Függvények folytonossága, határérték

Eredmények, útmutatások a Vajda-féle feladatsorhoz

1. Határozzon meg a megadott $\epsilon > 0$ számhoz olyan $\delta > 0$ számot (ha lehetséges), hogy az x_0 pont δ-sugarú környezetében felvett függvényértékek ϵ-nál kevesebbel térjenek el a függvény x_0 helyen felvett értékétől!

   A feladatok az $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ egyenlet megoldásával, vagy okoskodással oldhatók meg.

   (a) $f(x) = x^2 \qquad x_0 = 0 \qquad \epsilon = 10^{-3}$

   $$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$
   $$\left|x^2 - 0\right| < 10^{-3}$$
   $$\left|x^2\right| < 10^{-3}$$
   $$x^2 < 10^{-3}$$
   $$-\sqrt{10^{-3}} < x < \sqrt{10^{-3}}$$
   $$-\frac{1}{10\sqrt{10}} < x < \frac{1}{10\sqrt{10}}$$
   $$0 - \frac{1}{10\sqrt{10}} < x < 0 + \frac{1}{10\sqrt{10}}$$

   Ebből:

   $$\delta = \frac{1}{10\sqrt{10}} \approx 0,032$$

   (Megj.: minden $0 < \delta^* < \frac{1}{10\sqrt{10}}$ is jó.)

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad x_0 = 1 \qquad \epsilon = 10^{-2}$

   $$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$
   $$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 10^{-2}$$
   $$-10^{-2} < \frac{1}{x} - 1 < 10^{-2}$$
   $$1 - \frac{1}{100} < \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{100}$$
   $$0,99 < \frac{1}{x} < 1,01$$
   $$\frac{1}{1,01} < x < \frac{1}{0,99}$$
   $$\frac{100}{101} < x < \frac{100}{99}$$
   $$1 - \frac{1}{101} < x < 1 + \frac{1}{99}$$

   Ebből:

   $$\delta = min\left\{\frac{1}{101}, \frac{1}{99}\right\} = \frac{1}{101} \approx 0,01$$

   (c) $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2-9} \qquad x_0 = 2 \qquad \epsilon = 10^{-1}$

   Mo.: $\delta = min\left\{\frac{1}{49}, \frac{1}{51}\right\} = \frac{1}{51} \approx 0,0196$[1]

[1] Figyelem! A feladatsorban hibásan $x_0 = 3$ szerepel. $3 \notin D_f$. Helyesen (pl.) $x_0 = 2$. A fenti megoldás $x_0 = 2$-vel értendő.

(d) $f(x) = [x] \qquad x_0 = 2 \qquad \epsilon = \frac{1}{2}$

Mo.: Nem létezik a feltételeket kielégítő δ szám.

(e) $f(x) = [x] \qquad x_0 = \frac{12}{7} \qquad \epsilon = 10^{-3}$

Mo.: $\delta = \frac{2}{7}$

Határozza meg a követező határértékeket:

2. A $\frac{0}{0}$ típusú ("problémás") határértékeket ((b)-(f)) a számláló ill. nevező szorzattá alakítása utáni egyszerűsítéssel kapjuk meg.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x + 1}{2x^2 - 9x + 5} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - 0 + 0 + 1}{0 - 0 + 5} = \frac{1}{5}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-3} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{-x^2 + 2x + 15} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(-x+5)} = \lim_{x\to -3} \frac{x-1}{-x+5} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

(d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x - 2}$$

I. megoldás (elemi algebrai átalakításokkal)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - x) - (x^2 - 1)}{(x^3 - 1) + (x - 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^2 - 1) - (x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left[x(x+1) - (x+1)\right]}{(x-1)(x^2 + x + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x^2 + x + 2} = \frac{0}{4} = 0$$

II. megoldás (polinomosztással)

Az $x = 1$ helyen a számláló is és a nevező is 0, tehát az $x - 1$ tényező mindkettőből kiemelhető. A számlálót is és a nevezőt is osszuk el az $x - 1$ polinommal:

$$\begin{array}{rcccl} (x^3 - x^2 - x + 1) & : & (x-1) & = & x^2 - 1 \\ -x + 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} (x^3 + x - 2) & : & (x-1) & = & x^2 + x + 2 \\ x^2 + x - 2 & & & & \\ 2x - 2 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

Ezekből:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 - 1)}{(x-1)(x^2 + x + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 2} = \frac{0}{4} = 0$$

III. megoldás (Horner-elrendezéssel)

	1	−1	−1	1
1	1	0	−1	**0**

ill.

	1	0	1	−2
1	1	1	2	**0**

A táblázatok jelentése:

$$(x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) = x^2 - 1 \quad \text{ill.} \quad (x^3 + x - 2) : (x - 1) = x^2 + x + 2$$

Innen ugyanúgy, mint a II. megoldásban.

(e)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)(x^2+4)=(-4)\cdot 8=-32$$

(f)

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(x-\frac{1}{2})(8x^2+4x+2)}{(x-\frac{1}{2})(6x-2)}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^2+4x+2}{6x-2}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$$

Ugyanis:

	8	0	0	−1
1/2	8	4	2	**0**

ill.

	6	−5	1
1/2	6	−2	**0**

3. Kiemelés, vagy a tört alkalmas bővítése utáni egyszerűsítéssel juthatunk megoldásra ($\frac{0}{0}$ típus).

(a)

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)}=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\frac{1}{4}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{2x}-x}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{\sqrt{2x}-x}\cdot\frac{\sqrt{2x}+x}{\sqrt{2x}+x}\right)=\ldots=8$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=\ldots=0$$

(d)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\right)=\ldots=-\frac{1}{16}$$

(e)

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-4\sqrt{x-4}}{x^2-6x+5}=\ldots=-\frac{15}{32}$$

4. Egyszerűsítsünk megfelelő x-hatvánnyal! ($\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típus)
(megj.: célszerű a nevezőben szereplő legmagasabb fokú x-hatvánnyal egyszerűsíteni)

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+4}{3x^3+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{3+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{3}=0$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{-5x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-5+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{5}$$

(c)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-12x^2+5x+1}{-x^2+5x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-12+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{-\infty}{-1}=\infty$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+5}{5x^2-7x+3}=\ldots=\frac{2}{5}$$

(e)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-3x^2+x-11}{9x^2+17x-8}=\ldots=-\infty$$

(f)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-2x+22}{1-3x+2x^2-10x^3}=\ldots=0$$

5. A $\infty-\infty$ típusú határértékeket a benne szereplő tagok összegével bővítve, majd alkalmas x-hatvánnyal egyszerűsítve jutunk megoldásra. (Hasonlóan, mint számsorozatoknál.)

(a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{-1}{\infty}=0$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x+1}-\sqrt{x^2+6x+4}\right)=\ldots=\infty$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+\sqrt{x}}-\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x+\sqrt{x}}-\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{2x+\sqrt{x}}+\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{2x+\sqrt{x}}+\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}{\sqrt{2x+\sqrt{x}}+\sqrt{2x-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+\sqrt{x}}+\sqrt{2x-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

6. Megadható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{ha} \quad x>2\\ -x+p & \text{ha} \quad x\le 2\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{ha} \quad x\ne 0\\ p & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$

Megoldás:
Felhasználjuk, hogy f pontosan akkor folytonos egy x_0 helyen, ha ott létezik véges határértéke, és az megegyezik az ott felvett helyettesítési értékkel, azaz ha

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$$

és

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,.$$

A határértékeket jobb- és baloldali határértékek segítségével vizsgáljuk:

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \;\Leftrightarrow\; \left[\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \;\text{ és }\; \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \;\text{ és }\; \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)\right]$$

A feladatok grafikusan is megoldhatók.

(a) Mo.: $p = 6$

Vegyük figyelembe, hogy f a köv. alakba írható: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{ha} \quad x > 2 \\ -x+p & \text{ha} \quad x \leq 2 \end{cases}$

Majd folytassuk $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ vizsgálatával!

(b) Mo.: Nincs megfelelő p érték.

0-ban a függvény bal- ill. jobboldali határértéke is $+\infty$, így bárhogy is definiáljuk a függvényt 0-ban, nem lesz ott folytonos.

7. Tudjuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax + 5}{x - 5} & \text{ha} \quad x \neq 5 \\ b & \text{ha} \quad x = 5 \end{cases}$$

függvény folytonos $x_0 = 5$-ben. Határozza meg a és b értékét!

Mo.: Mivel f folytonos az $x_0 = 5$ helyen, ezért ott a bal- és jobboldali határérték is megegyezik az $f(5) = b$ helyettesítési értékkel, azaz:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = b$$

teljesül.
Részletezve:

$$b = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - ax + 5}{x - 5} = \frac{25 - 5a + 5}{0^+} = \frac{30 - 5a}{0^+}$$

$$b = \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{x^2 - ax + 5}{x - 5} = \frac{25 - 5a + 5}{0^-} = \frac{30 - 5a}{0^-}$$

Ezek a határértékek tetszőleges $a \neq 6$ érték esetén $\pm\infty$-nel egyenlők, ezért kizárólag az $a = 6$ érték jön szóba.
Ezzel:

$$b = \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{(x-5)(x-1)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^+} (x - 1) = 4$$

$$b = \lim_{x \to 5^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \to 5^-} \frac{(x-5)(x-1)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^-} (x - 1) = 4$$

Kaptuk: $a = 6$, $b = 4$.

8. Hol és milyen jellegű szakadása van a következő függvényeknek?

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 4} = \frac{x(x-4)}{x - 4} = x \text{ ha } x \neq 4$$

($f(x)$ "majdnem ugyanaz", mint a $g(x) = x$ függvény, csak f 4-ben nincs értelmezve, míg g igen.)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} x = 4 \\ \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 4$$

Vagyis: $i)$ f-nek az $x = 4$ helyen létezik véges határértéke.
Viszont $ii)$ $4 \notin D_f$;
$i) - ii) \Rightarrow$ f-nek az $x = 4$ helyen hézagpontja van. (Megszüntethető szakadás. Ábrázoláskor: "üres karika".)

(b)

$$f(x) = \frac{5x^2 - 10x - 15}{(x+1)(x-3)} = \frac{5(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = 5 \text{ ha } x \neq -1 \text{ , } x \neq 3$$

$f(x)$ tehát majdnem ugyanaz, mint a konstans 5 függvény, csak éppen nincs értelmezve -1-ben és 3-ban. Válasz: f-nek megszüntethető szakadása van $x = -1$-ben és $x = 3$-ban (hézagpontok).

(c)

$$f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 - 9x}{(x+1)(x-3)} = \frac{3x(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = 3x \text{ ha } x \neq -1 \ , \ x \neq 3$$

Válasz: f-nek megszüntethető szakadása van $x = -1$-ben és $x = 3$-ban (hézagpontok).

(d)

$$f(x) = \frac{5x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{5(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{5}{x+2} \text{ ha } x \neq 1$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{5}{x+2} = „\frac{5}{0^+}" = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{5}{x+2} = „\frac{5}{0^-}" = -\infty$$

-2-ben nem egyezik meg a jobb- és a baloldali határérték, ezért ott nem megszüntethető a szakadás. Válasz: f-nek megszüntethető szakadása van $x = 1$-ben (hézagpont), nem megszüntethető szakadása $x = -2$-ben (másodfajú szakadás).

9. A következő, $\frac{0}{0}$ vagy $0 \cdot \infty$ típusú ("problémás") határértékek számolásakor alkalmazzuk a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

nevezetes összefüggést!

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x + 2\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x + 2}{\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin 5x) \text{ tg } 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

(c)

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 2x = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \cdot \frac{(\cos 2x)(\cos 2x)}{(\sin 2x)(\sin 2x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \cos^2 2x \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

(d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} = \ldots = 1$$

(Használjuk fel, hogy $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.)

10. Az (a) ill. (b) részben 1^∞ típusú ("problémás") határértékről van szó!

(a)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+7} \right)^{2x-15} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-6}{3x+7} \right)^{2x-15} = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{-6}{3x+7} \right)^{3x+7} \right]^{\frac{2x-15}{3x+7}} = \left(e^{-6} \right)^{\frac{2}{3}} = e^{-4}$$

(b)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{x^2} \right)^{x^2} \right]^{\frac{x}{x^2}} = \left(e^{-1} \right)^0 = 1$$

(c)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+11}{2x+4} \right)^{5x} = \left(\frac{3}{2} \right)^\infty = \infty$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0$$

11. Vizsgálja meg, hogy hol nem folytonosak az alábbi függvények, és állapítsa meg, hogy ezen helyeken milyen jellegű szakadásuk van:

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^3-9x} & \text{ha} \quad x\neq 0\,,\ x\neq\pm 3\\ 1 & \text{ha} \quad x=-3\\ 0 & \text{ha} \quad x=0\\ \frac{1}{3} & \text{ha} \quad x=3\end{cases}$

Mo.: Oldjuk meg grafikusan, felhasználva a köv. összefüggést:

$$\frac{x^2-9}{x^3-9x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x}\ \text{ ha }\ x\neq 0,\pm 3$$

f-nek 0-ban nem-megszüntethető szakadása van, -3-ban megszüntethető szakadása van (hézagpont). (Az $x=3$ helyen folytonos a függvény.)

(b) $f(x)=\begin{cases}2\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}+3x & \text{ha} \quad x\neq 0\\ -2 & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$

Mo.: Használjuk fel, hogy $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & \text{ha} \quad x\geq 0\\ -x & \text{ha} \quad x<0\end{cases}$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2}}+3x=\frac{2x}{|x|}+3x=\begin{cases}\frac{2x}{x}+3x & \text{ha } x>0\\ \frac{2x}{-x}+3x & \text{ha } x<0\end{cases}$$

Ez alapján:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{2x}{x}+3x\right)=-2+0=-2$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{x}+3x\right)=2+0=2$$

Vagyis 0-ban nem egyezik meg a bal- és a jobboldali határérték, tehát f-nek 0-ban nem-megszüntethető szakadása van (véges ugrás). (Mivel $f(0)=-2$, ezért a függvény 0-ban balról folytonos, jobbról nem.)

(c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} & \text{ha} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$

Mo.:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1=f(0),$$

tehát 0-ban megegyezik a határérték és a helyettesítési érték, ezért f folytonos 0-ban.
Viszont f-nek nem-megszüntethető szakadása van a sin függvény 0-tól különböző zérushelyein, azaz minden $x=k\cdot\pi$ helyen, ahol $k\in\mathbf{Z}\setminus 0$. Lássuk be például, hogy

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{x}{\sin x}=+\infty$$

és

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{x}{\sin x}=-\infty$$

12. Határozza meg az alábbi függvények jobb- ill. baloldali határértékét az x_0 helyen. Döntse el, hogy folytonos-e a függvény az adott pontban, illetve hogy milyen szakadási helye van x_0-ban!

(a) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ $\qquad x_0=3$

(b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2}$ $\qquad x_0=0$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - |x|} \qquad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha} \quad x \leq -1 \\ 0 & \text{ha} \quad -1 < x < 5 \\ -2 & \text{ha} \quad 5 \leq x \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x < 0 \\ 7 & \text{ha} \quad x = 0 \\ 1 & \text{ha} \quad 0 < x \end{cases}$

Megoldás:

(a)

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} (-1) = -1$$

és

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} 1 = 1$$

f-nek nem-megszüntethető szakadása van a 3 helyen (véges ugrás).

(b)

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2} = \frac{x+4-4}{x^2(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

felhasználásával:

$$\lim_{x \to 0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

f-nek nem-megszüntethető szakadása van a 0 helyen.

(c) f-nek nem-megszüntethető szakadása van a 0 helyen.

(d) f-nek nem-megszüntethető szakadása van az 5 helyen (véges ugrás). (És véges ugrása van a -1 helyen is.)

(e) f-nek megszüntethető szakadása van a 0 helyen (hézagpont).