Többváltozós függvények

Az előadáshoz kapcsolódó feladatsor megoldókulcsa

1. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát:

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Mo.: A gyökjel miatt: $1-x^2-y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \leq 1$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2+y^2 \leq 1\}$

(Origó középpontú, egységsugarú zárt körlap.)

(b) $f(x,y) = \ln(x+y)$

Mo.: A logaritmusfüggvény miatt: $x+y>0 \quad \Rightarrow \quad y>-x$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y>-x\}$

(Az $y=-x$ egyenes által határolt nyílt félsík.)

(c) $f(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y}$

Mo.: A gyökjelek miatt: $x \geq 0$ és $y \geq 0$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\}$

(Az első síknegyed, beleértve a határoló félegyeneseket is.)

(d) $f(x,y) = \sqrt[4]{y-x^2}$

Mo.: A gyökjel miatt: $y-x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq x^2$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y \geq x^2\}$

(Az $y=x^2$ parabola, a parabola ”belső pontjaival” együtt.)

2. Határozza meg a következő függvények megadott értékekhez tarozó szintvonalainak egyenletét:

(a) $z = 2x+3y+2 \qquad z_1 = 2 \quad z_2 = 10$

Mo.:

$z_1 = 2$ esetén: $\quad 2x+3y+2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x$ A szintvonal egyenlete: $y = -\frac{2}{3}x$

$z_2 = 10$ esetén: $\quad 2x+3y+2 = 10 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ A szintvonal egyenlete: $y = -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

A függvény szintvonalai egyenesek.

(b) $z = x^2+y^2 \qquad z_1 = 1 \quad z_2 = 9$

Mo.:

$z_1 = 1$ esetén a szintvonal görbéjének egyenlete: $x^2+y^2 = 1$

$z_2 = 9$ esetén a szintvonal görbéjének egyenlete: $x^2+y^2 = 9$

A függvény szintvonalai körök.

(c) $z = x^2 - y^2 \qquad z_1 = 2 \quad z_2 = 8$

Mo.:

$z_1 = 2$ esetén: $\quad x^2 - y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

$z_2 = 8$ esetén: $\quad x^2 - y^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} - \dfrac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$

A függvény szintvonalai hiperbolák.

(d) $z = \sqrt{4x^2 + y^2} \qquad z_1 = 3 \quad z_2 = \sqrt{5}$

Mo.:

$z_1 = 3$ esetén: $\quad \sqrt{4x^2 + y^2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + y^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{(3/2)^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

$z_2 = \sqrt{5}$ esetén: $\quad \sqrt{4x^2 + y^2} = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + y^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{(\sqrt{5}/2)^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$

A függvény szintvonalai ellipszisek.

3. Határozza meg a következő többváltozós függvények parciális deriváltfüggvényeit:

megj.: $f'_x(x,y)$ meghatározásakor úgy deriválunk, hogy y-t konstansnak tekintjük,
$f'_y(x,y)$ meghatározásakor úgy deriválunk, hogy x-et konstansnak tekintjük.
Deriváláskor konstans szorzó kiemelhető, konstans tag deriváltja pedig 0.

(a) $f(x,y) = x^2 - 6x^2y + y^3$

Mo.:

$f'_x(x,y) = 2x - 12xy \qquad f'_y(x,y) = -6x^2 + 3y^2$

(b) $f(x,y) = \ln x^y + e^{x^2-y}$

Mo.:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{x^y} \cdot y \cdot x^{y-1} + e^{x^2-y} \cdot 2x = \frac{y}{x} + e^{x^2-y} \cdot 2x$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{x^y} \cdot x^y \cdot \ln x + e^{x^2-y} \cdot (-1) = \ln x - e^{x^2-y}$$

(c) $f(x,y) = \cos y^x$

Mo.:

$f'_x(x,y) = (-\sin y^x) \cdot y^x \cdot \ln y \qquad f'_y(x,y) = (-\sin y^x) \cdot x \cdot y^{x-1}$

(d) $f(x,y,z) = \ln xyz$

Mo.:

$$f'_x(x,y,z)=\frac{1}{xyz}\cdot yz=\frac{1}{x}\qquad f'_y(x,y,z)=\frac{1}{y}\qquad f'_z(x,y,z)=\frac{1}{z}$$

4. Határozza meg az alábbi függvények parciális deriváltjait a megadott P_0 pontban!

(a) $z=\ln\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{\sin^3 y}}\qquad P_0\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Mo.: A $z=f(x,y)$ jelölést alkalmazva:

$$f'_x(x,y)=\frac{\sqrt{\sin^3 y}}{e^{x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin^3 y}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x=2x\qquad\Rightarrow\qquad f'_x(P_0)=2\cdot 1=2$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\sqrt{\sin^3 y}}{e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\sin^3 y\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3\sin^2 y\cdot\cos y=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos y}{\sin y}=-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} y\qquad\Rightarrow\qquad f'_y(P_0)=-\frac{3}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$$

(b) $z=\operatorname{tg}(x^2-2y)\qquad P_0(2,2)$

Mo.: A $z=f(x,y)$ jelölést alkalmazva:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{\cos^2(x^2-2y)}\cdot 2x\qquad\Rightarrow\qquad f'_x(P_0)=\frac{1}{\cos^2 0}\cdot 2\cdot 2=4$$

$$f'_y(x,y)=\frac{1}{\cos^2(x^2-2y)}\cdot(-2)\qquad\Rightarrow\qquad f'_y(P_0)=\frac{1}{\cos^2 0}\cdot(-2)=-2$$

(c) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}\qquad P_0(1,0)$

Mo.: A $z=f(x,y)$ jelölést alkalmazva:

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}=\ldots=\frac{1}{1+x^2}\qquad\Rightarrow\qquad f'_x(P_0)=\frac{1}{2}$$

z szimmetrikus x-re és y-ra, ezért $f'_y(x,y)=\dfrac{1}{1+y^2}$, amiből $\quad f'_y(P_0)=1$

5. Határozza meg a következő függvények teljes differenciálját:

(a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Mo.:

$$f'_x(x,y)=-\frac{1}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'_y(x,y)=-\frac{1}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Ezekkel:

$$\mathrm{d}f=-\frac{1}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

(b) $f(x,y) = e^{\frac{x+y}{1-xy}}$

Mo.:

$f'_x(x,y) = e^{\frac{x+y}{1-xy}} \cdot \frac{(1-xy)+(x+y)y}{(1-xy)^2} = e^{\frac{x+y}{1-xy}} \cdot \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$

Hasonlóan (szimmetria!):

$f'_y(x,y) = e^{\frac{x+y}{1-xy}} \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}$

Ezekkel:

$$\mathrm{d}f = e^{\frac{x+y}{1-xy}} \left(\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}y \right)$$

(c) $f(x,y) = \sin^2 x + x\cos y$

Mo.:

$f'_x(x,y) = 2\sin x\cos x + \cos y \qquad f'_y(x,y) = -x\sin y$

$$\mathrm{d}f = (2\sin x\cos x + \cos y)\ \mathrm{d}x - (x\sin y)\ \mathrm{d}y$$

6. Számítsa ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes mentén az adott P_0 pontban:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\cos^2(x-y)} \qquad \mathbf{v}(-\sqrt{3};-1) \qquad P_0\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

Mo.: Az xy-síkon a $\mathbf{v}$ vektort toljuk el az origóba. Ennek a vektornak az irányszögét (az x-tengely pozitív irányítású félegyenesével bezárt szögét) jelöljük α-val.

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = 210° \qquad$ (III. síknegyed)

$f'_x(x,y) = \ldots = \dfrac{2\sin(x-y)}{\cos^3(x-y)} \qquad \Rightarrow \qquad f'_x(P_0) = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}} = 4$

$f'_y(x,y) = \ldots = \dfrac{-2\sin(x-y)}{\cos^3(x-y)} \qquad \Rightarrow \qquad f'_y(P_0) = \dfrac{-2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}} = -4$

Ezekből:

$f'_\alpha(P_0) = f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\sin\alpha = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\sqrt{3} \approx -1,46$

(b) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2) \qquad \mathbf{v}(\sqrt{3};1) \qquad P_0\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$

Mo.: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30° \qquad$ (I. síknegyed)

$f'_x(x,y) = \cos(x^2+y^2)\cdot 2x \qquad \Rightarrow \qquad f'_x(P_0) = \ldots = -\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$

$f'_y(x,y) = \cos(x^2+y^2)\cdot 2y \qquad \Rightarrow \qquad f'_y(P_0) = \ldots = -\sqrt{\pi}$

Ezekből:

$$f'_\alpha(P_0) = f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\sin\alpha = -\sqrt{\tfrac{3\pi}{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\pi} \cdot \tfrac{1}{2} \approx -2,77$$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{\ln y} - \dfrac{\ln y}{\ln x}$ $\quad$ $\mathbf{v}(-3;4)$ $\quad$ $P_0\,(e, e^2)$

Mo.: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{-3}\right) \approx 126,87°$ (II. síknegyed)

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{x} - (\ln y)(-1) \cdot \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln y} + \frac{\ln y}{\ln^2 x}\right)$$

$$f'_y(x,y) = (\ln x)(-1) \cdot \frac{1}{\ln^2 y} \cdot 1y - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{y}\left(\frac{\ln x}{\ln^2 y} + \frac{1}{\ln x}\right)$$

$$f'_x(P_0) = f'_x(e, e^2) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{\ln e^2} + \frac{\ln e^2}{\ln^2 e}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{2e}$$

$$f'_y(P_0) = f'_y(e, e^2) = -\frac{1}{e^2}\left(\frac{\ln e}{\ln^2 e^2} + \frac{1}{\ln e}\right) = -\frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = -\frac{5}{4e^2}$$

Ezekből:

$$f'_\alpha(P_0) = f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\sin\alpha = \frac{5}{2e} \cdot (-0,6) + \left(-\frac{5}{4e^e}\right) \cdot (0,8) \approx -0,465$$

7. Határozza meg a következő függvények szélsőértékeit:

(a) $f(x,y) = (5 + 2x - y) \cdot e^{x^2}$

Mo.:

$f'_x(x,y) = 2e^{x^2} + (5 + 2x - y) \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2e^{x^2}\left(1 + 5x + 2x^2 - xy\right)$

$f'_y(x,y) = -e^{x^2}$

eml.: kizárólag olyan P_0 helyeken *lehet* szélsőérték (nem biztos, hogy van!), ahol f'_x és f'_y egyszerre 0, ahol tehát:

$f'_x(P_0) = 0$ és $f'_y(P_0) = 0$ egyszerre teljesül.

Név: stacionárius pont.

Mivel az $f'_y(x,y) = -e^{x^2}$ függvénynek nincs zérushelye, ezért f-nek nincs stacionárius pontja, így szélsőértéke sincs.

(b) $f(x,y) = e^{xy}$

Mo.:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = e^{xy}y \\ f'_y(x,y) = e^{xy}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{xy}y = 0 \\ e^{xy}x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_0(0,0) \text{ az egyetlen stacionárius pont.}$$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = y^2 e^{xy} \\ f''_{xy}(x,y) = e^{xy}xy + e^{xy} = e^{xy}(xy+1) \\ f''_{yx}(x,y) = e^{xy}yx + e^{xy} = e^{xy}(xy+1) \\ f''_{yy}(x,y) = x^2 e^{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(P_0) = 0 \\ f''_{xy}(P_0) = 1 \\ f''_{yx}(P_0) = 1 \\ f''_{yy}(P_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad f\text{-nek } P_0\text{-ban nincs szélsőértéke.}$$

megj.: f-nek P_0-ban nyeregpontja van.

(c) $f(x,y) = 5 - x^2 + 4x - y^2$

Mo.:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = -2x + 4 \\ f'_y(x,y) = -2y \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 4 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Kaptuk: $P_0(2,0)$ az egyetlen stacionárius pont.

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = -2 \\ f''_{xy}(x,y) = 0 \\ f''_{yx}(x,y) = 0 \\ f''_{yy}(x,y) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(P_0) = -2 \\ f''_{xy}(P_0) = 0 \\ f''_{yx}(P_0) = 0 \\ f''_{yy}(P_0) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad f\text{-nek } P_0\text{-ban lokális szélsőértéke van.}$$

$f''_{xx}(P_0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f$-nek P_0-ban lokális maximuma van.

Ennek értéke: $f(P_0) = f(2,0) = 5 - 4 + 8 - 0 = 9$

(d) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

Mo.:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2) + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}(x+y^2) + 1\right] \\ f'_y(x,y) = e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}(x+y^2) + 1\right] = 0 \\ e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Kaptuk: $P_0(-2,0)$ az egyetlen stacionárius pont.

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}(x+y^2)+2\right] \\ f''_{xy}(x,y) = e^{\frac{x}{2}}y \\ f''_{yx}(x,y) = e^{\frac{x}{2}}y \\ f''_{yy}(x,y) = e^{\frac{x}{2}}\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(P_0) = \dfrac{1}{2e} \\ f''_{xy}(P_0) = 0 \\ f''_{yx}(P_0) = 0 \\ f''_{yy}(P_0) = \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f\text{-nek } P_0\text{-ban lokális szélsőértéke van.}$$

$f''_{xx}(P_0) = \dfrac{1}{2e} > 0 \quad \Rightarrow \quad f$-nek P_0-ban lokális minimuma van.

Ennek értéke: $f(P_0) = f(-2,0) = e^{-1}(-2) = -\dfrac{2}{e} \approx -0,736$

(e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + y + \dfrac{1}{3}$

Mo.:

Rész- és végeredmény:

f-nek az egyetlen stacionárius pontja: $P_0\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

f-nek P_0-ban lokális minimuma van, aminek értéke: $f(P_0) = 0$

(f) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Mo.:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ és } y = 0 \\ \text{vagy} \\ x = 1 \text{ és } y = 1 \end{cases}$$

Kaptuk: két stacionárius pont van: $P_0(0,0)$ és $P_1(1,1)$.

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 6x \\ f''_{xy}(x,y) = -3 \\ f''_{yx}(x,y) = -3 \\ f''_{yy}(x,y) = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(P_0) = 0 \\ f''_{xy}(P_0) = -3 \\ f''_{yx}(P_0) = -3 \\ f''_{yy}(P_0) = 0 \end{cases} \text{ ill. } \begin{cases} f''_{xx}(P_1) = 6 \\ f''_{xy}(P_1) = -3 \\ f''_{yx}(P_1) = -3 \\ f''_{yy}(P_1) = 6 \end{cases}$$

P_0 helyen:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad f\text{-nek } P_0\text{-ban nincs szélsőértéke.}$$

(megj.: P_0 nyeregpont.)

P_1 helyen:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_1) & f''_{xy}(P_1) \\ f''_{yx}(P_1) & f''_{yy}(P_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0 \quad \Rightarrow \quad f\text{-nek } P_1\text{-ben lokális szélsőértéke van.}$$

$f''_{xx}(P_1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad f$-nek P_0-ban lokális minimuma van.

Ennek értéke: $f(P_1) = f(1,1) = -1$

8. Határozza meg a $z = xy - 1$ felületnek az origóhoz legközelebb eső pontját!

Mo.:

Egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontnak az origótól való távolsága: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Most: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (xy-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + x^2y^2 - 2xy + 1} = \sqrt{(x-y)^2 + x^2y^2 + 1}$

$\sqrt{(x-y)^2 + x^2y^2 + 1}$ minimális $\quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 + x^2y^2 + 1$ minimális $\quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 + x^2y^2$ minimális

Nyilvánvaló, hogy $(x-y)^2 + x^2y^2 \geq 0$, és egyenlőség csak akkor teljesül - vagyis akkor minimális a kifejezés - amikor mindkét tag 0:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x^2y^2 = 0 \end{cases}$$

Ennek az egyetlen megoldása: $x = y = 0$. Ekkor z értéke: $z = xy - 1 = 0 \cdot 0 - 1 = -1$

A felületnek az origóhoz legközelebb eső pontja: $P(0, 0, -1)$.

9. Egy derékszögű háromszög rövidebbik befogójának hosszát $a = 5 \pm 0,1$ cm-nek mértük, másik befogójának hosszát pedig $b = 12 \pm 0,2$ cm-nek. Becsülje meg, hogy mekkora abszolút, illetve relatív hibával számolható ki

(a) az átfogó hossza;

(b) a háromszög területe;

(c) $\operatorname{tg}\beta$, ahol β a b oldallal szemközti szög!

Mo.:

(a)

Jelöljük c-vel az átfogó hosszát. Pithagorasz-tétele alapján $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c-t tekinthetjük az a, b változók függvényének: $c = f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ezzel a függvénnyel számolva:

$$\begin{cases} f'_a(a,b) = \frac{2a}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ f'_b(a,b) = \frac{2b}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$P_0(5, 12) \qquad f(P_0) = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \qquad \Delta a = \pm 0,1 \qquad \Delta b = \pm 0,2$

az abszolút hiba:

$|\Delta f| \approx |f'_a(P_0)| \cdot |\Delta a| + |f'_b(P_0)| \cdot |\Delta b| =$

$= \left|\frac{5}{\sqrt{25+144}}\right| \cdot |\pm 0,1| + \left|\frac{12}{\sqrt{25+144}}\right| \cdot |\pm 0,2| = \frac{5}{13} \cdot 0,1 + \frac{12}{13} \cdot 0,2 = \frac{29}{130} \approx 0,223$ (cm)

a relatív hiba:

$\delta f = \frac{|\Delta f|}{|f(P_0)|} = \frac{29/130}{13} \approx 0,017$ (cm)

(b)

$t = \frac{ab}{2} \qquad f(a,b) = \frac{ab}{2} \qquad f(P_0) = 30$

$$\begin{cases} f'_a(a,b) = \frac{b}{2} & f'_a(P_0) = \frac{12}{2} = 6 \\ f'_b(a,b) = \frac{a}{2} & f'_b(P_0) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$|\Delta f| \approx 6 \cdot 0,1 + \frac{5}{2} \cdot 0,2 = 1,1$

$\delta f = \frac{1,1}{30} \approx 0,036$

(c)

$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \qquad f(a,b) = \frac{b}{a} \qquad P_0(5,12) \qquad f(P_0) = \frac{12}{5} = 2,4$

$$\begin{cases} f'_a(a,b) = -\frac{b}{a^2} & f'_a(P_0) = -\frac{12}{25} \\ f'_b(a,b) = \frac{1}{a} & f'_b(P_0) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$|\Delta f| \approx \frac{12}{25} \cdot 0,1 + \frac{1}{5} \cdot 0,2 \approx 0,088$

$\delta f = \frac{0,088}{2,4} \approx 0,0367$

10. A véges növekmények tétele segítségével adjon közelítést az alábbi kétváltozós valós függvények megadott pontban felvett értékére egy olyan közeli pontból kiindulva, ahol a függvényérték könnyen számolható.

megj.: a véges növekmények tétele: $\Delta f(x,y) \approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$, ahol $P_0(x_0,y_0)$ egy a $P(x,y)$ ponthoz közeli olyan pont, ahol a függvényérték könnyen számolható, és $\Delta f(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ ill. $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

(a) $f(x,y) = \ln(x^2 - y^3), \qquad P(3,02\ ;\ 1,96)$

Mo.:

$P_0(3,2)$ választással $f(P_0) = \ln(9-8) = 0$

$$\begin{cases} \Delta x = 3,02 - 3 = 0,02 \\ \Delta y = 1,96 - 2 = -0,04 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2-y^3} & f'_x(P_0) = \frac{6}{9-8} = 6 \\ f'_y(x,y) = \frac{-3y^2}{x^2-y^3} & f'_y(P_0) = \frac{-12}{9-8} = -12 \end{cases}$$

$\Delta f(P) = \Delta f(x,y) = 6 \cdot 0,02 + (-12) \cdot (-0,04) = 0,12 + 0,48 = 0,6$

Közelítés (becslés): $f(P) \approx f(P_0) + \Delta f(P) = 0 + 0,6 = 0,6$

(b) $f(x,y)=(xy)^2-2(y+2x)^3, \qquad P(-1,98\ ;\ 3,01)$

Mo.:

$P_0(-2,3)$ választással $f(P_0)=(-6)^2-2(3-4)^3=36+2=38$

$$\begin{cases} \Delta x=-1,98-(-2)=0,02 \\ \Delta y=3,01-3=0,01 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2xy^2-6(y+2x)^2\cdot 2 & f'_x(P_0)=-36-12=-48 \\ f'_y(x,y)=2x^2y-6(y+2x)^2 & f'_y(P_0)=24-6=18 \end{cases}$$

$\Delta f(P)=\Delta f(x,y)=(-48)\cdot 0,02+18\cdot(0,01)=-0,96+0,18=-0,78$

Közelítés (becslés): $f(P)\approx f(P_0)+\Delta f(P)=38-0,78=37,22$

11. Számítsa ki az alábbi kétváltozós függvények kettős integrálját a megadott T tartományon:

(a) $f(x,y)=1-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4} \qquad T=\{(x,y)|\ -1\le x\le 1,\ \ -2\le y\le 2\}$

Mo.:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}\underbrace{\left(\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}x\right)}_{x\text{-szerint integrálunk, } y \text{ konstans}}\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}\left[x-\frac{x^2}{6}-\frac{xy}{4}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(\left(1-\frac{1}{6}-\frac{y}{4}\right)-\left(-1-\frac{1}{6}+\frac{y}{4}\right)\right)\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\left[2y-\frac{y^2}{4}\right]_{-2}^{2}=$$

$=(4-1)-(-4-1)=8$

(b) $f(x,y)=x\sin y \qquad T=\left\{(x,y)|\ 1\le x\le 2,\ \ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2}\right\}$

Mo.:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{2}x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x^2}{2}\cdot\sin y\right]_{1}^{2}\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin y-\frac{1}{2}\sin y\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin y\,\mathrm{d}y=\left[-\frac{3}{2}\cos y\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=0-\left(-\frac{3}{2}\cos 0\right)=\frac{3}{2}$$

(c) $f(x,y)=\dfrac{54y}{1+x^2} \qquad T=\left\{(x,y)|\ 0\le x\le\sqrt{3},\ \ 0\le y\le \operatorname{arctg} x\right\}$

Mo.:

$\operatorname{arctg} x$ függ x-től, ezért az integrálást y szerint kezdjük:

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{0}^{\operatorname{arctg} x}\frac{54y}{1+x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left[\frac{54}{1+x^2}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{0}^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(\frac{54}{1+x^2}\cdot\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}-0\right)\mathrm{d}x=$$

$$= \frac{54}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} x)' \cdot (\operatorname{arctg} x)^2 \,\mathrm{d}x = 27 \left[\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 9 \left((\operatorname{arctg} \sqrt{3})^3 - (\operatorname{arctg} 0)^3 \right) =$$

$$= 9 \left(\left(\frac{\pi}{3} \right)^3 - 0 \right) = \frac{\pi^3}{3} \approx 10,3$$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{y^3} \qquad T = \left\{ (x,y) |\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3},\ \cos x \le y \le 2\cos x \right\}$

Mo.:

$\cos x$ függ x-től, ezért az integrálást y szerint kezdjük:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \int\limits_{\cos x}^{2\cos x} \frac{\sin x}{y^3} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-\frac{\sin x}{2y^2} \right]_{\cos x}^{2\cos x} \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{3}{8} \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (-\sin x) \cos^{-2} x \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{3}{8} \left[-\frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

12. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját a csúcsaival megadott sokszögtartományon:

(a) $f(x,y) = e^{x-y} \qquad A(0,0),\ B(1,1),\ C(0,2)$

Mo.:

Ábrázoljuk az A, B, C pontok által meghatározott háromszög-tartományt a síkon! (egyenlőszárú, derékszögű háromszögtartomány)

Ez a tartomány például a következő módon definiálható:

$T = \{(x,y) |\ 0 \le x \le 1\ ,\ x \le y \le -x+2\}$

(x értéke 0 és 1 között változik, y pedig az $y = x$ ill. az $y = -x+2$ egyenesek által ,,közrezárt értékeken".)

$$\int\limits_0^1 \int\limits_x^{-x+2} e^{x-y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[-e^{x-y} \right]_x^{-x+2} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[-e^{x-(-x+2)} - \left(-e^{x-x} \right) \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-e^{2x-2} + 1 \right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{2x-2}}{2} + x \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{e^{-2}}{2} + 0 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2} \approx 0,57$$

(b) $f(x,y) = -\dfrac{x}{y^2} \qquad A(2,2),\ B(2,3),\ C(4,4)$

Mo.:

Ábrázoljuk az A, B, C pontok által meghatározott háromszög-tartományt a síkon!

Ez a tartomány például a következő módon definiálható:

$T = \left\{ (x,y) |\ 2 \le x \le 4\ ,\ x \le y \le \dfrac{1}{2}x + 2 \right\}$

$$\int\limits_{2}^{4}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}x+2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{4}\left[\frac{x}{y}\right]_{x}^{\frac{1}{2}x+2}\mathrm{d}x=\int\limits_{2}^{4}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}x+2}-1\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_{2}^{4}\frac{x}{x+4}\,\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{4}1\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\int\limits_{2}^{4}\left(1-\frac{4}{x+4}\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{2}^{4}1\,\mathrm{d}x=\ldots\approx-0,3$$

13. Számítsa ki az alábbi kétváltozós valós függvények kettős integrálját azon a korlátos tartományon, amelyet a következő egyenletekkel megadott görbék határolnak:

(a) $f(x,y)=y\cdot e^x \qquad x=y, \quad x=\dfrac{1}{3}y^2$

A tartomány egy egyenes és egy parabola által közrezárt korlátos síkrész. (A parabola szimmetriatengelye az x-tengely.)

I. mo.:

$$T=\left\{(x,y)\middle|\ 0\le x\le 3\ ,\ x\le y\le\sqrt{3x}\right\}$$

$$\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{x}^{\sqrt{3x}}ye^x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}\left[\frac{y^2}{2}e^x\right]_{x}^{\sqrt{3x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}\left(\frac{3x}{2}e^x-\frac{x^2}{2}e^x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{3}{2}\left(xe^x-e^x\right)-\frac{1}{2}\left(x^2e^x-2xe^x+2e^x\right)\right]_0^3=\left[e^x\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}\right)\right]_0^3=\frac{e^3}{2}+\frac{5}{2}\approx 12,54$$

megj.: felhasználtuk, hogy $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$ ill. $\int xe^x\,\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$

II. mo.:

$$T=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{3}y^2\le x\le y\ ,\ 0\le y\le 3\right\}$$

$$\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{\frac{1}{3}y^2}^{y}y\cdot e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_{0}^{3}\left[y\cdot e^x\right]_{\frac{1}{3}y^2}^{y}\mathrm{d}y=\int\limits_{0}^{3}\left(y\cdot e^y-y\cdot e^{\frac{1}{3}y^2}\right)\mathrm{d}y=\left[y\cdot e^y-e^y-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}y^2}\right]_0^3=$$

$$=\frac{1}{2}e^3+\frac{5}{2}\approx 12,54$$

megj.: felhasználtuk, hogy $\int ye^y\,\mathrm{d}y=ye^y-e^y+C$

(b) $f(x,y)=\dfrac{y}{(1+x)^2} \qquad x=-y, \quad x=y^2, \quad y=-\dfrac{1}{2}$

Mo.:

A tartomány két egyenes és egy parabola által közrezárt korlátos síkrész.

$$T=\left\{(x,y)\middle|\ y^2\le x\le -y\ ,\ -1\le y\le -\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{y^2}^{-y}\frac{y}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{y}{1+x}\right]_{y^2}^{-y}\mathrm{d}y=\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{y}{1-y}+\frac{y}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y=$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{y-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{1+y^2} \right) \, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{1+y^2} \right) \, \mathrm{d}y =$$

$$= \left[y + \ln|y-1| + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln\frac{5}{4} \right) - \left(-1 + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln 2 \approx -0,023$$