Teljes indukció - Rekurziók

Teljes indukció

I. Egyenlőségek

1. áll.: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re.

Az állítás nem-zárt alakban:

$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$-re.

"Tájékozódás":

$$\begin{array}{lll} 2^0 = 2^1 - 1 & \text{azaz:} & 1 = 2 - 1 \\ 2^0 + 2^1 = 2^2 - 1 & & 1 + 2 = 4 - 1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1 & & 1 + 2 + 4 = 8 - 1 \\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1 & & 1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1 \end{array}$$

stb.

biz.:

- $n = 0$-ra:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & \sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 \\ \text{j.o.:} & 2^{0+1} - 1 = 1 \end{array}\right\} \quad 1 = 1 \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*) \qquad 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k + 1$-re is:

  $$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} \overset{(*)}{=} 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

2. áll.: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$-ra.

Az állítás nem-zárt alakban:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$-ra.

"Tájékozódás":

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad (= 1)$$

$$1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \quad (= 5)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \quad (= 14)$$

biz.:

- $n = 1$-re:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 \\ \text{j.o.:} & \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1 \end{array}\right\} \quad 1 = 1 \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)\qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+(k-1)^2+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}\qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $$1^2+2^2+3^2+\ldots+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2 \overset{(*)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$

  $$=\frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=$$

  $$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

3. áll.: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}6^i=\frac{1}{5}(6^{n+1}-1)$ teljesül tetszőleges $n\in\mathbb{N}$-re.

Az állítás nem-zárt alakban:

$6^0+6^1+\ldots+6^n=\dfrac{1}{5}(6^{n+1}-1)\qquad \forall n\in\mathbb{N}$-re.

"Tájékozódás":

$$6^0=\frac{1}{5}(6^1-1)\quad(=1)$$

$$6^0+6^1=\frac{1}{5}(6^2-1)\quad(=7)$$

$$6^0+6^1+6^2=\frac{1}{5}(6^3-1)\quad(=43)$$

biz.:

- $n=0$-ra:

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{b.o.:} & \sum_{i=0}^{0}6^i=6^0=1\\[2ex] \text{j.o.:} & \frac{1}{5}(6^1-1)=1\end{array}\right\}\quad 1=1\qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)\qquad 6^0+6^1+\ldots+6^k=\dfrac{1}{5}(6^{k+1}-1)\qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $$6^0+6^1+\ldots+6^k+6^{k+1}\overset{(*)}{=}\frac{1}{5}(6^{k+1}-1)+6^{k+1}=\frac{1}{5}\left[6^{k+1}-1+5\cdot 6^{k+1}\right]=\frac{1}{5}\left[6\cdot 6^{k+1}-1\right]=\frac{1}{5}\left[6^{k+2}-1\right]$$

4. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan számokat 1-től kezdve összeadva mindig négyzetszámot kapunk!

biz. Próbálgatással sejtsük meg a képletszerű összefüggést:

$1=1^2\qquad 1+3=2^2\qquad 1+3+5=3^2\qquad 1+3+5+7=4^2\qquad$ stb.

Sejtés: $\quad 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2\qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$-ra.

Bizonyítsuk be teljes indukcióval:

- $n=1$-re:

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{b.o.:} & 2\cdot 1-1=1\\[1ex] \text{j.o.:} & 1^2=1\end{array}\right\}\quad 1=1\qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)\qquad 1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2 \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)\overset{(*)}{=}k^2+2k+1=(k+1)^2$

5. áll.: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k=\frac{q^n-1}{q-1}$ teljesül tetszőleges $n\in\mathbb{N}^+$-ra ($q\neq 1$).

Az állítás nem zárt alakban:

$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\dfrac{q^n-1}{q-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^+$-ra ($q\neq 1$).

biz.:

- $n=1$-re:

  $$\left.\begin{array}{ll}\text{b.o.:} & \sum\limits_{k=0}^{0} q^k=q^0=1\\[2ex] \text{j.o.:} & \dfrac{q-1}{q-1}=1\end{array}\right\}\quad 1=1 \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)\qquad 1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}=\dfrac{q^k-1}{q-1} \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $$1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}+q^k\overset{(*)}{=}\frac{q^k-1}{q-1}+q^k=\frac{q^k-1+q^k(q-1)}{q-1}=\frac{q^k-1+q^{k+1}-q^k}{q-1}=\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$

II. Egyenlőtlenségek

6. áll.: $n!\geq 3^n$, ha $n\geq 7$.
biz.:

- $n=7$-re:

  $7!=5040\geq 3^7=2187$ Teljesül.

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra, ahol $k\geq 7$ $(**)$:

  $(*)\qquad k!\geq 3^k \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $(k+1)!=k!(k+1)\overset{(*)}{\geq}3^k(k+1)\overset{(**)}{\geq}3^k\cdot 3=3^{k+1}$

7. áll.: $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$, ha $n\geq 2$.
biz.:

- $n=2$-re:

  $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}\overset{?}{<}2-\frac{1}{2}$$
  $$\frac{5}{4}\overset{?}{<}\frac{3}{2}$$
  $$1,25<1,5$$
  Teljesül.

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra, ahol $k\geq 2$:

  $(*)\qquad \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k} \qquad$ (*indukciós feltevés*)

Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\overset{(*)}{<}2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$

$$=2-\left(\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}\right)=2-\left(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\right)=2-\left(\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)^2}\right)=2-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)^2}\right)<$$

$$<2-\frac{1}{k+1}$$

8. áll.: $(2n)!<(n!)^2 4^{n-1}$, ha $n\geq 5$.
biz.:

- $n=5$-re:

$$10!\overset{?}{<}(5!)^2\cdot 4^4$$

$$3628800\overset{?}{<}(120)^2\cdot 256$$

$$3628800<3686400$$

Teljesül.

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)$ $(2k)!<(k!)^2 4^{k-1}$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

$$(2(k+1))!=(2k+2)!=(2k)!(2k+1)(2k+2)\overset{(*)}{<}(k!)^2 4^{k-1}(2k+1)(2k+2)<$$

$$<(k!)^2 4^{k-1}(2k+2)(2k+2)=(k!)^2 4^{k-1}2(k+1)2(k+1)=\left[(k+1)!\right]^2 4^k$$

9. áll.: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, ha $n\geq 2$.
biz.:

- $n=2$-re:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\overset{?}{>}\sqrt{2}$$

$$1,707...>1,414...$$

Teljesül.

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)$ $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\overset{(*)}{>}\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}>$$

$$>\frac{\sqrt{k}\sqrt{k}+1}{\sqrt{k+1}}=\frac{k+1}{\sqrt{k+1}}$$

10. áll.: $(1+h)^n\geq 1+hn$ teljesül tetszőleges $n\in\mathbb{N}$-re tetszőleges $h\in\mathbb{R}$, $h>-1$ esetén.
(*Bernoulli-egyenlőtlenség*)

biz.:

- $n=0$-ra:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{b.o.:} & (1+h)^0=1\\ \text{j.o.:} & 1+h\cdot 0=1\end{array}\right\}\quad 1\geq 1\qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)\qquad (1+h)^k \geq 1+hk$ tetszőleges $h \in \mathbb{R},\quad h > -1$ esetén. $\qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $$(1+h)^{k+1} = \underbrace{(1+h)^k}_{>0}\underbrace{(1+h)}_{>0} \overset{(*)}{\geq} (1+hk)(1+h) = 1+hk+h+h^2k = 1+h(k+1)+\underbrace{h^2k}_{\geq 0} \geq 1+h(k+1)$$

11. áll.: $\quad n \cdot 2^n < 3^n \quad$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re.

biz.:

- $\underline{n=0}$-ra:

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & 0 \cdot 2^0 = 0 \\ \text{j.o.:} & 3^0 = 1 \end{array}\right\} \quad 0 < 1 \qquad \text{Teljesül.}$$

  $\underline{n=1}$-re:

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & 1 \cdot 2^1 = 2 \\ \text{j.o.:} & 3^1 = 3 \end{array}\right\} \quad 2 < 3 \qquad \text{Teljesül.}$$

  $\underline{n=2}$-re:

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & 2 \cdot 2^2 = 8 \\ \text{j.o.:} & 3^2 = 9 \end{array}\right\} \quad 8 < 9 \qquad \text{Teljesül.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)\qquad k \cdot 2^k < 3^k \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $$(k+1)\cdot 2^{k+1} = k \cdot 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2 \cdot k \cdot 2^k + 2^{k+1} \overset{(*)}{<} 2 \cdot 3^k + 2^{k+1} = 2 \cdot 3^k + 2 \cdot 2^k \overset{(**)}{<} 2 \cdot 3^k + 3^k = 3^{k+1}$$

  $(**)\quad$ felhasználtuk: $2 \cdot 2^k < k \cdot 2^k < 3^k \qquad$ (hiszen feltehetjük, hogy $2 < k$, továbbá $(*)$)

III. Oszthatóság

12. áll.: $\quad 2^n \mid (2n)! \quad$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re.

biz.:

- $n = 0$-ra:

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & 2^0 = 1 \\ \text{j.o.:} & (2 \cdot 0)! = 0! = 1 \end{array}\right\} \quad 1 \mid 1 \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)\qquad 2^k \mid (2k)! \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $$(2(k+1))! = (2k+2)! = \underbrace{\underbrace{(2k)!}_{2^k \mid\ (*)}\,(2k+1)\,\underbrace{(2k+2)}_{2\mid}}_{2^{k+1}}$$

  Kaptuk tehát:

  $$2^{k+1} \mid (2(k+1))!$$

13. áll.: $\quad 6 \mid n^3 + 5n \quad$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re.

biz.:

- $n = 0$-ra:

  $0^3 + 5 \cdot 0 = 0$ és $6 \mid 0$. Teljesül az összefüggés.

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)$ $6 \mid k^3 + 5k$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 =$

  $= \underbrace{k^3 + 5k}_{6|\,(*)} + \underbrace{3\,\underbrace{k(k+1)}_{2|}}_{6|} + \underbrace{6}_{6|}$ Kaptuk tehát: $6 \mid (k+1)^3 + 5(k+1)$.

14. áll.: $5 \mid 3^{2n} + 4^{n+1}$ teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re.

biz.:

- $n = 0$-ra:

  $$\left.\begin{array}{l} 3^{2\cdot 0} + 4^{0+1} = 1 + 4 = 5 \\ 5 \mid 5 \end{array}\right\} \quad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*)$ $5 \mid 3^{2k} + 4^{k+1}$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k+1$-re is:

  $3^{2(k+1)} + 4^{k+1+1} = 3^{2k+2} + 4^{k+1+1} = 3^2 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 4^{k+1} = 9 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 4^{k+1} = 5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 4^{k+1} =$

  $= \underbrace{5 \cdot 3^{2k}}_{5|} + 4 \cdot \underbrace{\left(3^{2k} + 4^{k+1}\right)}_{5|\ (*)}$

Rekurzió és teljes indukció

1. (a) Adjon rekurzív definíciót $n!$-ra!

Mo.: Felhasználjuk, hogy

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{ha} \quad n > 0 \end{cases}$$

Tájékozódás:

$$\begin{aligned} &f(0) = 0! = \mathbf{1} \\ &f(1) = 1! = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f(0)} = 1 \cdot 1 = 1 \\ &f(2) = 2! = \mathbf{2} \cdot \mathbf{f(1)} = 2 \cdot 1 = 2 \\ &f(3) = 3! = \mathbf{3} \cdot \mathbf{f(2)} = 3 \cdot 2 = 6 \\ &\vdots \\ &f(n) = n! = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f(n-1)} \end{aligned}$$

Megoldás:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0 \\ n \cdot f(n-1) & \text{ha} \quad n > 0 \end{cases}$$

(b) Írjunk fel rekurzív összefüggést egy n-elemű halmaz részhalmazainak s_n számára!

Mo.: Felhasználjuk, hogy $s_n = 2^n$, ha $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} &s_0 = 2^0 = 1 \\ &s_1 = 2^1 = 2 \\ &s_2 = 2^2 = 4 \\ &\vdots \\ &s_n = 2^n \end{aligned}$$

Megoldás:

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0 \\ 2 \cdot s_{n-1} & \text{ha} \quad n > 0 \end{cases}$$

2. Egy mértani sorozat első eleme 2, kvóciense pedig $q = 3$.

(a) Adja meg a sorozatot rekurzióval!

Mo.: A sorozat első néhány eleme, és általános tagja explicit alakban:

$$\begin{aligned} &a_1 = 2 \\ &a_2 = 2 \cdot 3 \\ &a_3 = 2 \cdot 3^2 \\ &a_4 = 2 \cdot 3^3 \\ &\vdots \\ &a_k = 2 \cdot 3^{k-1} \\ &a_{k+1} = 2 \cdot 3^k \end{aligned}$$

Megoldás:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{ha} \quad n = 1 \\ 3 \cdot a_{n-1} & \text{ha} \quad n > 1 \end{cases}$$

(b) Igazolja teljes indukcióval, hogy a sorozat első n elemének összege: $s_n = 3^n - 1$

- $n = 1$-re:

$$\left.\begin{aligned} &\text{b.o.:} \quad s_1 = a_1 = 2 \\ &\text{j.o.:} \quad 3^n - 1 = 2 \end{aligned}\right\} \quad 2 = 2 \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*) \qquad s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = 3^k - 1 \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k + 1$-re is:

$$s_{k+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} \overset{(*)}{=} 3^k - 1 + a_{k+1} = 3^k - 1 + \underbrace{2 \cdot 3^k}_{\text{ld. (a)}} = 3 \cdot 3^k - 1 = 3^{k+1} - 1$$

3. Határozzuk meg az alábbi, rekurzióval adott sorozatok explicit alakját és bizonyítsuk be teljes indukcióval annak helyességét!

(a) $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$, ahol $n \geq 2$, és $a_1 = 1$.

Mo.:
A sorozat első néhány eleme:

$$a_1 = 1 \ , \quad a_2 = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2} \ , \quad a_3 = \sqrt{1 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3} \ , \quad a_4 = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} \quad \text{stb.}$$

Sejtés: $a_n = \sqrt{n}$

biz.:

- $n = 1$-re:

$$\left.\begin{aligned} &\text{b.o.:} \quad a_1 = 1 \ \ \text{(def.)} \\ &\text{j.o.:} \quad \sqrt{1} = 1 \end{aligned}\right\} \quad 1 = 1 \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*) \qquad a_k = \sqrt{k} \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k + 1$-re is:

$$a_{k+1} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{1 + a_k^2} \overset{(*)}{=} \sqrt{1 + (\sqrt{k})^2} = \sqrt{k + 1}$$

(b) $a_n = 2a_{n-1} - 1$, ahol $n \geq 2$, és $a_1 = 2$.

Mo.:
A sorozat első néhány eleme:

$a_1 = 2$, $\quad a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $\quad a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $\quad a_4 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, $\quad a_5 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$, $\quad$ stb.

Sejtés: $a_n = 2^{n-1} + 1$

biz.:

- $n = 1$-re:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & a_1 = 2 \ \ \text{(def.)} \\[2ex] \text{j.o.:} & 2^{1-1} + 1 = 2 \end{array}\right\} \quad 2 = 2 \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*) \qquad a_k = 2^{k-1} + 1 \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k + 1$-re is:

  $$a_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} 2a_k - 1 \stackrel{(*)}{=} 2 \cdot (2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 2 - 1 = 2^k + 1$$

(c) $a_n = \dfrac{1}{2 - a_{n-1}}$, ahol $n \geq 2$, és $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Mo.:
A sorozat első néhány eleme:

$a_1 = \dfrac{1}{2}$, $\quad a_2 = \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$, $\quad a_3 = \dfrac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{4}$, $\quad a_4 = \dfrac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \dfrac{4}{5}$, $\quad$ stb.

Sejtés: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

biz.:

- $n = 1$-re:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{b.o.:} & a_1 = \dfrac{1}{2} \ \ \text{(def.)} \\[2ex] \text{j.o.:} & \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{Teljesül az összefüggés.}$$

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen k-ra:

  $(*) \qquad a_k = \dfrac{k}{k+1} \qquad$ (*indukciós feltevés*)

  Belátjuk, hogy akkor igaz $k + 1$-re is:

  $$a_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2 - a_k} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$

4. Legyen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ továbbá $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ minden $n \geq 2$ esetén.

(*Fibonacci-sorozat*: a sorozat két szomszédos tagjának összege adja a sorozat következő tagját.)

A sorozat első néhány eleme: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \qquad \text{tetszőleges} \quad n \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

biz.:

- $\underline{n = 0}$-ra:

b.o.: $a_0 = 0$ (def)

j.o.: $\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$

$\Big\}$ $0 = 0$ Teljesül az összefüggés.

<u>$n = 1$</u>-re:

b.o.: $a_1 = 1$ (def)

j.o.: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\Big\}$ $1 = 1$ teljesül az összefüggés

- Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül valamilyen két egymást követő elemre:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \\ a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \end{cases} \qquad (\textit{indukciós feltevés})$$

Belátjuk, hogy akkor igaz a rájuk következő elemre is:

$$a_{k+1} \overset{\text{def}}{=} a_k + a_{k-1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}} + \frac{4}{(1-\sqrt{5})^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{2(1+\sqrt{5})+4}{(1+\sqrt{5})^2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{2(1-\sqrt{5})+4}{(1-\sqrt{5})^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{2+2\sqrt{5}+4}{1+2\sqrt{5}+5}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{2-2\sqrt{5}+4}{1-2\sqrt{5}+5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot 1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$