Семинар 4

Задачи:

1. Что можно сказать про случайную величину с нулевой дисперсией?

2. Докажите, что случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда независимы $a\xi + b$ и η, где $a, b \in \mathbb{R}$ причем $a \neq 0$.

3. Показать, что случайная величина ξ не зависит от самой себя (т.е. ξ и ξ независимы) в том и только том случае, когда $\xi = \text{const}$.

4. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины и

$$\xi_{\min} = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \xi_{\max} = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

   Показать, что

$$P(\xi_{\min} \geqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \geqslant x), \quad P(\xi_{\max} < x) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i < x)$$

5. Привести пример двух зависимых случайных величин ξ и η таких, что ξ^2 и η^2 независимы.

6. Игральную кость с n гранями (и числами от 1 до n на этих гранях) подбрасывают до тех пор, пока сумма выпавших очков не станет больше либо равна n. Все грани кости выпадают с одинаковой вероятностью. Найдите математическое ожидание числа бросков.

7. На плоскости нарисована ломаная с n звеньями. Длина каждого звена равна 1, ориентированный угол между соседними звеньями с равной вероятностью равен α или $-\alpha$. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния от ее начальной точки до конечной.

8. На станцию приходят в случайное время две электрички. Времена их приходов независимы и имеют экспоненциальное распределение с плотностью $e^{-x} \cdot \theta(x)$. Студент приходит на станцию в момент времени 2. Найдите

   (a) вероятность того, что он сможет уехать хотя бы на одной электричке;

   (b) математическое ожидание времени ожидания студентом ближайшей электрички (считаем, что время ожидания равно нулю, если студент опоздал на обе электрички).

   Здесь

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

9. Пусть ξ, η и λ – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$, а t – фиксированное число. Найдите $P(\xi + \eta < t\lambda)$.

10. Пусть ξ_1 и ξ_2 независимые случайные величины, имеющие геометрическое распределение. Найти вероятность того, что $\xi_1 = k$ при условии, что $\xi_1 + \xi_2 = n$.

11. Пусть ξ и η независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Найти распределение (или плотность) величины $\chi = \xi^2 + \eta^2$.

12. Пусть ξ и η независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Найти распределение величины ξ/η.

13. Доказать, что ξ является геометрически распределенной случайной величиной тогда и только тогда, когда $P(\xi = n + k \mid \xi \geqslant k) = P(\xi = n)$.

14. Найдите математическое ожидание количества циклов длины k в случайной перестановке на n элементах.

15. Стержень длины L произвольным образом разламывают на две части и выбрасывают меньшую часть. Затем оставшуюся часть ломают и снова выбрасывают меньшую часть. Найдите вероятность того, что длина оставшейся части не меньше $L/2$.

16. На окружности выбираются 3 случайных точки. С какой вероятностью центр окружности лежит внутри треугольника с вершинами в этих точках?

17. В мишень, которая представляет собой прямоугольник размера 3×2, стреляют из пистолета. Известно, что отклонение пули от точки, на которую нацелен пистолет, произвольно, но не превышает $0,1$ по любому направлению, параллельному сторонам прямоугольника. Стрелок целится в произвольную точку мишени. С какой вероятностью он попадет в мишень?

18. Пусть A и B – две случайных булевых матрицы $n \times n$, у которых каждый элемент равен 1 с вероятностью p (значения различных элементов не зависят друг от друга). Сколько в среднем единиц будет в их произведении, если сложение и умножение происходят по модулю 2?

19. Случайные величины X и Y независимы. Плотность случайной величины X равна $p_X(t) = \frac{t}{2}\chi_{[0,2]}(t)$ (где $\chi_{[0,2]}(t)$ – индикаторная функция отрезка $[0,2]$), а Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0,3]$. Найдите вероятность того, что из отрезков с длинами X, Y и 1 можно составить треугольник.

20. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, принимающие положительные значения. Пусть также $m < n$. Найдите математическое ожидание отношения:
$$\frac{X_1 + \ldots + X_m}{X_1 + \ldots + X_n}$$

21. Вася поставил учиться две нейронных сети, каждую на своем GPU, и отправился спать. Времена обучения сетей независимы и равномерно распределены на отрезке $[1,3]$ (часов). Через время t сервер упал и оказалось, что лишь одна сеть успела доучиться. С какой вероятностью $t \leqslant 3/2$? Считайте, что время падения сервера тоже равномерно распределено на отрезке $[1,3]$.

22. Из равномерного распределения на отрезке $[0,1]$ независимо выбираются две точки x и y. При каких a события $\max(1-2x, y) < a$ и $\max(1-2y, x) < a)$ независимы?

23. Случайные величины X и Y независимы. X имеет распределение Лапласа с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, а Y – равномерное на отрезке $[1,2]$. Найдите плотность распределения случайной величины $X - 2Y$.

24. Случайные величины X и Y независимы и экспоненциально распределены, X – с параметром $\lambda = 1$, а Y – с параметром $\lambda = 2$. Пусть $Z = max(X,Y)$. Найдите математическое ожидание случайной величины Z.