Többváltozós függvények

1. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát:

   a) $f(x;y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **b)** $f(x;y) = \ln(x+y)$

   c) $f(x;y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ d) $f(x;y) = \sqrt[4]{y - x^2}$

2. Határozza meg a következő függvények megadott értékekhez tartozó szintvonalainak egyenletét:

   a) $z = 2x + 3y + 2 \qquad z_1 = 2, \quad z_2 = 10$

   b) $z = x^2 + y^2 \qquad z_1 = 1, \quad z_2 = 9$

   c) $z = x^2 - y^2 \qquad z_1 = 2, \quad z_2 = 8$

   d) $z = \sqrt{4x^2 + y^2} \qquad z_1 = 3, \quad z_2 = \sqrt{5}$

3. Határozza meg a következő többváltozós függvények parciális deriváltfüggvényeit:

   a) $f(x;y) = x^2 - 6x^2y + y^3$ **b)** $f(x;y) = \ln x^y + e^{x^2-y}$

   c) $f(x;y) = \cos y^x$ **d)** $f(x;y;z) = \ln xyz$

4. Határozza meg az alábbi függvények parciális deriváltjait a megadott P_0 pontban:

   a) $z = \ln \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{\sin^3 y}}\ ; \quad P_0\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$ **b)** $z = \operatorname{tg}(x^2 - 2y)\ ; \quad P_0\,(2;2)$

   c) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}\ ; \quad P_0(1;0)$

5. Határozza meg a következő függvények teljes differenciálját:

   a) $f(x;y) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

   b) $f(x;y) = e^{\frac{x+y}{1-xy}}$

   c) $f(x;y) = \sin^2 x + x\cos y$

6. Számítsa ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes mentén az adott P_0 pontban:

   a) $f(x;y) = \dfrac{1}{\cos^2(x-y)}\ ; \quad \mathbf{v}\left(-\sqrt{3};-1\right)\ ; \quad P_0\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$

   b) $f(x;y) = \sin\left(x^2 + y^2\right)\ ; \quad \mathbf{v}\left(\sqrt{3};1\right)\ ; \quad P_0\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}};\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$

   c) $f(x;y) = \dfrac{\ln x}{\ln y} - \dfrac{\ln y}{\ln x}\ ; \quad \mathbf{v}\,(-3;4)\ ; \quad P_0\,(e;e^2)$

7. Határozza meg a következő függvények szélsőértékeit:

   a) $f(x;y) = (5 + 2x - y)\cdot e^{x^2}$ b) $f(x;y) = e^{xy}$

   c) $f(x;y) = 5 - x^2 + 4x - y^2$ d) $f(x;y) = e^{\frac{x}{2}}\cdot(x + y^2)$

   e) $f(x;y) = x^2 + y^2 + xy + y + \dfrac{1}{3}$ f) $f(x;y) = x^3 + y^3 - 3xy$

8. Határozza meg a $z = xy - 1$ felületnek az origóhoz legközelebb eső pontját!

9. Egy derékszögű háromszög rövidebbik befogójának hosszát $a = 5 \pm 0,1$ cm-nek mértük, másik befogójának hosszát pedig $b = 12 \pm 0,2$ cm-nek. Becsülje meg, hogy mekkora abszolút, illetve relatív hibával számítható ki

a) az átfogó hossza;

b) a háromszög területe;

c) $\operatorname{tg} \beta$, ahol β a b oldallal szemközti szög!

10. A véges növekmények tétele segítségével adjon közelítést az alábbi kétváltozós valós függvények megadott pontban felvett értékére egy olyan közeli pontból kiindulva, ahol a függvényérték könnyen számolható:

a) $f(x;y) = \ln(x^2 - y^3), \quad P(3,02; 1,96)$

b) $f(x;y) = (xy)^2 - 2(y+2x)^3, \quad P(-1,98; 3,01)$

11. Számítsa ki az alábbi kétváltozós függvények kettős integrálját a megadott T tartományon:

a) $f(x;y) = 1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} \qquad T = \{(x;y) \mid -1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2\}$

b) $f(x;y) = x \cdot \sin y \qquad T = \left\{(x;y) \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$

c) $f(x;y) = \dfrac{54y}{1+x^2} \qquad T = \{(x;y) \mid 0 \le x \le \sqrt{3},\ 0 \le y \le \operatorname{arctg} x\}$

d) $f(x;y) = \dfrac{\sin x}{y^3} \qquad T = \left\{(x;y) \mid 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3},\ \cos x \le y \le 2\cos x\right\}$

12. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját a csúcsaival megadott sokszögtartományon:

a) $f(x;y) = e^{x-y} \qquad A(0;0),\ B(1;1),\ C(0;2)$

b) $f(x;y) = -\dfrac{x}{y^2} \qquad A(2;2),\ B(2;3),\ C(4;4)$

13. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját azon a korlátos tartományon, amelyet a következő egyenletekkel megadott görbék határolnak:

a) $f(x;y) = y \cdot e^x \qquad x = y, \quad x = \dfrac{1}{3}y^2$

b) $f(x;y) = \dfrac{y}{(1+x)^2} \qquad x = -y, \quad x = y^2, \quad y = -\dfrac{1}{2}$