Семинар 5

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите с помощью какой матрицы:
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть
   $$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ вектора в } \mathbb{R}^2$$
   Найти матрицу отображения ϕ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

3. Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:
   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   Существует ли линейное отображение $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$, где
   $$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n и пусть $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ – отображение дифференцирования по переменной x. Найти матрицу отображения в базисе $(1, x, \dots, x^n)$.

5. Задачник. §39, задача 39.15 (и).

6. Привести пример или доказать, что такого примера не существует:
   (a) $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такой, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\phi$
   (b) $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ такой, что $\operatorname{Im}\phi = \ker\phi$

7. Найти матрицу какого-нибудь линейного оператора $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такого, что выполнены следующие условия: $\ker\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $\operatorname{Im}\phi = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

8. Задачник. §39, задача 39.20.

9. Задачник. §40, задача 40.15 (а, г).

10. Задачник. §40, задача 40.1 (в, е).

11. Задачник. §40, задача 40.10 (б).

12. Найдите собственные значения матрицы vv^t, где $v \in \mathbb{R}^n$.

13. Задачник. §40, задача 40.14.

14. Задачник. §40, задача 40.16 (а, в).

15. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Представить матрицу A в виде $A = C^{-1} \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix} \right) C$, где $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ – невырожденная матрица, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) Найти A^n для произвольного натурального n.

16. Пусть $a_n \in \mathbb{R}$ – последовательность чисел с натуральными индексами, удовлетворяющая соотношению $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ и $a_0 = a_1 = 1$.

    (a) Пусть $x_n = \left(\begin{smallmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2$. Найдите матрицу $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ такую, что $x_n = Ax_{n-1}$.

    (b) Найдите формулу для элемента a_n.

17. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ – матрица с целочисленными коэффициентами. Покажите, что любое рациональное собственное значение является целым.

18. Пусть $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейное отображение, для которого существует $n+1$ собственных векторов таких, что любые n из них линейно независимы. Найдите всевозможные матрицы, которые могли бы задавать такое отображение.

19. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что для каждого ее столбца сумма его элементов равна числу λ. Покажите, что λ является собственным значением A.

20. Покажите, что у матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ число $\frac{1}{4}(-3 + i\sqrt{5})$ не может является собственным значением.

21. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая матрица, что она не изменяется при повороте на $90°$ градусов.

    (a) Покажите, что для любого набора чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ можно найти n, что λ_i будут собственными значениями A.

    (b) Пусть v – собственный вектор для A отвечающий ненулевому собственному значению. Покажите, что $v_i = v_{n-i+1}$.

22. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ рассмотрим линейное отображение $\phi\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ по правилу $X \mapsto AXB$. Пусть $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ и $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} B = \{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$. Покажите, что $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} \phi = \{\lambda_i \mu_j \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$.

23. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти все комплексные собственные значения матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{smallmatrix} \right)$.

24. Для двух квадратных матриц A и B одного и того же размера n обозначим через $A \star B$ матрицу, определяемую следующим образом:

$$(A \star B)_{ij} = \begin{cases} (AB)_{ij}, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ b_{ij}, & \text{иначе} \end{cases}$$

    Для матрицы A определим оператор $\Phi_A\colon\ \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ по правилу $\Phi_A(B) = A \star B$.

    (a) Может ли этот оператор иметь собственное значение 2 для какой-либо матрицы A?

    (b) Какое наибольшее число различных собственных значений может иметь такой оператор (при фиксированном n)?

25. Линейный оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таков, что A^3 – это оператор проекции. Какие собственные значения может иметь A? Верно ли, что A будет иметь диагональную матрицу в каком-либо базисе $\mathbb{R}^n$?

26. Решить матричное уравнение $X^2 = A$, где (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda \neq \mu$. (c) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Все матрицы из $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.