Семинар 1

Задачи:

1. Сколько способов пройти из $(0,0,0)$ в $(n,2n,3n)$, если можно делать шаги на $+1$ по любой из осей?

2. Найдите определитель матрицы $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=C_{i+j-2}^{i-1}$.

3. За время обучения в ШАД Михаил 20 раз решал задачи классификации. В каждой задаче он использовал ансамбль из пяти различных классификаторов, причем никакую пару классификаторов он не применял более одного раза. Каково минимально возможное число известных Михаилу классификаторов?

4. В школе ученики писали контрольную. Учитель заметил следующую закономерность: с вероятностью $0,36$ ученики зевают на контрольной, с вероятностью $0,3$ пишут ее на отлично. Другое любопытное наблюдение: зевающие ученики пишут контрольную на отлично всего лишь с вероятностью $0,22$. Найдите

   (a) С какой вероятностью ученик одновременно зевал и написал контрольную на отлично.

   (b) С какой вероятностью среди написавших контрольную на отлично ученики зевали.

   Решение. **Ответ:** (a) 0,0792, (b) 0,264 □

5. Василий решил покрасоваться перед Василисой и утверждает, что бросив два кубика, у него обязательно выпадет шестерка. Василиса со своей стороны решила поддаться Василию и будет игнорировать все его броски, если на кубиках выпали одинаковые числа. Найдите вероятность того, что Василий произведет впечатление на Василису в этих условиях.

   Решение. **Ответ:** $\frac{1}{3}$ □

6. В некотором прекрасном городе «Икс» население выросло аж до 10 человек. По этому прекрасному случаю в нем открылся парк аттракционов, где можно попрыгать на батуте. Оказалось, что батут обязательно рвется, если на нем находится 5 человек, в случае 4 человек он рвется с вероятностью $0,8$, в случае 3 человек с вероятностью $0,6$, в случае 2 человек с вероятностью $0,4$, в случае 1 человека с вероятностью $0,2$ и производитель гарантирует, что их надежные и качественные батуты сами по себе не рвутся. Несмотря на праздничное событие, жители города «Икс» очень заняты, каждый из них может прийти в парк с вероятностью $0,5$. Узнайте, какова вероятность того, что уже в первый день бизнес с батутом накроется.

   Решение. **Ответ:** $\frac{898}{1024}$ □

7. Хитрый Дмитрий и Василий Упрямый решили участвовать в телешоу. Во время передачи игроку даются 3 шкатулки и в одной из них лежит супер-приз. Сначала игрок выбирает одну из шкатулок, но не открывает ее. После этого ведущий открывает из оставшихся одну пустую. В этот момент игроку разрешается изменить свой выбор. После чего выбранная шкатулка открывается. Василий Упрямый принял решение, что несмотря ни на что, не поменяет свой первоначальный выбор, а Хитрый Дмитрий наоборот решил, что обязательно поменяет свой изначальный выбор. Выясните, у кого из участников больше шансов выиграть в телешоу и такой уж ли Дмитрий хитрый.

   Решение. **Ответ:** У Василия вероятность выигрыша составляет $\frac{1}{3}$, а у Дмитрия – $\frac{2}{3}$ □

8. Улоф Пальме и Рави Шанкар подбрасывают правильную монетку (вероятность выпадения орла $0,5$). Улоф подбрасывает ее n раз, а Рави – $n+1$. Найдите вероятность того, что у Рави будет больше орлов, чем у Улофа.

   Решение. **Ответ:** $\frac{1}{2}$ □

9. Рассмотрим случайную перестановку на n элементах. Докажите, что данные k элементов окажутся в одном цикле с вероятностью $\frac{1}{k}$.

Решение. □

10. Черный куб покрасили снаружи белой краской, затем разрезали на 27 одинаковых маленьких кубиков и как попало сложили из них большой куб. С какой вероятностью все грани этого куба будут белыми?

Решение. **Ответ:** $\frac{8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 6! \cdot 4^6 \cdot 24}{27! \cdot 24^{27}}$ □

11. Дано множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Среди всех его подмножеств равновероятно выбирается k его подмножеств.Найдите вероятность того, что $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \varnothing$.

Решение. **Ответ:** $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n$ □

12. У вас имеется неограниченное число костей в форме всех возможных правильных многогранников. Можно ли, однократно бросив некоторый набор таких костей, симулировать бросок (а) правильной семигранной кости? (б) правильной 15-гранной кости?

Решение. **Ответ:** (а) нельзя, (б) можно □

13. Игра состоит из одинаковых и независимых конов, в каждом из которых выигрыш происходит с вероятностью p. Когда игрок выигрывает, он получает 1 доллар, а когда проигрывает — платит 1 доллар. Как только его капитал достигает величины N долларов, он объявляется победителем и удаляется из казино. Найдите вероятность того, что игрок рано или поздно проиграет все деньги, в зависимости от его стартового капитала K.

Решение. **Ответ:** P(«проиграть при стартовом капитале k») $= 1 - \frac{1-q^k}{1-q^N}$, где $q = \frac{1-p}{p}$, при $0 \leqslant k \leqslant N$. □

14. Вероятность попадания одной пули в бочку с бензином равна p. При одном попадании бочка взрывается с вероятностью p_1, при двух и более - взрывается наверняка. Найти вероятность того, что бочка рванет при n выстрелах.

Решение. **Ответ:** $1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}(1-p_1)$ □

15. Завод выпускает изделия с вероятностью брака $0,04$. Первый контролер находит брак из брака с вероятностью $0,92$, второй – $0,98$. Найти вероятность, с которой признанное годным изделие будет бракованным.

Решение. Здесь есть неоднозначность в задаче. Можно ее понимать так, что контролеры проверяют друг за другом (каждую деталь сначала проверяет первый, потом второй и деталь признается годным, если оба признали годным), либо можно понимать так, что половину деталей проверяет один контролер, а другую половину проверяет второй контролер.

Ответ: Если считать, что контролеры проверяют друг за другом, то P(«деталь бракованная» | «деталь признана годно $\frac{1}{15001}$. Если считать, что каждый контролер проверяет половину всех деталей, то P(«деталь бракованная» | «деталь признана годной») $= \frac{1}{481}$ □

16. На отрезок $[0, L]$ бросают три точки. Найти вероятность того, что третья окажется между первыми двумя.

Решение. **Ответ:** $\frac{1}{3}$ □

17. Показать, что события A и B независимы тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ и B независимы.

Решение. □

18. Привести примеры, показывающие, что, вообще говоря, равенства

$$P(B \mid A) + P(B \mid \overline{A}) = 1 \quad \text{и} \quad P(B \mid A) + P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1$$

неверны.

Решение. $\square$

19. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – независимые события с $P(A_i) = p_i$.

    (a) Показать, что
    $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

    (b) Пусть P_0 – вероятность того, что ни одно из событий $A_1, \ldots, A_n$ не произойдет. Показать, что
    $$P_0 = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$$

Решение. $\square$

20. Пусть A и B – независимые события. В терминах $P(A)$ и $P(B)$ выразить вероятность событий

    (a) Не произойдет ни одно из событий A, B.

    (b) Произойдет в точности одно из событий A, B.

    (c) Одновременно произойдут оба события A, B.

Решение. $\square$

21. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя, т.е. A и $\overline{A}$ независимы.

    (a) Показать, что тогда $P(A)$ равна 0 или 1.

    (b) Показать, что если события A и B независимы и $A \subseteq B$, то или $P(A) = 0$, или $P(B) = 1$.

    (c) Пусть событие A таково, что $P(A)$ равно 0 или 1. Показать, что A и любое событие B независимы.

Решение. $\square$

22. Показать, что если $P(A \mid C) > P(B \mid C)$ и $P(A \mid \overline{C}) > P(B \mid \overline{C})$, то $P(A) > P(B)$.

23. Показать, что
    $$P(A \mid B) = P(A \mid BC)P(C \mid B) + P(A \mid B\overline{C})P(\overline{C} \mid B).$$
    Здесь предполагается, что $BC = B \cap C$.

Решение. $\square$

24. Пусть событие A не зависит[1] от событий B_n, $n \geqslant 1$, при этом $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. Убедиться в том, что события A и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ являются независимыми.

Решение. $\square$

25. Пусть A, B, C – попарно независимые равновероятные события, причем $A \cap B \cap C = \varnothing$. Найти максимальное возможное значение для вероятности $P(A)$.

Решение. **Ответ:** $\frac{1}{2}$ $\square$

26. На единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ выбирается случайная точка P (из равномерного распределения). В единичном круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ выбирается случайная точка Q (также из равномерного распределения). Пусть R – прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат и диагональю PQ. Какова вероятность того, что весь прямоугольник лежит в единичном круге?

[1] Имеется в виду попарная независимость.

Решение. **Ответ:** $\frac{4}{\pi^2}$ □

27. На плоскости зафиксированы две точки A и B на расстоянии 2. Пусть C – случайно выбранная точка круга радиуса R с центром в середине отрезка AB. С какой вероятностью треугольник ABC будет тупоугольным?

Решение. **Ответ:** При $R \leqslant 1$ вероятность равна 1. При $R \geqslant 1$ вероятность равна

$$\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{R} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{R}\sqrt{1-\frac{1}{R^2}} + \frac{1}{R^2}$$

□

28. На плоскости, однородно покрытой прямоугольниками со сторонами 10 и 20, рисуют случайную окружность радиуса 4. Найдите вероятность того, что окружность имеет общие точки ровно с тремя прямоугольниками.

Решение. **Ответ:** $\frac{8-2\pi}{25}$ □

29. На отрезке $[0,1]$ в точках x, y, независимо выбранных из равномерного распределения, находится два детектора элементарных частиц. Детектор засекает частицу, если она пролетает на расстоянии не более $1/3$ от него. Известно, что поля восприятия детекторов покрывают весь отрезок. С какой вероятностью $y > 5/6$?

Решение. **Ответ:** $\frac{1}{8}$ □