

## Семинар 2

### Задачи:

1. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{\{nx\}} x^{2016} dx$$

где  $\{t\}$  означает дробную часть числа  $t$  (например,  $\{-\frac{2}{3}\} = \{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$ ).

2. Постройте график функции

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}, \quad x \geq 0$$

3. Решите уравнение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 1$ .

4. Последовательность  $a_n$  такова, что все  $a_n \in (0, 1)$  и, кроме того,  $a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ . Верно ли, что  $a_n$  сходится? Найдите множество всех возможных пределов таких последовательностей.

5. Докажите, что для произвольного  $a_0 \in (0, 2\pi)$  последовательность, заданная условием

$$a_{n+1} = \int_0^{a_n} \left(1 + \frac{1}{4} \cos^{2n+1} t\right) dt$$

имеет предел и найдите его.

6. Найдите минимум и максимум функции  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  на круге  $x^2 + y^2 \leq 5^2$ .

7. Пусть  $f$  – положительная непрерывная функция на  $\mathbb{R}$ , причем  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ , а интервал  $[a, b]$  – это интервал минимальной длины из тех, для которых  $\int_a^b f(x) dx = \alpha$ . Покажите, что  $f(a) = f(b)$ .

8. Пусть функция  $f$  непрерывна и ограничена на промежутке  $(x_0, \infty)$ . Докажите, что для любого числа  $T$  существует последовательность  $x_n$ , стремящаяся к  $+\infty$  и такая, что  $f(x_n + T) - f(x_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

9. Пусть  $f$  – дифференцируемая функция, причем  $f(0) = 0$  и  $0 < f'(x) \leq 1$ . Докажите, что для всех  $x \geq 0$  имеет место неравенство

$$\int_0^x f^3(t) dt \leq \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2$$

10. Непрерывная функция  $f(x)$  такова, что  $f(0) = f(2)$ . Докажите, что для какого-то  $x \in [0, 2]$  имеет место равенство  $f(x) = f(x - 1)$ .

11. Пусть  $f$  – гладкая вещественная функция, причем  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Докажите, что найдутся различные  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , для которых  $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$ .

12. Верно ли, что всякая нечетная непрерывная функция, удовлетворяющая условию  $f(2x) = 2f(x)$ , линейна?

13. Определите, сколько корней имеет уравнение

$$\int_x^{x+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{t^2}{3}\right) dt = 0$$

на отрезке  $[0, 3]$ .

14. (a) Для непрерывной функции  $f(x)$  найдите

$$\frac{d}{da} \iint_{-a \leq x, y \leq a} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dx dy$$

- (b) Опишите все непрерывные функции  $f(x)$ , для которых при всех  $a \in \mathbb{R}$  имеет место равенство

$$\iint_{-a \leq x, y \leq a} f\left(\frac{x+y}{2}\right) dx dy = \int_{-a}^a f(x) dx$$