Семинар 3

Задачи:

1. Задачник. §9, задача 9.2 (а).

2. Найти определитель матрицы
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Задачник. §10, задача 10.5.

4. Задачник. §12, задача 12.3 (в).

5. Задачник. §13, задача 13.2 (б).

6. Задачник. §12, задача 12.4.

7. Найдите определители следующих матриц

   (a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

8. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, найдите определитель матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

9. Пусть $X = (X_1 \mid \dots \mid X_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
   - Найти $\det(\lambda_1 X_1 X_1^t + \dots + \lambda_n X_n X_n^t)$.
   - При каких λ_i определитель из предыдущего пункта не меньше нуля?

10. Пусть матрица A задана следующим образом
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ делит } j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
    Найдите определитель матрицы A.

11. Пусть $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = |i - j|$. Найдите определитель матрицы A.

12. Докажите, что для любых ортогональных матриц A и B верно равенство $\det(A^t B - B^t A) = \det(A + B)\det(A - B)$.

13. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Построим из нее матрицу $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ следующим образом: сдвинем все столбцы матрицы A по циклу на два вправо и результат прибавим к A. Выразите определитель B через определитель A.

14. Рассмотрим квадратную матрицу из $\mathrm{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ вида $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, где $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Покажите следующее:

    (a) Если A обратима, то
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

(b) Если $m = n$ и $AC = CA$, то[1]

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

15. Задачник. §16, задача 16.4 (1, 2).

16. Задачник. §16, задача 16.11.

17. Задачник. §18, задача 18.14.

18. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – произвольные матрицы.

    (a) Покажите, что если A или B обратима, то $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.

    (b) Покажите, что для любых A и B выполнено $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.

19. Пусть $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ при этом $n > m$. Покажите, что $\chi_{AB}(\lambda) = \lambda^{n-m}\chi_{BA}(\lambda)$.

20. Для квадратных матриц A и B докажите, что $\det(E - AB) = \det(E - BA)$.

21. Пусть $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – кососимметрическая матрица (то есть $J^t = -J$) и $u \in \mathbb{R}^n$ – столбец, а $\beta \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Посчитайте $\det(E + \beta u u^t J)$.

[1] Обратите внимание, матрица A может не быть обратимой в этом случае.