Analízis előadások

Vajda István

2009. február 26.

A Laplace-transzformált fogalma

Definíció: Az $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$ függvény *Laplace-transzformáltja* az

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t$$

függvény, melynek értelmezési tartománya a $]0, \infty[$ intervallum azon pontjaiból áll, ahol a fenti improprius integrál konvergens.

A Laplace-transzformált fogalma

Definíció: Az $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}\,,\ t \mapsto f(t)$ függvény *Laplace-transzformáltja* az

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \mathrm{d}t$$

függvény, melynek értelmezési tartománya a $]0, \infty[$ intervallum azon pontjaiból áll, ahol a fenti improprius integrál konvergens.

Jelölés: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \overline{f}(s)$.

A Laplace-transzformált fogalma

Megjegyzések:

- A Laplace-transzformált definíciójában szereplő integrált *Laplace-integrálnak* nevezzük.

A Laplace-transzformált fogalma

Megjegyzések:

- A Laplace-transzformált definíciójában szereplő integrált *Laplace-integrálnak* nevezzük.
- Ha az f függvény negatív helyeken is értelmezve van, akkor ezt a Laplace-transzformált képzésénél nem vesszük figyelembe.

A Laplace-transzformált fogalma

Megjegyzések:

- A Laplace-transzformált definíciójában szereplő integrált *Laplace-integrálnak* nevezzük.
- Ha az f függvény negatív helyeken is értelmezve van, akkor ezt a Laplace-transzformált képzésénél nem vesszük figyelembe.
- Ha az f függvény nincs minden nemnegatív valós számra értelmezve, akkor a Laplace-transzformált képzésénél mindazokon a helyeken, ahol eredetileg nem volt értelmezve 0-nak vesszük a függvény értékét.

A Laplace-integrál konvergenciája

Tétel: A Laplace-integrál vagy minden valós számra konvergens, vagy egy valós számra sem konvergens, vagy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\mathrm{Re}\, s > a$ számra az integrál konvergens, de minden $\mathrm{Re}\, s < a$ számra az integrál divergens.

A Laplace-integrál konvergenciája

Tétel: A Laplace-integrál vagy minden valós számra konvergens, vagy egy valós számra sem konvergens, vagy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\mathrm{Re}\, s > a$ számra az integrál konvergens, de minden $\mathrm{Re}\, s < a$ számra az integrál divergens.

Tétel: A Laplace-integrál konvergenciájának elégséges feltétele: Ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}^+$ és $t_0 \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy $t > t_0$ esetén $\left|f(t)\right| \leq K \cdot e^{\alpha t}$, akkor $\mathrm{Re}\, s > \alpha$ esetén az f függvény Laplace-integrálja abszolút konvergens.

A Laplace-integrál konvergenciája

Tétel: A Laplace-integrál vagy minden valós számra konvergens, vagy egy valós számra sem konvergens, vagy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\mathrm{Re}\, s > a$ számra az integrál konvergens, de minden $\mathrm{Re}\, s < a$ számra az integrál divergens.

Tétel: A Laplace-integrál konvergenciájának elégséges feltétele: Ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}^+$ és $t_0 \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy $t > t_0$ esetén $\left|f(t)\right| \leq K \cdot e^{\alpha t}$, akkor $\mathrm{Re}\, s > \alpha$ esetén az f függvény Laplace-integrálja abszolút konvergens.

Megjegyzés: A továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak valós változós, valós értékű függvényekkel dolgozunk.

A Laplace-transzformáció tulajdonságai

Tétel: A Laplace-transzformáció homogén, lineáris:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[c \cdot f(t)] = c \cdot \mathcal{L}[f(t)]$$

A Laplace-transzformáció tulajdonságai

Tétel: A Laplace-transzformáció homogén, lineáris:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[c \cdot f(t)] = c \cdot \mathcal{L}[f(t)]$$

Tétel: Az előző tétellel ekvivalens álítás:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t)\right] = \\ = c_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + c_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right] + \ldots + c_n \mathcal{L}\left[f_n(t)\right]\end{aligned}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(a-s)t} \, \mathrm{d}t$$

A fenti Laplace-integrál $a \geq s$ esetén divergens, mert ekkor $\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} \neq 0$. $s > a$ esetén:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty e^{(a-s)t} \, \mathrm{d}t = \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\omega e^{(a-s)t} \, \mathrm{d}t = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\omega =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{e^{(a-s)\omega}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right) = \frac{1}{s-a}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\mathrm{sh}(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2 - a^2} \text{ és } \mathrm{ch}(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (s > a)$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\operatorname{sh}(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2-a^2} \text{ és } \operatorname{ch}(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-a^2} \quad (s>a)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}[\operatorname{sh}(at)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{at}\right] - \mathcal{L}\left[e^{-at}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\frac{2a}{s^2-a^2} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\operatorname{sh}(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2-a^2} \text{ és } \operatorname{ch}(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-a^2} \quad (s>a)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sh}(at)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{at}\right] - \mathcal{L}\left[e^{-at}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\frac{2a}{s^2-a^2} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{ch}(at)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left[e^{at}\right] + \mathcal{L}\left[e^{-at}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-2}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-2}$
- $\operatorname{sh}(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{3}{s^2-9}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-2}$
- $\operatorname{sh}(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{3}{s^2-9}$
- $\operatorname{ch}(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2-16}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-2}$
- $\operatorname{sh}(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{3}{s^2-9}$
- $\operatorname{ch}(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2-16}$
- $2e^{5t} - 3\operatorname{sh}(2t) + 5\operatorname{ch}(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s-5} - \dfrac{6}{s^2-4} + \dfrac{5s}{s^2-4}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2 + a^2} \text{ és } \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \text{ és } \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[\sin(at)\right] = \int_0^\infty \sin(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Parciális integrálást alkalmazva:

$$\int_0^\infty \sin(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(at)\, e^{-st}}{a}\right]_0^\infty - \frac{s}{a}\int_0^\infty \cos(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left[\frac{\sin(at)\, e^{-st}}{a}\right]_0^\infty - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty \sin(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \text{ és } \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

Bizonyítás:

Rendezés után:

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int_0^\infty \sin(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{a},$$

ahonnan

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \int_0^\infty \sin(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \text{ és } \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \text{ és } \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[\cos(at)\right] = \int_0^\infty \cos(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Parciális integrálást alkalmazva:

$$\int_0^\infty \cos(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(at)\, e^{-st}}{a}\right]_0^\infty + \frac{s}{a}\int_0^\infty \sin(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{s}{a}\left[\frac{\cos(at)\, e^{-st}}{a}\right]_0^\infty - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty \cos(at)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \text{ és } \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

Bizonyítás:

Rendezés után:

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int\limits_0^\infty \cos(at)\, e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{a^2},$$

ahonnan

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \int\limits_0^\infty \cos(at)\, e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $\mathcal{L}\left[\sin(2t)\right] = \dfrac{2}{s^2+4}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $\mathcal{L}\left[\sin\left(2t\right)\right] = \dfrac{2}{s^2+4}$
- $\mathcal{L}\left[\cos\left(3t\right)\right] = \dfrac{s}{s^2+9}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $\mathcal{L}\left[\sin(2t)\right] = \dfrac{2}{s^2+4}$
- $\mathcal{L}\left[\cos(3t)\right] = \dfrac{s}{s^2+9}$
- $\mathcal{L}\left[2\sin(t) - 3\cos(2t)\right] = \dfrac{2}{s^2+1} - \dfrac{3s}{s^2+4}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $\mathcal{L}\left[\sin(2t)\right] = \dfrac{2}{s^2+4}$
- $\mathcal{L}\left[\cos(3t)\right] = \dfrac{s}{s^2+9}$
- $\mathcal{L}\left[2\sin(t) - 3\cos(2t)\right] = \dfrac{2}{s^2+1} - \dfrac{3s}{s^2+4}$
- $4e^t - 8\sin(6t) + 3\cos(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{4}{s-1} - \dfrac{48}{s^2+36} + \dfrac{3s}{s^2+9}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

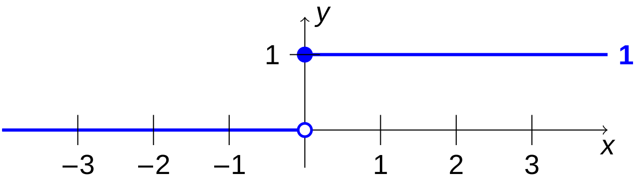
- $\mathcal{L}\left[\sin(2t)\right] = \dfrac{2}{s^2+4}$
- $\mathcal{L}\left[\cos(3t)\right] = \dfrac{s}{s^2+9}$
- $\mathcal{L}\left[2\sin(t) - 3\cos(2t)\right] = \dfrac{2}{s^2+1} - \dfrac{3s}{s^2+4}$
- $4e^t - 8\sin(6t) + 3\cos(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{4}{s-1} - \dfrac{48}{s^2+36} + \dfrac{3s}{s^2+9}$
- $2e^{-2t} + 3\,\mathrm{sh}(4t) - 5\cos(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{12}{s^2-16} - \dfrac{5s}{s^2+16}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Az $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvény (az ún. egységugrás függvény) Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \dfrac{1}{s}$. $\quad (s > 0)$

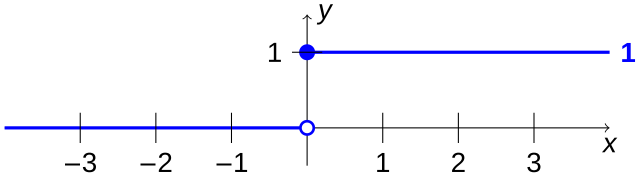
Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Az $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvény (az ún. egységugrás függvény) Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \dfrac{1}{s}$. $\quad (s > 0)$



Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Az $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvény (az ún. egységugrás függvény) Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \dfrac{1}{s}$. $(s > 0)$



Bizonyítás:

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}] = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\omega =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{e^{-s\omega}}{s} + \frac{e^0}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad s > 0$$

Bizonyítás:

A Laplace-transzformált függvényt egy rekurzív formula segítségével állítjuk elő:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \int\limits_0^\infty t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^n e^{-st}}{s}\right]_0^\infty - \int\limits_0^\infty -\frac{nt^{n-1}e^{-st}}{s}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n}{s}\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right] \qquad \text{ha} \quad n \geq 1$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]$$

A továbbiakban teljes indukcióval bizonyítunk:

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]$$

A továbbiakban teljes indukcióval bizonyítunk:

$n = 0$-ra az állítás igaz, mert $\mathcal{L}\left[t^0\right] = L\left[\mathbf{1}\right] = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Tétel:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]$$

A továbbiakban teljes indukcióval bizonyítunk:

$n = 0$-ra az állítás igaz, mert $\mathcal{L}\left[t^0\right] = L\left[\mathbf{1}\right] = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}$

Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz. Bizonyítjuk, hogy igaz $n+1$-re is:

$$\mathcal{L}\left[t^{n+1}\right] = \frac{n+1}{s}\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n+1}{s} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2}$
- $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^3}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $t \circ\!\!-\!\!\bullet \; \dfrac{1}{s^2}$
- $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \; \dfrac{2}{s^3}$
- $t^3 \circ\!\!-\!\!\bullet \; \dfrac{6}{s^4}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2}$
- $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^3}$
- $t^3 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{6}{s^4}$
- $2t^3 - 4t^2 + 3t + 9 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{12}{s^4} - \dfrac{8}{s^3} + \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{9}{s}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

Példák:

- $t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2}$
- $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^3}$
- $t^3 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{6}{s^4}$
- $2t^3 - 4t^2 + 3t + 9 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{12}{s^4} - \dfrac{8}{s^3} + \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{9}{s}$
- $2e^{-3t} - 5t^2 + 3\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s+3} - \dfrac{10}{s^3} + \dfrac{6}{s^2+4}$

Exponenciális függvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Jelöljük az f függvény Laplace-transztformáltját F-fel, azaz legyen $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$. Ekkor az $f(t)\,e^{at}$ függvénynek is létezik Laplace-transzformáltja és $\mathcal{L}\left[f(t)\,e^{at}\right] = F(s-a)$.

Exponenciális függvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Jelöljük az f függvény Laplace-transztformáltját F-fel, azaz legyen $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Ekkor az $f(t)\,e^{at}$ függvénynek is létezik Laplace-transzformáltja és $\mathcal{L}\left[f(t)\,e^{at}\right] = F(s-a)$.

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\,e^{at}\right] = \int_0^\infty f(t)\,e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = F(s-a)$$

Exponenciális függvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Jelöljük az f függvény Laplace-transztformáltját F-fel, azaz legyen $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Ekkor az $f(t)\,e^{at}$ függvénynek is létezik Laplace-transzformáltja és $\mathcal{L}\left[f(t)\,e^{at}\right] = F(s-a)$.

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\,e^{at}\right] = \int_0^\infty f(t)\,e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = F(s-a)$$

Példa: Határozzuk meg a $t \mapsto \sin(2t)\,e^{3t}$ függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

Mivel $\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^2+4}$, ezért $\sin(2t)\,e^{3t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{(s-3)^2+4}$.

Függvény integráljának Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja az $F(s)$ függvény, akkor $\int\limits_0^t f(u)\mathrm{d}u \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{F(s)}{s}$.

Függvény integráljának Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja az $F(s)$ függvény, akkor $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{F(s)}{s}$.

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u\right] = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u\right) e^{-st}\ \mathrm{d}t$$

Parciális integrálást alkalmazva:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u\right) e^{-st}\ \mathrm{d}t = \left[\left(\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u\right)\cdot\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_0^\infty -$$

$$-\int_0^\infty f(t)\cdot\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\ \mathrm{d}t = \frac{F(s)}{s}$$

Függvény integráljának Laplace-transzformáltja

Példa: Számítsuk ki az $u \mapsto \sin(2u)$ függvény $\int\limits_0^t \sin(2u)\,\mathrm{d}u$ integráljának Laplace-transzformáltját!

Függvény integráljának Laplace-transzformáltja

Példa: Számítsuk ki az $u \mapsto \sin(2u)$ függvény $\int_0^t \sin(2u)\,\mathrm{d}u$ integráljának Laplace-transzformáltját!

Első megoldás: Mivel $\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^2+4}$, a tétel alapján

$$\int_0^t \sin(2u)\,\mathrm{d}u \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Függvény integráljának Laplace-transzformáltja

Példa: Számítsuk ki az $u \mapsto \sin(2u)$ függvény $\int\limits_0^t \sin(2u)\,\mathrm{d}u$ integráljának Laplace-transzformáltját!

Első megoldás: Mivel $\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{2}{s^2+4}$, a tétel alapján

$$\int\limits_0^t \sin(2u)\,\mathrm{d}u \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Második megoldás:

$$\int\limits_0^t \sin(2u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-\cos(2u)}{2}\right]_0^t = \frac{-\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{-\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{s}{2(s^2+4)} + \frac{1}{2s} =$$

$$-\frac{s^2}{2s(s^2+4)} + \frac{s^2+4}{2s(s^2+4)} = \frac{4}{2s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f deriváltjának Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$.

Függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f deriváltjának Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$.

Bizonyítás: Parciális integrálást alkalmazunk:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[f(t)\, e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot(-s)\cdot e^{-st}\, \mathrm{d}t =$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$$

Függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f deriváltjának Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$.

Bizonyítás: Parciális integrálást alkalmazunk:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\,e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot(-s)\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$$

Példa: Határozzuk meg az $f(t) = e^{2t}$ függvény deriváltfüggvényének Laplace-transzformáltját!

Megoldás: Mivel $e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-2}$, ezért $\mathcal{L}[f'(t)] = \dfrac{s}{s-2} - 1 = \dfrac{2}{s-2}$

Függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f deriváltjának Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$.

Bizonyítás: Parciális integrálást alkalmazunk:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[f(t)\, e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot(-s)\cdot e^{-st}\, \mathrm{d}t =$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = sF(s) - f(0)$$

Példa: Határozzuk meg az $f(t) = e^{2t}$ függvény deriváltfüggvényének Laplace-transzformáltját!

Megoldás: Mivel $e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-2}$, ezért $\mathcal{L}[f'(t)] = \dfrac{s}{s-2} - 1 = \dfrac{2}{s-2}$

Megjegyzés: Ugyanazt az eredményt kapjuk, ha az $f'(t) = 2e^{2t}$ függvény Laplace transzformáltját közvetlenül számoljuk ki.

Függvény magasabb rendű deriváltjainak Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f második deriváltjának Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Függvény magasabb rendű deriváltjainak Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f második deriváltjának Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Bizonyítás: Kétszer felhasználjuk az első deriváltfüggvény Laplace-transzformáltjára vonatkozó tételt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = \\ s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = \\ = s^2F(s) - sf(0)) - f'(0)\end{aligned}$$

Függvény magasabb rendű deriváltjainak Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f n-edik deriváltjának Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Függvény magasabb rendű deriváltjainak Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor f n-edik deriváltjának Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Bizonyítás: Teljes indukciót alkalmazunk:
Az állítás $n = 1$-re és $n = 2$-re igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás n-re. Bizonyítjuk, hogy ekkor $n + 1$-re is igaz:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n+1)}(t)\right] = s\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] - f^{(n)}(0) =$$
$$= s\left(s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\right) - f^{(n)}(0) =$$
$$= s^{n+1} F(s) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - \ldots - f^{(n)}(0)$$

Hatványfüggvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor a $t^n f(t)$ $(t \in \mathbb{Z}^+)$ függvény Laplace-transzformáltját úgy kapjuk, hogy $F(s)$-t n-szer deriváljuk s változó szerint és ha n páratlan, akkor az így kapott függvény előjelét megváltoztatjuk. Tehát

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s)$$

Hatványfüggvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor a $t^n f(t)$ $(t \in \mathbb{Z}^+)$ függvény Laplace-transzformáltját úgy kapjuk, hogy $F(s)$-t n-szer deriváljuk s változó szerint és ha n páratlan, akkor az így kapott függvény előjelét megváltoztatjuk. Tehát

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s)$$

Bizonyítás:

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = F(s) \qquad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$$

$$\int_0^\infty f(t)(-t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s) \qquad / \cdot (-1)$$

$$\mathcal{L}\left[t f(t)\right] = \int_0^\infty t f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s)$$

Hatványfüggvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

Tétel: Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $F(s)$, akkor a $t^n f(t)$ $(t \in \mathbb{Z}^+)$ függvény Laplace-transzformáltját úgy kapjuk, hogy $F(s)$-t n-szer deriváljuk s változó szerint és ha n páratlan, akkor az így kapott függvény előjelét megváltoztatjuk. Tehát

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s)$$

Bizonyítás: Az állítás tehát $n = 1$-re igaz. Teljes indukcióval következik az állítás minden pozitív egész n-re:

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re. Bizonyítjuk, hogy ekkor $n+1$-re is igaz:

$$\mathcal{L}\left[t^{n+1} f(t)\right] = \mathcal{L}\left[t \cdot t^n f(t)\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] =$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s) = (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}s^{n+1}} F(s)$$