

Семинар 1

Задачи:

1. Найдите $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(x2^{-k})$.

2. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}$$

где $f(n)$ – количество единиц в двоичном представлении числа n .

3. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

4. Найдите сумму $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)^2}{k!}$.

5. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{k^2 + 1})$$

6. Исследуйте на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\ln \ln n)^{-\ln n}$$

7. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

8. Исследуйте на сходимость (абсолютную и условную) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где

$$a_k = \int_0^{\frac{\sin k}{k}} \frac{\sin t}{t} dt$$

9. Пусть ξ_n – последовательность случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n > \sqrt{2 \ln n + 2 \ln \ln n})?$$

10. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

11. Вычислите $\int_0^{2\pi} (\sin x)^8 dx$.

12. Вычислите сумму интегралов:

$$\int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} \sin(x^2) dx + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{\arcsin(x)} dx$$

13. Найдите интеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2014}(x)}{\sin^{2014}(x) + \cos^{2014}(x)} dx$.

14. Вычислить интеграл $\int e^{e^x + 2014x} dx$.

15. Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1} dx$$

16. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\cos(t^3)}{t+x} dt$$

17. Пусть $I_m = \int_0^{2\pi} \cos(x) \cos(2x) \dots \cos(mx) dx$. Для каких $m \in [1, 10]$ $I_m \neq 0$?

18. Определим последовательность x_n начальными условиями $x_1 = a$, $x_2 = b$ и рекуррентной формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

19. Найдите предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\ln \lambda} \int_{\lambda}^a \frac{\cos x}{x} dx$$

20. Найдите предел последовательности c_n , определяемой рекуррентным соотношением $c_{n+1} = (q - \frac{1}{n})c_n + \beta_n$, где β_n – любая последовательность со свойством $n^2 \beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

21. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена рекурсивно: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$. Найдите формулу общего члена последовательности.

22. Трудоемкость алгоритма A описывается следующим соотношением ($T(n)$ – время решения задачи размерности n):

$$T(n) \leq T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1, \quad T(1) = C_1(\text{const}).$$

Найдите асимптотически как можно большую функцию, удовлетворяющую этому соотношению. Ответ представьте в O -нотации, докажите, что функция удовлетворяет данному соотношению.

23. Найдите предел последовательности a_n , для которой $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2(a_n-3)}{4}$.