Lineáris transzformáció

1. Legyen a φ lineáris transzformáció mátrixa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$.

Határozza meg az ABC háromszög csúcspontjainak φ transzformáltjait, ha $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(2,-1)$!

Mo.:

$$\varphi(A) = \varphi\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\varphi(B) = \varphi\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\varphi(C) = \varphi\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right) = \mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$$

megj.: a számolásból az is kiderült, hogy a transzformációnak az $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ ill. $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ vektorok sajátvektorai $\lambda = 1$ ill. $\lambda = -2$ sajátértékkel. (vö.: **11.** feladat)

2. Értelmezze azt a transzformációt, melyet az $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ mátrix ír le!

Mo.:

A sík tetszőleges (x,y) pontjára: $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\x+y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$, ahol $X = Y$. Tehát a transzformáció a sík pontjait az $Y = X$ egyenletű egyenesre képezi.

megj.: az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}]$ jelöléseket alkalmazva: $\dim\langle\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\rangle = \rho(\mathbf{A}) = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\varphi) = 1$

kieg.:
A TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKEI, SAJÁTVEKTORAI:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Az egyenletnek két gyöke van: $\lambda = 0$ ill. $\lambda = 2$

$\boxed{\lambda = 0}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x+y=0\\ x+y=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \{\ y = -x$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\-x\end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $x \neq 0$.

$\boxed{\lambda = 2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x+y=2x\\ x+y=2y\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \{\ y = x$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $x \neq 0$.

3. Határozza meg azokat az egyeneseket, amelyek a $\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$ mátrixszal megadott transzformáció során önmagukba mennek át! (Példatár 6.3.4. feladat)

Mo.:

A sík tetszőleges (x,y) pontjára $\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+y\\3x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$, tehát $X = 2x + y$, $Y = 3x$.

Ha az $y = mx + c$ egyenest a transzformáció önmagára képezi, akkor $Y = mX + c$, amiből $3x = m(2x + y) + c$, vagyis $y = \frac{3-2m}{m}x - \frac{c}{m}$ következik. Innen $m = \frac{3-2m}{m}$ és $c = -\frac{c}{m}$.

Ezen egyenletrendszernek két megoldása van: $m = -3$, $c = 0$ ill. $m = 1$, $c = 0$.

Vagyis két ilyen egyenes létezik:

$y = -3x$ ill. $y = x$.

HF.: átgondolni, mi a helyzet, ha $m = 0$ ill. ha $\nexists m$.

4. Adja meg az alábbi, síkbeli lineáris transzformációk mátrixát:

(a) origóra való tükrözés

(b) $y = x$ egyenesre való tükrözés

(c) 30°-os forgatás

(d) origóra tükrözés, majd $y = x$ egyenesre való tükrözés

(e) $\mathbf{e_1} \mapsto \mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2} \mapsto \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$

Mo.:

(Jelölés: $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$)

(a) **origóra való tükrözés**

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' = -\mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2}' = -\mathbf{e_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{a transzformáció mátrixa: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

kieg.:

A TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKEI, SAJÁTVEKTORAI:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 = 0$$

Az egyenletnek egy gyöke van: $\lambda = -1$

$\boxed{\lambda = -1}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x = -x \\ -y = -y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ y = y \end{cases}$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Tehát a sík minden nem-nulla vektora sajátvektor.

(b) $\mathbf{y = x}$ **egyenesre való tükrözés**

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' = \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_2}' = \mathbf{e_1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{a transzformáció mátrixa: } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kieg.:
A TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKEI, SAJÁTVEKTORAI:

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Az egyenletnek két gyöke van: $\lambda = 1$ ill. $\lambda = -1$

$\boxed{\lambda = 1}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{Bx} = \lambda\mathbf{x} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \{\ y = x$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $x \neq 0$.

$\boxed{\lambda = -1}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{Bx} = \lambda\mathbf{x} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \{\ y = -x$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $x \neq 0$.

(c) **30°-os forgatás**

felh.: az origó középpontú, pozitív irányú, α szögű forgatás mátrixa: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

A transzformáció mátrixa tehát: $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

kieg.:
A TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKEI, SAJÁTVEKTORAI:

$$\det(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$$

Az egyenletnek nincs megoldása, ezért a transzformációnak nincs sajátértéke, nincsenek sajátvektorai.

(d) **origóra tükrözés, majd $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ egyenesre való tükrözés**

I. mo.:

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' = -\mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_2}' = -\mathbf{e_1} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \text{a transzformáció mátrixa: } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

II. mo.:

Az origóra tükrözés és az $y = x$ egyenesre tükrözés kompozíciójának mátrixa: a két transzformáció mátrixának (megfelelő sorrendű) szorzata.

Megoldás: $\mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(e)

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2}' = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \text{a transzformáció mátrixa: } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. A **4**. feladatban megadott transzformációkat alkalmazza az $y = 3x - 2$ egyenlettel megadott egyenesre! Írja fel az egyenes transzformáltjait!

Mo.:

Az $y = 3x - 2$ egyenes pontjai az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ 3x - 2 \end{bmatrix}$ alakú pontok.

(a)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -3x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Itt $X = -x$, $Y = -3x + 2$, amiből $Y = 3X + 2$. Megoldás: az $Y = 3X + 2$ egyenes.

(b)

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Itt $X = 3x - 2$, $Y = x$, amiből $Y = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$. Megoldás: az $Y = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ egyenes.

(c)

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}x + 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Itt $X = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right)x + 1$, $Y = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x - \sqrt{3}$.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{1+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}$$

Ebből $Y = \left(\frac{1+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}\right)X - \sqrt{3} - \frac{1+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}$.

Megoldás: az $Y = \left(\frac{1+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}\right)X - \sqrt{3} - \frac{1+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}$ egyenes.

(d)

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x+2 \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Itt $X = -3x + 2$, $Y = -x$, amiből $Y = \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}$. Megoldás: az $Y = \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}$ egyenes.

(e)

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3x-2 \\ 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-2 \\ 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Itt $X = 4x - 2$, $Y = 3x - 2$, amiből $Y = \frac{3}{4}X - \frac{1}{2}$. Megoldás: az $Y = \frac{3}{4}X - \frac{1}{2}$ egyenes.

6. Igaz-e, hogy lineáris transzformáció esetén az egyenes képe mindig egyenes?

Mo.:

Nem. Például tekintsük az x-tengelyre történő merőleges vetítést: ekkor az y-tengely képe az origó.

(Számolással: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$)

7. Írja fel az alábbi, térbeli lineáris transzformációk mátrixát!

(a) Az xy síkra való tükrözés

(b) Az x-tengely irányából nézve az yz-síkbeli α szögű forgatás.

Mo.:

(a)

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e_1}' = -\mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2}' = \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3}' = \mathbf{e_3} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{a transzformáció mátrixa: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kieg.:
A TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKEI, SAJÁTVEKTORAI:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

Az egyenletnek két gyöke van: $\lambda = -1$ ill. $\lambda = 1$

$\boxed{\lambda = -1}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x = -x \\ y = -y \\ z = -z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $x \neq 0$.

$\boxed{\lambda = 1}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x = x \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \{\ x = 0$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(b)

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2}' = (\cos\alpha)\mathbf{e_2} + (\sin\alpha)\mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_3}' = (-\sin\alpha)\mathbf{e_2} + (\cos\alpha)\mathbf{e_3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{a transzformáció mátrixa: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

8. Adja meg a következő, térbeli lineáris transzformáció mátrixát: az x-tengely mentén kétszeresre nyújtás, majd a z-tengely körül $45°$-kal való forgatás!

Mo.:

Az x-tengely mentén kétszeresre nyújtás esetén:

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' = 2\mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2}' = \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3}' = \mathbf{e_3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{a transzformáció mátrixa: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A z-tengely körül $45°$-kal való forgatás esetén:

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' = (\cos 45°)\mathbf{e_1} + (\sin 45°)\mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_2}' = (-\sin 45°)\mathbf{e_1} + (\cos 45°)\mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3}' = \mathbf{e_3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{a transzformáció mátrixa:}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° & 0 \\ \sin 45° & \cos 45° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A két transzformáció kompozíciójának mátrixa:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Legyen a φ_1 transzformáció mátrixa: $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a φ_2 transzformáció mátrixa pedig: $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Határozza meg a $\varphi_1 \circ \varphi_2$ mátrixát!

Mo.:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Igaz-e, hogy $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$?

Mo.:

Nem.

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2$$

(c) Írja fel az origó középpontú, 1-sugarú kör φ_1 transzformáltjának paraméteres egyenletrendszerét!

Mo.:

Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör paraméteres alakban:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Ezzel:

$$\varphi_1\left(\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}\right) = \mathbf{A}_1 \cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

A megoldás tehát:

$$\begin{cases} x = \cos t + 2\sin t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

10. Válassza ki az alábbiak közül a lineáris transzformációkat, és írja fel a transzformáció mátrixát!

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x] \qquad \varphi(\mathrm{p}(x)) = \mathrm{p}'(x)$

Mo.:

megj.: $\mathbb{R}_4[x]$ a legfeljebb negyedfokú polinomok vektortere. $\dim\mathbb{R}_4[x] = 5$.

p' a p polinom deriváltját jelöli.

A transzformáció lineáris:

$$\begin{cases} \varphi(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2) = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)' = \mathrm{p}_1' + \mathrm{p}_2' = \varphi(\mathrm{p}_1) + \varphi(\mathrm{p}_2) \\ \varphi(\lambda \mathrm{p}) = (\lambda \mathrm{p})' = \lambda\, \mathrm{p}' = \lambda\varphi(\mathrm{p}) \end{cases}$$

bázis: $B = \langle 1, x, x^2, x^3, x^4 \rangle$

$1' = 0 \quad x' = 1 \quad (x^2)' = 2x \quad (x^3)' = 3x^2 \quad (x^4)' = 4x^3$

A transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \varphi(z) = (2 + j)z$

Mo.:

A transzformáció lineáris:

$$\begin{cases} \varphi(z_1 + z_2) = (2 + j)(z_1 + z_2) = (2 + j)z_1 + (2 + j)z_2 = \varphi(z_1) + \varphi(z_2) \\ \varphi(\lambda z) = (2 + j)(\lambda z) = \lambda(2 + j)z = \lambda\varphi(z) \end{cases}$$

bázis: $B = \langle 1, j \rangle$

$\varphi(1) = (2+j)\cdot 1 = 2+j \quad \varphi(j) = (2+j)j = -1+2j$

A transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) $\varphi\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \varphi(z) = \frac{1}{z}$

Mo.:

Nem lineáris: $\varphi(z_1+z_2) = \frac{1}{z_1+z_2} \neq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$

De mégcsak nem is transzformáció: $\varphi(0) = \frac{1}{0}$ ↯

(d) $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ konstans.

Mo.:

Nem lineáris. Nem teljesül, hogy a null-vektor képe önmaga:

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} + 2\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$

11. Számolja ki a **1.** feladatban szereplő transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait. Írja fel a transzformáció mátrixát két megfelelően választott sajátvektor bázisában. Írja fel továbbá a transzformált háromszög csúcspontjainak koordinátáit e bázisban!

Mo.:

A transzformáció mátrixa: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\frac{11}{7} - \lambda & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{11}{7} - \lambda\right)\left(\frac{4}{7} - \lambda\right) - \frac{6}{7}\cdot\frac{9}{7} = \ldots = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Az egyenlet két gyöke: $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = 1$.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{11}{7}x + \frac{6}{7}y = -2x \\ \frac{9}{7}x + \frac{4}{7}y = -2y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -11x + 6y = -14x \\ 9x + 4y = -14y \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \left\{ \ y = -\frac{1}{2}x \right.$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $x \neq 0$.

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{11}{7}x + \frac{6}{7}y = x \\ \frac{9}{7}x + \frac{4}{7}y = y \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -11x + 6y = 7x \\ 9x + 4y = 7y \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 3x \\ y = 3x \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \left\{ \ y = 3x \right.$$

Megoldás: az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix}$ alakú vektorok, ahol $x \neq 0$.

Sajátbázisban felírt mátrix képzéséhez vegyünk a $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ sajátértékekhez tartozó egy-egy sajátvektort:

pl. $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$B = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$ bázisa a térnek. $\mathbf{s}_1' = -2\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2' = \mathbf{s}_2$. Ebben a bázisban a φ transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A háromszög csúcspontjainak képe:

Az **1.** feladatban láttuk, hogy a $B = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ bázisban az A, B, C pontok ill. ezek képeinek koordinátái:

$A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(2,-1)$, $A'(0,0)$, $B'(1,3)$, $C'(-4,2)$

Most, a $B = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ bázisban:

$A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, ezek képeinek koordinátái pedig:

$$A' = \varphi(A) = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0,0)$$

$$B' = \varphi(B) = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0,1)$$

$$C' = \varphi(C) = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2,0)$$