Analízis előadások

Vajda István

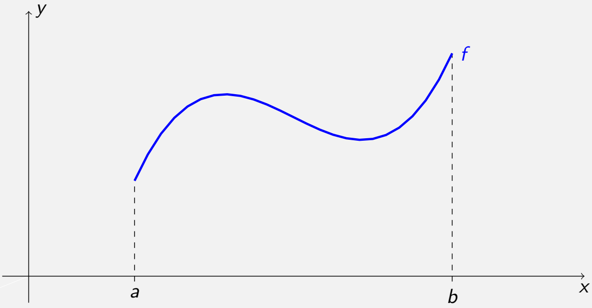
Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2016. február 27.

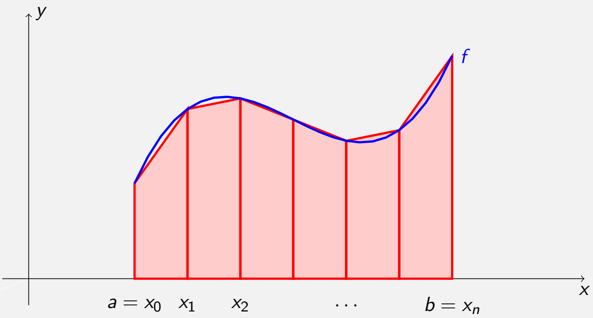
Mikor alkalmazunk numerikus integrálást?

- A függvény integrálható, de nincs primitív függvénye az elemi függvények körében.
- A függvény integrálható, létezik primitív függvénye az elemi függvények körében, ezt azonban nem tudjuk meghatározni.
- A függvény csak grafikusan vagy táblázatosan adott.
- Olyan algoritmusra van szükségünk – pl. számítógéppel történő integráláshoz – amely a függvények széles körére alkalmazható.

Trapézformula



Trapézformula



Trapézformula

Az $[a, b]$ intervallumot az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ osztópontokkal n egyenlő részre bontjuk, és az egyes részek területét az ábrán látható trapézok segítségével közelítjük.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$

Trapézformula

Ha f kétszer differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, a második deriváltfüggvénye korlátos és $|f''(x)| < K$ ha $x \in [a, b]$, akkor $\forall \varepsilon > 0$ számra teljesül, hogy $n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 K}{12\varepsilon}}$ esetén a trapézformula ε-nál kisebb hibával adja meg $\int\limits_a^b f$ értékét.

Simpson-formula

A trapézformulát úgy kaptuk, hogy a számítás során a függvényt egy-egy részintervallumon elsőfokú függvénnyel közelítettük, azaz szemléletesen a függvénygörbét egyenes szakasszal helyettesítettük. A Simpson-formula esetén a függvénygörbét parabolaívekkel helyettesítjük, azaz a függvényt alkalmas másodfokú függvényekkel közelítjül.

Tétel: Egy g másodfokú függvény $[\alpha, \beta]$ intervallumon vett integrálja

$$\int_{\alpha}^{\beta} g = \frac{g(\alpha) + 4g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + g(\beta)}{6} \cdot (\beta - \alpha)$$

Simpson-formula

Tétel: Legyen f az $[a, b]$ intervallumon értelmezett és ott integrálható függvény. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot $2n$ egyenlő részre az $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$ osztópontok segítségével. Ekkor

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{6} \cdot (x_{2i} - x_{2i-2}) =$$

$$= \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right)$$

Simpson-formula

Ha f négyszer differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, a negyedik deriváltfüggvénye korlátos és $\left|f^{IV}(x)\right| < M$ ha $x \in [a, b]$, akkor $\forall \varepsilon > 0$ számra teljesül, hogy $n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M}{2880\varepsilon}}$ esetén a Simpson-formula ε-nál kisebb hibával adja meg $\int\limits_a^b f$ értékét.