Kombinatorika

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ (ejtsd: "*n faktoriális*")

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, stb.

$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdots 2 \cdot 1}{(n-3) \cdot (n-4) \cdots 2 \cdot 1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

Vigyázat! Pl.: $3n! \neq (3n)!$

1. **Ismétlés nélküli permutáció**
   Elemek egy lehetséges sorbarendezése az elemek egy permutációja. n elem összes lehetséges sorbarendezéseinek (permutációinak) száma:
   $$\mathbf{P_n = n!}$$
   Mintapélda: 4 tanuló: András, Dani, Kata és Orsi együtt megy iskolába. Hányféle sorrendben léphetik át az iskola szűk ajtajának küszöbét?
   Megoldás: $P_4 = 4! = 24$ (A 24 lehetséges sorrend: ADKO, ADOK, AKDO, AKOD, ... , OKDA.)

2. **Ismétléses permutáció**
   Van n darab elemünk, de a vizsgálat szempontjából nem mind különböző: k_1 db egyforma, k_2 db egyforma, k_3 db egyforma, ... , k_r db egyforma ($k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_r = n$; továbbá $k_i = 1$ is lehet).
   Az összes elemet sorbarendezzük. Két sorbarendezés csak akkor különbözik, ha bennük legalább egy helyen a vizsgálat szempontjából különböző elemek állnak. Az ilyen sorbarendezések n elem ismétléses permutációi. Ezek száma:
   $$\mathbf{P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}}$$
   Mintapélda: Hányféleképpen lehet 4 piros, 3 fekete és 2 zöld golyót egymás mellé letenni, ha az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg egymástól?
   Megoldás: $P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260$

3. **Ismétlés nélküli variáció**
   n elemből k-hosszú sorozatokat készítünk úgy, hogy egy elem legfeljebb egyszer szerepelhet a sorozatban ($k \leq n$).
   Az ilyen sorozatokat n elem k-adosztályú ismétléses variációinak nevezzük. Ezek száma:
   $$\mathbf{V_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ darab}} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$
   Mintapélda: Egy matematikaversenyen 15-en indulnak. A kari újság az első hat helyezett nevét közli. Hányféle lehet ez a lista? (Tegyük fel, hogy pontegyenlőség nem lehetséges.)
   Megoldás: $V_{15,6} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{15!}{9!} = 3603600$

4. **Ismétléses variáció**
   n elemből megint csak k-hosszú sorozatokat készítünk, de most egy elem többször is szerepelhet, más szavakkal: az elemek ismétlődése megengedett. (Ebből következően $k > n$ is lehet!) Az ilyen sorozatokat n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak nevezzük. Ezek száma:
   $$\mathbf{V_{n,k}^i = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ darab}} = n^k}$$
   Mintapélda: Egy dobókockával 4-szer dobunk egymás után. Hány különböző dobássorozat lehetséges?
   Megoldás: $V_{6,4}^i = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$

5. **Ismétlés nélküli kombináció**
   Van n elemünk. "Belemarkolunk" az elemekbe, és kiemelünk k darabot. A kivett elemeknek nincs sorrendje, csak az számít, melyik k elemet vettük ki ($k \leq n$). Az ilyen kiválasztásokat n elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. Ezek száma:
   $$\mathbf{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$
   megj.:

(a) $\binom{n}{k}$ ún. binomiális együttható, ejtsd: ”n alatt a k”

(b) spec.: $\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n$

(c) spec.: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

(d) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Mintapélda: Egy nyolcfős társaság sorsolással dönti el, hogy közülük melyik legyen az a három, aki elmegy a lemezjátszóért. Hányféle eredmény születhet, azaz hány különböző háromfős csapat alakítható?
Megoldás: $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$

6. Ismétléses kombináció

Van n elemünk. Megint csak ”belemarkolunk” az elemekbe, és kiemelünk k darabot, de most úgy, hogy egy elem ”több példányban” is a kezünkben lehet. Az elemeknek itt sincs sorrendje, csak az számít, hogy melyik elemből hány darab van a kezünkben. (Összesen k darabnak kell lennie, viszont $k > n$ is lehet!) Az ilyen kiválasztásokat n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak nevezzük. Ezek száma:

$$\mathbf{C^i_{n,k}} = \binom{\mathbf{n+k-1}}{\mathbf{k}}$$

Mintapélda Egy boltban 8-féle rágógumit árulnak. Összesen 3 darabot szeretnénk venni. Hányféleképpen válogathatunk?
Megoldás: $C^i_{8,3} = \binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = 120$

Kombinatorika

(Az előadáshoz kapcsolódó feladatsor megoldókulcsa)

1. Egy hatszemélyes család hányféleképpen foglalhat helyet (a) egy sorban és (b) egy kerek asztalnál?

Mo.:

(a) A feladat átfogalmazása: 6 elemet hányféleképpen tudunk sorbarendezni. Ez $\mathbf{P_6 = 6! = 720}$ - féleképpen lehetséges.

(b) i. Ha csak azt nézzük, kinek ki a bal- ill. jobbszomszédja:
Ültessük le Aladárt valahova (midegy, hogy melyik helyre). A maradék öt helyre a többi családtagot $\mathbf{5! = 120}$ -féleképpen tudjuk leültetni.

ii. Ha azt is nézzük, melyik családtag melyik helyen ül:
Ültessük le Aladárt: ezt 6-féleképpen tehetjük meg. Attól függetlenül, hogy őt hova ültettük le, a többieket a maradék öt helyre 5! - féleképpen ültethetjük le. Összesen: $\mathbf{6 \cdot 5! = 6! = 720}$ lehetőség.

2. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett négy férfi és négy nő egy padon úgy, hogy férfi és nő felváltva következzen?

Mo.:

(a) Ha az első helyen férfinak kell ülnie:
A páratlan sorszámú helyekre (1., 3., 5., 7.) a férfiakat $P_4 = 4! = 24$-féleképpen tudjuk leültetni. A páros sorszámú helyekre (2., 4., 6., 8.) a nőket szintén $P_4 = 4! = 24$-féleképpen, a férfiak leültetésétől függetlenül. Összesen $\mathbf{P_4 \cdot P_4 = 4! \cdot 4! = 576}$ lehetőség.

(b) Ha csak az számít, hogy két férfi ill. két nő ne üljön egymás mellett (azaz, ha nő is ülhet az 1. helyen):
Először eldöntjük, hogy a férfiak a páratlan sorszámú vagy páros sorszámú helyekre üljenek (2 lehetőség). Ezek után, mindkét esetben a leültetés ((*a*) alapján) $P_4 \cdot P_4 = 4! \cdot 4! = 576$-féleképpen történhet. Összesen: $\mathbf{2 \cdot P_4 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152}$ lehetőség.

3. Hány olyan nyolcjegyű szám létezik, ahol a számjegyek mind különbözőek? Hány nyolcjegyű szám létezik összesen?

Mo.:
A feladat mindkét részében tekintettel kell lennünk arra, hogy a 0 számjeggyel nem kezdődik szám.

(a) Van 10 elemünk: a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek. Ezekből készítünk 8-hosszú sorozatokat úgy, hogy a 0 nem állhat az első helyen, és ismétlés nem megengedett. Az első helyre 9-féle számjegy kerülhet (a 0 kivételével bármelyik), a 2. helyre megint csak 9-féle (csak az nem, ami az 1. helyre került), a 3. helyre 8-féle (csak az nem, ami az 1. ill. 2. helyre került), és így tovább. A 8. helyre 3-féle szám kerülhet. Összesen: $\mathbf{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 9 \cdot V_{9,7} = 1632960}$ lehetőség.

(b) Most: az első helyre 9-féle elem kerülhet (a 0 kivételével bármelyik), a maradék 7 hely mindegyikére, egymástól függetlenül, a 10 elem bármelyikét írhatjuk. Összesen: $\mathbf{9 \cdot V^{i}_{10,7} = 9 \cdot 10^7 = 90000000}$ lehetőség.

4. Egy játékkockával ötször dobunk egymás után. Hány különböző dobássorozat lehetséges?

Mo.:
A kérdés átfogalmazása: a kocka egy-egy oldalán lévő számokat tekintsük egy-egy elemnek. Így 6 elemünk van (az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok), ezekből képezünk 5-hosszú sorozatokat úgy, hogy ismétlés megengedett (az 1. helyre is hatféle elem kerülhet, a 2. helyre is, a 3.-ra is stb). Összesen: $\mathbf{V^{i}_{6,5} = 6^5 = 7776}$ lehetőség.

5. Hány ötelemű sorozat készíthető az $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz elemeiből, ha (a) X elemei többször is szerepelhetnek ill. ha (b) nem szerepelhetnek többször?

Mo.:

(a) $\mathbf{V^i_{6,5} = 6^5 = 7776}$ (ua., mint **4.**)

(b) $\mathbf{V_{6,5} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720}$

6. Egy nyolctagú családból négyen mehetnek színházba. Hányféleképpen történhet a kiválasztás, ha (a) megkülönböztetjük, hogy ki melyik színházjegyet kapja, ill. ha (b) nem?

Mo.:

(a) Ha számít, ki melyik jegyet kapja (pl. a jegyek helyre szólnak), akkor célszerű a következőképpen gondolkodni. Rendezzük sorba a jegyeket: 1. jegy, 2. jegy, 3. jegy, 4. jegy. Ezek után válasszunk embereket az egyes jegyekhez: az 1. jegyhez 8-féleképpen rendelhetünk embert, azután a 2. jegyhez már csak 7-féleképpen, a 3.-hoz 6-féleképpen, a 4.-hez 5-féleképpen. (Vegyük észre, hogy ez azt jelenti, hogy az emberek 8-elemű halmazából 4-hosszú sorozatokat készítünk.) Ez összesen: $\mathbf{V_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680}$ lehetőség.

(b) Ha csak az számít, melyik négy ember megy színházba: 8 elem közül választunk ki négyet úgy, hogy a sorrend nem számít, és ismétlődés nem megengedett: $\mathbf{C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70}$ lehetőség. (Ahány 4-elemű részhalmaza van egy 8-elemű halmaznak.)

7. Hányféleképpen osztható ki az 52 lapos franciakártya 4 személy között, ha mindenki ugyanannyi (13-13 db) kártyát kap? Mennyi ez a szám, ha tudjuk, hogy mindenki kap ászt?

Mo.:
A franciakártyában 4 szín van, mindegyik színből 13 figura.

(a) Ültessük le sorba a játékosokat, és a megkevert pakli kiosztása történjen a következőképpen: először A kap 13 lapot, majd B kap 13 lapot, majd C és végül D. (A kiosztás e módja, bár a gyakorlatban nem tipikus, de attól még teljesen véletlenszerű és igazságos. Bárki bármilyen leosztást ugyanolyan valószínűséggel kaphat.) A 13 lapot $\binom{52}{13}$-féleképpen kaphat. Ezután B a maradék 39 lapból 13-at $\binom{39}{13}$-féleképpen, és így tovább. Összesen: $\mathbf{C_{52,13} \cdot C_{39,13} \cdot C_{26,13} \cdot C_{13,13} = \binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13} \approx 5,36 \cdot 10^{28}}$ lehetőség. (Megj.: $\binom{13}{13} = 1$)

(b) "Osszuk ki" először a 4 ászt a négy játékosnak: ez 4!-féleképpen lehetséges. Majd a maradék 48 lapból A kapjon 12-t, ezután a maradékból B 12-t stb. Összesen: $\mathbf{4! \cdot \binom{48}{12} \cdot \binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} \cdot \binom{12}{12}}$ lehetőség.

8. Három autóba 9 ember száll be úgy, hogy minden autóba 3 ember jut. Hányféleképpen történhet ez?

Mo.: $\mathbf{C_{9,3} \cdot C_{6,3} \cdot C_{3,3} = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 1680}$

9. Hány $f : A \to B$ függvény van, ha A elemszáma n, B elemszáma k?

Mo.: Tudjuk, hogy $|A| = n$ és $|B| = k$. Egy $f : A \to B$ függvény A minden eleméhez B-nek pontosan egy elemét rendeli. Két ilyen függvény különbözik egymástól, ha legalább egy helyen eltér a fv-érték. Jelöljük a két halmaz elemeit a következőképpen: $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots..., a_n\}$ ill. $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots..., b_k\}$.

A függvények megszámlálásához célszerű egy két-oszlopos táblázatba foglalni, hogy egy fv az egyes A-beli elemekhez mit rendel:

a_1	b_{i1}
a_2	b_{i2}
a_3	b_{i3}
$\vdots$	$\vdots$
a_n	b_{in}

ahol $f(a_r) = b_{ir}$ és a második oszlopban B elemei szerepelnek úgy, hogy egy elem többször is szerepelhet (esetleg mind ugyanaz). Mivel A elemeit sorbarendezettnek tekintjük, azt kell megszámolnunk, hogy a 2. oszlopba hányféleképpen tudjuk B elemeit az előbbi szabály szerint beírni, azaz hogy k elemből hányféleképpen tudunk n-hosszú sorozatokat készíteni, ha ismétlés megengedett.
Ez $\mathbf{V^i_{k,n} = k^n}$ - féleképpen lehetséges.
(megj.: az eredmény független attól, hogy $n > k$ vagy $n = k$ vagy $n < k$ teljesül.)

10. Tegyük fel, hogy két véges elemszámú halmaz között létezik bijektív leképezés. Hány bijektív leképezés adható meg e két halmaz között?

Mo.:
Két véges halmaz között pontosan akkor létezik bijekció, ha elemszámuk azonos. Legyen a két halmaz A és B , és legyen $|A| = |B| = n$, továbbá $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n\}$ ill. $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n\}$.
Az előbbi példa (b) részéhez hasonlóan: egy fv-t megragadhatunk úgy, hogy táblázatba foglaljuk, mit rendel az egyes A-beli elemekhez. Most:

a_1	b_{i1}
a_2	b_{i2}
a_3	b_{i3}
$\vdots$	$\vdots$
a_n	b_{in}

ahol $f(a_r) = b_{ir}$ és a második oszlopban B elemei szerepelnek úgy, hogy minden elem pontosan egyszer szerepel.
Azt kell megszámolnunk, hogy a 2. oszlopba hányféleképpen tudjuk B elemeit az előbbi szabály szerint beírni, azaz hogy B n darab elemét hányféleképpen tudjuk sorbarendezni.
Ez $\mathbf{P_n} = \mathbf{n}!$ - féleképpen lehetséges.

11. Hány injektív $f : A \to B$ függvény van, ha A elemszáma n és B elemszáma k ?

Mo.:
eml.: egy f függvény injektív, ha

$$[f(a_i) = f(a_k)] \Rightarrow [a_i = a_k]$$

vagy, ami ezzel egyenértékű:
ha

$$[a_i \neq a_k] \Rightarrow [f(a_i) \neq f(a_k)]$$

Röviden: ha különböző elemek képe különböző.
Esetszétválasztással:

- ha $n > k$, akkor nincs megfelelő függvény (kevesebb lehetséges képelem van, mint ahány eleme van az értelmezési tartománynak: szükségképpen legalább két elem képe ugyanaz): **0** db
- ha $n = k$, akkor egy injekció egyben bijekció is: **n!** (ua.,mint **9**.)
- ha $n < k$, akkor a **8**.(b) ill. **9**. példákhoz hasonlóan célszerű táblázatként elgondolni a függvényeket; most:

a_1	b_{i1}
a_2	b_{i2}
a_3	b_{i3}
$\vdots$	$\vdots$
a_n	b_{in}

ahol $f(a_r) = b_{ir}$ és a második oszlopban B elemei szerepelnek úgy, hogy egy elem legfeljebb egyszer szerepelhet. Azt kell megszámolnunk, hogy a 2. oszlopba hányféleképpen tudjuk B elemeit az előbbi szabály szerint beírni, azaz hogy hány n-hosszú sorozatot tudunk alkotni B elemeiből, ha ismétlés nem megengedett.
Ez $\mathbf{V_{k,n}} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{2}) \cdots (\mathbf{k} - \mathbf{n} + \mathbf{1})$ - féleképpen lehetséges.

12. Hányan vannak

(a) egy n-elemű halmaz összes részhalmazai?

(b) az n-hosszúságú $0 - 1$ sorozatok?

Indokoljuk a fenti két eredmény azonosságát valamely bijekció megadásával!

Mo.:

A megoldás menete: belátjuk, hogy 2^n db n-hosszú $0-1$ sorozat van. Ezután megadunk egy bijekciót az n-hosszú $0-1$ sorozatok halmaza és egy n-elemű halmaz összes részhalmazainak halmaza között. Ezzel belátjuk, hogy egy n-elemű halmaz összes részhalmazainak is 2^n a száma. (Vagyis bizonyítást adunk arra, hogy egy n-elemű halmaz hatványhalmazának elemszáma 2^n.)

Először: a 0 és 1 elemekből n-hosszú sorozatokat készítünk. Mind az n db helyre, egymástól függetlenül a két elem bármelyike kerülhet: az 1. helyre is kétféle, a 2. helyre is kétféle, ... , az n-edik helyre is kétféle. Összesen: $\mathbf{V^{i}_{2,n}} = \mathbf{2^n}$ sorozat.

Másodszor: tekintsünk egy tetszőleges n-elemű halmazt. Jelöljük A-val és elemeit rendezzük sorba:
$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n\}$ (ez a megoldás általánosságát nem befolyásolja).
Készítsünk táblázatot a következőképpen:

	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	$\ldots$	$\mathbf{a_{n-2}}$	$\mathbf{a_{n-1}}$	$\mathbf{a_n}$
$\mathbf{K_1}$	0	0	0	0	$\ldots$	0	0	0
$\mathbf{K_2}$	0	0	0	0	$\ldots$	0	0	1
$\mathbf{K_3}$	0	0	0	0	$\ldots$	0	1	0
$\mathbf{K_4}$	0	0	0	0	$\ldots$	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{K_i}$	0	1	0	0	$\ldots$	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{K_{j-2}}$	1	1	0	1	$\ldots$	0	1	0
$\mathbf{K_{j-1}}$	0	1	1	1	$\ldots$	1	0	1
$\mathbf{K_j}$	1	1	1	1	$\ldots$	0	0	0
$\mathbf{K_{j+1}}$	1	0	1	1	$\ldots$	1	1	1
$\mathbf{K_{j+2}}$	1	1	1	1	$\ldots$	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{K_{r-3}}$	1	1	1	1	$\ldots$	0	1	1
$\mathbf{K_{r-2}}$	1	1	1	1	$\ldots$	1	0	1
$\mathbf{K_{r-1}}$	1	1	1	1	$\ldots$	1	1	0
$\mathbf{K_r}$	1	1	1	1	$\ldots$	1	1	1

A táblázat első sorában felsoroltuk az A halmaz elemeit. Az első oszlopban $\mathbf{K_m}$-kel jelölve felsoroltuk A összes részhalmazát. (Véges halmaznak triviálisan véges sok részhalmaza van, ezért azokat sorba tudjuk rendezni.) Az egyes $\mathbf{K_m}$-ek sorában $\mathbf{a_i}$ oszlopába 0-t írunk, ha $\mathbf{a_i} \notin \mathbf{K_m}$ és 1-et írunk, ha $\mathbf{a_i} \in \mathbf{K_m}$ teljesül. Így A minden részhalmazát egyértelműen kódoltuk egy n-hosszú $0-1$ sorozattal, és megfordítva: minden lehetséges n-hosszú $0-1$ sorozat egyértelműen meghatározza A egy részhalmazát. (Pl.: A egyelemű részhalmazainak sorában 1 db 1-es és $n-1$ db 0-ás áll; a csupa 0-ásból álló sor az üreshalmazt jelöli, a csupa 1-esből álló sor a triviális A részhalmazt jelöli stb.)
Ezzel bijekciót adtunk meg az n-hosszú $0-1$ sorozatok és egy n-elemű halmaz összes részhalmazai között.
Vagyis: $r = 2^n$.

(Továbbá, mivel egy n-elemű halmaz összes részhalmazainak a száma egyenlő a 0-elemű részhalmazok száma, plusz az 1-elemű rszhalmazok száma, plusz a kételemű részhalmazok száma, ... , plusz az n-elemű részhalmazok száma, ezért azt is megkaptuk, hogy $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

Konkrét eset szemléltetésképpen ($n = 3$):
Legyen $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$
$\mathbf{K_1}$	0	0	0
$\mathbf{K_2}$	0	0	1
$\mathbf{K_3}$	0	1	0
$\mathbf{K_4}$	1	0	0
$\mathbf{K_5}$	0	1	1
$\mathbf{K_6}$	1	0	1
$\mathbf{K_7}$	1	1	0
$\mathbf{K_8}$	1	1	1

Pl.: $\mathbf{K_4} = \{\mathbf{a_1}\}$, $\mathbf{K_7} = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ stb.

13. Van n különböző dobozunk és k egyforma golyónk. Hányféleképpen helyezhetők el a megkülönböztetés nélküli golyók az n db dobozban?

Mo.:
Két szétosztás különbözik, ha van olyan doboz, amelyben az egyik szétosztás szerint több golyó van, mint a másik szerint. Legyenek a dobozok: D_1 , D_2 , ... , D_n . Tegyük fel, hogy egy szétosztás után pl. a D_1 dobozban 3 golyó van. Fogjuk ezt úgy fel, hogy a golyók egyenkénti kiosztásakor a D_1 dobozt háromszor választottuk. Egy kiosztáskor így összesen k-szor választunk dobozt. Összefoglalva: n elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy a választás sorrendje nem számít (hiszen csak az a kérdés, hogy az egyes dobozokban *végül* hány golyó van, és nem az, hogy milyen sorrendben és mikor kerültek bele), továbbá ismétlés megengedett (egy dobozt többször is választhatunk, hiszen egy dobozba több golyó is kerülhet). A golyók kiosztása összesen:

$\mathbf{C^i_{n,k}} = \binom{\mathbf{n+k-1}}{\mathbf{k}}$ - féleképpen lehetséges.

14. Hányféle módon lehet 4 piros, 3 fekete, 2 fehér golyót egymás mellé letenni úgy, hogy

(a) a két fehér golyó egymás mellé kerüljön?
(b) a négy piros golyó ne legyen egymás mellett?

Mo.:

(a) A két fehér golyót "ragasszuk össze", tekintsük egy egységnek. Ezek után van 8 elemünk: 4 piros, 3 fekete és "1 fehér" golyó. Ezen elemek összes sorbarendezésének a számára vagyunk kíváncsiak. Miden elemet sorbarendezünk, ezért permutációról van szó, viszont a kérdés szempontjából egymás között nem különböztetünk meg 4-et, 3-at ill. 1-et, tehát ismétléses permutációról.

A megoldás: $\mathbf{P_8^{4,3,1}} = \frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{4!3!1!}} = \mathbf{280}$

(b) Közvetlenül sokkal könnyebb azon sorbarendezéseket megszámolni, amelyekben a 4 piros golyó egymás mellé kerül, mint azokat, amelyekben nem kerül egymás mellé a négy piros golyó:

$$\underbrace{\text{összes sorbarendezés}}_{\text{könnyű számolni}} = \underbrace{\text{a 4 piros egymás mellett van}}_{\text{könnyű számolni}} + \underbrace{\text{a 4 piros nincs egymás mellett}}_{\text{nehéz számolni}}$$

Ebből: "4 piros nincs egymás mellett" = "összes" $-$ "a 4 piros egymás mellett van".
A négy piros golyót "ragasszuk össze", tekintsük egy elemnek.

Összesen: $\mathbf{P_9^{4,3,2}} - \mathbf{P_6^{3,2,1}} = \frac{\mathbf{9!}}{\mathbf{4!\cdot3!\cdot2!}} - \frac{\mathbf{6!}}{\mathbf{3!\cdot2!\cdot1!}} = \mathbf{1260} - \mathbf{60} = \mathbf{1200}$ lehetőség.

15. Egy 8×8 -as sakktáblán hányféleképpen helyezhetünk el 2 ellenséges bástyát úgy, hogy a sakk szabályai szerint ne üssék egymást?

Mo.:
Az első (pl. világos) bástyát a 64 hely bármelyikére letehetjük: ez 64 lehetőség. A második (pl. sötét) bástyát nem tehetjük sem egy sorba, sem egy oszlopba az elsővel. Az elsőt bárhova tettük is le, $2 \cdot 7 = 14$ helyet támad + 1 helyen rajta áll, azaz összesen 15 helyet "tilt meg" a sötét bástyának. Sötétet így a maradék $64 - 15 = 49$ hely valamelyikére tehetjük le.

Összesen: $\mathbf{64 \cdot 49 = 3136}$ lehetőség.

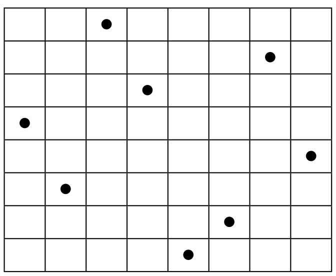
16. Most ugyanezen táblán 8 bástyát helyezünk el úgy, hogy a sakk szabályai szerint ne üssék egymást. Hányféle módon történhet, ha a bástyák egyformák? És ha a bástyák különbözőek?

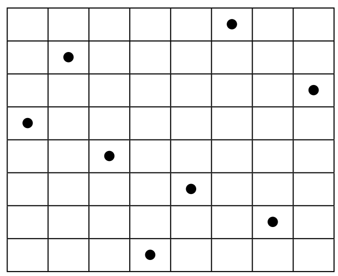
Mo.:
A feladat megoldásakor tekintsünk el attól, hogy a sakk szabályai szerint (azaz ”normális esetben”) a táblán egyszerre legfeljebb 4 bástya állhat. Amikor a feladat a ”sakk szabályai szerint” kéri, hogy két bástya ne üsse egymást, akkor azt kéri, hogy ne álljon két bástya egy oszlopban vagy egy sorban. Mivel a tábla 8 sorból és 8 oszlopból áll, ezért rögtön adódik, hogy egy lerakás után minden sorban és minden oszlopban pontosan 1 bástya fog állni.

(a) Ha a bástyák egyformák: haladjunk oszloponként. Az 1. oszlopban rakjunk le valahova egy bástyát: ez 8-féleképpen lehetséges. Ez után a 2. oszlopban helyezzünk el egy bástyát: ez már csak 7-féleképpen lehetséges, mert abba a sorba nem rakhatjuk, amelyikben az 1. oszlopbeli bástya áll. Ez után a 3. oszlopban helyezzünk el egy bástyát: ez már csak 6-féleképpen lehetséges, mert azokba a sorokba nem rakhatjuk, amelyekben már áll bástya. És így tovább. Amikor az utolsó oszlophoz érünk, már csak egy szabad sor lesz, a 8. bástya lerakásakor már csak egy sor közül ”választhatunk”.

Összesen: $\mathbf{P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320}$ lehetőség.

Két példa a 40320 lehetséges közül (a feladat szempontjából közömbös, ezért nem színeztük a mezőket):

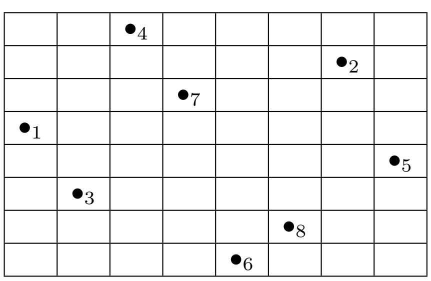


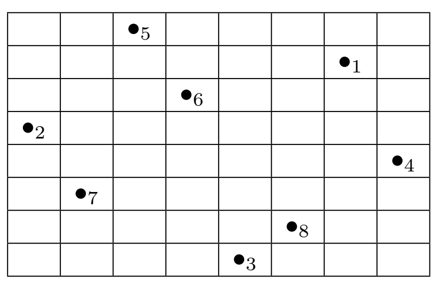


(b) Ha a bástyákat megkülönböztetjük (pl. számokkal indexezve őket): az (a) rész minden egyes lerakásán belül tetszőlegesen tudjuk permutálni a 8 különböző bástyát.

Összesen: $\mathbf{P_8 \cdot P_8 = 8! \cdot 8!}$ lehetőség.

Két példa (a táblára enyhe szögben tekintve):





17. Milyen számrendszerben igaz a következő egyenlőség?

$$12! - 11! - 10! = 100^2 + 10^2$$

Mo.:
A keresett számrendszer alapszáma legyen k. ($k \in \mathbb{N}^+$)
A fenti egyenlőséget írjuk át 10-es számrendszerbe, majd oldjuk meg az egyenletet!
(Eml.: pl. a k-as számrendszerbeli $xyzw$ szám tízes számrendszerben:
$x \cdot k^3 + y \cdot k^2 + z \cdot k^1 + w \cdot k^0 = xk^3 + yk^2 + zk + w$ -nel egyenlő.
Azaz: $xyzw_k$=$xk^3 + yk^2 + zk + w_{10}$.)

$$(k+2)! - (k+1)! - k! = (k^2)^2 + k^2$$

$$k!\left[(k+2)(k+1)-(k+1)-1\right]=k^2(k^2+1)$$
$$k!(k^2+2k)=k^2(k^2+1)$$
$$k!(k+2)=k(k^2+1)$$

Ebből, átrendezéssel, polinomosztással:

$$k!=\frac{k(k^2+1)}{k+2}=\frac{k^3+k}{k+2}=k^2-2k+5+\frac{-10}{k+2}$$

Mivel $k!$ természetes szám, ezért $k^2-2k+5+\dfrac{-10}{k+2}$ is az. Ez csak akkor lehetséges, ha $\dfrac{-10}{k+2}$ egész szám.

$$\frac{-10}{k+2}\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ k+2=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\ \Rightarrow\ k=\left\{\begin{array}{cccc}-1 & 0 & 3 & 8\\ -3 & -4 & -7 & -12\end{array}\right.$$

Mivel $k\in\mathbb{N}^+$, ezért csak a $k=3$ ill. $k=8$ értékek jönnek szóba. Ellenőrizve e két értékre:
$k=3$-mal: $5!-4!-3!=3^4+3^2$ valóban teljesül $(90=90)$, viszont
$k=8$-cal: $10!-9!-8!=8^4+8^2$ ellentmondás. ($\lightning$)
Kaptuk: az egyenlet csak a $\mathbf{k=3}$ -as számrendszerben teljesül.

18. Oldja meg az alábbi egyenletet az egész számok halmazán!

$$\binom{x}{2}-\binom{2x+3}{2x+1}=-20$$

Mo.:

Felhasználjuk, hogy:

$$\binom{x}{2}=\frac{x!}{2!\cdot(x-2)!}=\frac{x(x-1)}{2}\qquad\text{ill.}\qquad\binom{2x+3}{2x+1}=\frac{(2x+3)!}{(2x+1)!\cdot 2!}=\frac{(2x+3)(2x+2)}{2}$$

$$\binom{x}{2}-\binom{2x+3}{2x+1}=-20$$
$$\frac{x(x-1)}{2}-\frac{(2x+3)(2x+2)}{2}=-20$$
$$x(x-1)-(2x+3)(2x+2)=-40$$
$$3x^2+11x-34=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121+408}}{6}=\frac{-11\pm 23}{6}=\left\{\begin{array}{l}x_1=2\in\mathbb{Z}\\ x_2=-\frac{34}{6}\notin\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Az egyenlet egyetlen megoldása: $\mathbf{x=2}$.

19. Igazolja, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában álló számok összege 2^n.

Mo.:
A Pascal-háromszög
0. sorában lévő elem: $\binom{0}{0}$
1. sorában lévő elemek: $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$
2. sorában lévő elemek: $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$
...
n-edik sorában lévő elemek: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ... , $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n}$
Egy korábbi feladatban már igazoltuk, hogy:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

20. Mutasson kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést az 1 és 2 számjegyekből képezhető öttagú, monoton növő sorozatok és az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezhető ÖTTAGÚ (!), szigorúan monoton növekedő sorozatok között! (Először állapítsuk meg, hogy van-e megoldása a feladatnak!)

Mo.:
Megjegyezzük, hogy itt nem az *Analízis* tárgy keretein belül definiált numerikus sorozatokról van szó, hiszen itt egy sorozatnak csak véges sok eleme van.

Az 1 és 2 számjegyekből képezhető öttagú, monoton növő sorozatok a következők:
11111 , 11112 , 11122 , 11222 , 12222 , 22222 .

Vegyük észre, hogy mindegyik egyértelműen jellemezhető azzal, hogy hányszor szerepel benne (pl.) a 2-es szám. Adjuk nekik ez alapján a következő jelölést:
$\underbrace{11111}_{0}$, $\underbrace{11112}_{1}$, $\underbrace{11122}_{2}$, $\underbrace{11222}_{3}$, $\underbrace{12222}_{4}$, $\underbrace{22222}_{5}$.

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből képezhető öttagú, szigorúan monoton növekedő sorozatok a következők:
23456 , 13456 , 12456 , 12356 , 12346 , 12345 .

Vegyük észre, hogy mindegyik egyértelműen jellemezhető azzal, hogy a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek közül melyik hiányzik belőle. Adjuk nekik ez alapján a következő jelölést:
$\underbrace{23456}_{1}$, $\underbrace{13456}_{2}$, $\underbrace{12456}_{3}$, $\underbrace{12356}_{4}$, $\underbrace{12346}_{5}$, $\underbrace{12345}_{6}$.

Mindkét halmaznak 6 eleme van, ezért létezik közöttük bijekció
Az első halmazt A-val, a másodikat B-vel jelölve: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$f : A \to B \qquad f(x) = x + 1$$

bijekció a két halmaz között.

21. Egy gyereknek 10 rágógumit akarunk venni. A boltban e fajták vannak: golyó, Donald és lapos. Hányféleképpen válogathatunk?

Mo.:
A feladat megfogalmazásából nem következik, de célszerű feltételezni, hogy a boltban mindhárom fajtából legalább 10-10 darab rendelkezésre áll. (Azaz, ha akarunk, tudunk 10 Donald-rágót venni, ami íz szempontjából a legcélszerűbb.)
3 elemből akarunk 10 darabot venni. A sorrend nem számít, csak az, hogy végül melyik fajtából hány darab lesz a kezünkben. Ismétlés megengedett, egy fajtából többet is vehetünk.
Összesen:
$\mathbf{C^{i}_{3,10}} = \binom{\mathbf{3+10-1}}{\mathbf{10}} = \binom{\mathbf{12}}{\mathbf{10}} = \mathbf{66}$ lehetőség.

22. Ötfajta képeslapot árulnak. Hányféleképpen vehetünk 12-t?

Mo.:
Megint csak célszerű feltételezni, hogy mind az ötfajta képeslapból legalább 12 darab van a trafik készletében. A megoldás analóg az előző feladat megoldásával:
$\mathbf{C^{i}_{5,12}} = \binom{\mathbf{5+12-1}}{\mathbf{12}} = \binom{\mathbf{16}}{\mathbf{12}} = \mathbf{1820}$.