Lineáris tér

Az előadáshoz kapcsolódó feladatsor megoldókulcsa

1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}^*, \mathbf{w} = \begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}^*$.

(a) Írjuk fel az alábbi lineáris kombinációkat: $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$, $3\mathbf{v} + \mathbf{w}$

(b) Írja fel a fenti vektorok azon lineáris kombinációját, amely előállítja a $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}2 & 2 & -1\end{bmatrix}^*$ vektort.

(c) Van-e a fenti vektoroknak olyan lineáris kombinációja, amelyik előállítja a $\mathbf{d} = \begin{bmatrix}-1 & 7 & 4\end{bmatrix}^*$ vektort?

MEGOLDÁS:

(a) $$2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = 2\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-5\\1\end{bmatrix} \qquad 3\mathbf{v} + \mathbf{w} = 3\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\-2\\7\end{bmatrix}$$

(b) $$x\mathbf{v} + y\mathbf{w} = \mathbf{c} \quad\Rightarrow\quad x\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}x\\-x\\2x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3y\\y\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x+3y &= 2\\ -x+y &= 2\\ 2x+y &= -1\end{aligned}\right. \overset{\text{elemi úton}}{\Rightarrow} \left\{\begin{aligned} x &= -1\\ y &= 1\end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad -\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{c}$$

(c) $$x\mathbf{v} + y\mathbf{w} = \mathbf{d} \quad\Rightarrow\quad x\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\7\\4\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}x\\-x\\2x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3y\\y\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\7\\4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x+3y &= -1\\ -x+y &= 7\\ 2x+y &= 4\end{aligned}\right. \overset{\text{elemi úton}}{\Rightarrow} \text{Nincs megoldás.}$$

megj.: a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok által generált lineáris tér: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \{x\mathbf{v} + y\mathbf{w} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

megj.: a (b) ill. (c) részben azt kaptuk, hogy $\mathbf{c}$ benne van, míg $\mathbf{d}$ nincs benne a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok által generált lineáris térben: $\mathbf{c} \in \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$, $\mathbf{d} \notin \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$.

2. Az alábbiakban megadott vektorrendszerekről döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e!

(a) $\mathbf{a}(1; -2)$, $\mathbf{b}(2; 1)$, $\mathbf{c}(0; 1)$

(b) $\mathbf{a}(3; -1; 2)$, $\mathbf{b}(7; -1; 1)$, $\mathbf{c}(4; 0; -1)$

(c) $\mathbf{a}(1; 1; 0)$, $\mathbf{b}(1; 0; 1)$, $\mathbf{c}(0; 1; 1)$

MEGOLDÁS:

<u>def.:</u> A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ (egyazon vektortérből való) vektorok *lineárisan független rendszert* alkotnak (röviden: *lineárisan függetlenek*), ha a $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ egyenlőség csak úgy teljesül, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, más együtthatókkal nem. (Azaz, ha a vektorok csak triviálisan állítják elő a nullvektort.)

(a) **I.mo.:** NEM. A megadott vektorok kétdimenziós térből valók, abban legfeljebb 2-elemű lehet egy lineárisan független rendszer.

II.mo.: (Gauss-eliminációval)

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad x\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{c} x+2y=0\\ -2x+y+z=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/5 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/5 & 0\\ 0 & 1 & 1/5 & 0\end{array}\right)$$

A vezéregyesek száma (=2) kisebb, mint az ismeretlenek száma (=3), ezért az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Tehát van nem-triviális megoldása is. A vektorrendszer lineárisan összefüggő.

megj.: az utolsó táblázatból kiolvasható az egyenletrendszer megoldása:

$$\left\{\begin{array}{l} x-\frac{2}{5}z=0\\ y+\frac{1}{5}z=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{2}{5}z\\ y=-\frac{1}{5}z\\ z\in\mathbb{R}\ \text{tetszőleges}\end{array}\right.$$

megj.: pl. $z=5$-tel $\left\{\begin{array}{c} x=2\\ y=-1\\ z=5\end{array}\right.$ egy konkrét megoldás.

Ezekkel az együtthatókkal tehát: $2\mathbf{a}-\mathbf{b}+5\mathbf{c}=\mathbf{0}$ a null-vektor egy nem-triviális előállítása.

(b) NEM.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 4 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\overset{\text{sorcsere, stb.}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 7 & 4 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Több az ismeretlen, mint a vezéregyes, ezért végtelen sok megoldás van, így van nem-triviális is.
A vektorrendszer lineárisan összefüggő.

megj.:
az utolsó táblázatból $\left\{\begin{array}{c} x-z=0\\ y+z=0\end{array}\right.$ adódik, amiből pl. $\left\{\begin{array}{c} x=1\\ y=-1\\ z=1\end{array}\right.$ egy konkrét megoldás.

Ezen együtthatókkal tehát pl. $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$ egy nem-triviális előállítása a null-vektornak.

Ellenőrzés:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(c) IGEN.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása a triviális megoldás: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

A három vektor a nullvektort csak $0\mathbf{a} + 0\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{0}$ alakban állítja elő.

3. Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Igaz-e, hogy az alábbi vektorok is lineárisan független vektorok?

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

(b) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $5\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$

MEGOLDÁS

(a) IGAZ. A megoldásban megvizsgáljuk, hogy az adott vektorok a nullvektort előállítják-e a triviálistól különböző alakban is.

Képezzük tehát a következő vektori egyenletet: $x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + y(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + z(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \mathbf{0}$. $\quad (*)$

Átrendezve: $(x + z)\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b} + (y + z)\mathbf{c} = \mathbf{0}$

Mivel a feltétel szerint $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek, ezért a null-vektort csak triviálisan állítják elő. Tehát az előző egyenletből a $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ következik.

Az egyenletrendszert elemi úton, vagy Gauss-eliminációval is megoldhatjuk.

Megoldás Gauss-eliminációval: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Kaptuk: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ az egyenletrendszer egyetlen megoldása, vagyis a $(*)$ egyenlőség csak úgy teljesül, hogy $x = y = z = 0$. A három vektor tehát lineárisan független.

(b) NEM IGAZ. Kövessük az (a)-beli megoldás menetét:

$$x(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) + y(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) + z(5\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0} \quad (**) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x + y + 5z)\mathbf{a} + (2x - y + z)\mathbf{b} + (x - y - z)\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\overset{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ lin. függetlenek}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Megoldás Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 vezér-1-es adódott, az ismeretlenek száma viszont 3, ezért az egyenletrendszernek, és így a (∗∗) vektori egyenletnek is végtelen sok megoldása van. Tehát van nem-triviális megoldása is. (A triviális megoldás csak az egyik a végtelen sok közül.) A vektorok lineárisan összefüggőek.

Kiegészítés:

Adjuk meg a vektorok egy nem-triviális lineáris kombinációját, ami a **0**-t adja!

Ehhez tekintsük az utolsó táblázat összefüggéseit: $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

Ebből az egyenletrendszer megoldása: $\begin{cases} x = -2z \\ y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges} \end{cases}$

Pl. $z = -1$ választással egy konkrét megoldás: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

Ezekkel az együtthatókkal: $2(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) + 3(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) - (5\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$

4. Adjon meg az $\mathbb{R}^4$ vektortérben kételemű, háromelemű és négyelemű lineárisan független vektorrendszert!

MEGOLDÁS

példa kételemű, lineárisan független rendszerre: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

példa háromelemű, lineárisan független rendszerre: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

példa négyelemű, lineárisan független rendszerre: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

megj.: a fenti példákban magától értetődő, hogy a szereplő vektorok a null-vektort csak triviálisan állítják elő, máshogy nem.

megj.: két-elemű rendszer pontosan akkor lineárisan független rendszer, ha a benne szereplő vektorok közül egyik sem számszorosa a másiknak

megj.: egy-elemű rendszer pontosan akkor lineárisan független rendszer, ha a benne szereplő vektor nem a null-vektor

5. Lineáris teret alkotnak-e az alábbiak a valós számtest felett?

(a) a 3×3-as mátrixok

(b) azok a 3×3-as mátrixok, amelyekben az első sor első eleme 2

(c) azonos típusú diagonálmátrixok

(d) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

(e) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0\}$

(f) azok az (x, y, z) valós számhármasok, amelyekre teljesül, hogy $x + 2y - z = 0$

(g) azok az (x, y, z) valós számhármasok, amelyekre teljesül, hogy $x + 2y - z = 1$

(h) a $\cos(Ax) + \sin(Bx)$ alakú függvények (A, B valós számok)

(i) az $e^x (A\cos x + B\sin x)$ alakú függvények (A, B valós számok)

MEGOLDÁS

megj.: a műveletek minden esetben a szokásosak: mátrixok esetében a szokásos mátrixösszeadás ill. skalárral való szorzás, függvények esetében a szokásos függvényösszeadás ill. skalárral való szorzás stb.

(a) $\boxed{\text{a } 3 \times 3\text{-as mátrixok:} \quad \text{IGEN.}}$

Jelöljük a 3×3-as mátrixok halmazát M-mel. $\quad M = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \ , \ 1 \le i, j \le 3 \right\}$

A definícióban szereplő 10 tulajdonság tételes ellenőrzése:

i) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M \ \Rightarrow \ \mathbf{A} + \mathbf{B} \in M$, hiszen két 3×3-as mátrix összege is 3×3-as mátrix.

(M zárt az összeadás műveletére)

ii) az összeadás kommutatív: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M$ elemekre, hiszen a mátrix-összeadás általában is kommutatív, így a 3×3-as mátrixok körében is.

iii) az összeadás asszociatív: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in M$ elemekre, hiszen a mátrix-összeadás általában is asszociatív, így a 3×3-as mátrixok körében is.

iv) null-elem: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ezzel $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ teljesül minden $\mathbf{A} \in M$ elemre.

v) az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mátrix ellentettje a $\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$ mátrix

vi) $\mathbf{A} \in M \ \Rightarrow \ \lambda\mathbf{A} \in M$, hiszen egy 3×3-as mátrix λ-szorosa is 3×3-as mátrix.

(M zárt a skalárral való szorzás műveletére)

vii) $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$ tetszőleges $\mathbf{A} \in M$ esetén, hiszen

$$\lambda(\mu\mathbf{A}) = \lambda \left(\mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \lambda \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \mu a_{13} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \mu a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu a_{11} & \lambda\mu a_{12} & \lambda\mu a_{13} \\ \lambda\mu a_{21} & \lambda\mu a_{22} & \lambda\mu a_{23} \\ \lambda\mu a_{31} & \lambda\mu a_{32} & \lambda\mu a_{33} \end{bmatrix} = (\lambda\mu)\mathbf{A}$$

viii) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ tetszőleges $\mathbf{A} \in M$ esetén, hiszen

$$1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} & 1 \cdot a_{13} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} & 1 \cdot a_{23} \\ 1 \cdot a_{31} & 1 \cdot a_{32} & 1 \cdot a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ix) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$ tetszőleges $\mathbf{A} \in M$ mátrixra, hiszen

$$(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda + \mu)a_{11} & (\lambda + \mu)a_{12} & (\lambda + \mu)a_{13} \\ (\lambda + \mu)a_{21} & (\lambda + \mu)a_{22} & (\lambda + \mu)a_{23} \\ (\lambda + \mu)a_{31} & (\lambda + \mu)a_{32} & (\lambda + \mu)a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{11} & \lambda a_{12} + \mu a_{12} & \lambda a_{13} + \mu a_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu a_{21} & \lambda a_{22} + \mu a_{22} & \lambda a_{23} + \mu a_{23} \\ \lambda a_{31} + \mu a_{31} & \lambda a_{32} + \mu a_{32} & \lambda a_{33} + \mu a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \mu a_{13} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \mu a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$$

x) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M$ mátrixokra, hiszen

$$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \right) = \lambda \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \lambda(a_{12}+b_{12}) & \lambda(a_{13}+b_{13}) \\ \lambda(a_{21}+b_{21}) & \lambda(a_{22}+b_{22}) & \lambda(a_{23}+b_{23}) \\ \lambda(a_{31}+b_{31}) & \lambda(a_{32}+b_{32}) & \lambda(a_{33}+b_{33}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} & \lambda a_{13}+\lambda b_{13} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} & \lambda a_{23}+\lambda b_{23} \\ \lambda a_{31}+\lambda b_{31} & \lambda a_{32}+\lambda b_{32} & \lambda a_{33}+\lambda b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$$

(b) $\boxed{\text{Azok a } 3\times 3\text{-as mátrixok, amelyekben az első sor első eleme 2:} \quad \text{NEM.}}$

Jelöljük az ilyen alakú mátrixok halmazát H-val. Ez a halmaz például nem zárt az összeadásra:

$\mathbf{A} \in H$ és $\mathbf{B} \in H \ \not\Rightarrow\ \mathbf{A}+\mathbf{B} \in H$.

$$\text{pl.:} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in H} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in H} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\notin H}$$

$\boxed{\text{(c) Azonos típusú diagonálmátrixok:} \quad \text{IGEN.}}$

A bizonyítást a 3×3-as esetre nézzük meg (más típus esetén analóg módon történhet a bizonyítás).

Jelöljük D-vel a 3×3-as diagonálmátrixok halmazát. $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

i) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D \Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in D$ (3×3-as diagonálmátrixok összege is 3×3-as diagonálmátrix)

$$\text{részletesen:} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{\in D} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}}_{\in D} = \underbrace{\begin{bmatrix} a+d & 0 & 0 \\ 0 & b+e & 0 \\ 0 & 0 & c+f \end{bmatrix}}_{\in D}$$

ii)-iii) az összeadás kommutatív és asszociatív, mint mátrixok körében általában.

iv) null-elem: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ellentettje: $\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$

vi) $\mathbf{A} \in D \Rightarrow \lambda\mathbf{A} \in D$ 3×3-as diagonálmátrix skalárszorosa is 3×3as diagonálmátrix.

részletesen: $\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{\in D} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c \end{bmatrix}}_{\in D}$

vii) $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$, mert

$$\lambda(\mu\mathbf{A}) = \lambda\left(\mu\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} \mu a & 0 & 0 \\ 0 & \mu b & 0 \\ 0 & 0 & \mu c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\mu b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\mu c \end{bmatrix} = (\lambda\mu)\mathbf{A}$$

viii) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, mert $1 \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

ix) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$, mert

$$(\lambda+\mu)\mathbf{A} = (\lambda+\mu)\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+\mu)a & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+\mu)b & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\mu)c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a+\mu a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda b+\mu b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c+\mu c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a & 0 & 0 \\ 0 & \mu b & 0 \\ 0 & 0 & \mu c \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$$

x) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$, mert

$$\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) =$$

$$= \lambda\left(\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} a+d & 0 & 0 \\ 0 & b+e & 0 \\ 0 & 0 & c+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(a+d) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(b+e) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(c+f) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a+\lambda d & 0 & 0 \\ 0 & \lambda b+\lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c+\lambda f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda d & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda f \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$$

(d) $\boxed{\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \text{ ahol } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}: \quad \text{IGEN.}}$

A halmaz a legfeljebb harmadfokú polinomok halmaza. Jelöljük a halmazt P-vel.

i) $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2} \in P \Rightarrow \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} \in P$

(legfeljebb harmadfokú polinomok összege legefeljebb harmadfokú polinom).

Részletesen:
$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3$

ii)-iii) a legfeljebb harmadfokú polinomok halmazán az összeadás kommutatív és asszociatív, mint ahogy ez általában, tetszőleges polinomok esetén is teljesül.

iv) null-elem: $\mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

v) $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)$ ellentettje: $(-a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3)$

vi) $\mathbf{p} \in P \Rightarrow \lambda\mathbf{p} \in P$

(egy legfeljebb harmadfokú polinom skalárszorosa is legfeljebb harmadfokú polinom)

Részletesen: $\lambda \underbrace{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)}_{\in P} = \underbrace{(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3)}_{\in P}$

vii) $\lambda(\mu\mathbf{p}) = (\lambda\mu)\mathbf{p}$, hiszen

$$\lambda(\mu\mathbf{p}) = \lambda(\mu(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)) = \lambda(\mu a_0 + \mu a_1 x + \mu a_2 x^2 + \mu a_3 x^3) =$$
$$= \lambda\mu a_0 + \lambda\mu a_1 x + \lambda\mu a_2 x^2 + \lambda\mu a_3 x^3 = (\lambda\mu)\mathbf{p}$$

viii) $1 \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}$, mert

$1 \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (1 \cdot a_0) + (1 \cdot a_1)x + (1 \cdot a_2)x^2 + (1 \cdot a_3)x^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \mathbf{p}$

ix) $(\lambda + \mu)\,\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{p}$, hiszen

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \mu)\,\mathbf{p} = \\
&= (\lambda + \mu)\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \\
&= (\lambda + \mu)\,a_0 + (\lambda + \mu)\,a_1x + (\lambda + \mu)\,a_2x^2 + (\lambda + \mu)\,a_3x^3 = \\
&= (\lambda a_0 + \mu a_0) + (\lambda a_1 + \mu a_1)x + (\lambda a_2 + \mu a_2)x^2 + (\lambda a_3 + \mu a_3)x^3 = \\
&= (\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3) + (\mu a_0 + \mu a_1 x + \mu a_2 x^2 + \mu a_3 x^3) = \\
&= \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{p}
\end{aligned}$$

x) $\lambda(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}) = \lambda\mathbf{p_1} + \lambda\mathbf{p_2}$, mert

$$\begin{aligned}
&\lambda(\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}) = \\
&= \lambda\left((a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)\right) = \\
&= \lambda\left((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3\right) = \\
&= \lambda(a_0 + b_0) + \lambda(a_1 + b_1)x + \lambda(a_2 + b_2)x^2 + \lambda(a_3 + b_3)x^3 = \\
&= (\lambda a_0 + \lambda b_0) + (\lambda a_1 + \lambda b_1)x + (\lambda a_2 + \lambda b_2)x^2 + (\lambda a_3 + \lambda b_3)x^3 = \\
&= \lambda\mathbf{p_1} + \lambda\mathbf{p_2}
\end{aligned}$$

(e) $\boxed{\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \text{ ahol } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\,,\ a_3 \neq 0\}: \quad \text{NEM.}}$

A halmaz a pontosan harmadfokú polinomok halmaza. Jelöljük a halmazt H-val.

Ez a halmaz nem zárt az összeadásra.

Pl.: $\underbrace{(1 + x + 2x^3)}_{\in H} + \underbrace{(2 + x + x^2 - 2x^3)}_{\in H} = \underbrace{3 + 2x + x^2}_{\notin H}$

megj.: másképp is indokolhatjuk, miért nem alkot vektorteret a halmaz a két művelettel:

- például nincs null-elem a halmazban
- például $(1 + x^3) \in H$, de $0 \cdot (1 + x^3) = 0 \notin H$

(f) $\boxed{\text{azok az } (x, y, z) \text{ valós számhármasok, amelyekre teljesül, hogy } x + 2y - z = 0: \quad \text{IGEN.}}$

Jelöljük a halmazt S-sel. $S = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + 2y - z = 0\}$

megj.: pl. $(3, -1, 1) \in S$, mert $3 + 2(-1) - 1 = 0$

megj.: az összeadást ill. a skalárral való szorzást koordinátánként végezzük:

pl.: $(3, -1, 1) + (2, 5, 12) = (5, 4, 13)$, $2(3, -1, 1) = (6, -2, 2)$

$S \subseteq \mathbb{R}^3$, a halmaz - geometriailag - egy origón átmenő sík a térben. Tudjuk, hogy a térben minden olyan sík, amelyik átmegy az origón, alteret alkot, ezért S vektortér.

(g) $\boxed{\text{azok az } (x, y, z) \text{ valós számhármasok, amelyekre teljesül, hogy } x + 2y - z = 1: \quad \text{NEM.}}$

Jelöljük a halmazt H-val. $H = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \;\; x + 2y - z = 1\}$

H nem zárt az összeadásra. Pl.: $\underbrace{(1,1,2)}_{\in H} + \underbrace{(2,3,7)}_{\in H} = \underbrace{(3,4,9)}_{\notin H}$

(h) $\boxed{\text{a } \cos(Ax) + \sin(Bx) \text{ alakú függvények } (A,\ B \text{ valós számok}): \quad \text{NEM.}}$

Jelöljük a halmazt H-val. H nem zárt a skalárral való szorzásra:

pl. $(\cos x + \sin x) \in H$, de $0 \cdot (\cos x + \sin x) = 0 \notin H$

Gondoljuk meg, hogy az $A = 0$, $B = 0$ választással a konstans 1 függvényt kapjuk.

megj.: a fentitől különböző indoklás is található.

(i) $\boxed{\text{az } e^x (A\cos x + B\sin x) \text{ alakú függvények } (A,\ B \text{ valós számok}): \quad \text{IGEN}}$

Jelöljük a halmazt F-fel. $F = \{e^x (A\cos x + B\sin x) \mid A, B \in \mathbb{R}\}$.

megj.:

a lineáris kombinációk felírása az $e^x (A\cos x + B\sin x)$ alak helyett kényelmesebb az $Ae^x \cos x + Be^x \sin x$ alakban.

i) $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in F \;\Rightarrow\; \mathbf{f} + \mathbf{g} \in F$, mert

$\mathbf{f} + \mathbf{g} = e^x (A_1 \cos x + B_1 \sin x) + e^x (A_2 \cos x + B_2 \sin x) = e^x ((A_1 + A_2)\cos x + (B_1 + B_2)\sin x)$

ii-iii) az összeadás a függvények körében általában kommutatív és asszociatív, így ezen a szűkebb függvény-halmazon is.

iv) null-elem: $e^x(0\cos x + 0\sin x) = 0$

v) az $e^x (A\cos x + B\sin x)$ elem ellentettje: $e^x ((-A)\cos x + (-B)\sin x)$

vi) $\mathbf{f} \in F \;\Rightarrow\; \lambda\mathbf{f} \in F$, hiszen

$\lambda\mathbf{f} = \lambda (e^x (A\cos x + B\sin x)) = e^x (\lambda A\cos x + \lambda B\sin x) \in F$

vii) $\lambda(\mu\mathbf{f}) = (\lambda\mu)\mathbf{f}$ triviálisan teljesül.

viii) $1 \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f}$ triviálisan teljesül.

ix) $(\lambda + \mu)\mathbf{f} = \lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{f}$ triviálisan teljesül.

x) $\lambda(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \lambda\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g}$ triviálisan teljesül.

6. Az előző feladatban szereplő vektortereknek adja meg egy bázisát és a dimenzióját!

MEGOLDÁS

Az alábbi halmazok bizonyultak vektortérnek (a rajtuk értelmezett szokásos, értelemszerűen adódó ’összeadás’ és ’skalárral való szorzás’ műveletekkel):

- (a) $M = \{3 \times 3\text{-as mátrixok}\} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \;,\; 1 \le i, j \le 3 \right\}$
- (c) $D = \{3 \times 3\text{-as diagonálmátrixok}\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- (d) $P = \{\text{legfeljebb harmadfokú polinomok}\} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, ahol $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

- (f) $S = \{(x, y, z) | \, x, y, z \in \mathbb{R} \ , \ \ x + 2y - z = 0\}$
- (i) $F = \{e^x(A \cos x + B \sin x) | \, A, B \in \mathbb{R}\}$

A dimenziószám meghatározását segíti, ha meggondoljuk, az adott vektortér elemeinek általános, paraméteres alakjában hány szabad paraméter van. Megadjuk az egyes vektorterek dimenzióját, majd a bázisok közül a "legszebbet" az ún. standard bázist, ezt minden esetben B-vel jelöljük!

- $\dim M = 9$

  $$B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

- $\dim D = 3$

  $$B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

- $\dim P = 4$

  $$B = \big((1 + 0x + 0x^2 + 0x^3), (0 + 1x + 0x^2 + 0x^3), (0 + 0x + 1x^2 + 0x^3), (0 + 0x + 0x^2 + 1x^3)\big) =$$
  $$= (1, x, x^2, x^3)$$

- $\dim S = 2$

  Vigyázat! x, y és z közül csak kettő paraméter szabad, a harmadik a másik kettő függvénye! Legyen pl. z a kötött paraméter: $z = x + 2y$.

  Ez alapján a vektortér elemei ilyen alakban is megadhatók: $(x, y, x + 2y)$.

  $B = \big((1, 0, 1), (0, 1, 2)\big) = \big(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\big)$

  Ebben a bázisban pl. a $(-4, 7, 10) \in S$ elem a következőképpen áll elő: $(-4, 7, 10) = -4\mathbf{e_1} + 7\mathbf{e_2}$

- $\dim F = 2$

  $B = \big(e^x(1 \cos x + 0 \sin x) \, , \, e^x(0 \cos x + 1 \sin x)\big) = \big(e^x \cos x \, , \, e^x \sin x\big)$

7. $\mathbf{a}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^* \ , \mathbf{b}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^* \ , \mathbf{c}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^*$

(a) Igazoljuk, hogy az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ vektorrendszer az $\mathbb{R}^3$ tér egy bázisát alkotja!

(b) Írja fel az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bázisban megadott $\mathbf{v}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}^*$ vektor koordinátáit az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ bázisban!

(c) Tekintsük az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok által generált $\mathbb{R}^3$-beli alteret. Mondjunk olyan vektorokat, amelyek benne vannak ebben az altérben, és mondjunk olyanokat, amelyek nincsenek benne!

(d) Írjuk fel az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok által generált altér egyenletét!

MEGOLDÁS

(a) megj.: a bázis: maximális elemszámú lineárisan független rendszer; vagy másképp: minimális elemszámú generátorrendszer (egy adott vektortérben). Ez a két érték minden (konkrét) vektortér esetén egybeesik, és egyenlő a tér dimenziójával. Egy n-dimenziós térben n vektor tehát pontosan akkor alkot bázist, ha lineárisan függetlenek (vagy, ami ezzel egyenértékű: ha generátorrendszert alkotnak).

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a három-dimenziós $\mathbb{R}^3$ vektortér elemei. Belátjuk, hogy lineárisan független rendszert alkotnak, tehát hogy a null-vektort csak triviálisan állítják elő, máshogy nem. (Ezt kényelmesebben lehet igazolni, mint azt, hogy generátorrendszert alkotnak.)

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad x\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned} x+2y+3z&=0\\ 2x+y&=0\\ -y+2z&=0\end{aligned}\right.$$

A homogén lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -3 & -6 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Azt kaptuk, hogy az egyenletrendszer ekvivalens az $\left\{\begin{aligned} x&=0\\ y&=0\\ z&=0\end{aligned}\right.$ egyenletrendszerrel.

Tehát csak triviális megoldása van. Vagyis az $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ vektorok a nullvektort csak triviálisan állítják elő, máshogy nem. Ezzel beláttuk, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok az $\mathbb{R}^3$ tér egy bázisát alkotják.

(b) A feladat feltételei szerint: $\mathbf{v}=6\mathbf{e_1}+3\mathbf{e_2}-\mathbf{e_3}$.

Ugyanez koordinátákkal: $\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

A feladat az, hogy $\mathbf{v}$-t felírjuk $\mathbf{v}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ alakban. (Az (a) rész alapján erre egyértelmű megoldást kell kapnunk, mert az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok az $\mathbb{R}^3$ tér egy bázisát alkotják, tehát a tér minden eleme egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként.)

Az $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{v}$ vektori egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -6 & -9\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)$$

Kaptuk: $\left\{\begin{aligned} x&=1/2\\ y&=2\\ z&=1/2\end{aligned}\right.$ az egyenlet egyetlen megoldása.

Ez alapján $\mathbf{v}=\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\dfrac{1}{2}\mathbf{c}$, tehát az $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ bázisban $\mathbf{v}$ koordinátái: $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1/2\\2\\1/2\end{bmatrix}$.

ell.: $\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\dfrac{1}{2}\mathbf{c}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+4+\frac{3}{2}\\1+2+0\\0-2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\-1\end{bmatrix}$.

(c) emlékeztető: egy vektortér adott elemei által generált altér az adott vektorok összes lineáris kombinációinak halmaza (a vektortéren értelmezett két művelettel). Vektortér elemei által generált altér maga is vektortér. Jel: $\langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n} \rangle = \{x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \ldots + x_n\mathbf{a_n} | \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Most: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \{x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.
Olyan vektorokat kell tehát megadnunk, amelyek előállnak az **a** és **b** vektorok lineáris kombinációiként, ill. olyanokat, amelyek nem.

- pl. $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & -2 \end{bmatrix}^* \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- pl. $-\frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{7}{8}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{8} & -\frac{17}{8} & -\frac{7}{8} \end{bmatrix}^* \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- pl. $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- pl. $\mathbf{0} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
- pl. $\mathbf{c} \notin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ (ld. az (a) részt!)
- pl. $\mathbf{v}[6, 3, -1]^* \notin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ (ld. a (b) részt!)

(d) emlékeztető: $\mathbb{R}^3$ alterei:

- $\{\mathbf{0}\}$
- {origón átmenő egyenesek}
- {origón átmenő síkok}
- $\mathbb{R}^3$

Más nincs. (Mindegyik a szokásos 'összeadás' ill. 'skalárral való szorzás' műveletekkel értendő.)

$\dim \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2$, tehát itt egy origón átmenő *sík*ról van szó, mégpedig olyan síkról, amelyet az **a** és **b** vektorok feszítenek ki. (Szemléletesen: toljuk el **a**-t és **b**-t úgy, hogy az origó legyen a közös kezdőpontjuk, majd tekintsük a két vektor által így kifeszített síkot.)

a sík egy pontja: $O(0, 0, 0)$

a sík egy normálvektora: $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (-2, 1, -3)$

a sík egyenlete: $-2(x - 0) + 1(y - 0) - 3(z - 0) = 0$, röviden: $-2x + y - 3z = 0$.

8. Határozza meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix rangját!

MEGOLDÁS

emlékeztető:
Egy **A** mátrix rangja megegyezik a mátrix oszlopvektorterének dimenziójával (vagyis a mátrix oszlopvektoraiból kiválasztható maximáis elemszámú lineárisan független rendszer elemszámával).
Jel: $\rho(\mathbf{A})$

emlékeztető: egy **A** mátrix i-edik oszlopvektorát szokásosan $\mathbf{a_i}$-vel jelöljük,
tehát (most) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} \, \mathbf{a_2} \, \mathbf{a_3} \, \mathbf{a_4} \end{bmatrix}$.

Gauss-eliminációval:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a_3}$ és $\mathbf{a_4}$ mindegyike lineárisan függ az $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ vektoroktól: $-\mathbf{a_1} - \mathbf{a_2} = \mathbf{a_3}$ ill. $-\mathbf{a_1} = \mathbf{a_4}$.
2-elemű lineárisan független rendszert ki tudunk választani az oszlopvektorok közül, de nagyobb elemszámút nem, így $\rho(\mathbf{A}) = 2$ ("ahány vezér-1-est lehetett képezni").

9.

(1) $$\left.\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \\ 2x + y - 3z &= -5 \end{aligned}\right\}$$

(2) $$\left.\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \\ -2x - 16y + 3z &= -25 \end{aligned}\right\}$$

(3) $$\left.\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \\ -2x - 16y + 3z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Írjuk fel a fenti egyenletrendszereknek megfelelő mátrixegyenleteket, vektori egyenleteket!
Végezzünk megoldhatóság-vizsgálatot a megfelelő mátrixrangok meghatározása alapján!
Oldjuk meg az egyenletrendszereket!

MEGOLDÁS

(1)

a szokásos jelölések:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

a megfelelő mátrix-egyenlet: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

részletesen: $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

a megfelelő vektori-egyenlet: $x\mathbf{a_1} + y\mathbf{a_2} + z\mathbf{a_3} = \mathbf{b}$

részletesen: $$x \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Rangvizsgálat, megoldás Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \end{array}\right) \overset{\text{2.s.+3.s.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 25 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 25 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{Kaptuk: } \left\{\begin{aligned} 1x + 0y + 0z &= 1 \\ 0x + 1y + 0z &= 2 \\ 0x + 0y + 1z &= 3 \end{aligned}\right.$$

Leolvasható: $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{Ab}]) = 3$ (= az ismeretlenek száma).

Tehát az egyenletrendszer megoldható, és egyértelmű megoldása van.

A megoldás: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. (A mátrix-egyenlet megoldása: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^*$)

(2)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -16 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -25 \end{bmatrix}$$

a megfelelő mátrix-egyenlet: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\text{részletesen:} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -16 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -25 \end{bmatrix}$$

a megfelelő vektori-egyenlet: $x\mathbf{a_1} + y\mathbf{a_2} + z\mathbf{a_3} = \mathbf{b}$

$$\text{részletesen:} \quad x \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -16 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -25 \end{bmatrix}$$

Rangvizsgálat, megoldás Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \\ -2 & -16 & 3 & -25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \\ -2 & -16 & 3 & -25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -16 & 4 & -20 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 5/4 \\ 0 & -16 & 4 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{Kaptuk:} \begin{cases} 1x + 0y + \frac{1}{2}z = \frac{5}{2} \\ 0x + 1y - \frac{1}{4}z = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Leolvasható: $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}\mathbf{b}]) = 2 < 3$ (= az ismeretlenek száma).

Tehát az egyenletrendszer megoldható, és végtelen sok megoldása van.

$$\text{A megoldás:} \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}z \\ y = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \ \text{ tetszőleges} \end{cases} \qquad \text{(A mátrix-egyenlet megoldása: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t \\ \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges)}$$

(3)

A vektori- és mátrix-egyenleteket hasonlóan képezhetjük, mint az előbbi részfeladatokban.

Rangvizsgálat, megoldás Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \\ -2 & -16 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -16 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -16 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -12 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -12 & 3 & 9 \end{array}\right) \overset{\text{3.s.}+3\cdot\text{2.s.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right) \qquad \text{Kaptuk:} \begin{cases} 1x + 2y + 0z = 5 \\ 0x + 4y - 1z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 24 \end{cases}$$

$$\text{Leolvasható:} \quad \left.\begin{array}{r} \rho(\mathbf{A}) = 2 \\ \rho([\mathbf{A}\,\mathbf{b}]) = 3 \end{array}\right) \neq$$

Tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Másképp: az egyenletrendszernek nincs megoldása, mert a Gauss-eliminációval ellentmondásos sort kaptunk: $0x + 0y + 0z = 24$

10. Van-e az alábbi mátrixoknak inverze? Miért igen/nem? Ha igen, határozza meg!

$$\text{a)} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS

emlékeztető: egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha determinánsa nem 0.

$$\text{a)} \quad \det \mathbf{S} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \mathbf{S}^{-1}$$

I.mo.: (adjungált-mátrixszal)

$$\left.\begin{matrix} S_{11} = -1 & S_{12} = -3 \\ S_{21} = -2 & S_{22} = 1 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{adj} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{S}}{\det \mathbf{S}} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

II.mo.: (Gauss-eliminációval)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right)$$

Kaptuk: $\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{bmatrix}$

$$\text{b)} \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists\, \mathbf{A}^{-1}$$

11. A **9.** feladat (1) pontjában szereplő egyenletrendszer együtthatómátrixának határozza meg az inverzét, és ennek segítségével oldja meg az egyenletrendszert!

MEGOLDÁS

A hivatkozott egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ 2x + 4y &= 10 \\ 2x + y - 3z &= -5 \end{aligned}\right\} \qquad \text{Ennek együtthatómárixa: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-12-0) - 0(-6-0) + 1(2-8) = -30$$

Mivel $\det\mathbf{A} \neq 0$, ezért az **A** mátrixnak van inverze.

A inverzét meghatározzuk Gauss-eliminációval, majd adjungált-mátrix segítségével is.

Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{4}{15} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{16}{60} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{4}{15} \end{array}\right)$$

Kaptuk: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{16}{60} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{4}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{30} & -\frac{1}{30} & \frac{4}{30} \\ -\frac{6}{30} & \frac{8}{30} & -\frac{2}{30} \\ \frac{6}{30} & \frac{2}{30} & -\frac{8}{30} \end{bmatrix}$

Adjungált mátrixszal:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 1 & -4 \\ 6 & -8 & 2 \\ -6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}} = \tfrac{1}{-30}\,\text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{12}{30} & -\frac{1}{30} & \frac{4}{30} \\ -\frac{6}{30} & \frac{8}{30} & -\frac{2}{30} \\ \frac{6}{30} & \frac{2}{30} & -\frac{8}{30} \end{bmatrix}$$

Az inverz-mátrix segítségével most már meghatározhatjuk az egyenletrendszer (egyetlen) megoldását (az egyenletrendszer mátrix-egyenlet alakjával dolgozva):

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{12}{30} & -\frac{1}{30} & \frac{4}{30} \\ -\frac{6}{30} & \frac{8}{30} & -\frac{2}{30} \\ \frac{6}{30} & \frac{2}{30} & -\frac{8}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tehát a megoldás: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

12. Adott az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{b}$ vektor:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ c \end{bmatrix}$$

(a) Határozza meg az $\mathbf{A}$ mátrix rangját!

(b) Határozza meg $\mathbf{b}$ harmadik koordinátáját úgy, hogy $\mathbf{b}$ benne legyen az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterében!

(c) Határozza meg $\mathbf{b}$ harmadik koordinátáját úgy, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletnek ne legyen megoldása. Mennyi ez esetben $\rho\,([\mathbf{A}\,\mathbf{b}])$?

MEGOLDÁS

(a)

I. mo.: a legmagasabb-rendű nem-nulla aldetermináns keresésével

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 0(24-0) - 1(-12-12) - 3(0+8) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{A}) < 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{A}) = 2$$

II. mo.: Gauss-eliminációval

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Két vezér-1-est tudtunk képezni, ezért $\rho(\mathbf{A}) = 2$.

(b) emlékeztető:

Az, hogy $\mathbf{b}$ benne van $\mathbf{A}$ oszlopvektorterében (jelölés: $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$), pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát hogy az $x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ egyenletnek van megoldása. Ezen vektori egyenlet az alábbi lineáris egyenletrendszerrel egyenértékű:

$$\begin{cases} y - 3z = -2 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ 4x - 12z = c \end{cases}$$

Tehát az, hogy $\mathbf{b}$ benne van $\mathbf{A}$ oszlopvektorterében, pontosan akkor teljesül, ha ennek az egyenletrendszernek van megoldása.

Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -12 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & -12 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & -24 & c-12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & c+4 \end{array}\right)$$

Kaptuk: az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $c + 4 = 0$, azaz ha $c = -4$.

Kieg.: ekkor tehát $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. A táblázatból leolvasható az is, hogy ekkor $\mathbf{b} = -\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$.

Kieg.: azt is kaptuk a számolással, hogy $\mathbf{a}_3$ előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ vektorok lineáris kombinációjaként: $\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2$.

(c) Az, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mátrix-egyenletnek nincs megoldása, egyenértékű azzal, hogy $\mathbf{b}$ nincs benne $\mathbf{A}$ oszlopvektorterében. A (b) rész megoldása alapján: tetszőleges $c \neq -4$ esetén nincs megoldása az egyenletnek.

$\rho([\mathbf{A}\,\mathbf{b}]) = 3$, ugyanis $c \neq -4$ esetben a táblázat jobb alsó sarkában szereplő $c + 4$ szám nem egyenlő 0-val, és így vezér-1-es képezhető belőle osztással.

13.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Határozza meg az $\mathbf{A}$ mátrix rangját!

(b) Írja fel az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterének egy bázisát!

(c) Válassza ki a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorok közül azokat, amelyek elemei az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterének!

(d) Írja fel $\mathbf{v}_1$ koordinátáit (amennyiben lehetséges), a (b) pontban választott bázisban!

(e) Oldja meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}_3$ egyenletet!

(f) Írja fel az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét, ha lehetséges!

MEGOLDÁS

Az (a)-(e) feladatrészeket egyazon Gauss-elimináció alapján megválaszolhatjuk:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{\text{1.s.+2·2.s.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 9 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 9 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 22 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & -7 & -18 & -4 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\text{2.s.+3.s.,majd 2.s./2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 9 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -18 & -4 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -11 & 2 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{26}{4} & \frac{8}{4} & -\frac{18}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

(a) $\rho(\mathbf{A}) = 3$.

(b) Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, ezért az általuk generált térnek bázisát alkotják: $B = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$. Megjegyezhetjük, hogy ez a vektortér maga a 3-dimenziós $\mathbb{R}^3$ tér: $\langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} \rangle = \mathbb{R}^3$. Ebből a térből vett bármely 3-elemű, lineárisan független rendszer a tér bázisa is egyben.

Tehát $\mathbf{A}$ oszlopvektorterének bázisa a standard bázis is: $B = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(c) Mivel $\mathbf{A}$ oszlopvektortere megegyezik az $\mathbb{R}^3$ térrel, ezért az összes $\mathbb{R}^3$-beli vektort tartalmazza, így a $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ vektorokat is.

(d) A táblázatból leolvasható, hogy $\mathbf{v_1}$ koordinátái a $B = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$ bázisban a következők:

$\mathbf{v_1}\left(\frac{9}{4}; -\frac{26}{4}; \frac{11}{4}\right)$ (Jelentése: $\mathbf{v_1} = \frac{9}{4}\mathbf{a_1} - \frac{26}{4}\mathbf{a_2} + \frac{11}{4}\mathbf{a_3}$)

(e) A táblázatból leolvasható a mátrix-egyenlet egyetlen megoldása:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{18}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}^*$$

(f) A táblázatból leolvasható volt, hogy $\rho(\mathbf{A}_{3\times 3}) = 3$ (ld. (a)).

Ebből következik, hogy $\det\mathbf{A} \neq 0$, amiből pedig következik, hogy $\mathbf{A}$-nak van inverze.

Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 9 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 9 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 22 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -18 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 9 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -18 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \end{array}\right)$$

Az elemeket közös nevezőre hozva:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{8}{8} & \frac{2}{8} & \frac{22}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \end{bmatrix}$$

14. Az előző feladatban szereplő adatok közül változtassa meg az **A** mátrix bal felső (a_{11}) elemét 3-ra, és legyen most a $\mathbf{v}_3$ vektor 3. koordináátája -1 helyett 1. Oldja meg az előző pontban szereplő feladatokat a módosított adatokkal!

MEGOLDÁS

Az új adatokkal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az (a)-(e) feladatrészeket (ismét) egyazon Gauss-elimináció alapján oldhatjuk meg:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & -10 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\text{2.s.+3.s.,majd 2.s./2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

(a) $\rho(\mathbf{A}) = 2$

(b) Leolvasható, hogy $\mathbf{a_3}$ lineárisan függ az $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ vektoroktól: $\mathbf{a_3} = -\mathbf{a_1} + 2\mathbf{a_2}$. Ebből következik, hogy $\langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} \rangle = \langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2} \rangle$. Tehát **A** oszlopvektorterének egy bázisa: $B = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$.

(c) Csak $\mathbf{v_3}$ van benne **A** oszlopvektorterében, $\mathbf{v_1}$ és $\mathbf{v_2}$ nem. $\quad \mathbf{v_3} = 0\mathbf{a_1} + 1\mathbf{a_2} = \mathbf{a_2}$.

(d) Nem lehetséges.

(e) Kaptuk:

$$\left.\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{Ebből a mátrix-egyenlet megoldása: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(f) $\rho(\mathbf{A}_{3\times 3}) = 2 \;\Rightarrow\; \det\mathbf{A} = 0 \;\Rightarrow\; \nexists\, \mathbf{A}^{-1}$