Линейная алгебра

Дима Трушин

Семинар 2

Элементарные преобразования

Тип I Пусть $S_{ij}(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной вписыванием в ячейку i j числа λ. Эта матрица имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ слева прибавляет j строку умноженную на λ к i строке матрицы A, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на $S_{ij}(\lambda)$ справа прибавляет i столбец умноженный на λ к j столбцу матрицы B.

Тип II Пусть $U_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной перестановкой i и j столбцов (или что то же самое – строк). Эта матрица имеет следующий вид

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на U_{ij} слева переставляет i и j строки матрицы A, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на U_{ij} справа переставляет i и j столбцы матрицы B.

Тип III Пусть $D_i(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – матрица, полученная из единичной умножением i строки на $\lambda \in \mathbb{R}$ (или что то же самое – столбца). Эта матрица имеет следующий вид

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Тогда прямая проверка показывает, умножение $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ слева умножает i строку A на λ, а умножение $B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ на $D_i(\lambda)$ справа умножает i столбец матрицы B на λ.

Внимание магия! Пусть есть матрицы U и V соответствующие элементарным преобразованиям и A – произвольная матрица. Тогда сделать преобразование U над строками, а потом V над столбцами это $(UA)V$, а сделать эти преобразования в обратном порядке (то есть сначала над столбцами, а потом над строками) это $U(AV)$. Так как умножение матриц ассоциативно (не важно как расставлять скобки), то это одно и то же. Значит действия над строками коммутируют с действиями над столбцами.

Невырожденные матрицы

Теперь давайте еще раз вспомним утверждение с прошлого раза.

Утверждение. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – произвольная квадратная матрица. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Система линейных уравнений $Ax = 0$ имеет только нулевое решение $x \in \mathbb{R}^n$.*
2. *Система линейных уравнений $A^t y = 0$ имеет только нулевое решение $y \in \mathbb{R}^n$.*
3. *Матрица A представляется в виде $A = U_1 \cdot \ldots \cdot U_k$, где U_i – матрицы элементарных преобразований.*
4. *Матрица A обратима.*
5. *Матрица A обратима слева, т.е. существует $L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $LA = E$.*
6. *Матрица A обратима справа, т.е. существует $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $AR = E$.*

Напомню, что матрица удовлетворяющая любому из утверждений выше (а значит и всем остальным) называется невырожденная.

Замечание

- Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, тогда матрица AB обратима тогда и только тогда, когда A и B обратимы и при этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Действительно, если A и B обратимы, то прямая проверка показывает, что $B^{-1}A^{-1}$ является обратной к AB. Если же AB обратима, то верны равенства $ABC = E$ и $CAB = E$ для некоторой $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда BC – правая обратная к A, а CA – левая обратная к B и по предыдущему утверждению A и B обратимы.
- Пункт (3) означает, что к обратимой матрице можно относиться как к матрице накопленных элементарных преобразований. Если вы что-то можете сделать умножением на обратимую матрицу, то это можно сделать с помощью элементарных преобразований и наоборот.
- Позже мы добавим к утверждению выше еще два эквивалентных условия, что сильно расширит наш арсенал при работе с невырожденными матрицами.

Нахождение обратной матрицы методом Гаусса

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Задача Понять обратима ли матрица A и если она обратима, то найти ее обратную A^{-1}.

Алгоритм

1. Нам надо по сути решить систему $AX = E$, где E – единичная матрица. Потому составим расширенную матрицу системы $(A|E)$.
2. Приведем эту матрицу к улучшенному ступенчатому виду.
3. В результате возможны 2 случая:
   (a) После приведения получили матрицу $(E|B)$. Тогда A обратима и $A^{-1} = B$.
   (b) После приведения получили матрицу $(D|B)$ и у матрицы D есть свободные переменные (или что то же самое нулевая строка). Тогда матрица A не обратима.

Заметим, что если в процессе алгоритма, мы слева от черты в расширенной матрице нашли свободную переменную, то на этом можно остановиться – матрица A необратима.

Классификационный результат

Утверждение. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ и пусть $E_A, E_B \subseteq \mathbb{R}^n$ – множества решений систем $Ax = 0$ и $Bx = 0$, соответственно. Тогда следующее эквивалентно:*

1. *$E_A = E_B$, т.е. системы имеют одно и то же множество решений.*
2. *A приводится к B элементарными преобразованиями.*
3. *Существует обратимая $C \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ такая, что $B = CA$.*
4. *Матрица улучшенного ступенчатого вида для A совпадает с матрицей улучшенного ступенчатого вида для B.*

Блочные линейные преобразования

Преобразования первого типа Пусть у нас дана матрица

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}$$

Я хочу взять первую «строку» из матриц (A, B) умножить ее на некую матрицу R слева и прибавить результат к «строке» (C, D). Для этого матрица R должна иметь n строк и m столбцов. То есть процедура будет выглядеть следующим образом

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C + RA & D + RB \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}$$

Оказывается, что такая процедура является умножением на обратимую матрицу слева, а именно

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ R & E \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} m \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C + RA & D + RB \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} m \\ n \end{array}$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ R & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -R & E \end{pmatrix}$$

В частности из этого наблюдения следует, что блочные элементарные преобразования строк не меняют множества решений соответствующей системы.

Аналогично можно делать блочные элементарные преобразования столбцов. А именно

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B + AT \\ C & D + CT \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}$$

где T матрица с k строками и s столбцами. Как и в случае преобразований со строками, эта процедура сводится к операции умножения на обратимую матрицу справа

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} k \\ s \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B + AT \\ C & D + CT \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} m \\ n \end{array}$$

Как и раньше

$$\begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & -T \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Замечание Обратите внимание, что при блочных преобразованиях строк умножение на матрицу-коэффициент R происходит слева, а при преобразованиях столбцов умножение на матрицу-коэффициент T происходит справа.

Преобразования второго типа Преобразование вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

сводится к умножению на обратимую блочную матрицу слева

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

А преобразование

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

сводится к умножению на обратимую блочную матрицу справа

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

При этом

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразования третьего типа Если $R \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ – обратимая матрица, то

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} RA & RB \\ C & D \end{pmatrix}$$

является преобразованием умножения на обратимую матрицу слева, а именно

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RA & RB \\ C & D \end{pmatrix}$$

при этом

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Аналогично, для обратимой матрицы $T \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$, преобразование

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} AT & B \\ CT & D \end{pmatrix}$$

является преобразованием умножения на обратимую матрицу справа, а именно

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AT & B \\ CT & D \end{pmatrix}$$

Как и раньше, при работе со строками умножение на матрицу-коэффициент происходит слева, а при работе со столбцами – справа.

Подстановка матриц в многочлен

Пусть $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$ – многочлен с вещественными коэффициентами, а $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Тогда можно определить $p(A) = a_0 E + a_1 A^1 + \dots + a_n A^n$, где E – единичная матрица. Множество всех многочленов с вещественными коэффициентами я буду обозначать $\mathbb{R}[x]$.

Задача. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ найдется многочлен $p(x)$ степени $n^2 + 1$ такой, что $p(A) = 0$. [1]

Подстановка матрицы в многочлены помогает построить из исходной матрицы другие с заданным свойством, а многочлен зануляющий нашу матрицу может стать неплохой исходной точкой для подобных манипуляций.

[1] На самом деле можно показать, что найдется многочлен степени n.

Свойства подстановки в многочлен

1. Если $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $f \in \mathbb{R}[x]$ – многочлен, то $f(C^{-1}AC) = C^{-1}f(A)C$ для любой обратимой $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Если $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $f, g \in \mathbb{R}[x]$ – многочлены, то матрицы $f(A)$ и $g(A)$ коммутируют между собой.

Спектр матрицы

Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ определим вещественный спектр матрицы A следующим образом:

$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda E \text{ не обратима}\}$$

Аналогично определяются спектры в рациональном, комплексном и прочих случаях. Обычно в литературе под просто спектром подразумевают именно комплексный спектр! Это определение спектра принадлежит функциональному анализу. На самом деле этот спектр совпадает со множеством собственных значений матрицы, о которых речь пойдет чуть позже.

Примеры

1. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Тогда $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

2. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Прямое вычисление показывает, что $A^2 = -E$, то есть многочлен $f(x) = x^2 + 1$ зануляет A. Как будет видно ниже, вещественный спектр этой матрицы пуст $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \varnothing$, а комплексный спектр $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A = \{i, -i\}$.

Минимальный многочлен

Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – некоторая матрица. Рассмотрим множество всех ненулевых многочленов зануляющих A. Формально мы смотрим на множество

$$M = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(A) = 0,\ f \neq 0\}$$

Пусть $f_{min} \in M$ – многочлен самой маленькой степени и со старшим коэффициентом 1. Тогда он называется минимальным многочленом матрицы A. Обратите внимание, что минимальный многочлен зависит от того, с какими коэффициентами мы его рассматриваем. Комплексный и вещественный минимальный многочлен могут быть разными.

Утверждение. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, тогда верны следующие утверждения:*

1. *Минимальный многочлен f_{min} существует и единственный, при этом $\deg f_{min} \leqslant n$.*
2. *Минимальный многочлен делит любой другой многочлен зануляющий A.*
3. *$\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A$ тогда и только тогда, когда $f_{min}(\lambda) = 0$.*
4. *Для любого зануляющего многочлена $g \in \mathbb{R}[x]$, то есть $g(A) = 0$, верно $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq$ корни g.*

Поиск минимального многочлена

Сведение к СЛУ Пусть задана матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. То мы знаем, что найдется многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $f(A) = 0$. Кроме того, я сообщил, что $\deg f \leqslant n$. Давайте обсудим, как найти подобный многочлен. Будем искать его с неопределенными коэффициентами $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Подставим в многочлен матрицу A и приравняем результат к нулю.

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_n A^n = 0$$

Тогда, то что написано является системой из n^2 уравнений, а именно

$$\{_{1\leqslant i,j\leqslant n} E_{ij}a_0 + A_{ij}a_1 + \ldots + (A^n)_{ij}a_n = 0$$

Здесь через A_{ij} обозначены коэффициенты матрицы A, например, E_{ij} – это ij-ый коэффициент единичной матрицы, а $(A^n)_{ij}$ – ij-ый коэффициент матрицы A^n.

Теперь нас интересует ненулевое решение этой системы, у которого как можно больше нулей справа. Давайте поясню. Такое решение отвечает зануляющему многочлену. Мы хотим выбрать такой многочлен как можно меньшей степени. То есть мы хотим по возможности занулить a_n, потом a_{n-1}, потом a_{n-2} и так далее, пока находится ненулевое решение. Предположим, что мы привели систему к ступенчатому виду и a_k – самая левая свободная переменная. Я утверждаю, что k и будет степенью минимального многочлена, а чтобы его найти надо положить $a_k = 1$, а все остальные свободные переменные равными нулю.

Действительно, если мы сделали, как описано, то все главные переменные правее a_k тоже равны нулю, ибо они зависят от свободных переменных, стоящих правее, а они в нашем случае нулевые. То есть a_k будет старший ненулевой коэффициент в искомом многочлене, а значит k будет его степенью. Почему нельзя найти меньше. Чтобы найти меньше надо занулить еще и a_k. То есть все свободные переменные в этом случае будут нулевыми, а тогда и все главные будут нулевыми, а это даст нулевое решение, что противоречит нашим намерениям найти ненулевой многочлен.

Вычленение из какого-то зануляющего Предположим, что вы угадали какой-нибудь зануляющий многочлен для вашей матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, а именно, нашли какой-то $f \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $f(A) = 0$. Тогда можно попытаться найти минимальный многочлен среди делителей многочлена f. Эта процедура требует уметь искать эти самые делители. Но в некоторых ситуациях эта процедура тоже бывает полезна. Например, в случае большой блочной матрицы A бывает проще найти зануляющий многочлен.

Рекурентные соотношения

Вместо того, чтобы тут развивать супер общую теорию, я все проиллюстрирую на конкретном примере – последовательность Фибоначчи. Что это такое? Это последовательность чисел $a_n \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ удовлетворяющая следующим условиям

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Если мы захотим по этим правилам посчитать n-ый член последовательности, то нам понадобится $O(n)$ операций, то есть последовательно посчитать все n членов последовательности, чтобы добраться до a_n. Однако, можно несколько схитрить и сделать это быстрее за $O(\log n)$ с помощью матричных операций. Для этого введем вектор

$$x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ при этом мы знаем, что } x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что x_n выражается через x_{n-1} следующим образом

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \text{ то есть } x_n = Ax_{n-1} \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Но тогда $x_n = Ax_{n-1} = A^2x_{n-2} = \ldots = A^{n-1}x_1$. А значит для нахождения x_n нам лишь надо возвести матрицу A в степень n. Для этого подходит хорошо известный алгоритм быстрого возведения в степень для чисел, который слово в слово работает для матриц. Давайте заведем две квадратные матрицы $X, Y \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ и число $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. В самом начале положим $X = E$, $Y = A$ и $m = n$. Будем поддерживать следующий инвариант $XY^m = A^n$. Алгоритм остановим тогда, когда $m = 0$, тогда X будет нашим ответом. Шаги алгоритма следующие. Если m четно, то $XY^{2m'} = X(Y^2)^{m'}$ поделим m на 2, а Y возведем в квадрат. Если m нечетно, то $XY^{2m'+1} = (XY)Y^{2m'}$ уменьшим m' на единицу и умножим X на Y.

На самом деле, можно проверить, что $A = CDC^{-1}$, где

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}-1} & -\frac{2}{\sqrt{5}+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

Для простоты обозначений, будем считать $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$, тогда

$$A^n = (CDC^{-1})^n = CD^nC^{-1} = C \left(\begin{smallmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{smallmatrix}\right) C^{-1}$$

То есть, зная как получить из матрицы A супер крутое разложение, мы можем еще сильнее упростить вычисления степени матрицы и свести его к вычислению степеней чисел и произведения трех матриц.

Главный вывод из последнего матричного равенства: $a_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$, где α и β – какие-то коэффициенты. Потому можно не писать никаких матричных выражений, а сразу искать a_n в таком виде. Коэффициенты находятся из условий $a_0 = a_1 = 0$, которые дают систему линейных уравнений на α, β. Отсюда мы автоматически знаем ассимптотику a_n при $n \to \infty$. Так как $\lambda > 1$, то λ^n экспоненциально идет в бесконечность, а $-1 < \mu < 0$, значит μ^n экспоненциально идет к нулю. В итоге a_n экспоненциально идет в бесконечность с той же скоростью, что и λ^n.

Сложность вычисления произведения Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,k}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(\mathbb{R})$ – некоторые матрицы. Чтобы посчитать матрицу AB нужно найти mn ее коэффициентов. Причем каждый коэффициент требует k умножений и $k-1$ сложение. Обычно сложения игнорируются в таких подсчетах. Итого, получается mkn операций. Если матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то получается n^3 операций.

Пусть теперь даны матрицы $A, C \in \mathrm{M}_{1\,n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$. Тогда посчитать произведение ABC можно двумя способами: (1) $(AB)C$ и (2) $A(BC)$. Давайте сравним количество операций для вычислений. В пером случае AB считается за n умножений и получаем число, которое умножается на C за n умножений. Итого $2n$ операций. Во втором случае BC считается за n^2 умножений и получается n на n матрица, которая умножается слева на A за n^2 операций. Итого $2n^2$ умножений. Как мы знаем, результат от расстановки скобок не зависит, но скорость вычисления будет сильно отличаться.

Диагонлизуемость

Утверждение. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ и $g \in \mathbb{R}[x]$ – зануляющий многочлен для A, то есть $g(A) = 0$. Если он раскладывается на линейные множители $g(x) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_k)$ и все λ_i различны, то существует обратимая матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $C^{-1}AC$ будет диагональной и на диагонали будут числа из множества $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ (но может быть не все из них и часть может повторяться).*

Обратите внимание, что здесь очень важно, чтобы корни λ_i были различными! Если это условие не выполнено, то утверждение не верно. Например, возьмем матрицу $J_n(\lambda)$. У нее минимальный многочлен будет $(x-\lambda)^n$, но про нее можно доказать, что нельзя сопряжением ее сделать диагональной. Я затрону этот вопрос позже, когда будет изучать геометрический смысл этой операции.

Квадратные корни из единицы Это соображение полезно, если вы хотите решать различные матричные уравнения. Например, пусть мы хотим найти все возможные $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такие, что $A^2 = E$, то есть хотим найти все квадратные корни из единицы в матрицах. Тогда это означает, что $g(x) = x^2 - 1$ зануляет матрицу A. При этом $g(x) = (x-1)(x+1)$. Это значит, что найдется обратимая матрица C такая, что $C^{-1}AC$ будет диагональной с числами 1 и -1 на диагонали. Кроме того, если у диагональной матрицы 1 и -1 не идут подряд, то мы ее можем сопрячь некоторой матрицей так, что 1 и -1 пойдут подряд. То есть мы показали, что если A является решением уравнения $A^2 = E$, то найдется такая невырожденная матрица C, что

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \text{ следовательно } A = C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} C^{-1}$$

Здесь подразумевается, что блоки с единичной и минус единичной матрицей могут быть пустыми (то есть только одни единицы или минус единицы допустимы).

С другой стороны. Легко видеть, что матрицы полученного вида являются решениями данного уравнения

$$A^2 = C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} C^{-1} = C \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}^2 C^{-1} = CEC^{-1} = E$$