Analízis előadások

Vajda István

Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2013. február 10.

Az elemi függvények csoportosítása

- Elemi függvények
  - Algebrai függvények
    - Racionális függvények
      - Polinomok
      - Racionális törtfüggvények
    - Irracionális függvények
  - Transzcendens függvények

Polinomok integrálása

Felhasználjuk az

$$\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \in \mathbb{N})$$

alapintegrált, és a következő szabályokat:

$$\int cf = c\int f \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

$$\int f \pm g = \int f \pm \int g$$

Pl.: $\int \left(2x^2 - 3x + 5\right) \,\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + C$

Polinomok integrálása

Felhasználjuk az

$$\int x^k \, \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \in \mathbb{N})$$

alapintegrált, és a következő szabályokat:

$$\int cf = c \int f \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

$$\int f \pm g = \int f \pm \int g$$

Pl.: $\int \left(2x^2 - 3x + 5\right) \, \mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + C$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője elsőfokú:

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

Felhasználtuk:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Példa:

$$\int \frac{5}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{5\ln|2x+3|}{2} + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője elsőfokú:

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

Felhasználtuk:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Példa:

$$\int \frac{5}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{5\ln|2x+3|}{2} + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője elsőfokú:

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

Felhasználtuk:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Példa:

$$\int \frac{5}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{5\ln|2x+3|}{2} + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy elsőfokú kifejezés hatványa:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$$

Felhasználtuk:

$$\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Példa:

$$\int \frac{2}{(3x-1)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3(3x-1)^2} + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy elsőfokú kifejezés hatványa:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$$

Felhasználtuk:

$$\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Példa:

$$\int \frac{2}{(3x-1)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3(3x-1)^2} + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy elsőfokú kifejezés hatványa:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$$

Felhasználtuk:

$$\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Példa:

$$\int \frac{2}{(3x-1)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3(3x-1)^2} + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy másodfokú kifejezés:

$$\int \frac{A}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = ?$$

- Ha $x^2 + px + q$ felbontható két elsőfokú tényező szorzatára, akkor ez az integrál visszavezethető az előző esetek egyikére.
- Ha $x^2 + px + q$ a valós számok halmazán nem bontható fel két elsőfokú tényező szorzatára (ún. felbonthatatlan másodfokú polinom), akkor a fenti integrál az

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + C$$

alapintegrálra vezethető vissza.

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy másodfokú kifejezés:

$$\int \frac{A}{x^2 + px + q}\, \mathrm{d}x = ?$$

- Ha $x^2 + px + q$ felbontható két elsőfokú tényező szorzatára, akkor ez az integrál visszavezethető az előző esetek egyikére.
- Ha $x^2 + px + q$ a valós számok halmazán nem bontható fel két elsőfokú tényező szorzatára (ún. felbonthatatlan másodfokú polinom), akkor a fenti integrál az

$$\int \frac{1}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + C$$

alapintegrálra vezethető vissza.

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy másodfokú kifejezés:

$$\int \frac{A}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = ?$$

- Ha $x^2 + px + q$ felbontható két elsőfokú tényező szorzatára, akkor ez az integrál visszavezethető az előző esetek egyikére.
- Ha $x^2 + px + q$ a valós számok halmazán nem bontható fel két elsőfokú tényező szorzatára (ún. felbonthatatlan másodfokú polinom), akkor a fenti integrál az

$$\int \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + C$$

alapintegrálra vezethető vissza.

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy másodfokú kifejezés:

$$\int \frac{A}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa:

$$\int \frac{4}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{(x-2)(x-1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{4}{x-2} - \frac{4}{x-1} \right) \mathrm{d}x = 4 \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 4\left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right) + C = 4 \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans, nevezője egy másodfokú kifejezés:

$$\int \frac{A}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa:

$$\int \frac{3}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(x-1)^2 + 4}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója elsőfokú, nevezője egy másodfokú kifejezés:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

Itt az egyenlőség jobboldalán álló első integrandus az

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|f(x)\right| + C$$

szabály segítségével integrálható, a második pedig a már vizsgált esetek egyike.

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója elsőfokú, nevezője egy másodfokú kifejezés:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

Példa:

$$\int \frac{4x+6}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln\left|x^2+4x+5\right| - 2\int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln\left(x^2+4x+5\right) - 2\,\mathrm{arctg}\,(x+2) + C$$

Elemi törtek integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója konstans vagy elsőfokú kifejezés, a nevező pedig egy felbonthatatlan másodfokú kifejezés hatványa:

$$\int \frac{A}{(x^2 + px + q)^n}\,\mathrm{d}x,$$

illetve

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}\,\mathrm{d}x,$$

akkor az integrálás ugyancsak elvégezhető, de ezzel nem foglalkozunk.

Racionális törtfüggvények integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója alacsonyabbfokú, mint a nevezője (ún. valódi tört), akkor felbontható az eddigiekben vizsgált elemi törtek összegére, amelyek külön-külön integrálhatók. Az összeggé alakítást szokás résztörtekre bontásnak nevezni.

Ha a törtfüggvény számlálójának fokszáma nem kisebb mint a nevezőé, akkor először szétbontjuk egy polinom és egy valódi tört összegére (pl. polinomosztással) és a két részt külön integráljuk.

Racionális törtfüggvények integrálása

Ha a törtfüggvény számlálója alacsonyabbfokú, mint a nevezője (ún. valódi tört), akkor felbontható az eddigiekben vizsgált elemi törtek összegére, amelyek külön-külön integrálhatók. Az összeggé alakítást szokás résztörtekre bontásnak nevezni.

Ha a törtfüggvény számlálójának fokszáma nem kisebb mint a nevezőé, akkor először szétbontjuk egy polinom és egy valódi tört összegére (pl. polinomosztással) és a két részt külön integráljuk.

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{2}{(x-1)} - \frac{2}{(x+2)} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{6}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x = 1 \Rightarrow 6 = 3A \Rightarrow A = 2 \qquad x = -2 \Rightarrow 6 = -3B \Rightarrow B = -2$$

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\frac{2}{(x-1)} - \frac{2}{(x+2)}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= 2\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{6}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$
$$6 = A(x+2) + B(x-1)$$
$$x = 1 \Rightarrow 6 = 3A \Rightarrow A = 2 \qquad x = -2 \Rightarrow 6 = -3B \Rightarrow B = -2$$

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{5x^2 - 20x + 23}{(x-3)(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{2}{(x-3)} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{4}{(x+1)} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln|x-3| - \ln|x-2| + 4\ln|x+1| + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{5x^2 - 20x + 23}{(x-3)(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x+1}$$

$$5x^2 - 20x + 23 = A(x-2)(x+1) + B(x-3)(x+1) + D(x-3)(x-2)$$

$$\begin{array}{ccc} x = 3 & x = 2 & x = -1 \\ 8 = 4A & 3 = -3B & 48 = 12D \\ A = 2 & B = -1 & D = 4 \end{array}$$

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{5x^2 - 20x + 23}{(x-3)(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{2}{(x-3)} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{4}{(x+1)} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln|x-3| - \ln|x-2| + 4\ln|x+1| + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{5x^2 - 20x + 23}{(x-3)(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x+1}$$

$$5x^2 - 20x + 23 = A(x-2)(x+1) + B(x-3)(x+1) + D(x-3)(x-2)$$

$$\begin{array}{ccc} x = 3 & x = 2 & x = -1 \\ 8 = 4A & 3 = -3B & 48 = 12D \\ A = 2 & B = -1 & D = 4 \end{array}$$

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{7x^2-9x+5}{(x-2)\left(x^2+1\right)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{3}{(x-2)} + \frac{4x}{(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 3\ln|x-2| + 2\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arctg} x + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{7x^2-9x+5}{(x-2)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$$

$$7x^2-9x+5 = A\left(x^2+1\right) + Bx(x-2) + D(x-2)$$

$$\begin{array}{ccc} x=2 & x=0 & x^2 \\ 15=5A & 5=A-2D & 7=A+B \\ A=3 & D=-1 & B=4 \end{array}$$

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{7x^2 - 9x + 5}{(x-2)\left(x^2+1\right)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\frac{3}{(x-2)} + \frac{4x}{\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{\left(x^2+1\right)} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= 3\ln|x-2| + 2\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arctg} x + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{7x^2 - 9x + 5}{(x-2)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$$
$$7x^2 - 9x + 5 = A\left(x^2+1\right) + Bx(x-2) + D(x-2)$$

$$\begin{array}{ccc} x = 2 & x = 0 & x^2 \\ 15 = 5A & 5 = A - 2D & 7 = A + B \\ A = 3 & D = -1 & B = 4 \end{array}$$

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{-7x^2+13x-12}{(x-1)^2(x-3)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-3)} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - 9\ln|x-3| + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{-7x^2+13x-12}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-3}$$

$$-7x^2+13x-12 = A(x-1)(x-3) + B(x-3) + D(x-1)^2$$

$$\begin{array}{ccc} x=1 & x=3 & x^2 \\ -6=-2B & -36=4D & -7=A+D \\ B=3 & D=-9 & A=2 \end{array}$$

Racionális törtfüggvények integrálása résztörtekre bontással

$$\int \frac{-7x^2 + 13x - 12}{(x-1)^2 (x-3)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(\frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-3)} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - 9 \ln|x-3| + C$$

Résztörtekre bontás:

$$\frac{-7x^2 + 13x - 12}{(x-1)^2 (x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-3}$$

$$-7x^2 + 13x - 12 = A(x-1)(x-3) + B(x-3) + D(x-1)^2$$

$$\begin{array}{ccc} x = 1 & x = 3 & x^2 \\ -6 = -2B & -36 = 4D & -7 = A + D \\ B = 3 & D = -9 & A = 2 \end{array}$$

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ alakú függvények integrálása

Ezek az integrálok alkalmas helyettesítéssel a

$$\sqrt{1-t^2} \qquad \sqrt{1+t^2} \qquad \sqrt{t^2-1}$$

függvények valamelyikének integrálására vezethetők vissza.

Példa:

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^2+2x+1+4}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \sqrt{1+t^2}\,2\,\mathrm{d}t = 4\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ahol $t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 2t-1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ alakú függvények integrálása

Ezek az integrálok alkalmas helyettesítéssel a

$$\sqrt{1-t^2} \qquad \sqrt{1+t^2} \qquad \sqrt{t^2-1}$$

függvények valamelyikének integrálására vezethetők vissza.
Példa:

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^2+2x+1+4}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \sqrt{1+t^2}\,2\,\mathrm{d}t = 4\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ahol $t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 2t-1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$

Az $\sqrt{1-t^2}$ függvény integrálása

Mivel csak valós értékű függvényekkel foglalkozunk, $t \in [-1, 1]$. Legyen $t = \sin(\varphi)$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ekkor $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(\varphi)} = \cos(\varphi)$, $\varphi = \arcsin(t)$ továbbá $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi} = \cos(\varphi) \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$.

$$\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\varphi)}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{4} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{2} + C = \frac{1}{2}\arcsin(t) + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + C$$

Az $\sqrt{1+t^2}$ függvény integrálása

Legyen $t = \operatorname{sh}(u)$. Ekkor $\sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)} = \operatorname{ch}(u)$, $u = \operatorname{arsh}(t)$ továbbá $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \operatorname{ch}(u) \Rightarrow \mathrm{d}t = \operatorname{ch}(u)\,\mathrm{d}u$.

$$\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \operatorname{ch}^2(u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{\operatorname{ch}(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int \left(\frac{\operatorname{ch}(2u)}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u = \frac{\operatorname{sh}(2u)}{4} + \frac{1}{2}u + C =$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(u)}{2} + \frac{1}{2}u + C = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsh}(t) + C$$

Az $\sqrt{t^2-1}$ függvény integrálása

Legyen $t = \mathrm{ch}(u)$. Ekkor $\sqrt{t^2-1} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(u)-1} = \mathrm{sh}(u)$, $u = \mathrm{arch}(t)$ továbbá $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{sh}(u) \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{sh}(u)\,\mathrm{d}u$.

$$\int \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{sh}^2(u)\ \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{ch}(2u)-1}{2}\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int \left(\frac{\mathrm{ch}(2u)}{2} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{sh}(2u)}{4} - \frac{1}{2}u + C =$$
$$= \frac{\mathrm{sh}(u)\,\mathrm{ch}(u)}{2} - \frac{1}{2}u + C = \frac{t\sqrt{t^2-1}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arch}(t) + C$$

$\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú függvények integrálása

Ezek az integrálok alkalmas helyettesítéssel a

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

függvények valamelyikének integrálására vezethetők vissza, ezek pedig alapintegrálok.

Példa:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-4x+10}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(2x-1)^2+9}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arsh}\frac{2x-1}{3} + C$$

$\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú függvények integrálása

Ezek az integrálok alkalmas helyettesítéssel a

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

függvények valamelyikének integrálására vezethetők vissza, ezek pedig alapintegrálok.

Példa:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-4x+10}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(2x-1)^2+9}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arsh}\frac{2x-1}{3} + C$$

Az $\mathrm{R}\left(\sqrt[m]{x}\right)$ alakú függvények integrálása

Ha R racionális törtfüggvény és $g(x) = \sqrt[m]{x}$, akkor az $\mathrm{R} \circ g$ összetett függvényt $x = t^m$ helyettesítéssel oldhatjuk meg.

Példa:

$$\int \frac{x + \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{t^2 + t + 2}{t + 1}\, 2t\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{2t^3 + 2t^2 + 4t}{t + 1}\, \mathrm{d}t = \int \left(2t^2 + 4 - \frac{4}{t + 1}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2t^3}{3} + 4t - 4\ln|t + 1| + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 4\sqrt{x} - 4\ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + C$$

A $\sqrt{x} = t$ helyettesítést alkalmaztuk, $x = t^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\, \mathrm{d}t$.

Az $\mathrm{R}\left(\sqrt[m]{x}\right)$ alakú függvények integrálása

Ha R racionális törtfüggvény és $g(x) = \sqrt[m]{x}$, akkor az $\mathrm{R} \circ g$ összetett függvényt $x = t^m$ helyettesítéssel oldhatjuk meg.
Példa:

$$\int \frac{x + \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{t^2 + t + 2}{t + 1}\, 2t\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{2t^3 + 2t^2 + 4t}{t + 1}\, \mathrm{d}t = \int \left(2t^2 + 4 - \frac{4}{t + 1}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2t^3}{3} + 4t - 4\ln|t + 1| + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 4\sqrt{x} - 4\ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + C$$

A $\sqrt{x} = t$ helyettesítést alkalmaztuk, $x = t^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\, \mathrm{d}t$.

$\sin^n(x)\cos(x)$, illetve $\cos^n(x)\sin(x)$ alakú függvények integrálása

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int \cos^n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

Felhasználtuk:

$$\int f^\alpha(x)\, f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

Példa:

$$\int \sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^5(x)}{5} + C$$

$\sin^n(x)\cos(x)$, illetve $\cos^n(x)\sin(x)$ alakú függvények integrálása

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int \cos^n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

Felhasználtuk:

$$\int f^{\alpha}(x)\, f'(x)\;\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

Példa:

$$\int \sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^5(x)}{5} + C$$

$\sin^n(x)\cos(x)$, illetve $\cos^n(x)\sin(x)$ alakú függvények integrálása

$$\int \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int \cos^n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

Felhasználtuk:

$$\int f^{\alpha}(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \neq -1$$

Példa:

$$\int \sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^5(x)}{5} + C$$

$\sin^{2n+1}(x)$, illetve $\cos^{2n+1}(x)$ alakú függvények integrálása

Alkalmazzuk a következő átalakítást:

$$\sin^{2n+1}(x) = \sin^{2n}(x)\sin(x) = \left(1 - \cos^2(x)\right)^n \sin(x)$$

A $\left(1 - \cos^2(x)\right)^n$ kifejezés a $\cos(x)$ egy polinomja. Az integrandus tagonként integrálható az előzőleg ismertetett módszerrel.

Példa:

$$\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^4(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C$$

Hasonló átalakítást alkalmazunk a másik integrandus esetén is.

$\sin^{2n+1}(x)$, illetve $\cos^{2n+1}(x)$ alakú függvények integrálása

Alkalmazzuk a következő átalakítást:

$$\sin^{2n+1}(x) = \sin^{2n}(x)\sin(x) = \left(1 - \cos^2(x)\right)^n \sin(x)$$

A $\left(1 - \cos^2(x)\right)^n$ kifejezés a $\cos(x)$ egy polinomja. Az integrandus tagonként integrálható az előzőleg ismertetett módszerrel.

Példa:

$$\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^4(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C$$

Hasonló átalakítást alkalmazunk a másik integrandus esetén is.

$\sin^{2n+1}(x)$, illetve $\cos^{2n+1}(x)$ alakú függvények integrálása

Alkalmazzuk a következő átalakítást:

$$\sin^{2n+1}(x) = \sin^{2n}(x)\sin(x) = \left(1 - \cos^2(x)\right)^n \sin(x)$$

A $\left(1 - \cos^2(x)\right)^n$ kifejezés a $\cos(x)$ egy polinomja. Az integrandus tagonként integrálható az előzőleg ismertetett módszerrel.

Példa:

$$\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^4(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \left(1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C$$

Hasonló átalakítást alkalmazunk a másik integrandus esetén is.

$\sin^{2n}(x)$, illetve $\cos^{2n}(x)$ alakú függvények integrálása

Az integrandust az alábbi ún. linearizáló formulák segítségével olyan kifejezéssé alakíthatjuk, amelyben a trigonometrikus tagok fokszáma kisebb:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

A linearizáló formulák alkalmazását addig ismételjük, amíg minden tag integrálható lesz a korábban ismertetett módszerek valamelyikével.

$\sin^{2n}(x)$, illetve $\cos^{2n}(x)$ alakú függvények integrálása

Példa:

$$
\begin{aligned}
\int \cos^4(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C
\end{aligned}
$$

$\sin^{2n}(x)$, illetve $\cos^{2n}(x)$ alakú függvények integrálása

Példa:

$$\int \sin^6(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{8}\int \big(1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2(2x) - \cos^3(2x)\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos(2x) + \frac{3}{2}\,(1+\cos(4x)) - \big(1-\sin^2(2x)\big)\cos(2x)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + C$$

$\mathrm{tg}^n(x)$, illetve $\mathrm{ctg}^n(x)$ alakú függvények integrálása

Először vizsgáljuk az $n = 1$ esetet:

$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln\left|\cos(x)\right| + C,$$

illetve

$$\int \mathrm{ctg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\sin(x)\right| + C$$

Mindkét esetben a

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|f(x)\right| + C$$

szabályt alkalmaztuk.

$\mathrm{tg}^n(x)$ alakú függvények integrálása

$$\int \mathrm{tg}^n(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\,\mathrm{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\cdot\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

Példa:

$$\int \mathrm{tg}^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} - \int \mathrm{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} - \mathrm{tg}(x) + \int 1\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} - \mathrm{tg}(x) + x + C$$

$\mathrm{tg}^n(x)$ alakú függvények integrálása

$$\int \mathrm{tg}^n(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\,\mathrm{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\cdot\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

Példa:

$$\int \mathrm{tg}^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} - \int \mathrm{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} - \mathrm{tg}(x) + \int 1\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} - \mathrm{tg}(x) + x + C$$

$\mathrm{ctg}^n(x)$ alakú függvények integrálása

$$\int \mathrm{ctg}^n(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\,\mathrm{ctg}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\cdot\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-1\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

Példa:

$$\int \mathrm{ctg}^3(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ctg}^2(x)}{2} - \int \mathrm{ctg}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^2(x)}{2} - \ln\left|\sin(x)\right| + C$$

$\mathrm{ctg}^n(x)$ alakú függvények integrálása

$$\int \mathrm{ctg}^n(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\,\mathrm{ctg}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\cdot\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-1\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\cdot\frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

Példa:

$$\int \mathrm{ctg}^3(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ctg}^2(x)}{2} - \int \mathrm{ctg}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^2(x)}{2} - \ln\left|\sin(x)\right| + C$$

Trigonometrikus kifejezések racionális függvényeinek integrálása

$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel.

Ekkor $x = 2\operatorname{arctg}(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Példa:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Trigonometrikus kifejezések racionális függvényeinek integrálása

$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel.

Ekkor $x = 2\operatorname{arctg}(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Példa:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Exponenciális kifejezések racionális függvényeinek integrálása

$t = e^x$ helyettesítéssel.

Ekkor $x = \ln(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Példa:

$$\int \frac{2e^x - 1}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t-1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}(t) - \ln|t| + \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + C =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\left(e^x\right) - x + \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C$$

Exponenciális kifejezések racionális függvényeinek integrálása

$t = e^x$ helyettesítéssel.

Ekkor $x = \ln(t) \Rightarrow \ \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Példa:

$$\int \frac{2e^x - 1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t-1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= 2\,\mathrm{arctg}(t) - \ln|t| + \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + C =$$
$$= 2\,\mathrm{arctg}\left(e^x\right) - x + \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C$$