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 - \ldots - \frac{(v_i,u_{i-1})}{(u_{i-1},u_{i-1})}u_{i-1}$. Аналогично предыдущему пункту, если этот вектор не ноль, то это u_i. Если ноль, то рассматриваем следующий v_{i+1} вместо него и повторяем этот шаг.

Пример Пусть у нас заданы векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Первый вектор не ноль, значит $u_1 = v_1$. Теперь рассмотрим

$$v_2 - \frac{(v_2,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3+3+1+1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Значит $u_2 = v_2$. Теперь рассмотрим

$$v_3 - \frac{(v_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 - \frac{(v_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2+2+1+1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2+2-1-1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Значит забываем про v_3 и переходим к следующему вектору.

$$v_4 - \frac{(v_4,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 - \frac{(v_4,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2+1-1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2-1+1}{1+1+1+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом ответ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ и } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Движения и ортогональные матрицы

Так как углы и расстояния выражаются через скалярное произведение и наоборот, мы получаем следующее.

Утверждение. *Пусть теперь $\phi\colon V \to V$ – линейный оператор в евклидовом пространстве. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *ϕ сохраняет скалярное произведение, т.е. $(\phi(v), \phi(u)) = (v, u)$ для любых $v, u \in V$.*
2. *ϕ сохраняет длины и углы, т.е. $|\phi(v)| = |v|$ и $\alpha_{\phi(v),\phi(u)} = \alpha_{v,u}$ для всех $v, u \in V$.*

3. ϕ сохраняет длины, т.е. $|\phi(v)| = |v|$ для всех $v \in V$.

Линейные операторы, обладающие одним из эквивалентных свойств выше, называются *движениями.* Пусть в V выбрали ортонормированный базис. Это значит, что V можно отождествить с $\mathbb{R}^n$ и при этом скалярное произведение превращается в стандартное $(x, y) = x^t y$. Пусть отображение $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задано матрицей $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда условие движения записывается так $(Ax, Ay) = (x, y)$. То есть $x^t A^t A y = x^t y$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$. То есть $A^t A = E$. Теперь заметим следующее.

Утверждение. *Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ следующие условия эквивалентны:*

1. $A^t A = E$.
2. $AA^t = E$.
3. $A^t = A^{-1}$.

Матрица обладающая одним из этих эквивалентных условий называется *ортогональная.* Таким образом в ортонормированном базисе движение задается ортогональной матрицей.

Утверждение. *Пусть $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – ее собственное значение. Тогда*

1. *$\bar{\lambda}$ тоже является собственным значением для C.*
2. $|\lambda| = 1$.

Примеры

1. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением. Тогда любое движение это:
   (a) центральная симметрия относительно начала координат $C = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
   (b) симметрия относительно какой-то прямой $C = D^t \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) D$, где D – матрица поворота (см. далее).
   (c) поворот на некоторый угол, $C = \left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right)$ – матрица поворота.

2. Пусть $V = \mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением и $C \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица. Тогда $\chi_C(t)$ – многочлен степени 3. Любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.[3] А значит это ± 1. То есть соответствующий собственный вектор v либо неподвижен, либо отражается в $-v$ под действием C. Кроме того, ортогональное дополнение $\langle v \rangle^\perp$ является двумерной плоскостью, на которой C действует одним из трех способов описанных в предыдущем пункте. Короче говоря, если задано движение в трехмерном пространстве, то в каком-то ортонормированном базисе оно имеет один из следующих видов:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
   Первое из них является поворотом вокруг некоторой оси, а второе является поворотом вокруг оси и отражение вдоль оси.

Утверждение. *Пусть V евклидово пространство и $\phi\colon V \to V$ – некоторый оператор. Тогда эквивалентно*

1. *ϕ является движением (ортогональный оператор).*
2. *В некотором ортонормированном базисе матрица оператора ϕ имеет вид:*

$$A_\phi = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_i \ \text{либо} \ 1, \ \text{либо} \ -1, \ \text{либо} \ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Для ортогональной матрицы $\det C = \pm 1$ (примените $\det$ к равенству $C^t C = E$). Если $\det C = 1$, движение называется *собственным* и если $\det C = -1$, то *несобственным.*

Если $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – ортонормированные базисы пространства V и пусть $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где C – матрица перехода. Тогда C является ортогональной матрицей. Это вторая ситуация, когда появляются ортогональные матрицы.

[3] Потому что такое многочлен устроен $\chi(t) = t^n(1 + o(1))$ при $t \to \pm\infty$. То есть на плюс бесконечности многочлен уходит в плюс бесконечность, а на минус бесконечности – в минус бесконечность. То есть по не прерывности он где-то должен был пересечь горизонтальную ось координат. А эта точка и есть корень.