Halmazalgebrai alapok

1. Állapítsa meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek egyenlőek!

$$A = \{x \mid 1 < x < 2,\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \left\{x \mid x^2 + 1 < 3x^2,\ x \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$C = \{n \mid n \text{ páros prímszám}\}$$
$$D = \{x \mid x = 1 \text{ vagy } x = 2\}$$
$$E = \left\{x \mid x^3 < 8,\ x \in \mathbb{R}\right\} \cap \left\{x \mid x^5 > 1,\ x \in \mathbb{R}\right\}$$
$$F = (\{a \mid a = 3k+1,\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{b \mid b = 4l+2,\ l \in \mathbb{N}\}) \cap \left\{c \mid 1 \le c^2 < 16,\ c \in \mathbb{N}\right\}$$

Mo.:

$A =]1, 2[$

$B = \left\{x \mid 0 < 2x^2 - 1,\ x \in \mathbb{Z}\right\} = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$C = \{2\}$

$D = \{1, 2\}$

$E =]-\infty, 2[\cap]1, \infty[=]1, 2[$

megj.: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$F = (\{1, 4, 7, 10, \ldots\} \cup \{2, 6, 10, 14, \ldots\}) \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 4, 6, 7, 10, \ldots\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$

Kaptuk: $A = E \quad D = F$

2. (a) Határozza meg az $A = \{1, 2, 3\}$ halmaz hatványhalmazát!

Mo.:
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

megj.: tetszőleges A halmaz esetén: $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$, azaz $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$
megj.: $\emptyset = \{\}$, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

(b) Hány eleme van $\mathcal{P}(A)$-nak, ha A elemszáma n?

Mo.:
$|A| = n \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

3. (a) Határozza meg a $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz két-elemű partícióit!

Mo.:

$$\begin{array}{ll}
\{\{1\}, \{2,3,4,5\}\} & \{\{1,2\}, \{3,4,5\}\} \\
\{\{2\}, \{1,3,4,5\}\} & \{\{1,3\}, \{2,4,5\}\} \\
\{\{3\}, \{1,2,4,5\}\} & \{\{1,4\}, \{2,3,5\}\} \\
\{\{4\}, \{1,2,3,5\}\} & \{\{1,5\}, \{2,3,4\}\} \\
\{\{5\}, \{1,2,3,4\}\} & \{\{2,3\}, \{1,4,5\}\} \\
 & \{\{2,4\}, \{1,3,5\}\} \\
 & \{\{2,5\}, \{1,3,4\}\} \\
 & \{\{3,4\}, \{1,2,5\}\} \\
 & \{\{3,5\}, \{1,2,4\}\} \\
 & \{\{4,5\}, \{1,2,3\}\}
\end{array}$$

Az ötelemű H halmaznak összesen:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$$

kételemű partíciója van.

(b) Hány két-elemű partíciója van egy n-elemű halmaznak?

Mo.:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \frac{2^n - 2}{2}$$

Magyarázat: ”összes részhalmaz mínusz a két triviális, osztva kettővel, mert mindent kétszer számoltunk”
megj.: az alaphalmaz minden nem-triviális részhalmaza meghatároz egy kételemű partíciót
megj.: a képletet alkalmazzuk az (a) részre: $15 = \frac{2^5-2}{2} = \frac{30}{2}$

4. Határozza meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával!

(a) $(\{1,3,7\} \setminus \{2,3,5\}) \cap \{0,1\} = \{1,7\} \cap \{0,1\} = \{1\}$

(b) $\{1,3,7\} \setminus (\{2,3,5\} \cap \{0,1\}) = \{1,3,7\} \setminus \emptyset = \{1,3,7\}$

(c) $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \setminus \mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \setminus \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} =$
$= \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

5. Sorolja fel az A , B , $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ és $A \,\Delta\, B$ halmazok elemeit, ha $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ az alaphalmaz, továbbá $A = \{x \mid 2 < x \leq 5,\ x \in E\}$ és $B = \{y \mid y < 4,\ y \in E\}$.

Mo.:
megj.:

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$ Venn-diagram:

$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ Venn-diagram:

Ezzel:
$A = \{3,4,5\}$
$B = \{0,1,2,3\}$
$\overline{B} = E \setminus B = \{4,5,6,7,8\}$
$A \cap B = \{3\}$
$A \cap \overline{B} = A \setminus B = \{4,5\}$
$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{0,1,2,3,4,5\} \setminus \{3\} = \{0,1,2,4,5\}$

6. Ábrázolja a következő halmazokat Descartes-féle koordinátarendszerben!
eml.: $A \times B = \{(a,b) \,|a \in A, b \in B\}$

(a) $\{1,2\} \times \{2,3,4,5\}$

(b) $\{-1,1,5\} \times \{0,4,5,6\}$

(c) $[2,5] \times]-3,1]$

(d) $\mathbb{R} \times [-4,2[$

(e) $[-3,+\infty[\times]-\infty,6[$

(f) $[1,+\infty[\times \{1,3,4\}$

Az ábrázolást az olvasóra bízzuk:

7. Ábrázolja a következő két halmaz unióját, metszetét, differenciáit és szimmetrikus differenciáját az xy koordinátasíkon:

$$A = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 6,\ -3 \leq y < 3\}$$

$$B = \{(x,y) \mid -2 < x \leq 4,\ -1 < y < 3\}$$

Az ábrázolást az olvasóra bízzuk:

8. Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

(a)	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$	(b)	$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$
(c)	$A \,\Delta\, A = A$	(d)	$A \,\Delta\, (A \,\Delta\, A) = A$
(e)	$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$	(f)	$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$

Mo.:

(a)
I. megoldás
b.o.: $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (\overline{B \setminus C}) = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)$
j.o.: $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$A \cap C \neq \emptyset$ esetén létezik olyan $x \in A \cap C$, amelyre: $\begin{cases} x \in (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\ \text{de} \\ x \notin A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \end{cases}$

Kaptuk: A két halmaz NEM egyenlő.

Pl.: $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 4, 6\}$ esetén $A \setminus (B \setminus C) = \{1, 5\}$ és $(A \setminus B) \setminus C = \{5\}$

II. megoldás
Venn-diagrammal

(b)
I. megoldás

b.o.: $(A \setminus B) \cap C = A \cap \overline{B} \cap C$ j.o.: $(A \cap C) \setminus B = A \cap C \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cap C$

Kaptuk: IGEN, a két halmaz egyenlő.

II. megoldás
Venn-diagrammal

(c)
$A \,\Delta\, A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset \neq A$

Kaptuk: a két halmaz NEM egyenlő.
megj.: az egyenlőség csak $A = \emptyset$ esetben teljesül, általában nem.

(d)
$A \,\Delta\, (A \,\Delta\, A) = A \,\Delta\, \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$

Kaptuk: IGEN, a két halmaz egyenlő.

(e)
Belátjuk, hogy "valami pontosan akkor eleme az egyik halmaznak, ha a másiknak is eleme"', tehát hogy a két halmaz egyenlő.

$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \;\Leftrightarrow\; X \in \mathcal{P}(A)$ és $X \in \mathcal{P}(B) \;\Leftrightarrow\; X \subseteq A$ és $X \subseteq B \;\Leftrightarrow\; X \subseteq A \cap B \;\Leftrightarrow\; X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

Kaptuk: IGEN, a két halmaz egyenlő.

(f)
Nemleges válaszunkban felhasználjuk, hogy tetszőleges A , B halmazok esetén

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (*)$$

Legyenek A és B halmazok olyanok, hogy $|A \cap B| = \emptyset$, $|A| = 2$, $|B| = 3$.

Ekkor $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| \overset{(*)}{=} 2^2 + 3^2 - 1 = 11$, viszont $|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^5 = 32$; a két halmaz elemszáma különbözik, tehát a két halmaz nem egyenlő.

Kaptuk: A két halmaz NEM egyenlő.

9. Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-féle számsíkon:

$A = \{z \mid z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$
$B = \{z \mid z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$
$C = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z - 1| \leq 1\}$
$D = \left\{z \mid z \in \mathbb{C}, z^2 - (-3 - j)z + 4 + 3j = 0, \mathrm{Im}(z) < 0\right\}$

Az ábrázolást az olvasóra bízzuk:

A és B egy-egy félsík, C egy $(1, 0)$ középpontú 1-sugarú zárt körlap, D pedig egy pont:

a $z^2 - (-3 - j)z + 4 + 3j = 0$ egyenlet két megoldása: $z_1 = -2 + j$ ill. $z_2 = -1 - 2j$, ami alapján $D = \{-1 - 2j\}$.

Igazak-e az alábbi állítások?

(a) Ha $z \in A \cap B$, akkor $|z| \leq \sqrt{5}$.

Mo.: NEM. Pl. $\left\{ \begin{array}{l} -3 - 3j \in A \cap B \text{ de} \\ |-3 - 3j| = \sqrt{18} \end{array} \right.$

(b) $(-1 + 2j) \in A \,\Delta\, B$

Mo.: IGEN. $\left\{ \begin{array}{ll} -1 + 2j \in A \cup B & \text{mert } -1 + 2j \in A \text{ és} \\ -1 + 2j \notin A \cap B & \text{mert } -1 + 2j \notin B \end{array} \right.$

(c) $C \subseteq B$

Mo.: IGEN.
I. mo.: indirekt: Legyen $z = a + bj$. Ha $\mathrm{Im}(z) > 1$, azaz $b > 1$, akkor

$$|z - 1| = |a + bj - 1| = |(a - 1) + bj| = \sqrt{(a - 1)^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} > 1.$$

II. mo.: grafikusan leolvassuk.

(d) $A \,\Delta\, D = A \cup D$

Mo.: NEM. $A \,\Delta\, D = A \cup D$ pontosan akkor teljesül, ha $A \cap D = \emptyset$. Viszont $-1 - 2j \in A \cap D$

Halmazalgebrai alapok II.

1. Igazoljuk a de Morgan azonosságokat, valamint az elnyelési (abszorpciós) tulajdonságokat a hatványhalmaz-algebrában!

Mo.:

Tekintsük egy tetszőleges H halmaz $\mathcal{P}(H)$ hatványhalmazát. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $A, B \in \mathcal{P}(H)$ esetén

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(c) $A \cup (A \cap B) = A$
(d) $A \cap (A \cup B) = A$

(a) Belátjuk, hogy valami pontosan akkor eleme az $\overline{A \cup B}$ halmaznak, ha eleme az $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmaznak.

$x \in \overline{A \cup B} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$ és $x \notin B \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) Hasonlóan.

(c) Az ekvivalenciát két részletben bizonyítjuk:

$\boxed{\Rightarrow}$

$x \in A \cup (A \cap B) \quad \Rightarrow \quad x \in A$ vagy $x \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad x \in A$ vagy $x \in A$ és $x \in B \quad \Rightarrow \quad x \in A$

$\boxed{\Leftarrow}$

$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in A \cup (A \cap B)$ (triviális)

(d) Hasonlóan.

2. Igazoljuk, hogy a következő négy azonosság páronként egyenértékű (egyszerre igaz ill. egyszerre nem):

$$A \subseteq B \quad \overset{\mathbf{1.}}{\Leftrightarrow} \quad A \cup B = B \quad \overset{\mathbf{2.}}{\Leftrightarrow} \quad A \cap B = A \quad \overset{\mathbf{3.}}{\Leftrightarrow} \quad A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Mo.:

Az **1**. ekvivalenciát bizonyítjuk, a másik kettő hasonlóan történhet.

$\boxed{\Rightarrow}$

Feltesszük, hogy $A \subseteq B$, azaz feltesszük, hogy $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Ekkor:

- $x \in A \cup B \quad \Rightarrow \quad x \in A$ vagy $x \in B \quad \overset{\text{feltevés!}}{\Rightarrow} \quad x \in B$ vagy $x \in B \quad \Rightarrow \quad x \in B$

  másrészt
- $x \in B \quad \overset{\text{triv.}}{\Rightarrow} \quad x \in B$ vagy $x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in A \cup B$

$\boxed{\Leftarrow}$

Feltesszük, hogy $A \cup B = B$

Ekkor:

$x \in A \quad \overset{\text{triv.}}{\Rightarrow} \quad x \in A \cup B \quad \overset{\text{feltevés!}}{\Rightarrow} \quad x \in B$

Vagyis $x \in A$-ból következik, hogy $x \in B$. Ez pedig azt jelenti, hogy $A \subseteq B$.

3. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi, halmazok közti műveletekre vonatkozó állítások!

(a) „A szimmetrikus differencia művelete kommutatív."

Mo.: IGAZ

$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B \,\Delta\, A$

(b) „A különbség művelet asszociatív."

Mo.: HAMIS

$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

ld.: **8.**(a) feladat

(c) „A szimmetrikus differencia művelete idempotens."

Mo.: HAMIS

$A \,\Delta\, A \neq A$

ld.: **8.**(c) feladat

(d) „$A \,\Delta\, (A \,\Delta\, B) = B$"

Mo.: IGAZ

$A \,\Delta\, (A \,\Delta\, B) = [A \cup (A \,\Delta\, B)] \setminus [A \cap (A \,\Delta\, B)] = [A \cup B] \setminus [A \setminus B] = B$

4. Igaz-e, hogy ha $A, B \subseteq U$ és $B = \overline{A}$, akkor $\{A, B\}$ partíciója U-nak?

Mo.: Nem igaz. Ha A vagy B valamelyike üreshalmaz, akkor nem teljesül az összefüggés.
Pl. $A = \emptyset$ esetén $\{A, B\} = \{\emptyset, U\}$ nem partíciója U-nak.

5. Hány partíciója van egy négy-elemű halmaznak?

Mo.: 15.

Legyen pl. $A = \{a, b, c, d\}$. A partíciói a következők:

- egy-elemű partíciói (1 db):

$$\{\{a, b, c, d\}\}$$

- két-elemű partíciói (7 db):

$$\begin{array}{ll} \{\{a\}, \{b, c, d\}\} & \{\{a, b\}, \{c, d\}\} \\ \{\{b\}, \{a, b, c\}\} & \{\{a, c\}, \{b, d\}\} \\ \{\{c\}, \{a, b, d\}\} & \{\{a, d\}, \{b, c\}\} \\ \{\{d\}, \{a, b, c\}\} & \end{array}$$

- három-elemű partíciói (6 db):

$$\begin{array}{l} \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\} \\ \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\} \\ \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\} \\ \{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\} \\ \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\} \\ \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\} \end{array}$$

- négy-elemű partíció (1 db):

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

megj.: n-elemű halmaz partícióinak számát a halmaz *Bell-számának* hívjuk.