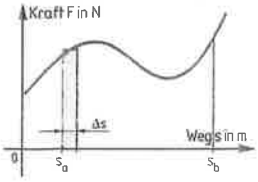
6.1.2 Produktsummen

Viele physikalische, technische oder wirtschaftliche Größen werden als Produkt zweier weiterer Größen berechnet, zum Beispiel „Arbeit = Kraft mal Weg".
Diese Formel gilt jedoch nur, wenn die Kraft längs des zurückgelegten Wegs konstant ist. Ist hingegen die Kraft $F = F(s)$ längs des Wegs veränderlich, so kann die Arbeit ermittelt werden, indem man sich die Kraft $F(s)$ längs (sehr) kleiner Wegstrecken Δs konstant denkt. Für die Arbeit im i-ten Teilintervall gilt: $\Delta W_i = F(s_i) \cdot \Delta s$
Für die im Intervall $[s_a; s_b]$ verrichtete Arbeit W gilt näherungsweise:



$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(s_i) \cdot \Delta s$$

Für $\Delta s \to 0$ erhält man den genauen Wert: $W = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} F(s_i) \cdot \Delta s\right) = \int_{s_a}^{s_b} F(s)\,ds$

Bemerkung: In der Literatur findet man für die im Intervall $[s_a; s_b]$ verrichtete (zusätzliche) Arbeit auch die Bezeichnung ΔW.

Im Folgenden sind einige Zusammenhänge angeführt, deren Berechnungen mithilfe der Interpretation des Integrals als Produktsumme erfolgt. Die Einheit des Ergebnisses ergibt sich aus der Einheit des Produkts $f(x) \cdot \Delta x$.

- **Arbeit, Kraft und Wegstrecke**
  $W = \int_{s_a}^{s_b} F(s)\,ds$ Einheit: 1 N · 1 m = 1 Nm = 1 J (Joule)

- **Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit**
  Für die Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung a gilt: $v = a \cdot t$
  Ist die Beschleunigung jedoch eine zeitabhängige Funktion $a = a(t)$, so gilt für die Zu- bzw. Abnahme der Geschwindigkeit v im Intervall $[t_1; t_2]$:
  $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$ Einheit: $1\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s = 1\frac{m}{s}$

- **Arbeit, Leistung und Zeit**
  Für die Arbeit W bei konstanter Leistung P gilt: $W = P \cdot t$
  Ist die Leistung jedoch eine zeitabhängige Funktion $P = P(t)$, so gilt für die im Intervall $[t_1; t_2]$ verrichtete Arbeit: $W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$ Einheit: 1 W · 1 s = 1 Ws = 1 J (Joule)

- **Durchflussmenge, Durchflussgeschwindigkeit und Zeit**
  Bei konstanter Durchflussgeschwindigkeit D kann die Gesamtmenge M durch Multiplikation mit der Zeit ermittelt werden: $M = D \cdot t$
  Ist die Durchflussgeschwindigkeit $D = D(t)$ hingegen zeitabhängig, so gilt für die Änderung der Durchflussmenge M im Intervall $[t_1; t_2]$: $M = \int_{t_1}^{t_2} D(t)\,dt$ Einheit: zB $1\frac{L}{s} \cdot 1\,s = 1\,L$

- **Ladung, Stromstärke und Zeit**
  Ist die Stromstärke I konstant kann die Ladung Q durch Multiplikation der Stromstärke mit der Zeit ermittelt werden: $Q = I \cdot t$
  Ist die Stromstärke eine zeitabhängige Funktion $i(t)$, so gilt im Intervall $[t_1; t_2]$:
  $Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$ Einheit: 1 A · 1 s = 1 As = 1 C (Coulomb)

6.7 Auf einer stark befahrenen Straße wurden regelmäßig Verkehrszählungen durchgeführt. Die Anzahl der Fahrzeuge pro Minute wird im Intervall $[t_1; t_2]$ durch eine Funktion f beschrieben.

1) Beschreibe, wie die maximale Anzahl an Fahrzeugen pro Minute ermittelt werden kann.

2) Stelle eine Formel zur Berechnung der Anzahl A der Fahrzeuge im Intervall $[t_1; t_2]$ auf.

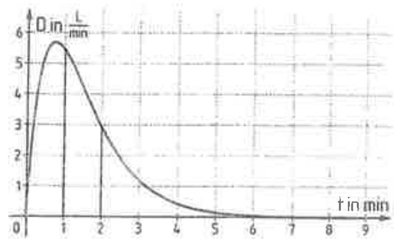
A = ______________________________

6.8 Beim Füllen eines Schleusenbeckens kann die Durchflussgeschwindigkeit des Wassers durch die Funktion D beschrieben werden:

$D(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}$

t … Zeit in Minuten

D(t) … Durchflussgeschwindigkeit zur Zeit t in $\frac{L}{min}$



1) Interpretiere die Bedeutung der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der richtigen Einheit.

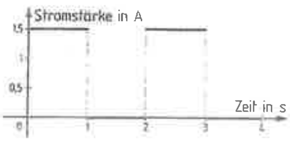
2) Berechne die mittlere Beschleunigung des Wassers im Intervall [1 min; 2 min].

6.9 Eine Datenleitung hat normalerweise eine Übertragungsrate von 100 MBits pro Sekunde.

1) Berechne, welche Datenmenge in einer Minute übertragen wird.

2) Wegen Übertragungsproblemen sinkt die Übertragungsrate pro Sekunde um 50 $\frac{kBits}{s}$. Berechne die Datenmenge, die innerhalb der ersten Minute nach Auftreten des Problems übertragen wird.

6.10 Bei einer Messung wurde die Stromstärke im Intervall [0 s; 4 s] grafisch dargestellt. Ermittle die Ladung in diesem Intervall.

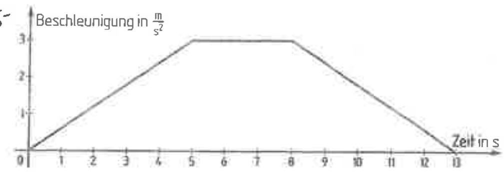


6.11 Die folgende Grafik stellt die Beschleunigung eines Teils einer Autofahrt dar.

1) Ermittle die Gleichung der Beschleunigung-Zeit-Funktion im Intervall [0 s; 13 s].

2) Ermittle die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 13 s, wenn die Anfangsgeschwindigkeit 8 $\frac{m}{s}$ beträgt.

3) Erstelle die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Intervall [0 s; 13 s].



6.12 Um einen vollen Maltesack zu ziehen, benötigt Bauer Mecke eine Kraft von 500 N.

1) Berechne die Arbeit, die verrichtet wird, wenn er den Sack 10 m weit zieht.

2) Berechne die Arbeit, die auf dieser Strecke verrichtet wird, wenn der Sack ausrinnt und dadurch die benötigte Kraft linear abnimmt, sodass sie nach 10 m nur noch 250 N beträgt.

„Max und Moritz – wehe Euch! Jetzt kommt Euer letzter Streich!

Wozu müssen auch die beiden Löcher in die Säcke schneiden? Seht, da trägt der Bauer Mecke einen seiner Maltesäcke. Aber kaum dass er von hinnen, fängt das Korn schon an zu rinnen."

(Aus „Max und Moritz" von Wilhelm Busch.)

6.13 Beim Aufladen eines Kondensators mit der Kapazität C gilt für den Ladestrom i: $i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$

t … Zeit nach Beginn des Ladevorgangs, R … Widerstand,

I_0 … Ladestrom zu Beginn des Ladevorgangs

Gib eine Formel für die Ladung Q im Zeitintervall $[t_a; t_b]$ an.