Семинар 1

Общая информация:

- Источник учебников: bookfi.net
- Задачник – Кострикин. Сборник задач по Алгебре. Третье издание. 2009г.

Задачи:

1. Задачник. §8, задача 8.1 (г).
2. Задачник. §8, задача 8.2 (з).
3. Задачник. §8, задача 8.7.
4. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_{5\,6}(\mathbb{R})$ имеет вид
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Для системы $Ay = 0$, где $y \in \mathbb{R}^6$, найти количество главных переменных при любом значении $x \in \mathbb{R}$.
5. Пусть $A_i \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ – матрицы. Какое наименьшее число k надо взять, чтобы обязательно существовало ненулевое решение для уравнения $x_1 A_1 + \ldots + x_k A_k = 0$.
6. Задачник. §17, задача 17.1 (а, б).
7. Задачник. §17, задача 17.4 (в).
8. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица вида
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad (a) \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad (b) \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$
Найдите все матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирующие с A.
9. Найти множество матриц в $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирующих со всеми матрицами из $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
10. Пусть матрица $J(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет следующий вид[1]
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Найти все $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $AJ(\lambda) = J(\lambda)A$.
   (b) Доказать, что для любого k верна формула
$$J(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \ldots & C_k^{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \ldots & C_k^{n-2} \lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & C_k^1 \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

[1] Такая матрица называется Жордановой клеткой.

где $C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

11. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и пусть существуют такие матрицы $C_1, C_2 \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$, что $C_1 A = E_n$ и $AC_2 = E_m$, где $E_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица. Покажите, что $n = m$.[2]

12. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^m = 0$ для некоторого m. Показать, что $E + A$ и $E - A$ обратимы, где $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – единичная матрица (найти явный вид обратной матрицы).

13. Пусть A – невырожденная вещественная матрица n на n, все элементы которой положительны. Докажите, что число нулей среди элементов матрицы A^{-1} не превосходит $n^2 - 2n$.

14. При каких $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет решение уравнение $[A, B] = \lambda E$?

15. Задачник. §17, задача 17.24.

16. Задачник. §19, задача 19.15.

17. Задачник. §19, задача 19.16.

18. Задачник. §18, задача 18.17.

19. Пусть $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, E – единичная матрица размера n и для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $XX^t = \lambda E$. Верно ли, что $X^t X = \lambda E$?

[2] Смысл этой задачи в том, чтобы показать, что обратимыми могут быть только квадратные матрицы.