Analízis előadások

Vajda István

Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2015. október 20.

A függvénysor fogalma

Definíció: Legyen az $f_1, f_2, \dots, f_n \dots$ függvények értelmezési tartományainak közös része nem üres.

Ekkor a $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} f_k}$ formális összeget függvénysornak nevezzük.

Az $f_1, f_2, \dots, f_n \dots$ függvényeket a függvénysor tagjainak nevezzük.

Az $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k}$ összeget a függvénysor n-edik részletösszegének,

az $\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k}$ összeget pedig a függvénysor

n-edik maradékösszegének nevezzük.

A függvénysorok konvergenciája

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor értelmezési tartományán a tagjai értelmezési tartományának metszetét értjük.

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor konvergens az értelmezési tartományának egy x_0 pontjában, ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\left(x_0\right)$ numerikus sor konvergens.

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor konvergencia-tartománya az a halmaz, amely az értelmezési tartományának azon pontjaiból áll, amelyekben a függvénysor konvergens.

A függvénysorok konvergenciája

Példák:

- A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ függvénysor értelmezési tartománya a valós számok halmaza, konvergenciatartománya a $]-1;1[$ intervallum.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-x^2}} + \ldots$ függvénysor értelmezési tartománya a $]-1;1[$ intervallum.

  A sor egyetlen pontban sem konvergens, hiszen értelmezési tartományának minden pontjában pozitív tagú és $\frac{1}{\sqrt{n-x^2}} \geq \frac{1}{n}$, ha $-1 < x < 1$, ezért létezik pozitív tagú, divergens minoráns sora (a harmonikus sor).

A függvénysorok konvergenciája

Példák:

- A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ függvénysor értelmezési tartománya a valós számok halmaza, konvergenciatartománya a $]-1;1[$ intervallum.
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-x^2}} + \ldots$ függvénysor értelmezési tartománya a $]-1;1[$ intervallum.

  A sor egyetlen pontban sem konvergens, hiszen értelmezési tartományának minden pontjában pozitív tagú és $\frac{1}{\sqrt{n-x^2}} \geq \frac{1}{n}$, ha $-1 < x < 1$, ezért létezik pozitív tagú, divergens minoráns sora (a harmonikus sor).

A függvénysorok konvergenciája

Definíció: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor konvergenciatartománya a $H \neq \emptyset$ halmaz, akkor a sor összegfüggvényén azt az $S\colon\ H \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, amelyre minden $x \in H$ pontban $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Definíció: A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens az I intervallumon, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ küszöbindex, amelyre teljesül, hogy $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$$

(S_n az n-edik részletösszegfüggvény, S az összegfüggvény.)

Megjegyzés: a feltételt $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$ alakban is felírhatjuk.

A függvénysorok konvergenciája

Definíció: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor konvergenciatartománya a $H \neq \emptyset$ halmaz, akkor a sor összegfüggvényén azt az $S\colon\ H \to \mathbb{R}$ függvényt értjük, amelyre minden $x \in H$ pontban $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Definíció: A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens az I intervallumon, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ küszöbindex, amelyre teljesül, hogy $n > n_\varepsilon$ esetén

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$$

(S_n az n-edik részletösszegfüggvény, S az összegfüggvény.)

Megjegyzés: a feltételt $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$ alakban is felírhatjuk.

A függvénysorok konvergenciája

Tétel: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az I intervallumon, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ küszöbindex, amelyre teljesül, hogy $n > n_\varepsilon$ és $m > n_\varepsilon$ esetén $\left|S_n(x) - S_m(x)\right| < \varepsilon$ teljesül minden $x \in I$ esetén.

Tétel: Weierstras-féle konvergencia-kritérium:

Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, továbbá minden $n \in \mathbb{Z}^+$ és minden $x \in I$ esetén $\left|f_n(x)\right| \leq a_n$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor az I intervallumon egyenletesen konvergens.

A függvénysorok konvergenciája

Tétel: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az I intervallumon, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$ küszöbindex, amelyre teljesül, hogy $n > n_\varepsilon$ és $m > n_\varepsilon$ esetén $\left|S_n(x) - S_m(x)\right| < \varepsilon$ teljesül minden $x \in I$ esetén.

Tétel: Weierstras-féle konvergencia-kritérium:

Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, továbbá minden $n \in \mathbb{Z}^+$ és minden $x \in I$ esetén $\left|f_n(x)\right| \leq a_n$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor az I intervallumon egyenletesen konvergens.

A függvénysorok konvergenciája

Definíció: A $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysort abszolút konvergensnek nevezzük a H halmazon, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ függvénysor konvergens H-n.

Megjegyzés: Azok a függvénysorok, amelyekre teljesülnek a Weierstrass-féle konvergencia-kritérium feltételei, nemcsak egyenletesen, hanem abszolút konvergensek is.

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens az I intervallumon és tagjai folytonosak ezen az intervallumon, akkor a függvénysor S összegfüggvénye is folytonos I-n.

A függvénysorok konvergenciája

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysort abszolút konvergensnek nevezzük a H halmazon, ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|$ függvénysor konvergens H-n.

Megjegyzés: Azok a függvénysorok, amelyekre teljesülnek a Weierstrass-féle konvergencia-kritérium feltételei, nemcsak egyenletesen, hanem abszolút konvergensek is.

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens az I intervallumon és tagjai folytonosak ezen az intervallumon, akkor a függvénysor S összegfüggvénye is folytonos I-n.

Műveletek függvénysorokkal

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor konvergens a H halmazon, akkor bármely zárójelezett sora is konvergens ugyanezen a halmazon és ugyanazt az öszegfüggvényt állítja elő, mint az eredeti sor.

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor konvergens a H halmazon, akkor véges sok tag elhagyása vagy véges sok tag hozzávétele után is konvergens marad H-n.

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor konvergens a H halmazon, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ számra a $\sum_{k=1}^{\infty} cf_k$ fügvénysor is konvergens a H halmazon, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} cf_k = c \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Műveletek függvénysorokkal

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor konvergens a H halmazon, akkor bármely zárójelezett sora is konvergens ugyanezen a halmazon és ugyanazt az öszegfüggvényt állítja elő, mint az eredeti sor.

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor konvergens a H halmazon, akkor véges sok tag elhagyása vagy véges sok tag hozzávétele után is konvergens marad H-n.

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fügvénysor konvergens a H halmazon, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ számra a $\sum_{k=1}^{\infty} cf_k$ fügvénysor is konvergens a H halmazon, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} cf_k = c\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Műveletek függvénysorokkal

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ fügvénysorok konvergensek a H halmazon, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_k + g_k)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_k - g_k)$ függvénysorok is konvergensek H-n és

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k + g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k + \sum_{k=1}^{\infty} g_k,$$

illetve

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k - g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} g_k,$$

Műveletek függvénysorokkal

Tétel: Ha az $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ függvények folytonosak az $[a;b]$ intervallumon és a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens $[a;b]$-n, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor összegfüggvénye integrálható az $[a;b]$ intervallumon és

$$\int_a^b S = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k$$

Műveletek függvénysorokkal

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor konvergens, az $f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n,\ \dots$ függvények differenciálhatók és az $f_1',\ f_2',\ \dots,\ f_n',\ \dots$ deriváltfüggvények folytonosak, továbbá $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$ függvénysor egyenletesen konvergens $[a;b]$-n, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor S összegfüggvénye differenciálható ezen az intervallumon és a differenciálás tagonként is elvégezhető, azaz:

$$S' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$$

A hatványsor fogalma

Definíció: A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ függvénysort, (ahol $x_0 \in \mathbb{R}$) x_0-körüli hatványsornak nevezzük.

Megjegyzések:

- A hatványsorok vizsgálatakor többnyire elegendő 0-körüli hatványsorokkal foglalkoznunk, hiszen $t = x - x_0$ helyettesítéssel az x_0-körüli hatványsor 0-körülibe megy át.
- Az x_0-körüli hatványsor az $x = x_0$ pontban biztosan konvergens, tehát egy hatványsor konvergenciatartománya sohasem az üres halmaz.

Hatványsorok konvergencia-tartománya

Tétel: Abel-tétele:

Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ helyen, akkor vagy konvergens az $\mathbb{R}$ halmazon, vagy létezik olyan $r > 0$ szám, hogy a függvénysor konvergenciatartománya a $]-r; r[$, $[-r; r[$, $]-r; r]$, $[-r; r]$ intervallumok közül valamelyik.

Megjegyzések:

- Tehát, a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor konvergencia-tartománya $\{0\}$ vagy egy nem elfajuló végpontjaitól eltekintve a 0-ra szimmetrikus intervallum.
- Az r számot konvergenciasugárnak nevezzük. Ha a hatványsor konvergencia-tartománya $\mathbb{R}$, akkor $r = \infty$.

Hatványsorok konvergencia-tartománya

Tétel: Abel-tétele:

Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ helyen, akkor vagy konvergens az $\mathbb{R}$ halmazon, vagy létezik olyan $r > 0$ szám, hogy a függvénysor konvergenciatartománya a $]-r;r[$, $[-r;r[$, $]-r;r]$, $[-r;r]$ intervallumok közül valamelyik.

Megjegyzések:

- Tehát, a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor konvergencia-tartománya $\{0\}$ vagy egy nem elfajuló végpontjaitól eltekintve a 0-ra szimmetrikus intervallum.
- Az r számot konvergenciasugárnak nevezzük. Ha a hatványsor konvergencia-tartománya $\mathbb{R}$, akkor $r = \infty$.

Hatványsorok konvergenciája

Tétel: Ha egy hatványsor konvergenciasugara $r > 0$, akkor ez a hatványsor abszolút és egyenletesen konvergens minden $[a; b] \subseteq] -r; r[$ zárt intervallumon.

Tétel: A $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor konvergenciasugarára teljesülnek a következő összefüggések:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Hatványsorok konvergenciája

Tétel: Ha egy hatványsor konvergenciasugara $r > 0$, akkor ez a hatványsor abszolút és egyenletesen konvergens minden $[a; b] \subseteq]-r; r[$ zárt intervallumon.

Tétel: A $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor konvergenciasugarára teljesülnek a következő összefüggések:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Hatványsorok konvergenciája

Példa: Határozzuk meg a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ hatványsor konvergencia-tartományát!

A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$x = 1$-et helyettesítve a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sort kapjuk, ami divergens.

$x = -1$-et helyettesítve a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ feltételesen konvergens sort kapjuk.

A hatványsor konvergencia-tartománya tehát a $[-1; 1[$ intervallum.

Hatványsorok konvergenciája

Példák:

- Határozzuk meg a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ hatványsor konvergencia-tartományát!

  A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

  A hatványsor konvergencia-tartománya tehát $\mathbb{R}$.

- Határozzuk meg a $\sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k$ hatványsor konvergencia-tartományát!

  A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

  A hatványsor konvergencia-tartománya tehát egy pontból áll: $\{0\}$.

Hatványsorok konvergenciája

Példák:

- Határozzuk meg a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ hatványsor konvergencia-tartományát!

  A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

  A hatványsor konvergencia-tartománya tehát $\mathbb{R}$.

- Határozzuk meg a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k$ hatványsor konvergencia-tartományát!

  A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

  A hatványsor konvergencia-tartománya tehát egy pontból áll: $\{0\}$.

Függvények előállítása hatványsor összegeként

Tétel: Ha f a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor nem csak az $x = 0$ helyen konvergens, akkor f a konvergenciaintervallum belső pontjaiban, így 0-ban is differenciálható és

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Következmény: Az f függvény előállítása 0-körüli hatványsor összegeként (hatványsorba fejtése) egyértelmű.

Függvények előállítása hatványsor összegeként

Példa: A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ függvénysor mértani sor, melynek hányadosa x, ezért $|x| < 1$ esetén, azaz a $]-1;1[$ intervallumban konvergens.

Összegfüggvénye:

$$f :]-1;1[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1-x}$$

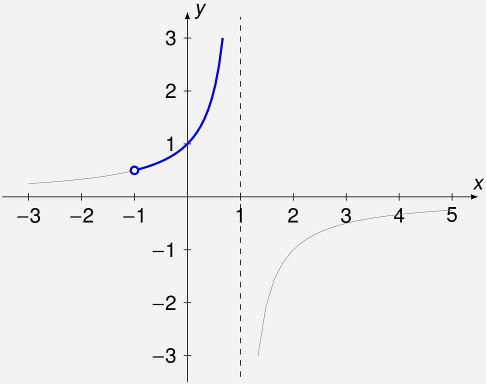
Megfordítva, az $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ hatványsorba fejtése a fenti mértani sort eredményezi.

Valóban:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \left.\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right|_{x=0} = 1$$

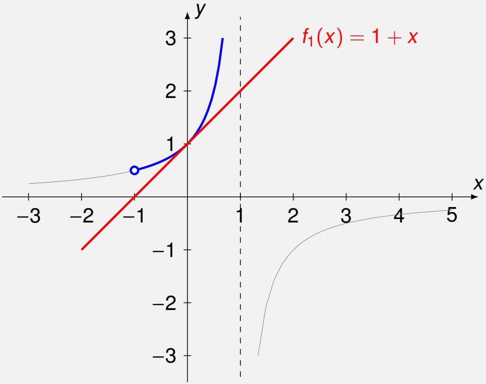
Függvények előállítása hatványsor összegeként

$$f\colon\ ]-1;1[\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1-x}$$



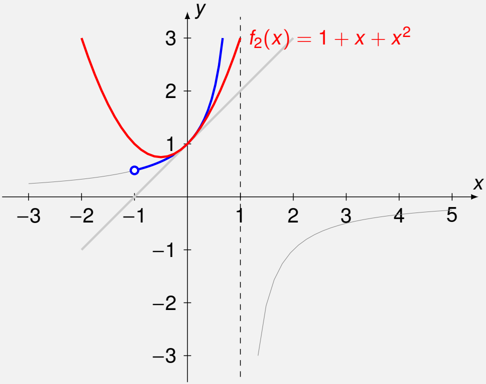
Függvények előállítása hatványsor összegeként

$$f\colon \;]-1;1[\to \mathbb{R},\; f(x)=\frac{1}{1-x}$$



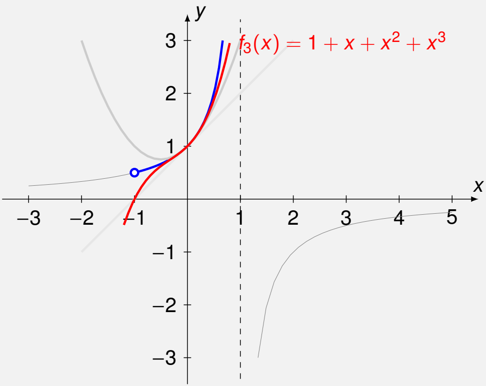
Függvények előállítása hatványsor összegeként

$$f\colon\ ]-1;1[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1-x}$$



Függvények előállítása hatványsor összegeként

$$f\colon\ ]-1;1[\to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1-x}$$



Függvények előállítása hatványsor összegeként

Helyettesítsünk az

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

összefüggésben

- x helyére $-x$-et:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots$$

- x helyére x^2-et:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots$$

A kapott összefüggések a $]-1;1[$ intervallumon érvényesek, ahogyan az eredeti összefüggés is.

Függvények előállítása hatványsor összegeként

Az

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

összefüggést

- differenciálva az

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

- integrálva a

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

összefüggésekhez jutunk, amelyek igazak minden $x \in]-1;1[$ esetén.

Függvények előállítása hatványsor összegeként

Az

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots$$

összefüggésben x helyére x^2-et írva, majd mindkét oldalt integrálva kapjuk az

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \ldots,$$

illetve

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

összefüggéseket. Ezek is érvényesek a $]-1;1[$ intervallumon.

Megjegyzés: Az integrálás során elméletben egy konstans is fellép, de az $x = 0$ eset vizsgálata alapján az 0-val egyenlő.

Egy numerikus sor összege

Az

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

összefüggésbe $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$-at helyettesítve egy numerikus sort kapunk, amelynek összege az $x \mapsto \operatorname{arctg}(x)$ helyettesítési értéke $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$-ban:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^5}} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^7}} + \ldots (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^{2n+1}}} + \ldots = \frac{\pi}{6}$$

Az összefüggés $\sqrt{3}$-mal megszorozva egyszerűbb alakra hozható:

$$1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n} + \ldots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Taylor-sorok

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény végtelen sokszor differenciálható az x_0 hely egy környezetében. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 pont körüli Taylor-sorának nevezzük.

Megjegyzés: Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sort szokás az $f$függvény Maclaurin-sorának is nevezni.

Definíció: Ha az f valós-valós függvény legalább n-szer differenciálható az x_0 hely egy környezetében, akkor $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ függvényt, ami f Taylor-sorának n-edik részletösszege, az f függvény n-edik x_0 körüli Taylor-polinomjának nevezzük.

Megjegyzés: $x_0 = 0$ esetén használjuk a Maclaurin-polinom

Taylor-sorok

Definíció: Legyen az f valós-valós függvény végtelen sokszor differenciálható az x_0 hely egy környezetében. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 pont körüli Taylor-sorának nevezzük.

Megjegyzés: Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-sort szokás az f függvény Maclaurin-sorának is nevezni.

Definíció: Ha az f valós-valós függvény legalább n-szer differenciálható az x_0 hely egy környezetében, akkor $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ függvényt, ami f Taylor-sorának n-edik részletösszege, az f függvény n-edik x_0 körüli Taylor-polinomjának nevezzük.

Megjegyzés: $x_0 = 0$ esetén használjuk a Maclaurin-polinom

A Taylor-formula

Definíció: Ha az f valós-valós függvény legalább $n+1$-szer differenciálható az x_0 hely egy környezetében, akkor minden ebbe a környezetbe eső x helyhez található olyan x_0 és x közötti ξ hely, amelyre teljesül, hogy:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Az f függvény ilyen előállítását Taylor-formulának,

az $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ kifejezést pedig $(n+1)$-edik Lagrange-féle maradéktagnak nevezzük.

A Taylor-sor konvergenciája

Tétel: Ha az f valós-valós függvény az x_0 hely egy környezetében végtelen sokszor differenciálható, és ezen környezet minden x pontjában a az x_0-körüli Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja a 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén, akkor f Taylor-sora konvergens ebben a környezetben és előállítja az f függvényt.

Megjegyzés: Ha egy f valós-valós függvény valamely intervallumon hatványsorba fejthető, akkor a hatványsor egyértelműsége miatt ez a hatványsor az f Taylor-sora.

A Taylor-sor konvergenciája

Tétel: Ha az f valós-valós függvény az x_0 hely egy környezetében végtelen sokszor differenciálható, és ezen környezet minden x pontjában a az x_0-körüli Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja a 0-hoz tart $n \to \infty$ esetén, akkor f Taylor-sora konvergens ebben a környezetben és előállítja az f függvényt.

Megjegyzés: Ha egy f valós-valós függvény valamely intervallumon hatványsorba fejthető, akkor a hatványsor egyértelműsége miatt ez a hatványsor az f Taylor-sora.

Páros és páratlan függvények Maclaurin-sora

Tétel: Ha az f valós-valós függvény páros és sorba fejthető a 0 körül, akkor Maclaurin sora csak páros kitevőjű tagokat tartalmaz.

Bizonyítás: A sorban az n-edfokú tag együtthatóját c_n-nel jelölve

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

Az x helyére $-x$-et helyettesítve:

$$f(-x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

A két egyenlőséget összeadva és felhasználva, hogy f páros, azaz $f(-x) = f(x)$:

$$2f(x) = 2c_0 + 2c_2 x^2 + 2c_4 x^4 + \dots$$

2-vel osztva:

$$f(x) = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots$$

Páros és páratlan függvények Maclaurin-sora

Tétel: Ha az f valós-valós függvény páratlan és sorba fejthető a 0 körül, akkor Maclaurin sora csak páratlan kitevőjű tagokat tartalmaz.

Bizonyítás: A sorban az n-edfokú tag együtthatóját c_n-nel jelölve

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

Az x helyére $-x$-et helyettesítve:

$$f(-x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

A második egyenlőséget kivonva az elsőből és felhasználva, hogy f páratlan, azaz $f(-x) = -f(x)$:

$$2f(x) = 2c_1 x + 2c_3 x^3 + 2c_5 x^5 + \ldots$$

2-vel osztva:

$$f(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots$$

Az $x \mapsto e^x$ függvény Maclaurin-sora

Ha $f(x) = e^x$, akkor $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \left.\dfrac{e^x}{n!}\right|_{x=0} = \dfrac{1}{n!}$.

Így

$$T(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

A $T(x)$ sor minden $x < 0$ esetén konvergens, mert a Lagrange-féle maradéktag $n \to \infty$ esetén a 0-hoz tart:

$$0 < \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| < \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} \to 0 \text{ ha } n \to \infty$$

Felhasználtuk, hogy $x < \xi < 0$, ezért $e^{\xi} < e^0 = 1$, és mivel létezik olyan n_0 pozitív egész, hogy $n_0 \geq |x|$ ezért $n > n_0$ esetén

$$\frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} < \frac{|x^{n_0}|}{n_0!} \cdot \left(\frac{|x|}{n_0+1}\right)^{n+1-n_0} = \frac{|x^{n_0}|}{n_0!} \cdot q^{n+1-n_0} \text{ ahol } q < 1$$

Az $x \mapsto e^x$ függvény Maclaurin-sora

Tudjuk, hogy a

$$T(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

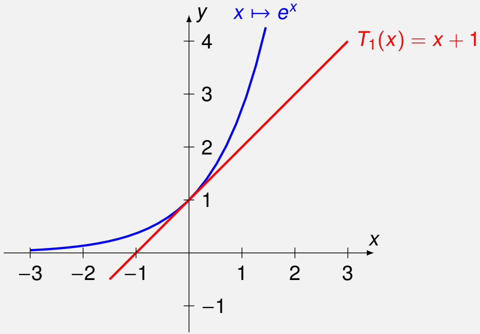
hatványsor a 0-ban konvergens és mivel konvergenciasugara $r = \infty$, ezért konvergens a pozitív x-ekre is.

$T(x)$ a 0-ban előállítja e^0-t (ez behelyettesítéssel ellenőrizhető) és $x > 0$ esetén is előállítja e^x-et, mert

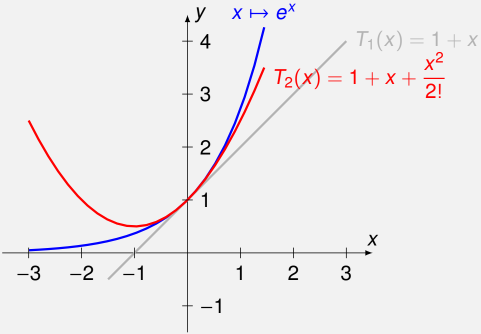
$$0 < \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0 \text{ ha } n \to \infty$$

Felhasználtuk, hogy $0 < \xi < x$.

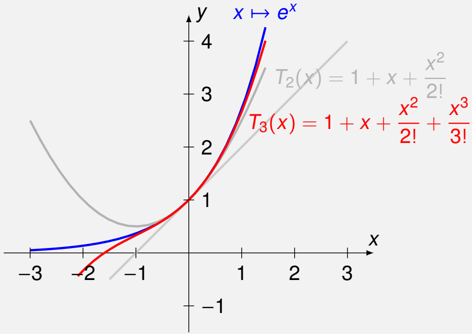
Az $x \mapsto e^x$ függvény Maclaurin-sora



Az $x \mapsto e^x$ függvény Maclaurin-sora



Az $x \mapsto e^x$ függvény Maclaurin-sora



Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény Maclaurin-sora

Mivel az $f(x) = \sin(x)$ függvény páratlan, Maclaurin sorában csak páratlanfokú tagok vannak. (Ez következik abból is, hogy f páros deriváltjai az $x \mapsto -\sin(x)$, illetve az $x \mapsto \sin(x)$ és ezek értéke a 0-ban 0.)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
$4k$	$\sin(x)$	0
$4k+1$	$\cos(x)$	1
$4k+2$	$-\sin(x)$	0
$4k+3$	$-\cos(x)$	-1

$$T(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Az $x \mapsto \sin(x)$ függvényt a Maclaurin-sora minden $x \in \mathbb{R}$ helyen előállítja.

Az $x \mapsto \cos(x)$ függvény Maclaurin-sora

Mivel az $f(x) = \cos(x)$ függvény páros, Maclaurin sorában csak páros fokszámú tagok vannak. (Ez következik abból is, hogy f páratlan deriváltjai az $x \mapsto -\sin(x)$, illetve az $x \mapsto \sin(x)$ és ezek értéke a 0-ban 0.)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
$4k$	$\cos(x)$	1
$4k+1$	$-\sin(x)$	0
$4k+2$	$-\cos(x)$	-1
$4k+3$	$\sin(x)$	0

$$T(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Az $x \mapsto \cos(x)$ függvényt a Maclaurin-sora minden $x \in \mathbb{R}$ helyen előállítja.

Függvényérték meghatározása Maclaurin-sor felhasználásával

Példa: Számítsuk ki a $\sin(20^\circ)$ közelítő értékét 4 tizedesjegy pontossággal!

$$\sin(20^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^7}{7!} + \dots$$

Közelítsünk a harmadfokú Maclaurin polinommal:

$$\sin(20^\circ) \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{3!} \approx 0,3420$$

Mivel a következő tag abszolút értéke $\frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{5!} \approx 4,3 \cdot 10^{-5}$ és ez felső becslése a számítás hibájának, az eredmény 4 tizedesjegyre pontos.

Integrálás a Maclaurin-sor felhasználásával

Példa: Számítsuk ki az $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ integrál közelítő értékét az integrandus ötödfokú Maclaurin polinomjának felhasználásával!

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \dots\right]_0^{0,5} = 0,5 - \frac{0,5^3}{3\cdot 3!} + \frac{0,5^5}{5\cdot 5!} - \dots \approx$$

$$\approx 0,5 - \frac{0,5^3}{3\cdot 3!} + \frac{0,5^5}{5\cdot 5!} \approx 0,4931076$$

A kapott eredmény hibája kisebb, mint $\frac{0,5^7}{7\cdot 7!} \approx 2\cdot 10^{-7}$, tehát 6 tizedesjegyre pontos.

Határérték kiszámítása

Példa: Számítsuk ki az $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x}{x^4+2x^3}$ határértéket!

Felhasználva a $\sin(x)$ Maclaurin-sorát:

$$\sin(x)-x=-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Tehát

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^4+2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^4}{7!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{x+2}=-\frac{1}{12}$$