Семинар 4

Задачи:

1. Пусть вероятностный эксперимент – бросание правильного кубика. Рассмотрим следующие случайные величины:

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если выпало нечетное число} \\ 0, & \text{если выпало четное число} \end{cases} \quad \text{и} \quad \eta = \begin{cases} 0, & \text{если выпало 3 или 6} \\ 1, & \text{если выпало 1 или 4} \\ 2, & \text{если выпало 2 или 5} \end{cases}$$

   Найдите распределение случайного вектора (ξ, η). Будут ли случайные величины ξ и η независимыми? А некоррелированными?

2. Пусть X – случайная величина, принимающая значения на отрезке $[0, 1]$. Пусть также m – медиана X. Рассмотрим бинаризацию этой величины

$$\beta(X) = \begin{cases} 1, & \text{при } X \geqslant m, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Верно ли, что дисперсия $\beta(X)$ не меньше дисперсии X? А если X непрерывна? Под медианой здесь имеется в виду число m для которого $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$.

3. Игральную кость с n гранями (и числами от 1 до n на этих гранях) подбрасывают до тех пор, пока сумма выпавших очков не станет больше либо равна n. Все грани кости выпадают с одинаковой вероятностью. Найдите математическое ожидание числа бросков.

   Решение. Давайте введем следующие случайные величины: ξ_i – значение, выпавшее на i-ом бросании кости и η_k – количество бросков, которое нужно сделать, чтобы выпало хотя бы k очков суммарно. Тогда нам надо посчитать $\mathbb{E}(\eta_n)$. Давайте решим более общую задачу и посчитаем все числа $a_k = \mathbb{E}(\eta_k)$ при $k \leqslant n$. Заметим, что $\eta_1 = 1$, чтобы получить хотя бы одно очко достаточно кинуть кость 1 раз. Так же для удобства можно положить, что $\eta_0 = 0$, то есть чтобы получить 0 очков надо бросить кость 0 раз. Аналогично для отрицательных чисел $\eta_{-1} = 0$ и т.д.

   Теперь посчитаем математическое ожидание с помощью условного математического ожидания.

$$\mathbb{E}(\eta_k) = \mathbb{E}_m(\mathbb{E}(\eta_k \mid \xi_1 = m)) = \mathbb{E}(\eta_k \mid \xi_1 = 1)P(\xi_1 = 1) + \ldots + \mathbb{E}(\eta_k \mid \xi_1 = n)P(\xi_1 = n)$$

   Мы знаем, что $P(\xi_1 = m) = 1/n$ для любого m. Теперь надо посчитать $\mathbb{E}(\eta_k \mid \xi_1 = m)$ для фиксированного m. Если $\xi_1 = m$ то мы уже сделали 1 бросание и теперь нам осталось набрать $k - m$ очков. То есть при условии, что $\xi_1 = m$ случайная величина η_k превращается в $1 + \eta_{k-m}$. При этом η_{k-m} будет величиной от $\xi_2, \ldots, \xi_k$, а то есть не зависит от ξ_1. Потому

$$\mathbb{E}(\eta_k \mid \xi_1 = m) = \mathbb{E}(1 + \eta_{k-m} \mid \xi_1 = m) = \mathbb{E}(1 + \eta_{k-m})$$

   Таким образом получили, что

$$\mathbb{E}(\eta_k) = \frac{\mathbb{E}(1 + \eta_{k-1})}{n} + \ldots + \frac{\mathbb{E}(1 + \eta_{k-n})}{n}$$

   Так как мы считаем значения при $k \leqslant n$ и величины $\eta_k = 0$ при не положительных k, то последнюю формулу можно переписать так

$$\mathbb{E}(\eta_k) = \frac{\mathbb{E}(1 + \eta_{k-1})}{n} + \ldots + \frac{\mathbb{E}(1 + \eta_1)}{n}$$

   или, раскрыв все скобки, так

$$\mathbb{E}(\eta_k) = 1 + \frac{\mathbb{E}(\eta_{k-1})}{n} + \ldots + \frac{\mathbb{E}(\eta_1)}{n}$$

   То есть на нашу числовую последовательность у нас есть следующие соотношения

$$a_k = 1 + \frac{a_1 + \ldots + a_{k-1}}{n}$$

При этом $a_1 = 1$. Вычтем из этого соотношения соотношение при $k-1$, получим

$$a_k - a_{k-1} = \frac{a_{k-1}}{n} \quad \Rightarrow \quad a_k = a_{k-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad a_k = a_1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbb{E}(\eta_n) = a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Так как это число близко к e, то за два-три броска в среднем мы будем справляться. □

4. На плоскости нарисована ломаная с n звеньями. Длина каждого звена равна 1, ориентированный угол между соседними звеньями с равной вероятностью равен α или $-\alpha$. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния от ее начальной точки до конечной.

5. На станцию приходят в случайное время две электрички. Времена их приходов независимы и имеют экспоненциальное распределение с плотностью $e^{-x} \cdot \theta(x)$. Студент приходит на станцию в момент времени 2. Найдите

   (a) вероятность того, что он сможет уехать хотя бы на одной электричке;

   (b) математическое ожидание времени ожидания студентом ближайшей электрички (считаем, что время ожидания равно нулю, если студент опоздал на обе электрички).

   Здесь

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

6. Пусть ξ, η и λ – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$, а t – фиксированное число. Найдите $P(\xi + \eta < t\lambda)$.