Egyváltozós függvények differenciálszámítása II.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8. Végezzen teljes függvényvizsgálatot!

A függvényvizsgálat szokásos menete:

1. Értelmezési tartomány, tengelymetszetek
2. Szimmetriatulajdonságok: paritás, periodicitás
3. Folytonosság, határértékek
4. Monotonitás, lokáis szélsőértékek ($f'(x)$ segítségével)
5. Konvexitás, inflexiós pontok ($f''(x)$ segítségével)
6. Grafikon
7. Értékkészlet, globális szélsőértékek

(a) $f(x) = \dfrac{4-4x}{(x+1)^2}$

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Tengelymetszetek:

x-tengelyen (zérushelyek): $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; 4-4x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

y-tengelyen: $f(0) = \frac{4}{1} = 4$

$\left.\begin{array}{r} 1 \in D_f \\ -1 \notin D_f \end{array}\right\} \Rightarrow\; f$ nem páros, nem páratlan.

f-nek egy zérushelye van, ezért nem periodikus.

f folytonos függvények hányadosa, ezért maga is folytonos függvény.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{4-4x}{(x+1)^2} = „\frac{8}{0^+}" = \infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{4-4x}{(x+1)^2} = „\frac{8}{0^+}" = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{-4x+4}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to \infty} \frac{-4+\frac{4}{x}}{x+2+\frac{1}{x}} = „\frac{-4}{\infty}" = 0^-$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4x+4}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4+\frac{4}{x}}{x+2+\frac{1}{x}} = „\frac{-4}{-\infty}" = 0^+$$

Megj.: az utóbbi két határértéket, mivel $\frac{-\infty}{\infty}$ ill. $\frac{\infty}{\infty}$ típusúak, L'Hospital-szabállyal is számolhatjuk:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+4}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{2x+2} = „\frac{-4}{\infty}" = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+4}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{2x+2} = „\frac{-4}{-\infty}" = 0^+$$

<u>Monotonitás, szélsőértékek:</u>

$$f'(x) = \left(\frac{4-4x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{-4(x+1)^2-(4-4x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)-2(4-4x)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{-4x-4-8+8x}{(x+1)^3} = \frac{4x-12}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x-12=0 \Rightarrow x=3.$

Kaptuk: az $x=3$ helyen *lehet* f-nek lokális szélsőértéke (máshol nem). Akkor *van* itt lokális szélsőérték, ha itt f' előjelet vált. Ezt táblázatos formában vizsgáljuk meg. A táblázat felső sorában f értelmezési tartománya szerepel f és f' **szakadási helyei**, továbbá f' **zérushelyei** által meghatározott osztópontok szerinti felbontásban.

	I.		II.		III.
x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<3$	$x=3$	$3<x$
$f'(x)$	$+$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

A táblázat második és harmadik sorában szereplő adatok meghatározásához vegyünk egy-egy számot a keletkező intervallumokból, és vizsgáljuk meg ott f' előjelét:

I.	pl. $x=-2$	$f'(-2)=\frac{-20}{-1}=+$	$\Rightarrow$	f szig. mon. nő a $]-\infty,-1[$ int.-on
II.	pl. $x=0$	$f'(0)=\frac{-12}{1}=-$	$\Rightarrow$	f szig. mon. csökkenő a $]-1,3[$ int.-on
III.	pl. $x=4$	$f'(4)=\frac{+}{+}=+$	$\Rightarrow$	f szig. mon. nő a $]3,\infty[$ int.-on

Kaptuk: f-nek az $x=3$ helyen lokális minimuma van. Ennek értéke: $f(3)=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$

<u>Konvexitás, inflexiós pontok</u>

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{4x-12}{(x+1)^3}\right)' = \frac{4(x+1)^3-(4x-12)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{4(x+1)-3(4x-12)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{4x+4-12x+36}{(x+1)^4} = \frac{-8x+40}{(x+1)^4}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow -8x+40=0 \Rightarrow x=5$

Kaptuk: az $x=5$ helyen *lehet* f-nek inflexiója (máshol nem). Akkor *van* itt inflexió, ha itt f'' előjelet vált. Ezt táblázatos formában vizsgáljuk meg. A táblázat felső sorában f értelmezési tartománya szerepel f és f'' **szakadási helyei**, továbbá f'' **zérushelyei** által meghatározott osztópontok szerinti felbontásban.

	I.		II.		III.
x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<5$	$x=5$	$5<x$
$f''(x)$	$+$	$*$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	$*$	$\smile$	infl.	$\frown$

A táblázat második és harmadik sorában szereplő adatok meghatározásához vegyünk egy-egy számot a keletkező intervallumokból, és vizsgáljuk meg ott f'' előjelét:

I.	pl. $x = -2$	$f''(-2) = \frac{56}{1} = +$	$\Rightarrow$	f szig. konvex a $]-\infty, -1[$ int.-on
II.	pl. $x = 0$	$f''(0) = \frac{40}{1} = +$	$\Rightarrow$	f szig. konvex a $]-1, 5[$ int.-on
III.	pl. $x = 6$	$f''(6) = \frac{-8}{+} = -$	$\Rightarrow$	f szig. konkáv a $]5, \infty[$ int.-on

Kaptuk: f-nek az $x = 5$ helyen inflexiója van. Itt a helyettesítési érték:

$$f(5) = \frac{-16}{36} = -\frac{4}{9} \approx -0,44$$

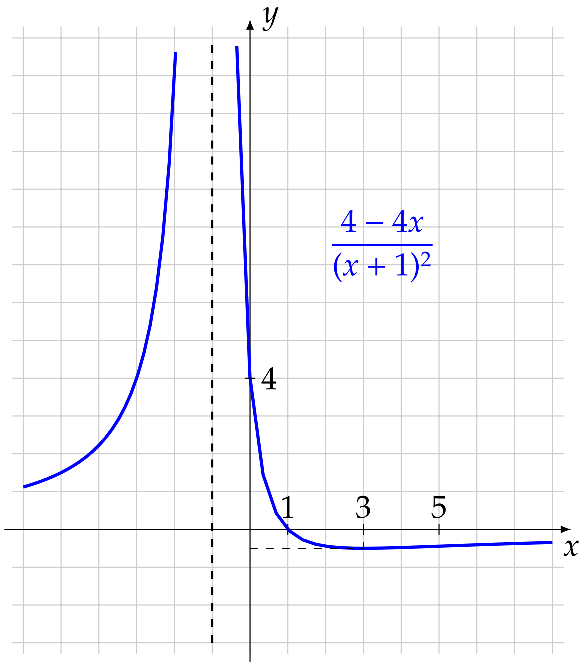
aszimptoták:

f *valódi* racionális törtfüggvény, ezért aszimptotái az x-tengely (az $y = 0$ egyenes képe) ill. a szakadási helyénél szaggatottal jelölt $x = -1$ egyenletű egyenes.

f aszimptotái:

$$a_1: \quad x = -1$$
$$a_2: \quad y = 0$$

A számolt összefüggések alapján felvázolhatjuk f grafikonját:



A grafikonról leolvassuk f értékkészletét, és globális szélsőértékeit:

$$R_f = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$$

$$f(3) = -\frac{1}{2} \text{ globális minimum.}$$

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Megoldás:

D_f meghatározása:

a nevezőben nem állhat 0 $\Rightarrow \quad x \neq 1$;

a logaritmusfüggvény miatt: $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 1+x>0 & \text{és} & 1-x>0 \\ & \text{vagy} & \\ 1+x<0 & \text{és} & 1-x<0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x>-1 & \text{és} & x<1 \\ & \text{vagy} & \\ x<-1 & \text{és} & 1<x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ -1<x<1 \right\}$$

Kaptuk: $D_f =]-1,1[$

Tengelymetszetek:

x-tengelyen (zérushelyek):

$$f(x)=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x}=1 \Rightarrow 1+x=1-x \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

y-tengelyen: $f(0)=\ln 1 = 0$

f grafikonja tehát átmegy az origón.

paritás-vizsgálat:

i) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ii) $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)}\right) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$

i)-ii) $\Rightarrow$ f páratlan függvény (grafikonja szimmetrikus az origóra).

f-nek egy zérushelye van, ezért nem periodikus.

(Másképp: D_f korlátos, ezért f nem periodikus.)

f folytonos függvények kompozíciója, ezért maga is folytonos függvény.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{„}\ln \tfrac{0^+}{2}\text{”} = \text{„}\ln 0^+\text{”} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{„}\ln \tfrac{2}{0^+}\text{”} = \text{„}\ln \infty\text{”} = \infty$$

Monotonitás, szélsőértékek:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2=0$ ↯

Kaptuk: f-nek nincs lokális szélsőérték-helye, és így lokális szélsőértéke sem. A táblázat felső sorában f értelmezési tartománya szerepel f és f' **szakadási helyei**, továbbá f' **zérushelyei** által meghatározott osztópontok szerinti felbontásban. Most tehát nincs osztópont!

x	$-1<x<1$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

A táblázat második és harmadik sorában szereplő adatok meghatározásához vegyünk egy számot az (egyetlen) intervallumból, és vizsgáljuk meg ott f' előjelét:

pl. $x=0 \quad f'(0)=\frac{2}{1}=+ \quad \Rightarrow \quad f$ szig. mon. nő a $]-1,1[$ int.-on.

Kaptuk: f szig. mon. nő az egész értelmezési tartományán.

Konvexitás, inflexiós pontok

$$f''(x) = \left(\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right)' = \left(\frac{2}{1-x^2}\right)' = \frac{0-2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

Kaptuk: az $x = 0$ helyen *lehet* f-nek inflexiója (máshol nem). A táblázat felső sorában f értelmezési tartománya szerepel f és f'' **szakadási helyei**, továbbá f'' **zérushelyei** által meghatározott osztópontok szerinti felbontásban. Most tehát egy osztópont van, $x = 0$.

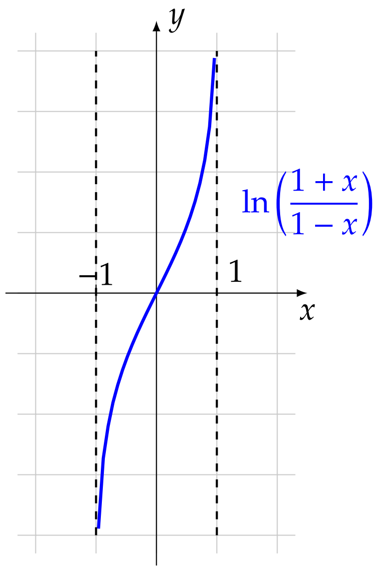
	I.		II.
x	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	infl.	$\smile$

A táblázat második és harmadik sorában szereplő adatok meghatározásához vegyünk egy-egy számot a keletkező intervallumokból, és vizsgáljuk meg ott f'' előjelét:

I. pl. $x = -\frac{1}{2}$ $\quad f''(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{+} = -$ $\quad\Rightarrow\quad$ f szig. konkáv a $]-1,0[$ int.-on
II. pl. $x = \frac{1}{2}$ $\quad f''(\frac{1}{2}) = \frac{2}{+} = +$ $\quad\Rightarrow\quad$ f szig. konvex a $]0,1[$ int.-on

Kaptuk: f-nek az $x = 0$ helyen inflexiója van. Itt a helyettesítési érték: $f(0) = 0$

A számolt összefüggések alapján felvázolhatjuk f grafikonját:



$R_f = \mathbb{R}$

f-nek nincs globális szélsőértéke.

(c) $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R}^+ =]0, \infty[$

Tengelymetszetek:

x-tengelyen (zérushelyek): $f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ \lightning \quad (0 \notin D_f) \\ \ln\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

y-tengelyen: $f(0)\ \lightning \quad (0 \notin D_f$, a grafikon nem metszi az y-tengelyt.)

$\left.\begin{array}{r} 1 \in D_f \\ -1 \notin D_f \end{array}\right\} \Rightarrow f$ nem páros, nem páratlan.

f-nek egy zérushelye van, ezért nem periodikus.

f folytonos függvények szorzata, ezért maga is folytonos függvény.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x\ln\frac{1}{x}}_{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \lim_{x\to 0^+} x = 0^+$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x\ln\frac{1}{x}}_{\infty\cdot\ln 0^+} = \text{„}\infty\cdot(-\infty)\text{''} = -\infty$$

Monotonitás, szélsőértékek:

$$f'(x) = \left(x\ln\frac{1}{x}\right)' = \ln\frac{1}{x} + x\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(\ln\frac{1}{x}\right) - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = e \Rightarrow x = \frac{1}{e} \approx 0,36.$$

Kaptuk: az $x = \frac{1}{e}$ helyen *lehet* f-nek lokális szélsőértéke (máshol nem). Akkor *van* itt lokális szélsőérték, ha itt f' előjelet vált. Ezt táblázatos formában vizsgáljuk meg. A táblázat felső sorában f értelmezési tartománya szerepel f és f' **szakadási helyei**, továbbá f' **zérushelyei** által meghatározott osztópontok szerinti felbontásban.

	I.		II.
x	$0 < x < \frac{1}{e}$	$x = \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$

A táblázat második és harmadik sorában szereplő adatok meghatározásához vegyünk egy-egy számot a keletkező intervallumokból, és vizsgáljuk meg ott f' előjelét:

I. pl. $x = \frac{1}{e^2}$ $\quad f'(\frac{1}{e^2}) = \ln e^2 - 1 = 2 - 1 = + \quad \Rightarrow \quad f$ szig. mon. nő a $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ int.-on

II. pl. $x = e$ $\quad f'(e) = \ln\frac{1}{e} - 1 = -1 - 1 = - \quad \Rightarrow \quad f$ szig.mon.csökk. az $\left]\frac{1}{e}, \infty\right[$ int.-on

f-nek az $x = \frac{1}{e}$ helyen lokális maximuma van, aminek értéke:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\cdot\ln e = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e} \approx 0,36$$

Konvexitás, inflexiós pontok

$$f''(x) = \left(\left(\ln\frac{1}{x}\right) - 1\right)' = x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 1 = 0 \ \lightning$$

f-nek nincs inflexiós helye. A táblázat felső sorában f értelmezési tartománya szerepel f és f'' **szakadási helyei** továbbá f'' **zérushelyei** által meghatározott osztópontok szerinti felbontásban.

Most tehát nincs osztópont!

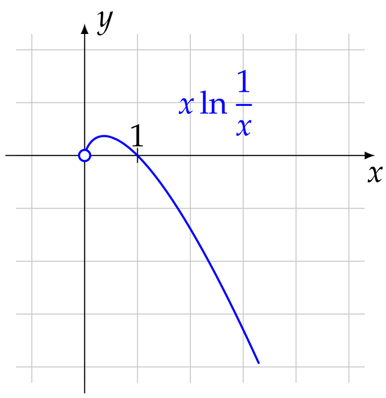
x	$0 < x$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\frown$

A táblázat második és harmadik sorában szereplő adatok meghatározásához vegyünk egy számot a keletkező intervallumból, és vizsgáljuk meg ott f'' előjelét:

$$\text{pl. } x = 1 \quad f''(1) = -1 = - \quad \Rightarrow \quad f \text{ szig. konkáv a }]0, \infty[\text{ int.-on}$$

f tehát szigorúan konkáv az egész értelmezési tartományán.

A számolt összefüggések alapján felvázolhatjuk f grafikonját:



$$R_f = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right]$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \text{ globális maximum.}$$

(d) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Tengelymetszetek:

x-tengelyen (zérushelyek): $f(x) = 0$ ↯ $\quad (0 \notin D_f\ ,\ \ e^{\frac{1}{x}} > 0)$

y-tengelyen: $f(0)$ ↯ $\quad (0 \notin D_f$, a grafikon nem metszi az y-tengelyt.)

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= -\tfrac{1}{e} \\ f(1) &= e \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(-1) &\neq f(1) \\ f(-1) &\neq -f(1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \; f \text{ nem páros, nem páratlan.}$$

f-nek egy szakadási helye van, ezért nem periodikus.

f folytonos függvények szorzata, ezért maga is folytonos függvény.

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = „0^- \cdot e^{-\infty}” = „0^- \cdot 0^+” = 0^-$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{xe^{\frac{1}{x}}}_{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = „-\infty \cdot 1” = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} = „\infty \cdot 1" = \infty$$

Monotonitás, szélsőértékek:

$$f'(x) = \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow 1-\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

	I.		II.		III.
x	$-\infty < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	$+$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

I. pl. $x = -1$ $\quad f'(-1) = \frac{1}{e}\cdot 2 = +$ $\quad\Rightarrow\quad f$ szig. mon. nő a $]-\infty, 0[$ int.-on

II. pl. $x = \frac{1}{2}$ $\quad f'(\frac{1}{2}) = e^2 \cdot (-1) = -$ $\quad\Rightarrow\quad f$ szig. mon. cs. a $]0, 1[$ int.-on

III. pl. $x = 2$ $\quad f'(2) = e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = +$ $\quad\Rightarrow\quad f$ szig. mon. nő a $]1, \infty[$ int.-on

f-nek az $x = 1$ helyen lokális maximuma van, aminek értéke:

$$f(1) = 1 \cdot e = e \approx 2{,}7$$

Konvexitás, inflexiós pontok

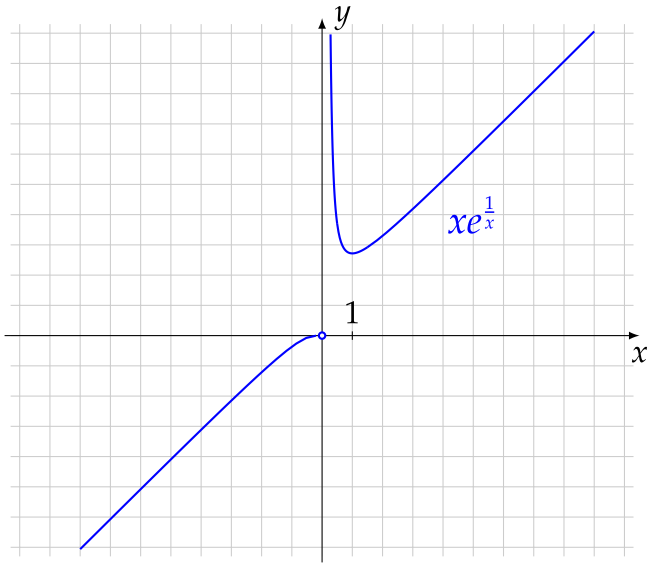
$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} = -e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3} + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3} = 0 \;\lightning$$

	I.		II.
x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f''(x)$	$-$	$*$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$*$	$\smile$

I. pl. $x = -1$ $\quad f''(-1) = (+)\cdot(-) = -$ $\quad\Rightarrow\quad f$ szig. konkáv a $]-\infty, 0[$ int.-on

II. pl. $x = 1$ $\quad f''(1) = (+)\cdot(+) = +$ $\quad\Rightarrow\quad f$ szig. konvex a $]0, \infty[$ int.-on



$$R_f =]-\infty, 0[\cup[e, \infty[= \mathbb{R}\setminus[0, e[$$

f-nek nincs globális szélsőértéke.

(e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3$

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R}$

Tengelymetszetek:

x-tengelyen (zérushelyek): $f(x) = 0 \Rightarrow \quad ?$

f zérushelyeit elemi úton nem tudjuk meghatározni. Ld. még később!

y-tengelyen: $f(0) = 3$

$$\left.\begin{array}{r} f(-1) = 6 \\ f(1) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(-1) \neq f(1) \\ f(-1) \neq -f(1) \end{array} \Rightarrow f \text{ nem páros, nem páratlan.}$$

f harmadfokú racionáis egész függvény, ezért zérushelyeinek száma egy vagy három, tehát nem periodikus.

f racionális egész függvény, ezért folytonos függvény.

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 4x^2 + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + 4x^2 + 3 = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Monotonitás, szélsőértékek:

$f'(x) = (x^3 + 4x^2 + 3)' = 3x^2 + 8x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(3x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0$ vagy $x = -\frac{8}{3} \approx -2,67.$

	I.		II.		III.
x	$-\infty < x < -\frac{8}{3}$	$x = -\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

$$\begin{array}{rrl} \text{I.} & f'(-3) = 3 = & + \\ \text{II.} & f'(-1) = -5 = & - \\ \text{III.} & f'(1) = 11 = & + \end{array}$$

f-nek az $x = -\frac{8}{3}$ helyen lokális maximuma van, aminek értéke:

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{337}{27} \approx 12,5$$

f-nek az $x = 0$ helyen lokális mimimuma van, aminek értéke:

$$f(0) = 3$$

Konvexitás, inflexiós pontok

$f''(x) = (3x^2 + 8x)' = 6x + 8$

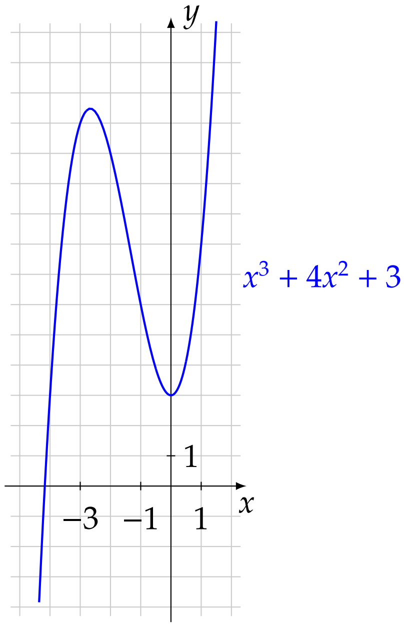
$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

	I.		II.
x	$x < -\frac{4}{3}$	$x = -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	infl.	$\smile$

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & f''(-2) = -4 = & - \\ \text{II.} & f''(0) = 8 = & + \end{array}$$

f-nek az $x = -\frac{4}{3}$ helyen inflexiója van, és itt a helyettesítési érték $f(-\frac{4}{3}) = \frac{209}{27} \approx 7,74$

Visszatérve f zérushelyeinek kérdésére: a monotonitás-vizsgálat alapján annyit mondhatunk, hogy f-nek egy zérushelye van, mégpedig a $]-\infty, -\frac{8}{3}[$ intervallumon.



$R_f = \mathbb{R}$

f-nek nincs globális szélsőértéke.

(f) $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x+3}$

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Tengelymetszetek:

x-tengelyen (zérushelyek): $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 7 = 0 \;\lightning\;$ Nincs zérushely.

y-tengelyen: $f(0) = \frac{7}{3} \approx 2,33$

$$\left.\begin{array}{r} 3 \in D_f \\ -3 \notin D_f \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nem páros, nem páratlan.}$$

f-nek egy szakadási helye van, ezért nem periodikus.

f folytonos függvények hányadosa, ezért maga is folytonos függvény.

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+7}{x+3} = „\frac{16}{0^+}" = \infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+7}{x+3} = „\frac{16}{0^-}" = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+7}{x+3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+7}{x+3}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1}=-\infty$$

<u>Monotonitás, szélsőértékek:</u>

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+7}{x+3}\right)'=\frac{2x(x+3)-(x^2+7)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ x^2+6x-7=0\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-7\end{cases}$$

	I.		II.		III.		IV.
x	$]-\infty,-7[$	$x=-7$	$]-7,-3[$	$x=-3$	$]-3,1[$	$x=1$	$]1,\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok.max	$\searrow$	$*$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

I. $\quad f'(-8)=\dfrac{9}{+}=+$

II. $\quad f'(-4)=\dfrac{-15}{+}=-$

III. $\quad f'(0)=\dfrac{-7}{+}=-$

IV. $\quad f'(2)=\dfrac{9}{+}=+$

$f(-7)=\dfrac{56}{-4}=-14$ lokális maximum, $f(1)=\dfrac{8}{4}=2$ lokális minimum.

<u>Konvexitás, inflexiós pontok</u>

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}\right)'=\frac{(2x+6)(x+3)^2-(x^2+6x-7)\cdot 2\cdot(x+3)}{(x+3)^4}=$$

$$=\frac{(2x+6)(x+3)-2(x^2+6x-7)}{(x+3)^3}=\frac{2x^2+6x+6x+18-2x^2-12x+14}{(x+3)^3}=\frac{32}{(x+3)^3}$$

$f''(x)=0\ \Rightarrow\ 32=0\ \lightning$ (Nincs inflexiós pont.)

	I.		II.
x	$]-\infty,-3[$	$x=-3$	$]-3,\infty[$
$f''(x)$	$-$	$*$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$*$	$\smile$

I. $\quad f''(-4)=\dfrac{32}{-1}=-$

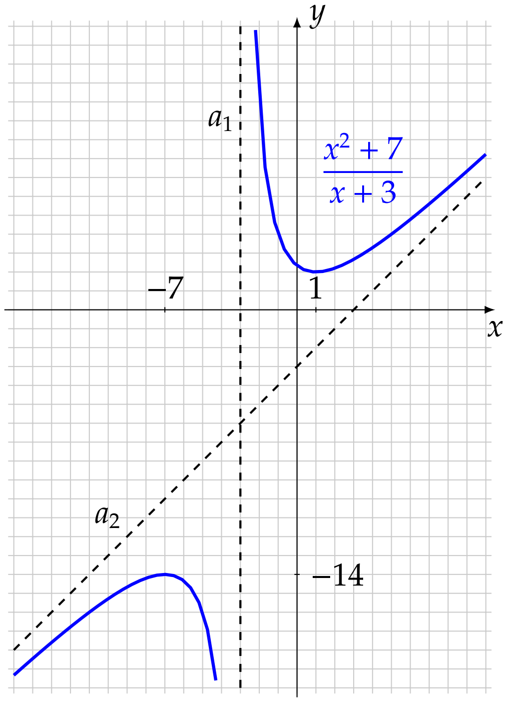
II. $\quad f''(-2)=\dfrac{32}{1}=+$

f *nem valódi* racionális törtfüggvény, így a nem-függőleges aszimptotáját polinomosztással határozzuk meg.

$$\begin{aligned}&(x^2+7):(x+3)=x-3\\&\ -3x+7\\&\qquad 16\end{aligned}$$

f aszimptotái:

$$a_1: \quad x = -3$$
$$a_2: \quad y = x - 3$$



$R_f =]-\infty, -14] \cup [2, \infty[$

Nincs globális szélsőérték.

(g) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

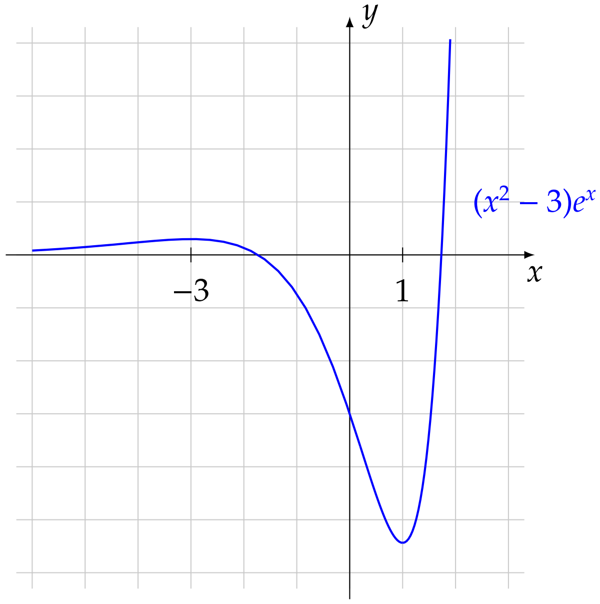
Útmutató:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - 3)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x^2 - 3)e^x}_{\infty\cdot 0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{e^{-x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0^+$$

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

$$f''(x) = (x^2 + 4x - 1)e^x$$



(h) $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 2)$

Útmutató:

Értelmezési tartomány:

$x^2 + 2x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -1 - \sqrt{3}$ vagy $x > -1 + \sqrt{3}$

$D_f = \,]-\infty; -1 - \sqrt{3}[\, \cup \,]-1 + \sqrt{3}; \infty[$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+2x+4)}{(x^2+2x-2)^2}$$