Komplex számok

Műveletek algebrai alakban

$(2+j)+(3+2j)=5+3j$ $\quad$ $(1-2j)+(3-4j)=4-6j$ $\quad$ $(-1+3j)+(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}j)=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}j$ $\quad$ $(-2-j)+(-1+2j)=-3+j$

$(2+j)-(3+2j)=-1-j$ $\quad$ $(1-2j)-(3-4j)=-2+2j$ $\quad$ $(-1+3j)-(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}j)=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}j$ $\quad$ $(-2-j)-(-1+2j)=-1-3j$

$(1+3j)\cdot(2+j)=-1+7j$ $\quad$ $(2-2j)\cdot(4-3j)=2-14j$ $\quad$ $(-2-2j)\cdot(3+2j)=-2-10j$ $\quad$ $(1-\sqrt{3}j)\cdot(1+2\sqrt{3}j)=7+\sqrt{3}j$

$\frac{1+3j}{2+j}=1+j$ $\quad$ $\frac{2-2j}{4-3j}=\frac{14}{25}-\frac{2}{25}j$ $\quad$ $\frac{-2-2j}{3+2j}=-\frac{10}{13}-\frac{2}{13}j$ $\quad$ $\frac{1-\sqrt{3}j}{1+2\sqrt{3}j}=-\frac{5}{13}-\frac{3\sqrt{3}}{13}j$

$\frac{1}{1-j}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}j}=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}j$ $\quad$ $\frac{1}{3+2j}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}j$ $\quad$ $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$

$(1-2j)^3=-11+2j$ $\quad$ $(1-2j)^5=41+38j$ $\quad$ $(-1+3j)^3=26-18j$ $\quad$ $(1-\sqrt{2}j)^4=-7+4\sqrt{2}j$

$j^{19}=-j$ $\quad$ $j^{102}=-1$ $\quad$ $j^{212}=1$ $\quad$ $j^{249}=j$

$\frac{(-1+4j)\cdot(3-2j)}{1+j}=\frac{19}{2}+\frac{9}{2}j$ $\quad$ $\frac{j^{20}\cdot(-2-2j)}{4+j}=-\frac{10}{17}-\frac{6}{17}j$ $\quad$ $(\sqrt{2}+2\sqrt{2}j)^2\cdot(1+j)^3=-4-28j$ $\quad$ $(-3+2j)+j(1-j)=-2+3j$

Váltsa át trigonometrikus, majd exponenciális alakba (és ábrázolja a komplex számsíkon)

$3=3(\cos 0^\circ+j\sin 0^\circ)=3e^{0j}$ $\quad$ $-5=5(\cos 180^\circ+j\sin 180^\circ)=5e^{\pi j}$ $\quad$ $2j=2(\cos 90^\circ+j\sin 90^\circ)=2e^{\frac{\pi}{2}j}$

$-4j=4(\cos 270^\circ+j\sin 270^\circ)=4e^{\frac{3\pi}{2}j}$ $\quad$ $2+2j=2\sqrt{2}(\cos 45^\circ+j\sin 45^\circ)=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}$ $\quad$ $-3+3j=3\sqrt{2}(\cos 135^\circ+j\sin 135^\circ)=3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}j}$

$-1-j=\sqrt{2}(\cos 225^\circ+j\sin 225^\circ)=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}j}$ $\quad$ $2-2j=2\sqrt{2}(\cos 315^\circ+j\sin 315^\circ)=2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}j}$

$\sqrt{2}+\sqrt{2}j=2(\cos 45^\circ+j\sin 45^\circ)=2e^{\frac{\pi}{4}j}$ $\quad$ $-\sqrt{3}+\sqrt{3}j=\sqrt{6}(\cos 135^\circ+j\sin 135^\circ)=\sqrt{6}e^{\frac{3\pi}{4}j}$

$-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}j=\sqrt{24}(\cos 225^\circ+j\sin 225^\circ)=\sqrt{24}e^{\frac{5\pi}{4}j}$ $\quad$ $3\sqrt{2}-3\sqrt{2}j=6(\cos 315^\circ+j\sin 315^\circ)=6e^{\frac{7\pi}{4}j}$

$1+\sqrt{3}j=2(\cos 60^\circ+j\sin 60^\circ)=2e^{\frac{\pi}{3}j}$ $\quad$ $-2\sqrt{3}+2j=4(\cos 150^\circ+j\sin 150^\circ)=4e^{\frac{5\pi}{6}j}$

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j=\cos 240^\circ+j\sin 240^\circ=e^{\frac{4\pi}{3}j}$ $\quad$ $3-\sqrt{3}j=2\sqrt{3}(\cos 330^\circ+j\sin 330^\circ)=2\sqrt{3}e^{\frac{11\pi}{6}j}$

Váltsa át trigonometrikus alakba

$2+4j\approx 2\sqrt{5}(\cos 63,43^\circ+j\sin 63,43^\circ)$ $\quad$ $-1+3j=\sqrt{10}(\cos 108,4^\circ+j\sin 108,4^\circ)$

$-2-3j\approx\sqrt{13}(\cos 236,3^\circ+j\sin 236,3^\circ)$ $\quad$ $1-\sqrt{2}j\approx\sqrt{3}(\cos 305,26^\circ+j\sin 305,26^\circ)$

Váltsa át algebrai alakba (és ábrázolja a komplex számsíkon)

$2(\cos 30^\circ+j\sin 30^\circ)=\sqrt{3}+j$ $\quad$ $4(\cos 150^\circ+j\sin 150^\circ)=-2\sqrt{3}+2j$

$\frac{3}{2}(\cos 210^\circ+j\sin 210^\circ)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}j$ $\quad$ $\sqrt{3}(\cos 330^\circ+j\sin 330^\circ)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$

$3(\cos 40^\circ+j\sin 40^\circ)\approx 2,298+1,929j$ $\quad$ $\sqrt{2}(\cos 100^\circ+j\sin 100^\circ)\approx -0,24+1,386j$

$\frac{5}{2}(\cos 220^\circ+j\sin 220^\circ)\approx -1,915-1,607j$ $\quad$ $5(\cos 285^\circ+j\sin 285^\circ)\approx 1,295-4,83j$

Műveletek trigonometrikus alakban

$$2(\cos 30^\circ+j\sin 30^\circ)\cdot\frac{3}{2}(\cos 210^\circ+j\sin 210^\circ)=3(\cos 240^\circ+j\sin 240^\circ)$$

$$3(\cos 160^\circ+j\sin 160^\circ)\cdot 2(\cos 290^\circ+j\sin 290^\circ)=6(\cos 90^\circ+j\sin 90^\circ)$$

$$\frac{\frac{3}{2}(\cos 210^\circ+j\sin 210^\circ)}{2(\cos 30^\circ+j\sin 30^\circ)}=\frac{3}{4}(\cos 180^\circ+j\sin 180^\circ)$$

$$\frac{3(\cos 160^\circ+j\sin 160^\circ)}{2(\cos 290^\circ+j\sin 290^\circ)}=\frac{3}{2}(\cos 230^\circ+j\sin 230^\circ)$$

$$(2(\cos 25^\circ+j\sin 25^\circ))^5=32(\cos 125^\circ+j\sin 125^\circ)$$

$$\left(\frac{1}{3}(\cos 145^\circ+j\sin 145^\circ)\right)^3=\frac{1}{27}(\cos 75^\circ+j\sin 75^\circ)$$

$$\sqrt[5]{32(\cos 60^\circ+j\sin 60^\circ)}=2\Big(\cos(12^\circ+k\cdot 72^\circ)+j\sin(12^\circ+k\cdot 72^\circ)\Big)\quad k=0,1,2,3,4$$

$$\sqrt[3]{2(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ)} = \sqrt[3]{2}\Big(\cos(40^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(40^\circ + k\cdot 120^\circ)\Big) \quad k = 0,1,2$$

$$\sqrt[4]{16(\cos 200^\circ + j\sin 200^\circ)} = 2\Big(\cos(50^\circ + k\cdot 90^\circ) + j\sin(50^\circ + k\cdot 90^\circ)\Big) \quad k = 0,1,2,3$$

$$\sqrt{2(\cos 116^\circ + j\sin 116^\circ)} = \sqrt{2}\Big(\cos(58^\circ + k\cdot 180^\circ) + j\sin(58^\circ + k\cdot 180^\circ)\Big) \quad k = 0,1$$

Műveletek exponenciális alakban

Az előző feladat példáiban váltsuk át trigonometrikusból exponenciális alakúra a műveletekben szereplő számokat, és végezzük el exponenciális alakban a műveleteket!

Műveletek alakváltási "kényszerrel"

$$(1+j)^{16} = 256(\cos 0^\circ + j\sin 0^\circ)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^{13} = \cos 300^\circ + j\sin 300^\circ$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{8}\Big(\cos(0^\circ + k\cdot 180^\circ) + j\sin(0^\circ + k\cdot 180^\circ)\Big) \quad k = 0,1$$

$$\sqrt[3]{8} = 2\Big(\cos(0^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(0^\circ + k\cdot 120^\circ)\Big) \quad k = 0,1,2$$

$$\sqrt[5]{j} = \Big(\cos(18^\circ + k\cdot 72^\circ) + j\sin(18^\circ + k\cdot 72^\circ)\Big) \quad k = 0,1,..,4$$

$$\sqrt[5]{-32} = 2\Big(\cos(36^\circ + k\cdot 72^\circ) + j\sin(36^\circ + k\cdot 72^\circ)\Big) \quad k = 0,1,..,4$$

$$\sqrt[4]{-81j} = 3\Big(\cos(67,5^\circ + k\cdot 90^\circ) + j\sin(67,5^\circ + k\cdot 90^\circ)\Big) \quad k = 0,1,2,3$$

$$\sqrt{-2-2\sqrt{3}j} = 2\Big(\cos(120^\circ + k\cdot 180^\circ) + j\sin(120^\circ + k\cdot 180^\circ)\Big) \quad k = 0,1$$

$$\sqrt[3]{2+5j} \approx \sqrt[6]{29}\Big(\cos(22,73^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(22,73^\circ + k\cdot 120^\circ)\Big) \quad k = 0,1,2$$

$$\sqrt[3]{-3-4j} \approx \sqrt[3]{5}\Big(\cos(77,71^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(77,71^\circ + k\cdot 120^\circ)\Big) \quad k = 0,1,2$$

$$2(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ) + 4(\cos 150^\circ + j\sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + 3j$$

$$\sqrt{3}(\cos 210^\circ + j\sin 210^\circ) - 2(\cos 150^\circ + j\sin 150^\circ) \approx 0,232 - 1,866j$$

Oldja meg az egyenleteket a komplex számok halmazán!

Hiányos n-edfokú egyenletek (gyökvonással)

$z^2 + 1 = 0 \qquad z = \pm j = \cos(90^\circ + k\cdot 180^\circ) + j\sin(90^\circ + k\cdot 180^\circ) \quad k = 0,1$

$z^2 - 2 = 0 \qquad z = \pm\sqrt{2} = \sqrt{2}\Big(\cos(0^\circ + k\cdot 180^\circ) + j\sin(0^\circ + k\cdot 180^\circ)\Big) \quad k = 0,1$

$z^3 + 1 = 0 \qquad z = \cos(60^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(60^\circ + k\cdot 120^\circ) \quad k = 0,1,2$

$z^5 + 32 = 0 \qquad z = 2\Big(\cos(36^\circ + k\cdot 72^\circ) + j\sin(36^\circ + k\cdot 72^\circ)\Big) \quad k = 0,1,..,4$

$z^4 - 4 = 0 \qquad z = \sqrt{2}\Big(\cos(0^\circ + k\cdot 90^\circ) + j\sin(0^\circ + k\cdot 90^\circ)\Big) \quad k = 0,1,,2,3$

$z^3 - 10 = 0 \qquad z = \sqrt[3]{10}\Big(\cos(0^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(0^\circ + k\cdot 120^\circ)\Big) \quad k = 0,1,2$

$z^3 - j = 0 \qquad z = \cos(30^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(30^\circ + k\cdot 120^\circ) \quad k = 0,1,2$

$z^2 = 2\sqrt{3} - 2j \qquad z = 2\Big(\cos(165^\circ + k\cdot 180^\circ) + j\sin(165^\circ + k\cdot 180^\circ)\Big) \quad k = 0,1$

Másodfokú egyenletek (megoldóképlettel)

$z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad z_{1,2} = 1 \pm j$

$z^2 + z + 1 = 0 \qquad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$

$z^2 + (-1+j)z - j = 0 \qquad z_1 = 1, \quad z_2 = -j$

$jz^2 + (-1-j)z + 1 = 0 \qquad z_1 = 1, \quad z_2 = -j$

$z^2 + (-1-j)z + 5j = 0 \qquad z_1 = -1 + 2j, \quad z_2 = 2 - j$

Összetett feladatok

- Adottak a következő komplex számok:

  $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}j$, $z_2 = 3(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ)$, $z_3 = 2e^{\frac{5\pi}{6}j}$.

  Teljesül továbbá a következő összefüggés:

  $$z^3 = jz_1^2 + \frac{4z_2}{z_3} + 5\sqrt{3}$$

Határozza meg z értékét, és a megoldás(oka)t ábrázolja a komplex számsíkon!

Mo.:

$z = \sqrt[3]{11}\Big(\cos(90^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(90^\circ + k\cdot 120^\circ)\Big) \quad k = 0, 1, 2$

- Adottak a következő komplex számok:

  $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}j$, $z_2 = 4\,(\cos 300^\circ + j\sin 300^\circ)$, $z_3 = j^7$.

  Teljesül továbbá a következő összefüggés:

$$z^4 = \frac{2\left(z_2^2 + \dfrac{z_1}{z_3} + \overline{z_1}\right)}{1+\sqrt{3}j}$$

  Határozza meg z értékét!

  Mo.:

  $z = 2\Big(\cos(45^\circ + k\cdot 90^\circ) + j\sin(45^\circ + k\cdot 90^\circ)\Big) \qquad k = 0, 1, 2, 3$

- Adott a következő három komplex szám:

  $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}j \qquad z_2 = 2\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}j} \qquad z_3 = 3\,(\cos 150^\circ + j\sin 150^\circ)$

  Teljesül továbbá a következő összefüggés:

$$w^3 = \frac{1}{18}\,j\,z_1^2 + \frac{z_2^2}{z_3} - \frac{2}{3}\left|\frac{z_1}{z_3}\right| + \frac{4\sqrt{3}}{3}j^5$$

  Határozza meg w értékét, és a megoldás(oka)t ábrázolja a komplex számsíkon!

  Mo.:

$$z = \begin{cases} \sqrt[3]{2}(\cos 70^\circ + j\sin 70^\circ) \\ \sqrt[3]{2}(\cos 190^\circ + j\sin 190^\circ) \\ \sqrt[3]{2}(\cos 310^\circ + j\sin 310^\circ) \end{cases}$$

  (Az ábrázolás az olvasóra van bízva.)

- Adottak a következő komplex számok:

  $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}j}$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$, $z_3 = 3(\cos 150^\circ + j\sin 150^\circ)$.

  Teljesül továbbá a következő összefüggés:

$$z^3 = jz_1 + 2\frac{z_3}{z_2} - 2j^5$$

  Határozza meg z értékét, és a megoldás(oka)t ábrázolja a komplex számsíkon!

  Mo.:

$$z = \sqrt[3]{4}\Big(\cos(10^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(10^\circ + k\cdot 120^\circ)\Big) \quad k = 0, 1, 2$$

Egyéb feladatok algebrai alakban

Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok halmazán!

- $|z| - 3z = -12j$

  Mo.:

  z-t $z = a + bj$ alakban keressük.

$$\sqrt{a^2+b^2} - 3(a+bj) = -12j$$

$$\underbrace{\sqrt{a^2+b^2} - 3a}_{Re} + \underbrace{(-3b)}_{Im}\,j = \underbrace{0}_{Re} + \underbrace{(-12)}_{Im}\,j$$

$$b = 4$$

$$\sqrt{a^2+16} = 3a \quad (\Rightarrow \underbrace{a \geq 0}_{*})$$

$$a^2 + 16 = 9a^2$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \pm\sqrt{2}$$

  Az egyenlet egyetlen megoldása:

$$z_1 = \sqrt{2} + 4j$$

  ($z_2 = -\sqrt{2} + 4j$ $*$ miatt nem megoldás! Ez behelyettesítéssel is ellenőrizhető.)

- $z + (1-j)\overline{z} + 2|z\,| = 6j$

  Mo.:

$$z\text{-t} \quad z = a + bj \;\; \text{alakban keressük.}$$
$$a + bj + (1-j)(a-bj) + 2\sqrt{a^2+b^2} = 6j$$
$$a + bj + a - bj - aj - b + 2\sqrt{a^2+b^2} = 6j$$
$$\underbrace{2a - b + 2\sqrt{a^2+b^2}}_{Re} + \underbrace{(-a)}_{Im}\, j = \underbrace{0}_{Re} + \underbrace{6}_{Im}\, j$$
$$a = -6$$
$$2a - b + 2\sqrt{a^2+b^2} = 0$$
$$2\sqrt{36+b^2} = 12 + b \; (\Rightarrow \underbrace{b \geq -12}_{*})$$
$$144 + 4b^2 = 144 + 24b + b^2$$
$$3b^2 - 24b = 0$$
$$3b(b-8) = 0$$
$$b = 0 \quad \text{vagy} \quad b = 8$$
$$z_1 = -6$$
$$z_2 = -6 + 8j$$
$$z_1 \text{ és } z_2 \text{ mindegyike megoldás; *-nak egyik sem mond ellent.}$$

Ponthalmazok ábrázolása

- Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z számokat, amelyekre $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\mathrm{Im}(z) < 0$, $|z| \leq 4$ teljesül!
- Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z számokat, amelyekre $\mathrm{Re}(z) = \pm\,\mathrm{Im}(z)$ teljesül!
- Ábrázolja a komplex számsíkon azokat a z számokat, amelyekre $|z| \leq 1$ és $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{Z}$!