Integralrechnung mit Mathcad

Unbestimmtes Integral (Ermitteln einer Stammfunktion)

$f(x) := 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 9$

Zunächst muss eine Funktion - hier f(x) - definiert werden.

Den Integrationsoperator "$\int \blacksquare \, \mathrm{d}\blacksquare$" findet man unter *Rechnen* in der Palette *Operatoren*. (Tastenkombination für das Integrieren ist: "**Strg Shift I**".) Entsprechende Felder sind mit dem Namen der Funktion und der Integrationsvariablen auszufüllen (wie beim Differenzieren). Die Felder für die Integrationsgrenzen bleiben frei. Mit "Strg ." symbolisch auswerten.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{5 \cdot x^4}{4} - 4 \cdot x^2 + 9 \cdot x$$

ACHTUNG:
Mathcad erzeugt dabei aber keine Integrationskonstante C!
Es ist daher von Vorteil, diese bereits nach dem dx selbst anzufügen, um damit eventuell später eine spezielle Lösung ermitteln zu können.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + C \rightarrow \frac{5 \cdot x^4}{4} - 4 \cdot x^2 + 9 \cdot x + C$$

Damit lassen sich natürlich auch kompliziertere Fkt. integrieren.

$f(t) := t \cdot e^t$ $\qquad \int f(t)\,\mathrm{d}t + C \rightarrow C + e^t \cdot (t-1)$

$f(t) := \frac{1}{t}$ $\qquad \int f(t)\,\mathrm{d}t \rightarrow \ln(t)$

$$\int (\sin(t) \cdot \cos(2 \cdot t))\,\mathrm{d}t + C \rightarrow C - \frac{\cos(3 \cdot t)}{6} + \frac{\cos(t)}{2}$$

Man kann auch die - nicht zuvor definierte Fkt. - direkt nach dem Integralzeichen eingeben.

Jedenfalls könnt ihr damit auch eure händisch ermittelten Ergebnisse kontrollieren. Das letzte Bsp. ist die Nr. 6.52 b) aus eurem Buch.

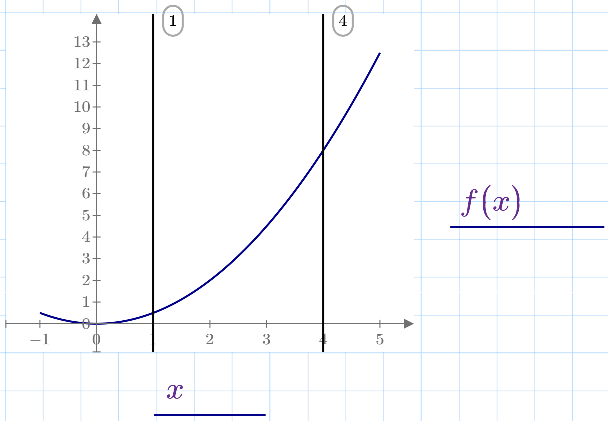
Bestimmtes Integral

Funktioniert genauso wie oben beschrieben, nur müssen zusätzlich die **Integrationsgrenzen** (Untergrenze a und Obergrenze b) eingegeben werden.

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$

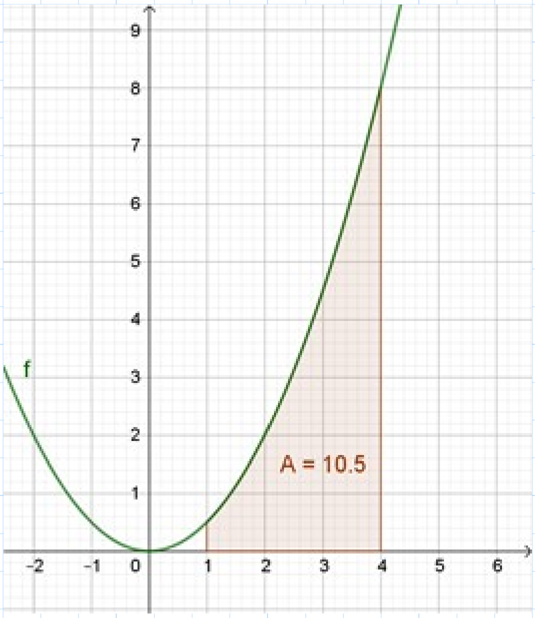
$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \rightarrow \frac{21}{2}$$

Hierbei ist keine Integrationskonstante nötig! Das Ergebnis ist ein (Zahlen-)**Wert**, der in diesem Fall dem **Flächeninhalt** zwischen der Kurve und der x-Achse ("unterhalb der Kurve") im Intervall [1; 4] entspricht.



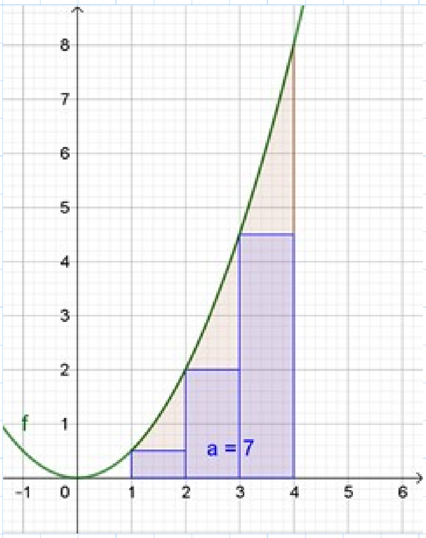
Das heißt, bei einer Zeicheneinheit von 1 cm hat dieser Flächeninhalt einen Wert von 10,5 cm².

Die optisch schönere Darstellung liefert wieder einmal Geogebra.

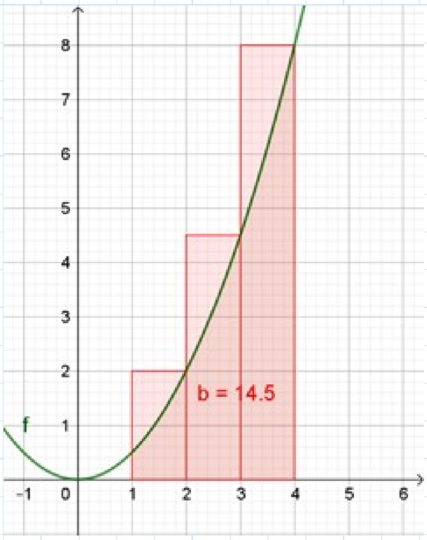


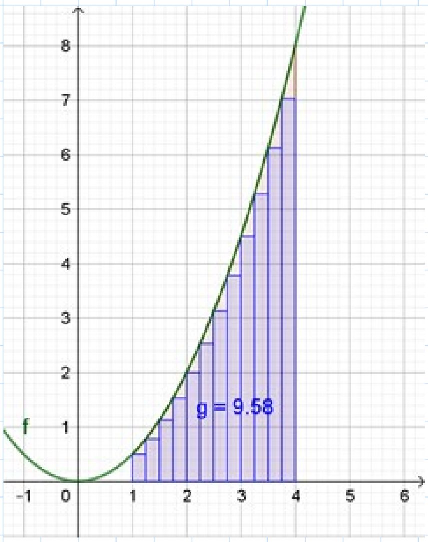
Das funktioniert dort auch recht simpel. Nachdem die Fkt. definiert und gezeichnet wurde, liefert der Eingabebefehl **Integral [Funktion, Startwert, Endwert]** den numerisch berechneten Wert des bestimmten Integrals und stellt die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse sofort dar.

Auch **Ober- und Untersummen** lassen sich in Geogebra sehr einfach berechnen und darstellen. Eingabebefehl **Untersumme[Funktion, Startwert, Endwert, Anzahl der Rechtecke]** bzw. **Obersumme[Funktion, Startwert, Endwert, Anzahl der Rechtecke].**

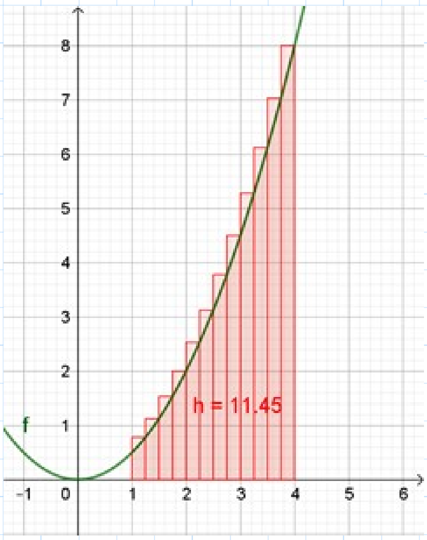


3 Teilintervalle,
(Rechteckbreite
1 Einheit)





12 Teilintervalle,
(Rechteckbreite
0,25 Einheiten)



Bei Funktionsgraphen, die im betrachteten Intervall sowohl steigend als auch fallend sind, wird in Geogebra für jedes Teilintervall tatsächlich immer das Minimum (bei der Untersumme) bzw. das Maximum (bei der Obersumme) berechnet - wie sich das gehört.

Diesbezüglich muss man in Mathcad der Monotonie entsprechend unterscheiden. Das heißt, man sollte zuvor etwa anhand der Graphik feststellen, wie die Funktion im betrachteten Intervall verläuft und die Ober- bzw. Untersumme abschnittsweise den Monotonieintervallen entsprechend getrennt berechnen.

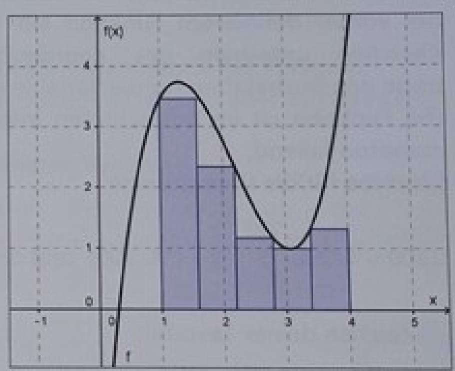
Ober- und Untersummen mit Mathcad

Berechnen von Unter- und Obersummen

GeoGebra

Der Befehl `Untersumme[Funktion, Startwert, Endwert, Anzahl der Rechtecke]` bzw. `Obersumme[Funktion, Startwert, Endwert, Anzahl der Rechtecke]` zeichnet und berechnet für eine Funktion die Untersumme bzw. die Obersumme vom Startwert bis zum Endwert mit gleich breiten Teilintervallen.

Beachte, dass beim Befehl `Untersumme[...]` tatsächlich für jedes einzelne Teilintervall immer das Minimum und beim Befehl `Obersumme[...]` immer das Maximum berechnet wird.



Mathcad

Definiere die Funktion f. Stelle z. B. mithilfe einer Grafik fest, ob die Funktion im betrachteten Intervall monoton steigend oder monoton fallend ist.

Für die Untersumme U_n bzw. für die Obersumme O_n einer monoton steigenden Funktion f im Intervall [a; b] mit n gleich breiten Teilintervallen schreibe

monoton steigender Abschnitt

$$U_n := (b-a)/n * \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i*(b-a)/n)$$

$$O_n := (b-a)/n * \sum_{i=1}^{n} f(a + i*(b-a)/n)$$

monoton fallender Abschnitt

Für die Untersumme U_n bzw. für die Obersumme O_n einer monoton fallenden Funktion f im Intervall [a; b] mit n gleich breiten Teilintervallen schreibe

$$U_n := (b-a)/n * \sum_{i=1}^{n} f(a + i*(b-a)/n)$$

$$O_n := (b-a)/n * \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i*(b-a)/n)$$

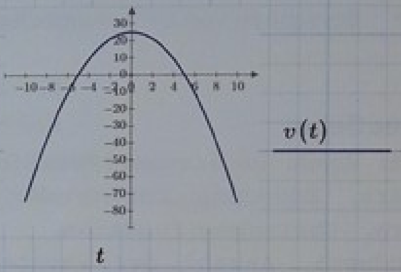
Beispiel:
Die Bewegung eines Körpers ist durch die Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = 25 - t^2$ beschrieben (v in m/s, t in s). Berechne die Unter- und Obersumme im Intervall [0; 4], indem du das Intervall in 200 gleich lange Teilintervalle zerlegst.

Lösung:
Definiere die Funktion v mit $v(t) := 25 - t^2$
Um den Graphen der Funktion zu zeichnen, wähle im Menü *Diagramme/Diagramm einfügen/x-y-Diagramm*.
Es erscheint ein Koordinatensystem. Der Cursor blinkt rechts in einem Feld. Gib hier den Namen der vorher definierten Funktion ein. Im grauen Kästchen unterhalb des Koordinatensystems trage den Buchstaben für die Variable ein.
Die Funktion ist im betrachteten Intervall [0; 4] monoton fallend.
Schreibe für die Untersumme

$$U200 := 4/200 * \sum_{i=1}^{200} f(0 + i*4/200)$$ und drücke das

$\boxed{=}$-Zeichen deiner Tastatur.

$$v(t) := 25 - t^2$$



$$U200 := \frac{4}{200} \cdot \sum_{i=1}^{200} \left(v\left(0 + i \cdot \frac{4}{200}\right)\right) = 78.506$$

$$O200 := \frac{4}{200} \cdot \sum_{i=0}^{199} \left(v\left(0 + i \cdot \frac{4}{200}\right)\right) = 78.826$$

Für die Obersumme schreibe $O200 := 4/200 * \sum_{i=0}^{199} f(0 + i*4/200)$

Das Summenzeichen erhältst du mit der Tastenkombination $\boxed{STRG}$ + $\boxed{SHIFT}$ + $\boxed{4}$ oder wähle im Menü *Rechnen/Operatoren/Analysis* $\sum$.

Für den Weg s des Körpers in den ersten 4 Sekunden gilt demnach: $78{,}51\,m \le s \le 78{,}83\,m$.

$$\int_0^4 (25 - t^2)\,dt \rightarrow \frac{236}{3} = 78.667$$

Das bestimmte Integral liefert den genauen Wert des Weges in den ersten 4 Sekunden.
Je größer die Anzahl der Teilintervalle der Ober- und Untersummen wird (je schmäler die Rechtecke werden), desto genauer nähern sich die berechneten Summenwerte von oben und von unten an.

Merke: Das bestimmte Integral einer Funktion ist eine Summe - genauer, der Grenzwert der Ober- und Untersummen einer Funktion in einem Intervall für unendlich viele Teilintervalle (n -> ∞) bzw. für unendlich klein werdende Rechteckbreiten (Δx -> 0).