Analízis előadások

Vajda István

Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2016. február 29.

Az improprius integrálok fajtái

Tegyük fel, hogy egy valós-valós függvényt szeretnénk az I intervallumon integrálni, de

- a függvény nincs értelmezve I minden pontjában,
- a függvény nem korlátos I-n,
- I végtelen intervallum.

A fenti esetekben a függvénynek nem létezik Riemann-integrálja, de bizonyos esetekben ilyenkor is beszélhetünk a függvény ún. *improprius integráljáról*.

Az improprius integrálok fajtái

Tegyük fel, hogy egy valós-valós függvényt szeretnénk az I intervallumon integrálni, de

- a függvény nincs értelmezve I minden pontjában,
- a függvény nem korlátos I-n,
- I végtelen intervallum.

A fenti esetekben a függvénynek nem létezik Riemann-integrálja, de bizonyos esetekben ilyenkor is beszélhetünk a függvény ún. *improprius integráljáról*.

Az improprius integrálok fajtái

Tegyük fel, hogy egy valós-valós függvényt szeretnénk az I intervallumon integrálni, de

- a függvény nincs értelmezve I minden pontjában,
- a függvény nem korlátos I-n,
- I végtelen intervallum.

A fenti esetekben a függvénynek nem létezik Riemann-integrálja, de bizonyos esetekben ilyenkor is beszélhetünk a függvény ún. *improprius integráljáról*.

Az improprius integrálok fajtái

Tegyük fel, hogy egy valós-valós függvényt szeretnénk az I intervallumon integrálni, de

- a függvény nincs értelmezve I minden pontjában,
- a függvény nem korlátos I-n,
- I végtelen intervallum.

A fenti esetekben a függvénynek nem létezik Riemann-integrálja, de bizonyos esetekben ilyenkor is beszélhetünk a függvény ún. *improprius integráljáról*.

Véges sok pontban nem értelmezett függvény improprius integrálja

Tétel: Ha egy f valós-valós függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor értékét az intervallum véges sok pontjában megváltoztatva olyan g függvényt kapunk, amely ugyancsak integrálható $[a, b]$-n és $\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b f$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f valós-valós függvény az $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ pontok kivételével értelmezett az $[a, b]$ intervallum minden pontjában és ott korlátos. Tekintsünk egy olyan φ függvényt, amely értelmezett $[a, b]$-n és az $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ pontok kivételével $x \in [a, b]$ esetén $\varphi(x) = f(x)$. Ha φ integrálható $[a, b]$-n, akkor integrálját az f függvény $[a, b]$ intervallum vett *improprius integráljának* nevezzük.

Megjegyzés: A fenti tétel szerint φ $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$-ben felvett értékei nem befolyásolják az improprius integrál értékét.

Véges sok pontban nem értelmezett függvény improprius integrálja

Tétel: Ha egy f valós-valós függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor értékét az intervallum véges sok pontjában megváltoztatva olyan g függvényt kapunk, amely ugyancsak integrálható $[a, b]$-n és $\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b f$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f valós-valós függvény az $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ pontok kivételével értelmezett az $[a, b]$ intervallum minden pontjában és ott korlátos. Tekintsünk egy olyan φ függvényt, amely értelmezett $[a, b]$-n és az $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ pontok kivételével $x \in [a, b]$ esetén $\varphi(x) = f(x)$. Ha φ integrálható $[a, b]$-n, akkor integrálját az f függvény $[a, b]$ intervallum vett *improprius integráljának* nevezzük.

Megjegyzés: A fenti tétel szerint φ $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$-ben felvett értékei nem befolyásolják az improprius integrál értékét.

Véges sok pontban nem értelmezett függvény improprius integrálja

Tétel: Ha egy f valós-valós függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor értékét az intervallum véges sok pontjában megváltoztatva olyan g függvényt kapunk, amely ugyancsak integrálható $[a, b]$-n és $\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b f$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f valós-valós függvény az $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ pontok kivételével értelmezett az $[a, b]$ intervallum minden pontjában és ott korlátos. Tekintsünk egy olyan φ függvényt, amely értelmezett $[a, b]$-n és az $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ pontok kivételével $x \in [a, b]$ esetén $\varphi(x) = f(x)$. Ha φ integrálható $[a, b]$-n, akkor integrálját az f függvény $[a, b]$ intervallum vett *improprius integráljának* nevezzük.

Megjegyzés: A fenti tétel szerint φ $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$-ben felvett értékei nem befolyásolják az improprius integrál értékét.

Integrálás végtelen intervallumon

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $[a,\infty[$ intervallumon ($a \in \mathbb{R}$) és integrálható minden $[a,\omega]$ intervallumon ($a < \omega \in \mathbb{R}$). Ha a $\lim\limits_{\omega\to\infty} \int\limits_a^\omega f$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^\infty f$ *improprius integrál konvergens* és értéke ez a határérték, azaz

$$\int\limits_a^\infty f = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_a^\omega f$$

Megjegyzés: Ha az $\int\limits_a^\infty f$ improprius integrál nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük.

Integrálás végtelen intervallumon

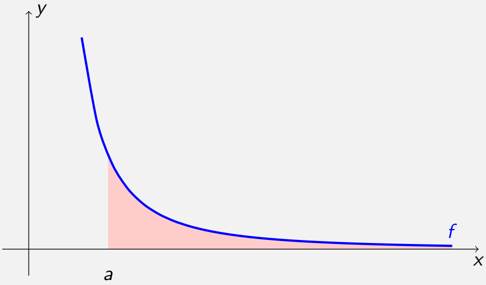
Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $[a, \infty[$ intervallumon ($a \in \mathbb{R}$) és integrálható minden $[a, \omega]$ intervallumon ($a < \omega \in \mathbb{R}$). Ha a $\lim\limits_{\omega\to\infty} \int\limits_a^\omega f$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_a^\infty f$ *improprius integrál konvergens* és értéke ez a határérték, azaz

$$\int\limits_a^\infty f = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_a^\omega f$$

Megjegyzés: Ha az $\int\limits_a^\infty f$ improprius integrál nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük.

Integrálás végtelen intervallumon

Ha az f függvény csak pozitív értékeket vesz fel, akkor a végtelen intervallumon értelmezett improprius integrálnak hasonló szemléletes értelmezést (görbe alatti terület) tulajdoníthatunk, mint a Riemann-integrálnak, de a görbe alatti rész ekkor egy *nem korlátos* síkidom lesz



Integrálás végtelen intervallumon

Példa: Számítsuk ki az $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét!

Megoldás:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\int\limits_1^\omega \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\omega}+1\right) = 1$$

Tehát az improprius integrál konvergens és értéke 1.

Integrálás végtelen intervallumon

Példa: Számítsuk ki az $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét!

Megoldás:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_1^\omega \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \left[\ln\left(|x|\right)\right]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty} \left(\ln(\omega) - \ln(1)\right) = \infty$$

Tehát az improprius integrál divergens és értéke ∞.

Integrálás végtelen intervallumon

Példa: Számítsuk ki az $\int\limits_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét, ha lehetséges!

Megoldás:

$$\int\limits_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\int\limits_0^\omega \sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\left[-\cos(x)\right]_0^\omega =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\cos(\omega)+\cos 0\right) = \lim_{\omega\to\infty}\left(-\cos(\omega)+1\right)$$

Az eredmény tehát egy határérték lenne, de a $\lim\limits_{\omega\to\infty}\left(-\cos(\omega)+1\right)$ határérték *nem létezik*. Tehát a fenti improprius integrál divergens és *nincs* értéke.

Integrálás végtelen intervallumon

Az improprius integrál akkor is értelmezhető, ha másfajta végtelen intervallumot választunk.

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $]-\infty, b]$ intervallumon ($b \in \mathbb{R}$) és integrálható minden $[\omega, b]$ intervallumon ($b > \omega \in \mathbb{R}$). Ha a $\lim\limits_{\omega \to -\infty} \int\limits_{\omega}^{b} f$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{-\infty}^{b} f$ *improprius integrál konvergens* és értéke ez a határérték, azaz

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f = \lim_{\omega \to -\infty} \int\limits_{\omega}^{b} f$$

Megjegyzés: Ha az $\int\limits_{-\infty}^{b} f$ improprius integrál nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük.

Integrálás végtelen intervallumon

Az improprius integrál akkor is értelmezhető, ha másfajta végtelen intervallumot választunk.

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $]-\infty, b]$ intervallumon ($b \in \mathbb{R}$) és integrálható minden $[\omega, b]$ intervallumon ($b > \omega \in \mathbb{R}$). Ha a $\lim\limits_{\omega \to -\infty} \int\limits_{\omega}^{b} f$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{-\infty}^{b} f$ *improprius integrál konvergens* és értéke ez a határérték, azaz

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f = \lim_{\omega \to -\infty} \int\limits_{\omega}^{b} f$$

Megjegyzés: Ha az $\int\limits_{-\infty}^{b} f$ improprius integrál nem konvergens, akkor *divergensnek* nevezzük.

Integrálás végtelen intervallumon

Példa: Számítsuk ki az $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to-\infty} \int\limits_{\omega}^{0} e^x \,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to-\infty} [e^x]_{\omega}^{0} = \lim_{\omega\to-\infty} \left(e^0 - e^{\omega}\right) = 1$$

Integrálás végtelen intervallumon

Definíció: Ha az $\int\limits_{-\infty}^{c} f$ és $\int\limits_{c}^{\infty} f$ improprius integrálok konvergensek ($c \in \mathbb{R}$), akkor az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$ improprius integrál is konvergens és értéke az előző két improprius integrál értékének összege, azaz:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f = \int\limits_{-\infty}^{c} f + \int\limits_{c}^{\infty} f$$

Megjegyzés: Ha az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$ improprius integrál nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

Integrálás végtelen intervallumon

Megjegyzés: Az előző definíció egyértelműen határozza meg az improprius integrál értékét, ugyanis bebizonyítható a következő tétel:

Tétel: Ha egy $c \in \mathbb{R}$ számra teljesül, hogy az $\int\limits_{-\infty}^{c} f$ és $\int\limits_{c}^{\infty} f$ improprius integrálok konvergensek, akkor tetszőleges $c^* \in \mathbb{R}$ $(c^* \neq c)$ esetén az $\int\limits_{-\infty}^{c^*} f$ és $\int\limits_{c^*}^{\infty} f$ improprius integrálok is konvergensek és

$$\int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c^*} f + \int_{c^*}^{\infty} f$$

Integrálás végtelen intervallumon

Példa: Számítsuk ki az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

hiszen

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to-\infty} \int\limits_{\alpha}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to-\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to-\infty} (\mathrm{arctg}(0) - \mathrm{arctg}(\alpha)) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_{0}^{\beta} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_{0}^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty} (\mathrm{arctg}(\beta) - \mathrm{arctg}(0)) = \frac{\pi}{2}$$

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $]a, b]$ intervallumon. Ha f nem korlátos az a pont környezetében, de integrálható minden $[a+\varepsilon, b]$ intervallumon, ahol $0 < \varepsilon < b - a$, továbbá a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy f az $[a, b]$ intervallumon impropriusan integrálható és improprius integráljának értéke:

$$\int\limits_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f$$

Megjegyzés: Itt is mondhatjuk, hogy az $\int\limits_a^b f$ improprius integrál konvergens, ha a tétel feltételei teljesülnek, ellenkező esetben az improprius integrál divergens.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\ln(x)]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\ln(1) - \ln(\varepsilon)) = \infty$$

Tehát az improprius integrál divergens, értéke ∞.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

Tehát az improprius integrál konvergens, értéke 2.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $[a, b[$ intervallumon. Ha f nem korlátos az b pont környezetében, de integrálható minden $[a, b-\varepsilon]$ intervallumon, ahol $0 < \varepsilon < b-a$, továbbá a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f$ határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy f az $[a, b]$ intervallumon impropriusan integrálható és improprius integráljának értéke:

$$\int\limits_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f$$

Megjegyzés: Itt is mondhatjuk, hogy az $\int\limits_a^b f$ improprius integrál konvergens, ha a tétel feltételei teljesülnek, ellenkező esetben az improprius integrál divergens.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $]a, b[$ intervallumon és tegyük fel, hogy sem a, sem b környezetében nem korlátos. Ha f impropriusan integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon $(a < c < b)$, akkor impropriusan integrálható az $[a, b]$ intervallumon is és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Megjegyzés: Itt is mondhatjuk, hogy az $\int_a^b f$ improprius integrál konvergens, ha a tétel feltételei teljesülnek, ellenkező esetben az improprius integrál divergens.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Tehát az improprius integrál konvergens, értéke π.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Tehát az improprius integrál konvergens, értéke π.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\arcsin(x)\right]_{-1+\varepsilon}^{0} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(0 - \arcsin\left(-1+\varepsilon\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Tehát az improprius integrál konvergens, értéke π.

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\arcsin(x)]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\arcsin(1-\varepsilon) - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény értelmezett az $[a, b] \setminus \{c\}$ halmazon ($a < c < b$). Ha f nem korlátos az c pont környezetében, de impropriusan integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon, akkor impropriusan integrálható az $[a, b]$ intervallumon is és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Megjegyzés: Itt is mondhatjuk, hogy az $\int_a^b f$ improprius integrál konvergens, ha a tétel feltételei teljesülnek, ellenkező esetben az improprius integrál divergens.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = 3 + 3 = 6$$

Tehát az improprius integrál konvergens, értéke 6.

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = 3 + 3 = 6$$

Tehát az improprius integrál konvergens, értéke 6.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[3\sqrt[3]{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(3\sqrt[3]{-\varepsilon} - 3\sqrt[3]{-1}\right) = 3$$

Nem korlátos függvények improprius integrálja

Példa: Határozzuk meg az $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál értékét (ha lehetséges)!

Megoldás:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = 3 + 3 = 6$$

Tehát az improprius integrál konvergens, értéke 6.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[3\sqrt[3]{x}\right]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(3 - 3\sqrt[3]{\varepsilon}\right) = 3$$