Analízis előadások

Vajda István

2009. március 4.

Függvényegyenletek

Definíció: Az olyan egyenleteket, amelyekben a meghatározandó ismeretlen függvény, *függvényegyenletnek nevezzük.*

Függvényegyenletek

Definíció: Az olyan egyenleteket, amelyekben a meghatározandó ismeretlen függvény, *függvényegyenletnek nevezzük.*

Példa:

$$2x + f(x) = x^2 + 3$$

Függvényegyenletek

Definíció: Az olyan egyenleteket, amelyekben a meghatározandó ismeretlen függvény, *függvényegyenletnek nevezzük.*

Példa:

$$2x + f(x) = x^2 + 3$$

A fenti egyenlet megoldása egyszerű átrendezéssel adódik:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Függvényegyenletek

Definíció: Az olyan egyenleteket, amelyekben a meghatározandó ismeretlen függvény, *függvényegyenletnek nevezzük.*

Példa:

$$2x + f(x) = x^2 + 3$$

A fenti egyenlet megoldása egyszerű átrendezéssel adódik:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Megjegyzés: A fenti egyenletben x nem ismeretlen (mint az a számegyenletekben szokásos), hanem az f függvény változója. Az ismeretlen éppen az f függvény.

Függvényegyenletek

A fenti függvényegyenlet könnyen megoldható volt, azonban sok olyan függvényegyenlet van, amelynek megoldása bonyolultabb. Egy – még mindig egyszerűnek számító, de az előbbinél összetettebb függvényegyenlet pl. a következő:

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 6$$

Ellenőrizhető, hogy ennek megoldása az

$$f\colon D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) = -x + \frac{2}{x} + 2$$

függvény, ennek meghatározása azonban, a szokásos egyenletrendezési lépéseken túl egyéb ötletet is igényel.

Differenciálegyenletek

Definíció: Az olyan függvényegyenletet, amelynek felírásában az ismeretlen függvény mellett annak (valahányadrendű) deriváltfüggvénye is szerepel *differenciálegyenletnek* nevezzük.

Differenciálegyenletek

Definíció: Az olyan függvényegyenletet, amelynek felírásában az ismeretlen függvény mellett annak (valahányadrendű) deriváltfüggvénye is szerepel *differenciálegyenletnek* nevezzük.

Példák:

- $y' = \cos x$
- $y' + 2y = x^2 - 6x + 2$
- $y'' = x^2 - \sin y$

A fenti egyenletekben az ismeretlen függvényt y jelöli, x pedig ennek a függvénynek a változója.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: *Közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény egyváltozós.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: *Közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény egyváltozós.

Megjegyzés: Az előző lapon szereplő differenciálegyenletek mindegyike közönséges differenciálegyenlet.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: *Közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény egyváltozós.

Megjegyzés: Az előző lapon szereplő differenciálegyenletek mindegyike közönséges differenciálegyenlet.

Definíció: *Parciális differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény többváltozós.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: *Közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény egyváltozós.

Megjegyzés: Az előző lapon szereplő differenciálegyenletek mindegyike közönséges differenciálegyenlet.

Definíció: *Parciális differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amelyben az ismeretlen függvény többváltozós.

Megjegyzés: Parciális differenciálegyenletekkel a továbbiakban nem foglalkozunk.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: A *differenciálegyenlet rendje* az ismeretlen függvény deriváltjai rendjének maximuma az egyenletben.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: A *differenciálegyenlet rendje* az ismeretlen függvény deriváltjai rendjének maximuma az egyenletben.

Példa: Az $y'' - xy' + x^2y = x - 1$ differenciálegyenlet rendje 2, mert az y ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja ami az egyenletben előfordul y''.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: A *differenciálegyenlet rendje* az ismeretlen függvény deriváltjai rendjének maximuma az egyenletben.

Példa: Az $y'' - xy' + x^2y = x - 1$ differenciálegyenlet rendje 2, mert az y ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja ami az egyenletben előfordul y''.

Definíció: A differenciálegyenlet *algebrai*, ha benne az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak csak polinomja szerepel.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: A *differenciálegyenlet rendje* az ismeretlen függvény deriváltjai rendjének maximuma az egyenletben.

Példa: Az $y'' - xy' + x^2y = x - 1$ differenciálegyenlet rendje 2, mert az y ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja ami az egyenletben előfordul y''.

Definíció: A differenciálegyenlet *algebrai*, ha benne az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak csak polinomja szerepel.

Megjegyzés: A fenti másodrendű differenciálegyenlet egyben példa algebrai differenciálegyenletre is.

A differenciálegyenletek osztályozása

Definíció: A *differenciálegyenlet rendje* az ismeretlen függvény deriváltjai rendjének maximuma az egyenletben.

Példa: Az $y'' - xy' + x^2y = x - 1$ differenciálegyenlet rendje 2, mert az y ismeretlen függvény legmagasabb rendű deriváltja ami az egyenletben előfordul y''.

Definíció: A differenciálegyenlet *algebrai*, ha benne az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak csak polinomja szerepel.

Megjegyzés: A fenti másodrendű differenciálegyenlet egyben példa algebrai differenciálegyenletre is.

Definíció: A differenciálegyenlet *transzcendens*, ha nem algebrai.

A differenciálegyenletek osztályozása

Az algebrai differenciálegyenletek jellemezhetők az ún. *fokszámmal* is, az algebrában megszokott módon.

Definíció: A differenciálegyenlet *lineáris*, ha benne az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak csak első hatványa szerepel, és nem fordul elő ezek szorzata sem.

A differenciálegyenletek osztályozása

Az algebrai differenciálegyenletek jellemezhetők az ún. *fokszámmal* is, az algebrában megszokott módon.

Definíció: A differenciálegyenlet *lineáris*, ha benne az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak csak első hatványa szerepel, és nem fordul elő ezek szorzata sem.

Példa: Az $y'' - xy' + x^2y = x - 1$ differenciálegyenlet lineáris, míg az $yy' = \ln x$ differenciálegyenlet nem lineáris.

A differenciálegyenlet megoldásai

Definíció: Az n-edrendű differenciálegyenlet *általános megoldása* olyan függvény, amely deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan n darab egymástól független paramétert tartalmaz.

Definíció: Az n-edrendű differenciálegyenlet *partikuláris megoldása* olyan függvény, amely deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet és legfeljebb $n - 1$ darab egymástól független paramétert tartalmaz.

A differenciálegyenlet megoldásai

Példa: Határozzuk meg az $y'' = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Az ismeretlen függvényt két egymást követő integrálással határozhatjuk meg:

$$y' = \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C_1$$

$$y = \int (\sin x + C_1) \, \mathrm{d}x = -\cos x + C_1 x + C_2$$

A differenciálegyenlet megoldásai

Példa: Határozzuk meg az $y'' = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Az ismeretlen függvényt két egymást követő integrálással határozhatjuk meg:

$$y' = \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C_1$$

$$y = \int (\sin x + C_1) \, \mathrm{d}x = -\cos x + C_1 x + C_2$$

Az így kapott $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ függvény valóban általános megoldása a differenciálegyenletnek, mert

- kétszer deriválva kapjuk, hogy $y'' = \cos x$ és ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe $\cos x = \cos x$-et kapunk, ami azonosan igaz,
- két paramétert tartalmaz ($C_1 \in \mathbb{R}$ és $C_2 \in \mathbb{R}$), amelyek egymástól függetlenek.

A differenciálegyenlet megoldásai

Példa: Írjuk fel az $y'' = \cos x$ differenciálegyenlet néhány partikuláris megoldását!

Megoldás: Mivel az előbbiek szerint a differenciálegyenlet általános megoldása $y = -\cos x + C_1 x + C_2$, partikuláris megoldást kapunk, ha a paraméterek helyére konkrét számokat írunk:

Példák:

$$y_1 = -\cos x + 2x - 5$$

$$y_2 = -\cos x + C_1 x + 3$$

$$y_3 = -\cos x + 10x + C_2$$

A differenciálegyenlet megoldásai

Példa: Írjuk fel az $y'' = \cos x$ differenciálegyenlet néhány partikuláris megoldását!

Megoldás: Mivel az előbbiek szerint a differenciálegyenlet általános megoldása $y = -\cos x + C_1 x + C_2$, partikuláris megoldást kapunk, ha a paraméterek helyére konkrét számokat írunk:

Példák:

$$y_1 = -\cos x + 2x - 5$$
$$y_2 = -\cos x + C_1 x + 3$$
$$y_3 = -\cos x + 10x + C_2$$

Akkor is partikuláris megoldást kapunk, ha valamelyik paraméter helyére más paraméter(ek) kifejezését írjuk:

$$y_4 = -\cos x + C_1 x + 2C_1 - 3$$

A differenciálegyenlet megoldásai

Megjegyzés: Vannak olyan differenciálegyenletek, amelyek minden partikuláris megoldása előállítható az általános megoldásából a fenti helyettesítésekkel.
Van azonban olyan eset is, amikor ez nem teljesül.

A differenciálegyenlet megoldásai

Megjegyzés: Vannak olyan differenciálegyenletek, amelyek minden partikuláris megoldása előállítható az általános megoldásából a fenti helyettesítésekkel.
Van azonban olyan eset is, amikor ez nem teljesül.

Példa: Az $y' = y^2$ differenciálegyenletnek az $y = -\dfrac{1}{x+C}$ általános megoldása, ugyanis

$$y' = \left(-\frac{1}{x+C}\right)' = -\frac{0-1}{(x+C)^2} = \frac{1}{(x+C)^2} = \left(-\frac{1}{x+C}\right)^2 = y^2,$$

tehát y deriváltjával együtt kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan 1 független paramétert tartalmaz.

A differenciálegyenlet megoldásai

Megjegyzés: Vannak olyan differenciálegyenletek, amelyek minden partikuláris megoldása előállítható az általános megoldásából a fenti helyettesítésekkel.
Van azonban olyan eset is, amikor ez nem teljesül.

Példa: Az $y' = y^2$ differenciálegyenletnek az $y = -\dfrac{1}{x+C}$ általános megoldása, ugyanis

$$y' = \left(-\frac{1}{x+C}\right)' = -\frac{0-1}{(x+C)^2} = \frac{1}{(x+C)^2} = \left(-\frac{1}{x+C}\right)^2 = y^2,$$

tehát y deriváltjával együtt kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan 1 független paramétert tartalmaz.

Ugyanakkor a diferenciálegyenletnek az $y = 0$ (konstans 0) függvény is megoldása, ami a fenti általános megoldásból nem kapható meg, bármit helyettesítünk C helyére.

Az integrálgörbe

Definíció: A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását ábrázolhatjuk a szokásos derékszögű koordinátarendszerben. Az így kapott grafikont szokás *integrálgörbének* nevezni.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Definíció: Legyenek f és g adott egyváltozós valós függvények és y ismeretlen egyváltozós valós függvény. Ekkor az

$$y' = f(x)\, g(y)$$

differenciálegyenletet *szétválasztható változójú differenciálegyenletnek* nevezzük.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Definíció: Legyenek f és g adott egyváltozós valós függvények és y ismeretlen egyváltozós valós függvény. Ekkor az

$$y' = f(x)\, g(y)$$

differenciálegyenletet *szétválasztható változójú differenciálegyenletnek* nevezzük.

Megjegyzés: Tehát egy elsőrendű differenciálegyenlet akkor szétválasztható változójú, ha y' kifejezhető belőle és az őt megadó kifejezés egy csak x-től és egy csak y-tól függő tényezőre bontható.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Ha $g(y) \neq 0$ (g nem konstans 0), akkor az egyenlet írható

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

alakban.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Ha $g(y) \neq 0$ (g nem konstans 0), akkor az egyenlet írható

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

alakban. Mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{y'}{g(y)}\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x$$

azaz a helyettesítéses integrálás szabály szerint

$$\int \frac{1}{g(y)}\, \mathrm{d}y = \int f(x)\, \mathrm{d}x$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Ha mindkét oldalon el tudjuk végezni az integrálást, akkor az egyenlet a

$$G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

alakot ölti, ahol G az $\frac{1}{g}$, F pedig az f függvény primitív függvénye. $C = C_2 - C_1$ jelöléssel ez

$$G(y) = F(x) + C$$

alakban írható.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Ha mindkét oldalon el tudjuk végezni az integrálást, akkor az egyenlet a

$$G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

alakot ölti, ahol G az $\frac{1}{g}$, F pedig az f függvény primitív függvénye. $C = C_2 - C_1$ jelöléssel ez

$$G(y) = F(x) + C$$

alakban írható.

A kapott egyenlet a differenciálegyenlet megoldása implicit alakban. Ha ebből y kifejezhető x függvényeként, akkor az explicit megoldást is megkaphatjuk.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Megjegyzés: A fenti módszerrel kapott megoldás a differenciálegyenlet általános megoldása, amely deriváltjával együtt kielégíti a differenciálegyenletet és egy független paramétert tartalmaz.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Megjegyzés: A fenti módszerrel kapott megoldás a differenciálegyenlet általános megoldása, amely deriváltjával együtt kielégíti a differenciálegyenletet és egy független paramétert tartalmaz.

Ha valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $g(\lambda) = 0$, akkor az $y = \lambda$ konstans függvény (partikuláris) megoldása a differenciálegyenletnek, hiszen behelyettesítve mindkét oldalon 0-t kapunk. Ezek a konstans megoldások nem minden esetben származtathatók az általános megoldásból.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y' = xy$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = De^{\frac{x^2}{2}},$$

ahol $D > 0$.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Ha elhagyjuk az abszolútértékjelet, akkor

$$y = De^{\frac{x^2}{2}},$$

de itt D már negatív is lehet.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Ha elhagyjuk az abszolútértékjelet, akkor

$$y = De^{\frac{x^2}{2}},$$

de itt D már negatív is lehet.

Mivel – amint az könnyen ellenőrizhető – a differecnciálegyenletnek az $y = 0$ (konstans 0) függvény is megoldása a $D = 0$ esetet is megengedve az $y = De^{\frac{x^2}{2}}$ $(D \in \mathbb{R})$ a differenciálegyenlet általános megoldása, amely minden partikuláris megoldást is tartalmaz.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Szokás az ehhez hasonló differenciálegyenletekben a konstanst eleve $\ln|C|$ alakúnak választani:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln|C| = \ln e^{\frac{x^2}{2}} + \ln|C| = \ln\left(|C| \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$|y| = |C| \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

A fenti levezetésben persze $C \neq 0$, de mivel a $C = 0$ eset éppen az $y = 0$ függvényt adja, ami megoldása a differenciálegyenletnek, $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ minden $c \in \mathbb{R}$ esetben megoldása a differenciálegyenletnek.

Így ugyanahhoz a megoldáshoz jutottunk, mint korábban.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y' = y^2 x$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C_1} = -\frac{2}{x^2 + 2C_1} = -\frac{2}{x^2 + C}$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y' = y^2 x$ differenciálegyenletet!

Megjegyzés:

A kapott $y = -\dfrac{2}{x^2 + C}$ valóban megoldása a differenciálegyenletnek, amiről visszahelyetesítéssel meggyőződhetünk.

Mivel a differenciálegyenlet elsőfokú és a megoldás egy független paramétert tartalmaz, általános megoldást kaptunk.

A differenciálegyenletnek azonban az $y = 0$ (konstans 0) függvény is megoldása, amiről ugyancsak behelyettesítéssel győződhetünk meg. Ez a megoldás azonban nem származtatható a fenti általános megoldásból. A konstans megoldást a fenti levezetésben az y^2-tel való osztás során veszítetük el.