Közelítő módszerek (részleges megoldókulcs)

1. Az f és g ...

2. Igazoljuk, hogy az $e^x = x^2$ egyenletnek nincs gyöke a nemnegatív számok halmazán, és egyetlen gyöke van a negatív számok halmazán! Oldjuk meg az egyenletet intervallum-felező módszerrel és húrmódszerrel is! Oldjuk meg az egyenletet érintőmódszerrel is, pl. az $x_0 = -1$ helyről kiindulva!

A megoldásokban az $\mathbf{f(x) = e^x - x^2}$ függvény zérushelyét keressük a $[-1, 0]$ intervallumban. Mivel f folytonos, $f(-1) \approx -0,63 < 0$ és $f(0) = 1 > 0$, az egyenletnek a Bolzano-tétel szerint van gyöke a $[-1, 0]$ intervallumon. $f'(x) = e^x - 2x$ pozitív az intervallumon ("pozitív számból vonunk le negatívat"), így f szig. mon. növő az intervallumon, amiből adódik, hogy nem lehet több zérushelye az intervallumon. Mivel $f'(x) = e^x - 2x$ pozitív, $f''(x) = e^x - 2$ pedig negatív, f szigorúan konkáv módon szigorúan monoton nő a $[-1, 0]$ intervallumon.
A keresett zérushelyet jelöljük c-vel. $c \in [-1, 0\,]$. A megoldásokban c-t egy $\{x_n\} \to c$ számsorozattal közelítjük.

Intervallum-felező módszerrel

Egymásba ágyazott, zárt intervallumokból álló intervallum-sorozatot adunk meg, melyek hossza 0-hoz tart, és amelyek mindegyike tartalmazza c-t. Az I_n intervallumok felezőpontjaiként adódó $\{x_n\}$ számsorozat c-hezt tart.
Az egyes intervallumokat úgy képezzük, hogy a két végpontban felvett fv-érték ellentétes előjelű legyen. Folytonos fv-ről lévén szó ez biztosítja, hogy mindegyik intervallum tartalmazza a zérushelyet.

$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0 \qquad f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$

$I_1 = \left[\overset{-}{-1} \overset{x_1}{,} \overset{+}{0}\right] \qquad x_1 = \frac{-1-0}{2} = -0,5 \qquad f(x_1) = e^{-0,5} - (0,5)^2 \approx 0,356 > 0$

$I_2 = \left[\overset{-}{-1} \overset{x_2}{,} -\overset{+}{0},5\right] \qquad x_2 = \frac{-1-0,5}{2} = -0,75 \qquad f(x_2) = e^{-0,75} - (0,75)^2 \approx -0,0901 < 0$

$I_3 = \left[-\overset{-}{0},75 \overset{x_3}{,} -\overset{+}{0},5\right] \qquad x_3 = \frac{-0,75-0,5}{2} = -0,625 \qquad f(x_3) = e^{-0,625} - (0,625)^2 \approx 0,14 > 0$

$I_4 = \left[-\overset{-}{0},75 \overset{x_4}{,} -0,\overset{+}{6}25\right] \qquad x_4 = \frac{-0,75-0,625}{2} = -0,6875 \qquad f(x_4) = e^{-0,6875} - (0,6875)^2 \approx 0,0301 > 0$

$I_5 = \left[-\overset{-}{0},75 \overset{x_5}{,} -0,\overset{+}{6}875\right] \qquad x_5 = \frac{-0,75-0,6875}{2} = -0,71875 \qquad f(x_5) = e^{-0,71875} - (0,71875)^2 \approx -0,0292 < 0$

$I_6 = \left[-0,\overset{-}{7}1875 \overset{x_6}{,} -0,\overset{+}{6}875\right] \qquad$ stb.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots \to c$$

Érintő módszerrel (Newton-Raphson)

Az $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ képlettel dolgozunk,

ahol x_1 a $[-1, 0]$ intervallumnak az a végpontja, ahol f és f'' azonos előjelű.

Mivel: $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f'' < 0$, ezért:

$$x_1 = -1.$$

$x_1 = -1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1 - \frac{e^{-1} - (-1)^2}{e^{-1} - 2(-1)} \ \approx \ -0,73304$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0,73304 - \frac{e^{-0,73304} - (0,73304)^2}{e^{-0,73304} + 2 \cdot 0,73304} \ \approx \ -0,7038$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0,7038 - \frac{e^{-0,7038} - (0,7038)^2}{e^{-0,7038} + 2 \cdot 0,7038} \ \approx \ -0,7034(674662)$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = \ldots \approx -0,70346(674243) \qquad\qquad \text{stb.}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots \to c$

$c \approx -0,70346$

Húrmódszerrel

Az $\boxed{x_{n+1} = x_0 - f(x_0) \cdot \dfrac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)}}$ képlettel dolgozunk,

ahol x_0 a $[-1, 0]$ intervallumnak az a végpontja, ahol f és f'' azonos előjelű; x_1 pedig a másik végpont.

Mivel: $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f'' < 0$, ezért:

$x_0 = -1$ ill. $x_1 = 0$

$$x_2 = x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = -1 - f(-1) \cdot \frac{0 - (-1)}{f(0) - f(-1)} = -1 + 0,632 \cdot \frac{1}{1,632} \approx -0,612$$

$f(x_2) = 0,167$

$$x_3 = x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_2 - x_0}{f(x_2) - f(x_0)} = -1 - f(-1) \cdot \frac{-0,612 - (-1)}{f(-0,612) - f(-1)} = -1 + 0,632 \cdot \frac{-0,612 + 1}{0,167 + 0,632} \approx -0,693$$

$f(x_3) = 0,0198$

$$x_4 = \ \ldots \ = -1 + 0,632 \cdot \frac{-0,693 + 1}{0,0198 + 0,632} \approx -0,702$$

$f(x_4) = 0,002789$

$$x_5 = \ \ldots \ = -1 + 0,632 \cdot \frac{-0,702 + 1}{0,002789 + 0,632} \approx -0,703309$$

$f(x_5) = 0,0003$

$$x_6 = \ \ldots \ = -1 + 0,632 \cdot \frac{-0,703309 + 1}{0,0003 + 0,632} \approx -0,70345$$

$\vdots$

$$x_n = \ \ldots \ = -1 + 0,632 \cdot \frac{... + 1}{... + 0,632} \approx \qquad\qquad \text{stb.}$$

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots \to c$

$c \approx -0,70345$

3. Oldja meg az $x = \cos x$ egyenletet intervallumfelező módszerrel, érintő módszerrel, húrmódszerrel és iteráló módszerrel!
($x \approx 0,7391$)

Az első három megoldásban az $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \cos\mathbf{x}$ függvény zérushelyét keressük a $[0,1]$ intervallumban.
Felhasználjuk, hogy mind $f'(x) = 1 + \sin x$, mind $f''(x) = \cos x$ pozitív a $[0,1]$ itervallumon, tehát f szigorúan konvex módon szigorúan monoton nő a $[0,1]$ intervallumon. Továbbá felhasználjuk, hogy f folytonossága és szigorú monotonitása miatt f-nek egyértelműen létezik zérushelye az adott intervallumon. (megj.: $1 \approx \frac{\pi}{3}$)
Az iteráló módszer esetében $x = \underbrace{\cos x}_{f(x)}$ alakban dolgozunk. A keresett zérushelyet jelöljük c-vel. $c \in [0,1]$.

A megoldásokban c-t egy $\{x_n\} \to c$ számsorozattal közelítjük.

Intervallum-felező módszerrel

$f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) = 0,46 > 0$

$I_1 = \left[\overset{-}{0} \overset{x_1}{,} \overset{+}{1}\right] \qquad x_1 = \frac{0+1}{2} = 0,5 \qquad f(x_1) = 0,5 - \cos 0,5 \approx -0,3776 < 0$

$I_2 = \left[\overset{-}{0,5} \overset{x_2}{,} \overset{+}{1}\right] \qquad x_2 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75 \qquad f(x_2) = 0,75 - \cos 0,75 \approx 0,018 > 0$

$I_3 = \left[\overset{-}{0,5} \overset{x_3}{,} \overset{+}{0,75}\right] \qquad x_3 = \frac{0,5+0,75}{2} = 0,625 \qquad f(x_3) = 0,625 - \cos 0,625 \approx -0,186 < 0$

$I_4 = \left[\overset{-}{0,625} \overset{x_4}{,} \overset{+}{0,75}\right] \qquad x_4 = \frac{0,625+0,75}{2} = 0,6875 \qquad f(x_4) = 0,6875 - \cos 0,6875 \approx \ldots > 0$

stb.

$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots \to c$

Érintő módszerrel (Newton-Raphson)

Mivel $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, $f'' > 0$, ezért:
$x_1 = 1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1 - \cos 1}{1 + \sin 1} \approx 0,75$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,75 - \frac{0,75 - \cos 0,75}{1 + \sin 0,75} \approx 0,7391$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0,7391 - \frac{0,7391 - \cos 0,7391}{1 + \sin 0,7391} \approx 0,73908(51333)$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \approx 0,73908(51332) \qquad \text{stb.}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots \to c$

$c \approx 0,73908$

Húrmódszerrel

Most: $\quad x_0 = 1$ ill. $x_1 = 0$

$$x_2 = x_0 - f(x_0)\cdot\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} = 1-f(1)\cdot\frac{0-1}{f(0)-f(1)} = 1-0,46\cdot\frac{0-1}{-1-0,46}\approx 0,685$$

$f(x_2) = -0,0894$

$$x_3 = x_0 - f(x_0)\cdot\frac{x_2-x_0}{f(x_2)-f(x_0)} = 1-f(1)\cdot\frac{0,685-1}{f(0,685)-f(1)} = 1-0,46\cdot\frac{0,685-1}{-0,0894-0,46}\approx 0,7362$$

$f(x_3) = -0,0048$

$$x_4 = \ldots = 1-0,46\cdot\frac{0,7362-1}{-0,0048-0,46}\approx 0,7389$$

$f(x_4) = -0,0003$

$$x_5 = \ldots = 1-0,46\cdot\frac{0,7389-1}{-0,0003-0,46}\approx 0,73907$$

$f(x_5) = -0,000025$

$$x_6 = \ldots = 1-0,46\cdot\frac{0,73908-1}{-0,000025-0,46}\approx 0,73908$$

$\vdots$

$$x_n = \ldots = 1-0,46\cdot\frac{...-1}{...-0,46}\approx \qquad\qquad \text{stb.}$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots \to c$$

$$c \approx 0,73908$$

Iteráló módszerrel
Az iteráló módszer esetében $x = \underbrace{\cos x}_{f(x)}$ alakban(!) és

az $\boxed{x_{n+1} = f(x_n)}$ képlettel dolgozunk.

$x_1 = 1$

$x_2 = f(x_1) = \cos x_1 = 0,5403$

$x_3 = f(x_2) = \cos x_2 = 0,8575$

$x_4 = f(x_3) = \cos x_3 = 0,6542$

$x_5 = f(x_4) = \cos x_4 = 0,7934$

$x_6 = f(x_5) = \cos x_5 = 0,7013$

$x_7 = f(x_6) = \cos x_6 = 0,7639$

$x_8 = f(x_7) = \cos x_7 = 0,7221$

$x_9 = f(x_8) = \cos x_8 = 0,7504$

$x_{10} = f(x_9) = \cos x_9 = 0,7314$

$x_{11} = f(x_{10}) = \cos x_{10} = 0,7442$

$x_{12} = f(x_{11}) = \cos x_{10} = 0,7356$

$x_{13} = f(x_{12}) = \cos x_{10} = 0,7414$

$x_{14} = f(x_{13}) = \cos x_{10} = 0,77375$

$\vdots$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots \to c$$

4. Oldjuk meg az $xe^{-x} = 0,25$ egyenletet közelítő módszerrel.
($x_1 \approx 0,3574 \quad x_2 \approx 2,1533$)

Az első három megoldásban az $\mathbf{f(x) = xe^{-x} - 0,25}$ függvény zérushelyeit keressük.

$$f(0) = -0,25 < 0 \qquad f(1) = \frac{1}{e} - 0,25 > 0 \qquad f(2) = \frac{2}{e^2} - 0,25 < 0 \qquad f(3) = \frac{3}{e^3} - 0,25 > 0$$

$$f'(x) = (1-x)e^{-x} \qquad f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

Az x_1 zérushelyet a $[0,1]$ intervallumon, az x_2 zérushelyet a $[2,3]$ intervallumon keressük.

$\boxed{\mathbf{x_1} \text{ közelítése:}}$

Intervallum-felező módszerrel

$$I_1 = \left[\overset{-}{0} \overset{x_1}{,} \overset{+}{1}\right] \qquad x_1 = \frac{0+1}{2} = 0,5 \qquad f(x_1) = \ldots$$

Folyt.: HF.

Érintő módszerrel

Mivel $\qquad f(0) < 0 \qquad f(1) > 0 \qquad f'' < 0$

ezért:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx \ldots$$

Folyt.: HF

Húrmódszerrel

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = 1$$

$$x_2 = x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \approx \ldots$$

Folyt.: HF

Iteráló módszerrel

$\mathbf{x} = \underbrace{0,25\,e^x}_{\mathbf{f(x)}}$ alakban(!) dolgozunk.

x_1-nek 0 nem jó, mert $|f'(0)| \geq 1;$ de $x_1 = 0,5$ alkalmas: $|f'(0,5)| < 1.$

$x_1 = 0,5$

$x_2 = f(x_1) = 0,25\,e^{0,5} \approx 0,4121$

$x_3 = f(x_2) = 0,25\,e^{0,4121} \approx 0,3775$

$x_4 = f(x_3) = 0,25\,e^{0,3775} \approx 0,3646$

$x_5 = f(x_4) = 0,25\,e^{0,3646} \approx 0,3599$

$x_6 = f(x_5) = 0,25\,e^{0,3599} \approx 0,3583$

$x_7 = f(x_6) = 0,25\, e^{0,3583} \approx 0,3577$

$x_8 = f(x_7) = 0,25\, e^{0,3577} \approx 0,3575$

$x_9 = f(x_8) = 0,25\, e^{0,3575} \approx 0,3574$

stb.

$$x_1 \approx 0,3574$$

$\boxed{\mathbf{x_2} \text{ közelítése:}}$

HF

5. (Ajánlott házi feladat) Írjanak olyan programokat, amelyekben alkalmazzák a fent megismert eljárásokat!