Fourier-sorok

Az előadáshoz kapcsolódó feladatsor megoldókulcsa

<u>def.:</u>

Ha az f függvény 2π szerint periodikus és integrálható valamely $[a, a+2\pi]$ intervallumon, akkor f *Fourier-során* az

$$\boxed{F(x)} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \boxed{a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \ldots}$$

trigonometrikus sort értjük, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx\,\mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx\,\mathrm{d}x$$

Fontos: ha f páros (vagy „majdnem páros") ill. ha páratlan (vagy „majdnem páratlan")[1], akkor célszerű az $a = -\pi$ választás. Ekkor az együtthatók:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,\mathrm{d}x \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,\mathrm{d}x \end{aligned}}$$

1.megj.: két páros függvény szorzata is páros: $\text{ps} \cdot \text{ps} = \text{ps}$

hasonlóan: $\begin{cases} \text{ps} \cdot \text{ps} = \text{ps} \\ \text{plan} \cdot \text{ps} = \text{plan} \\ \text{plan} \cdot \text{plan} = \text{ps} \end{cases}$

2.megj.: ebből következően:

$$f \text{ ps} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x)\cos kx \ \text{ps} \\ f(x)\sin kx \ \text{plan} \end{cases} \qquad \text{ill.} \quad f \text{ plan} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x)\cos kx \ \text{plan} \\ f(x)\sin kx \ \text{ps} \end{cases}$$

[1] „Majdnem páros” („majdnem páratlan”) alatt azt értjük, hogy f definíció szerint ugyan nem páros (nem páratlan), de a szimmetria a $[-\pi, \pi]$ intervallumnak csak véges sok pontjában - például az intervallum végpontjaiban - nem teljesül.

3.megj.: ebből következően:

- $\boxed{f \text{ ps vagy „majdnem ps”}} \Rightarrow f(x)\sin kx \text{ plan} \Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{f \text{ Fourier-sora csupa koszinuszos tagból áll}}$

- $\boxed{f \text{ plan vagy „majdnem plan”}} \Rightarrow f(x)\cos kx \text{ plan} \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow$

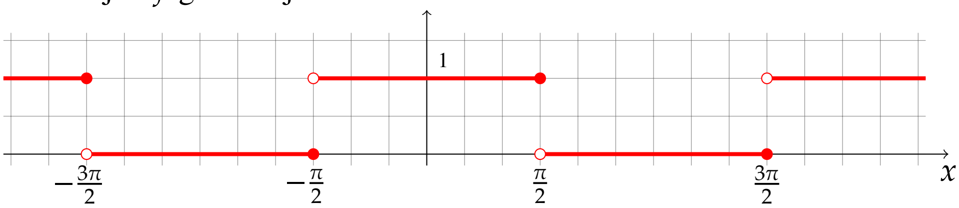
  $\Rightarrow \boxed{f \text{ Fourier-sora csupa szinuszos tagból áll}}$

Fejtse Fourier-sorba a következő függvényeket:

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ és $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi) = f(x)$

Mo.:

Ábrázoljuk f grafikonját!



f „majdnem páros”, ezért Fourier-sora csak koszinuszos tagokat tartalmaz, tehát $b_k = 0$, minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2\pi}\Big[\,x\,\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

(A grafikonról is kényelmesen leolvasható!)

$$\mathbf{a_1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x \overset{f\text{ ps}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(1-0) = \frac{2}{\pi}$$

$$\mathbf{a_2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x \overset{f\text{ ps}}{=} \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 0\right) = 0$$

$$\mathbf{a_3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 3x\,\mathrm{d}x \overset{f\text{ ps}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{3} - 0\right) = -\frac{2}{3\pi}$$

$\vdots$

$$\mathbf{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \overset{f\text{ ps}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\cos kx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\cos kx\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k} - 0\right) = \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & k = 1, 5, 9, \ldots \\ 0 & k = 2, 6, 10, \ldots \\ -\frac{2}{k\pi} & k = 3, 7, 11, \ldots \\ 0 & k = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$$

Ezekkel az együtthatókkal kapjuk végül f Fourier sorát:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{2}{5\pi}\cos 5x - \frac{2}{7\pi}\cos 7x + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos\left[(2k+1)x\right]\right)$$

megj.: gyakorlásképpen ellenőrizzük, hogy a szinuszos tagok együtthatói 0-k!

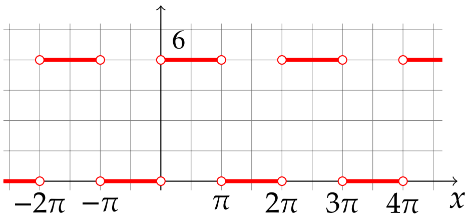
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k} + \frac{\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{k}\right) = 0$$

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}6 & \text{ha}\quad 0<x<\pi\\ 0 & \text{ha}\quad -\pi<x<0\end{cases}\qquad$ és $\quad\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi)=f(x)$

Mo.:

Ábrázoljuk f grafikonját!



f nem páros, nem páratlan.

$$\mathbf{a_0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}6\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left[6x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(6\pi-0)=3$$

(Ez a grafikonról is kényelmesen leolvasható!)

$$\mathbf{a_k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}6\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{6}{k}\sin kx\right]_0^{\pi}=\frac{6}{k\pi}(\sin k\pi-\sin 0)=0$$

$$\mathbf{b_k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}6\sin kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{6}{k}\cos kx\right]_0^{\pi}=-\frac{6}{\pi k}(\cos k\pi-\cos 0)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{6}{\pi k}(-1-1)=\dfrac{12}{\pi k} & k=1,3,5,\dots\\[2ex] -\dfrac{6}{\pi k}(1-1)=0 & k=2,4,6,\dots\end{cases}$$

Ezekkel az együtthatókkal f Fourier sora:

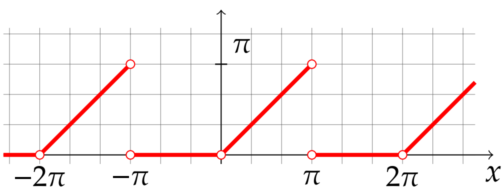
$$F(x)=3+\frac{12}{\pi}\sin x+\frac{12}{3\pi}\sin 3x+\frac{12}{5\pi}\sin 5x+\ldots=3+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{12}{(2k+1)\pi}\sin\left[(2k+1)x\right]\right)$$

megj.: f eltolással páratlan függvény $\quad\Rightarrow\quad$ Fourier-sora „csupa szinuszos tag + 3”

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}x & \text{ha}\quad 0<x<\pi\\ 0 & \text{ha}\quad -\pi<x<0\end{cases}\qquad$ és $\quad\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi)=f(x)$

Mo.:

Ábrázoljuk f grafikonját!



f nem páros, nem páratlan.

$$\mathbf{a_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

(Ez a grafikonról is kényelmesen leolvasható!)

$$\mathbf{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin kx + \frac{1}{k^2}\cos kx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(0 + \frac{1}{k^2}\cos k\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{k^2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\cos k\pi - \frac{1}{k^2}\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{k^2}\right) = -\frac{2}{\pi k^2} & k = 1,3,5,\ldots \\ 0 & k = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

$$\mathbf{b_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin kx\,\mathrm{d}x \overset{**}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{k}\pi\cos k\pi + 0\right) - (0 + 0)\right] = -\frac{1}{k}\cos k\pi = \begin{cases} \frac{1}{k} & k = 1,3,5,\ldots \\ -\frac{1}{k} & k = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

f Fourier-sora:

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots$$

megj.: parciális integrálással

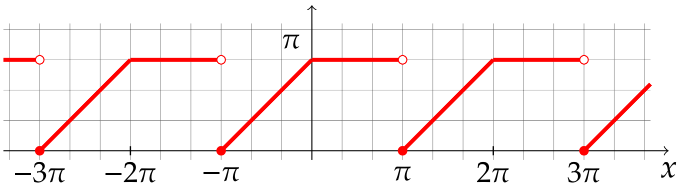
* $\int x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}x\sin kx - \frac{1}{k}\int \sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}x\sin kx + \frac{1}{k^2}\cos kx + C$

** $\int x\sin kx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}x\cos kx + \frac{1}{k}\int \cos kx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}x\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx + C$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \pi & \text{ha} \quad 0 \le x < \pi \\ x + \pi & \text{ha} \quad -\pi \le x < 0 \end{cases} \quad$ és $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + 2\pi) = f(x)$

Mo.:

Ábrázoljuk f grafikonját!



f nem páros, nem páratlan.

$$\mathbf{a_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} (x+\pi)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \pi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} + \pi x \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi} \left[\pi x \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left((0+0) - \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^2 \right) \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\pi^2 - 0 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 \right) = \frac{3\pi}{4}$$

(Ez a grafikonról is kényelmesen leolvasható!)

$$\mathbf{a_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (x+\pi) \cos kx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \pi \cos kx\,\mathrm{d}x =$$

$$\overset{\text{parc.int.}}{=} \frac{1}{\pi} \left[(x+\pi) \frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi \sin kx}{k} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left(0 + \frac{1}{k^2} \right) - \left(0 + \frac{\cos(-k\pi)}{k^2} \right) \right) + \frac{1}{\pi} (0 - 0) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{\cos(-k\pi)}{k^2} \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi k^2} & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$\mathbf{b_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (x+\pi) \sin kx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \pi \sin kx\,\mathrm{d}x =$$

$$\overset{\text{parc.int.}}{=} \frac{1}{\pi} \left[-(x+\pi) \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \cos kx}{k} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{\pi}{k} + 0 \right) - (0+0) \right) + \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos k\pi}{k} + \frac{\pi}{k} \right) = -\frac{1}{k} - \frac{\cos k\pi}{k} + \frac{1}{k} =$$

$$= -\frac{\cos k\pi}{k} = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & k = 1, 3, 5, \ldots \\ -\dfrac{1}{k} & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

f Fourier-sora:

$$F(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x + \ldots$$