NEUMANN JÁNOS
INFORMATIKAI KAR

Kárász Péter, Szőke Magdolna és Vajda István

Analízis II

Informatikus hallgatók számára

OE-NIK 5019

Budapest, 2016.

Készült az Óbudai Egyetem Neumann János Informatikai Karán az OE-NIK 5019. sz. jegyzetszerződés keretein belül 2016-ban.

Szerzők:

Dr. Kárász Péter
egyetemi docens
karasz.peter@nik.uni-obuda.hu

Dr. Szőke Magdolna
adjunktus
szoke.magdolna@nik.uni-obuda.hu

Dr. Vajda István
adjunktus
vaida.istvan@nik.uni-obuda.hu

Lektor:

Schmidt Edit
mestertanár
schmidt.edit@kvk.uni-obuda.hu

1.0. verzió
2016.november 30.

Ez a jegyzet LaTeXszövegszerkesztő segítségével készült.

ISBN 978-615-5460-96-8

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet az Analízis I jegyzet folytatásaként az elsőéves (BSc) informatikus hallgatók számára készült, az Óbudai Egyetem Informatika Karán a tavaszi félévben tartott Analízis II előadásokhoz, de haszonnal forgathatják mindazok, akik felsőfokú analízis tanulmányokat folytatnak, és az Analízis I tárgy anyagát már elsajátították.
A jegyzet tehát tananyagában az Analízis I jegyzetre épül, több esetben visszautalunk az ott ismertetett tételekre, definíciókra. A könnyebb eligazodás érdekében a jegyzet stílusában, felépítésében is követi az Analízis I jegyzetben megszokottakat. A definíciókat és eljárásokat rendszerint példák követik, amelyek tanulmányozása nagymértékben segíti azok megértését. Amennyiben ezek hosszabb számolást tartalmaznak, akkor célszerű őket papírral, ceruzával követni. A tételeket és definíciókat követő megjegyzések néha a mélyebb összefüggésekre igyekeznek rávilágítani, máskor további magyarázattal szolgálnak. A megértést kívánják elősegíteni a jegyzetben előforduló ábrák és animációk is.
A jegyzet anyagát hét fejezetre bontottuk. Először a Laplace-transzformációt tekintjük át (1. fejezet), majd három fejezetben foglalkozunk a kétváltozós valós függvényekkel. A definíciót követően a kétváltozós valós függvények folytonosságát vizsgáljuk (2. fejezet), ezután a differenciálhatóság kérdését tekintjük át (3. fejezet), végül ezt követi a kétváltozós függvények integrálszámításának vizsgálata (4. fejezet). Következő témánk a numerikus sorok (5. fejezet) és a függvénysorok (6. fejezet). A jegyzetet a differenciálegyenletek vizsgálata zárja (7. fejezet). A fejezetek és alfejezetek végén sok feladat található, amelyek megoldását erősen ajánljuk az olvasónak.
A fogalmak és tételek megtalálását kívánja megkönnyíteni a jegyzet végén található tárgymutató. Számítógépen történő olvasás esetén kattintás segítségével jutunk a megfelelő oldalra, csakúgy, mint a jegyzetben található belső hivatkozások esetén.
Egy jegyzet megírása során a lehető leggondosabb munka esetén is előfordulhatnak hibák, hiányosságok. Szeretnénk köszönetet mondani a kötet lektorának, Schmidt Editnek a korábbi verziók gondos, figyelmes átolvasásáért, valamint számos javaslatáért, melyekkel segített a jegyzetet színvonalasabbá tenni.

A szerzők

Budapest, 2016. november 30.

1. fejezet

A Laplace-transzformáció

A fejezetben bevezetjük a függvények Laplace-transzformáltjának fogalmát, amelyet széles körben alkalmaznak műszaki és tudományos területeken. Megismerjük a transzformáció műveleti tulajdonságait, meghatározzuk bizonyos elemi függvények transzformáltját, majd elsajátítjuk az inverz transzformáció lépéseit.

1.1. A Laplace-transzformáció fogalma és műveleti tulajdonságai

1.1.1. Definíció (Laplace-transzformált). Az

$$f\colon\ [0;\infty[\,\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t)$$

függvény *Laplace-transzformáltja* az

$$s \mapsto \bar{f}(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

függvény, amelynek értelmezési tartománya azon $s \in \mathbb{R}$ számokból áll, amelyekre a fenti improprius integrál konvergens.

1.1.2. Jelölés. Az $\bar{f}(s)$ jelölés helyett használatosak még az alábbiak is:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \bar{f}(s)\,.$$

A fent definiált Laplace-transzformáció ún. *integráltranszformáció*, az integrálművelet eredményeként egy függvényből egy másikat kapunk. Figyeljük meg, hogy a korábbi függvényműveletekkel ellentétben itt egy t változójú függvényből egy s változójú függvényt kapunk eredményül, hiszen az improprius integrálást t szerint végezzük, így az az eredményből „eltűnik”, és az integrálás szempontjából paraméterként kezelt s lesz a transzformált függvény változója.

1.1.3. Megjegyzések.

- A Laplace-transzformált definíciójában szereplő integrált *Laplace-integrálnak* nevezzük.

- Amennyiben egy függvény Laplace-integrálja semmilyen s értékre nem konvergens, akkor a függvény nem Laplace-transzformálható.

- Ha az f függvény negatív helyeken is értelmezve van, akkor ezt a Laplace-transzformált képzésénél nem vesszük figyelembe.

- Ha az f függvény nincs minden nem-negatív valós számra értelmezve, akkor a Laplace-transzformált képzésénél mindazokon a helyeken, ahol eredetileg nem volt értelmezve, 0-nak vesszük a függvény értékét.

- A Laplace-transzformáció általános formájában komplex függvényekre van értelmezve, de mi csak valós változós függvényekre értelmezzük és használjuk.

- A felsorolt szokásos jelölések közül az F használatát – a primitív függvénnyel való összetéveszthetőség miatt – ebben a jegyzetben kerülni fogjuk.

A Laplace-integrál konvergenciája

1.1.4. Tétel. *A Laplace-integrál vagy minden valós számra konvergens, vagy egy valós számra sem konvergens, vagy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $s > a$ számra az integrál konvergens, de minden $s < a$ számra az integrál divergens.*

Bizonyítás: Az állítás következik abból, hogy ha a Laplace-integrál konvergens valamely $s_0 \in \mathbb{R}$ esetén, akkor bármely $s > s_0$ esetén is konvergens. Ennek belátása magasabb szintű matematikai ismereteket kíván, ezért a bizonyítást csak szakaszonként azonos előjelű függvények esetében szemléltetjük, ami azon alapul, hogy nagyobb s paraméter esetén a függvénygörbe és a t tengely által közrezárt terület kisebb.
Tegyük fel, hogy $s_0 \in D_{\bar{f}}$, valamint legyen $s > s_0$. Mivel $t \geqslant 0$, így $st \geqslant s_0 t$, és az exponenciális függvény monotonitási tulajdonsága miatt $e^{-st} \leqslant e^{-s_0 t}$. Amennyiben $f(t) \geqslant 0$ bármely t esetén, akkor

$$0 \leqslant f(t)\, e^{-st} \leqslant f(t)\, e^{-s_0 t},$$

és az integrál tulajdonságaiból következően

$$0 \leqslant \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty f(t)\, e^{-s_0 t}\, \mathrm{d}t,$$

vagyis az improprius integrál erre az s értékre is konvergens.
Ha $f(t) \leqslant 0$ a $[0; \infty[$ intervallumon, akkor

$$0 \geqslant f(t)\, e^{-st} \geqslant f(t)\, e^{-s_0 t},$$

és hasonlóan

$$0 \leqslant \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t \geqslant \int_0^\infty f(t)\, e^{-s_0 t}\, \mathrm{d}t,$$

azaz erre az s paraméterértékre is véges eredményt kapunk. Ha f nem-negatív és nempozitív értéket is felvesz, akkor szakaszonként alkalmazhatjuk a fenti két gondolatmenetet. □

1.1.5. Tétel. *A Laplace-integrál konvergenciájának elégséges feltétele: ha f integrálható a $[0;\omega]$ intervallumon bármely $\omega > 0$ esetén, valamint léteznek olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}^+$ és $t_0 \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy $t > t_0$ esetén $|f(t)| \leqslant K \cdot e^{\alpha t}$, akkor $s > \alpha$ esetén az f függvény Laplace-integrálja abszolút konvergens.*

Bizonyítás: Legyen α, K és t_0 a feltételekben meghatározott tulajdonsággal rendelkező konstans. Ekkor

$$\int_0^\infty \left|f(t)\,e^{-st}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} |f(t)|\,e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty |f(t)|\,e^{-st}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{t_0} |f(t)|\,e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty K\cdot e^{\alpha t}e^{-st}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{t_0} |f(t)|\,e^{-st}\,\mathrm{d}t + K\int_{t_0}^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} |f(t)|\,e^{-st}\,\mathrm{d}t + K\cdot\frac{e^{-(s-\alpha)t_0}}{s-\alpha}.$$

A bizonyításban szereplő impropius integrál konvergenciájának feltétele $s-\alpha > 0$, ezért a Laplace-integrál ezen s értékekre biztosan abszolút konvergens. □

A Laplace-transzformáció tulajdonságai

1.1.6. Tétel. *A Laplace-transzformáció* összegtartó, *azaz*

$$f(t)+g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \bar{f}(s)+\bar{g}(s)\,.$$

Bizonyítás:

$$f(t)+g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty [f(t)+g(t)]\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left[f(t)\,e^{-st}+g(t)\,e^{-st}\right]\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty g(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \bar{f}(s)+\bar{g}(s)\,.$$

□

1.1.7. Tétel. *A Laplace-transzformáció* aránytartó, *azaz*

$$c\cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, c\cdot \bar{f}(s)\,.$$

Bizonyítás:

$$c\cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty [c\cdot f(t)]\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty c\cdot\left[f(t)\,e^{-st}\right]\mathrm{d}t = c\cdot\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = c\cdot\bar{f}(s)\,.$$

□

A Laplace-transzformáció a 1.1.6. és 1.1.7. tételbeli két legfontosabb tulajdonsága alapján *lineáris transzformáció*, amelyet igen sok esetben ki is fogunk használni.
Két függvény szorzatának Laplace-transzformáltjának meghatározására nem létezik egyszerűen használható képlet, azonban bizonyos speciális szorzófüggvények esetén a szorzat Laplace-transzformáltja könnyen előállítható.
A következő általános tételekben, amikor egy tetszőleges f függvény Laplace-transzformáltját említjük, olyan függvényt értünk alatta, amely Laplace-transzformálható, azaz az $\bar{f}$ függvény értelmezési tartománya nem üreshalmaz.

Exponenciális függvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

1.1.8. Tétel. *Jelölje az f függvény Laplace-transzformáltját $\bar{f}$, azaz legyen $f(t)$○—●$\bar{f}(s)$. Ekkor az $e^{at}f(t)$ függvénynek is létezik Laplace-transzformáltja és*

$$e^{at}f(t) ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \bar{f}(s-a)\,.$$

Bizonyítás:

$$e^{at}f(t) ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty f(t)\,e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = \bar{f}(s-a)\,.$$

□

Hatványfüggvénnyel szorzott függvény Laplace-transzformáltja

1.1.9. Tétel. *Ha az f függvény Laplace-transzformálható és $\bar{f}$ jelöli a transzformáltját, akkor a $t^n f(t)$ függvénynek is létezik Laplace-transzformáltja és*

$$t^n f(t) ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\bar{f}(s)\,,$$

ahol a $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}$ szimbólum az $\bar{f}$ függvény (s szerinti) n-szeri differenciálását jelöli.

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = \int_0^\infty t^n f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{n-1}f(t)\,te^{-st}\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty t^{n-1}f(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty t^{n-1}f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}f(t)\right].$$

Mivel a levezetésben szereplő integrálás és differenciálás változója különböző, végrehajtásuk sorrendje minden további feltétel nélkül felcserélhető. Alkalmazzuk a kapott rekurzív formulát véges sokszor addig, amíg $n=0$-t nem kapunk, ezáltal az f függvény transzformáltjához jutunk.

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}f(t)\right] = (-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\mathcal{L}\left[t^{n-2}f(t)\right] = \cdots = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{L}\left[t^0 f(t)\right],$$

ami éppen a bizonyítandó állítás másik jelölésmóddal. □

Függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja

1.1.10. Tétel. *Ha az $f(t)$ deriválható függvény Laplace-transzformáltja $\bar{f}(s)$, akkor f deriváltjának Laplace-transzformáltja*

$$f'(t) ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ s\bar{f}(s) - f(0)\,.$$

Bizonyítás: Parciális integrálást alkalmazunk:

$$f'(t) ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\,e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\cdot(-s)\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = s\bar{f}(s) - f(0)\,.$$

Felhasználtuk, hogy mivel f Laplace-transzformálható, ezért $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,e^{-st} = 0$. □

1.1.11. Tétel. *Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja $\bar{f}(s)$, akkor f második deriváltjának Laplace-transzformáltja*

$$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)\,.$$

Bizonyítás: Kétszer felhasználjuk az első deriváltfüggvény Laplace-transzformáltjára vonatkozó tételt:

$$\begin{aligned} f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s\bar{f}'(t) - f'(0) &= s\left(s\bar{f}(s) - f(0)\right) - f'(0) = \\ &= s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)\,. \end{aligned}$$

□

Függvény integrálfüggvényének Laplace-transzformáltja

1.1.12. Tétel. *Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja az $\bar{f}(s)$ függvény, akkor*

$$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{\bar{f}(s)}{s}.$$

Bizonyítás:

$$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Parciális integrálást alkalmazva:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \left[\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\cdot\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_0^\infty - \\ &- \int_0^\infty f(t)\cdot\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{\bar{f}(s)}{s}. \end{aligned}$$

Az első integrálást követő határérték-számítás esetén a ∞-ben vett határérték egyértelműen 0, ha az f függvény $[0;\infty[$ intervallumon vett improprius integrálja konvergens. Ha az improprius integrál divergens, értéke ∞, akkor L'Hôpital-szabályt alkalmazunk, felhasználva, hogy az integrálfüggvény deriváltja az eredeti függvény:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\cdot e^{-st} = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u}{e^{st}} = \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{se^{st}} = \frac{1}{s}\cdot\lim_{t\to\infty} f(t)\,e^{-st} = 0,$$

hiszen f Laplace-integrálja konvergens. □

Eltolt függvény Laplace-transzformáltja

1.1.13. Tétel. *Ha az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja az $\bar{f}(s)$ függvény, akkor*

$$f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-as}\bar{f}(s)\,.$$

Bizonyítás: Az $f(t)$ függvény t tengely mentén a egységgel történő eltolásának eredménye az $f(t-a)$ függvény. Mivel az f függvény a Laplace-transzformáció szempontjából úgy tekintendő, hogy negatív helyeken 0 értékű, ezért az eltolt függvény $t-a<0$, azaz $t<a$ feltétel esetén 0 értéket vesz fel. A Laplace-integrál kiszámításakor az $[a;\infty[$ intervallumon integrálunk.

$$\int_a^\infty f(t-a)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)\,e^{-s(t-a)-as}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-a)\,e^{-s(t-a)}e^{-as}\,\mathrm{d}t =$$

$$= e^{-as}\int_a^\infty f(t-a)\,e^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}t = e^{-as}\int_0^\infty f(u)\,e^{-su}\,\mathrm{d}u = e^{-as}\bar{f}(s)\,.$$

A bizonyítás utolsó lépésében az $u=t-a$ helyettesítést alkalmaztuk. □

1.1.1. Feladatok

Alkalmazza a megtanult szabályokat.

1. $5f(t)-\frac{7}{3}g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$
2. $-2f'(t)+\pi f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$
3. $4e^{6t}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$
4. $f''(t)-7f'(t)+12f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$
5. $\frac{2}{3}f(t)-8\int_0^t f \circ\!\!-\!\!\bullet$

1.2. Speciális függvények Laplace-transzformáltja

Az 1.1. alfejezetben megismert definíció és műveleti tulajdonságok segítségével meghatározzuk bizonyos elemi függvények Laplace-transzformáltját.

1.2.1. Tétel. *A konstans* 1 *függvény Laplace-transzformáltja:*

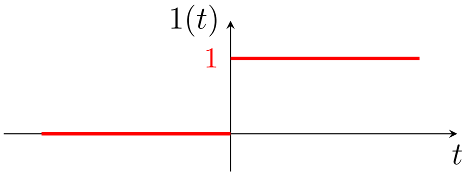
$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}, \qquad s>0.$$

Bizonyítás:

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) - \left(-\frac{1}{s}\right) = 0+\frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

A számításban szereplő határérték csak akkor 0, ha $s>0$; egyébként végtelen. □

1.2.2. Megjegyzés. Mivel Laplace-transzformáció szempontjából a függvényeket $t<0$ esetén 0 értékűnek definiáljuk, a konstans 1 függvényt szokás *egységugrás-függvénynek* nevezni, és az $1(t)$ szimbólummal jelölni.



$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0; \\ 1, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

1.2.3. Tétel. *Az $f(t) = e^{at}$ exponenciális függvény Laplace-transzformáltja:*

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.$$

Bizonyítás:

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right) - \left(-\frac{1}{s-a}\right) = 0 + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a}.$$

A számításban szereplő határérték csak akkor 0, ha $s-a>0$, azaz ha $s>a$. □

1.2.4. Példa. A Laplace-transzformáció linearitási tulajdonságát felhasználva már meghatározható néhány függvény transzformáltja:

$$3-5e^{-2t} = 3\cdot 1 - 5\cdot e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet 3\mathcal{L}[1] - 5\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] = 3\cdot\frac{1}{s} - 5\cdot\frac{1}{s-(-2)} = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+2}.$$

A transzformált függvény értelmezési tartománya $s>0$ és $s>-2$ miatt: $s>0$.

1.2.5. Tétel. *A* $\operatorname{ch} at$ *és a* $\operatorname{sh} at$ $(a \in \mathbb{R})$ *hiperbolikus függvények Laplace-transzformáltja:*

$$\operatorname{ch} at \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-a^2}, \quad \operatorname{sh} at \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|.$$

Bizonyítás: A ch és sh függvények definíciója alapján:

$$\operatorname{ch} at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2-a^2} = \frac{s}{s^2-a^2};$$
$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{s^2-a^2} = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

Szükséges, hogy mind az e^{at}, mind az e^{-at} függvények Laplace-integrálja konvergens legyen, ezért $s>a$ és $s>-a$ mindegyikének teljesülnie kell, azaz $s>|a|$. □

1.2.6. Tétel. *A* $\cos at$ *és* $\sin at$ $(a\in\mathbb{R})$ *trigonometrikus függvények Laplace-transzformáltja:*

$$\cos at \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \sin at \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s>|a|.$$

Bizonyítás: Kihasználjuk, hogy a Laplace-transzformáció általános alakjában komplex függvényekre is értelmezett. Egyúttal emlékezzünk a komplex számok expnenciális (Euler-féle) alakjára:

$$e^{jat} = \cos at + j\sin at;$$
$$e^{-jat} = \cos(-at) + j\sin(-at) = \cos at - j\sin at;$$

ahol j a képzetes egység (műszaki gyakorlatban használatos) jelölése. A fenti két egyenletből $\cos at$ kifejezhető:

$$\cos at = \frac{e^{jat}+e^{-jat}}{2} = \operatorname{ch} jat,$$

és felhasználhatjuk a ch függvény transzformáltjának ismeretét:

$$\cos at = \operatorname{ch} jat \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-(ja)^2} = \frac{s}{s^2-j^2a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

A $\operatorname{ch} jat$ függvény Laplace-transzformáltjának felhasználása miatt $s > |ja|$, azaz $s > |a|$. Mivel $\sin at = -\frac{1}{a}(\cos at)'$, használjuk fel a deriváltfüggvény transzformálására vonatkozó $f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s\bar{f}(s) - f(0)$ összefüggést:

$$\sin at = -\frac{1}{a}(\cos at)' \circ\!\!-\!\!\bullet -\frac{1}{a}\left(s\cdot\frac{s}{s^2+a^2} - \cos(a\cdot 0)\right) = -\frac{1}{a}\left(\frac{s^2}{s^2+a^2}-1\right) =$$
$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{-a^2}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}. \qquad \square$$

1.2.7. Példák.

1. $3\operatorname{ch} 7t - 3\operatorname{sh}(-4t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{3s}{s^2-7^2} - \dfrac{3\cdot(-4)}{s^2-(-4)^2} = \dfrac{3s}{s^2-49} + \dfrac{12}{s^2-16}, \qquad (s>7).$

2. $5\cos\omega t - 2\sin\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{5s}{s^2+\omega^2} - \dfrac{2\omega}{s^2+\omega^2} = \dfrac{5s-2\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad (s>\omega>0).$

3. $-\dfrac{\pi}{6} + \sqrt[3]{e^{2t}} = -\dfrac{\pi}{6} + e^{\frac{2t}{3}} \circ\!\!-\!\!\bullet -\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-\frac{2}{3}} = -\dfrac{\pi}{6s} + \dfrac{3}{3s-2}, \qquad (s>\frac{2}{3}).$

1.2.8. Tétel. *Az $f(t) = t^n$ hatványfüggvény Laplace-transzformáltja:*

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s>0.$$

Bizonyítás: A Laplace-integrál kiszámításához parciálisan integrálunk.

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[t^n\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty nt^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \lim_{t\to\infty} t^n\frac{e^{-st}}{-s} - 0\cdot\left(-\frac{1}{s}\right) + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t = 0 - 0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

A számításban szereplő határérték csak akkor 0, ha $s > 0$; értéke a L'Hôpital-szabály többszöri alkalmazásával határozható meg. Az eredményben az eggyel kisebb kitevőjű hatványfüggvény Laplace-transzformáltja szerepel:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s}\cdot\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right].$$

Alkalmazzuk a fenti rekurzív képletet, amíg a $t^0=1$ függvényt kapjuk, mert ennek Laplace-transzformáltját ismerjük:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s}\cdot\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right] = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\mathcal{L}\left[t^{n-2}\right] = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\mathcal{L}\left[t^{n-3}\right] = \cdots =$$
$$= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdots\frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}\left[t^0\right] = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{s^n}\cdot\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \qquad \square$$

1.2.9. Példák.

1. $2-t+8t^2-\frac{3t^3}{5} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{s}-\frac{1!}{s^2}+8\cdot\frac{2!}{s^3}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3!}{s^4}=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{16}{s^3}-\frac{18}{5s^4}.$
2. $(2t)^5-3\sin\left(\frac{t}{4}\right)=32t^5-3\sin\left(\frac{t}{4}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 32\cdot\frac{5!}{s^6}-3\cdot\frac{\frac{1}{4}}{s^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{3840}{s^6}-\frac{12}{16s^2+1}.$

Az $e^{at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \bar{f}(s-a)$ összefüggést felhasználva olyan szorzatfüggvények Laplace-transzformáltját is meg tudjuk határozni, amelyben az egyik tényező exponenciális függvény.

1.2.10. Példák.

1. $-5t^3e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ -5\frac{3!}{(s-2)^4}=-\frac{30}{(s-2)^4}$, mert $\bar{f}(s)=-\frac{30}{s^4}$.
2. $e^{-\frac{t}{2}}\left(8\cos 3t-6\sin 3t\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{8\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+3^2}-\frac{6\cdot 3}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+3^2}=\frac{8s-14}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+9}.$

Figyeljünk arra, hogy az $\bar{f}(s-a)$ képletben nem szorzás áll, hanem az f függvény transzformáltját az s helyett az $s-a$ helyen kell venni, amely az $\bar{f}$ függvény s tengely mentén, a egységgel való eltolását jelenti.
Alkalmazhatjuk a hatványfüggvénnyel szorzott függvény transzformálási szabályát is.

1.2.11. Példa.

$$2t\cos 4t \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\cdot(-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)=-2\cdot\frac{1\cdot(s^2+16)-s\cdot 2s}{(s^2+16)^2}=\frac{2s^2-32}{(s^2+16)^2}.$$

1.2.1. Feladatok

Határozza meg az alábbi függvények Laplace-transzformáltját.

1. $f(t)=2-4e^{5t} \circ\!\!-\!\!\bullet$
2. $f(t)=2-7t+\frac{3t^3}{4} \circ\!\!-\!\!\bullet$
3. $f(t)=-\sin 3t+6\cos 2\pi t \circ\!\!-\!\!\bullet$
4. $f(t)=t^2e^{-3t} \circ\!\!-\!\!\bullet$
5. $f(t)=4\frac{\sin 5t}{e^t} \circ\!\!-\!\!\bullet$
6. $f(t)=-3\,\mathrm{sh}\,\frac{3t}{5}+\frac{\mathrm{ch}(-2t)}{4} \circ\!\!-\!\!\bullet$
7. $f(t)=5t^4\sqrt{e^{-3t}} \circ\!\!-\!\!\bullet$
8. $f(t)=3te^{4t} \circ\!\!-\!\!\bullet$? A transzformáltat határozza meg az exponenciális függvénnyel szorzott függvény, majd a hatványfüggvénnyel szorzott függvény transzformálási szabálya alapján is.

9. $f(t) = t^2 \sin 3t \circ\!\!-\!\!\bullet$

10. $f(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 \circ\!\!-\!\!\bullet$

11. $f(t) = (t-2)^3 \circ\!\!-\!\!\bullet$?, ha $t > 2$ (az eltolt függvény transzformálási szabálya alapján). Magyarázza meg, hogy miért nem ugyanazt az eredményt kapta, mint az előző esetben.

1.3. Inverz Laplace-transzformáció

1.3.1. Definíció (Inverz Laplace-transzformált). Ha az $f(t)$ függvény transzformáltja $\bar{f}(s)$, akkor $f(t)$-t az $\bar{f}(s)$ függvény *inverz Laplace-transzformáltjának* nevezzük.

1.3.2. Jelölés.

$$\bar{f}(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(s)\right].$$

1.3.3. Példák.

1. $\dfrac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ 1$

2. $\dfrac{1}{s-3} \bullet\!\!-\!\!\circ e^{3t}$

3. $\dfrac{3s}{s^2+4} \bullet\!\!-\!\!\circ 3\cos 2t$

1.3.4. Megjegyzés. Belátható, hogy ha két függvény, $f_1(t)$ és $f_2(t)$ Laplace-transzformáltja ugyanaz az $\bar{f}(s)$ függvény, akkor f_1 és f_2 csak „nem túl sok” helyen (például a $[0;\infty[$ tartomány diszkrét pontjaiban) térhet el egymástól; ennek bizonyításával itt nem foglalkozunk. Például ha $f_1(t) = e^t$, f_2 pedig megegyezik f_1-gyel egy pont kivételével (mondjuk $f_2(4) = 0$), akkor a két függvény ugyan nem egyezik meg, de transzformáltjuk igen: $\bar{f}(s) = \frac{1}{s-1}$. Inverz transzformáció esetén $f_1(t)$-t tekintjük $\bar{f}(s)$ inverz transzformáltjának, és az inverz Laplace-transzformáltat a diszkrét pontokban lévő eltéréseket figyelmen kívül hagyva egyértelműen meghatározottnak tekintjük.

Vegyük észre, hogy a tárgyalt függvények Laplace-transzformáltja – az eltolt függvény és a hatványfüggvénnyel szorzott függvény kivételével – mind racionális törtfüggvény, sőt, valódi racionális törtfüggvény, azaz amelynek számlálójában alacsonyabb fokszámú polinom áll, mint a nevezőben. A valódi racionális törtfüggvényeket résztörtekre tudjuk bontani, ezért érdemes először a résztört alakú függvények inverz Laplace-transzformáltját külön megnézni.
A résztörtek inverz Laplace-transzformáltja egyes esetekben rögtön látszik az $\bar{f}(s)$ függvény alakjából. Más esetekben viszont olyan átalakításokat kell végeznünk, hogy azon „látsszon”, hogy melyik függvény Laplace-transzformáltja. (Hasonlóan ahhoz, mint amikor integrálunk: olyan alakúra kell hozni az integrandust, hogy abból „látsszon”, hogy melyik függvény deriváltja.)

Résztörtek inverz Laplace-transzformáltja

(A) A $\frac{C}{s-a}$ alakú résztörtek (a nevezőben elsőfokú polinom áll) inverz Laplace-transzformáltja könnyen meghatározható, hiszen az exponenciális függvény Laplace-transzformáltja ilyen alakú:

$$\frac{C}{s-a} \bullet\!\!-\!\!\circ\, Ce^{at}.$$

(A képlet $a=0$ esetén is igaz: $\frac{C}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\, Ce^{0\cdot t}=C$.)

1.3.5. Példák.

1. $\dfrac{3}{s-8} \bullet\!\!-\!\!\circ\, 3e^{8t}$
2. $-\dfrac{4}{s+3} \bullet\!\!-\!\!\circ\, -4e^{-3t}$
3. $\dfrac{7}{5s+12}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{1}{s+\frac{12}{5}} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \dfrac{7}{5}e^{-\frac{12}{5}t}$

(B) A $\frac{C}{(s-a)^n}$ $(n>1)$ alakú résztörtek (a nevezőben elsőfokú polinom magasabb hatványa áll) a $\frac{C}{s^n}$ alakú függvény – amely a hatványfüggvény transzformáltja – eltoltjai, így az inverz Laplace-transzformáltja hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata:

$$\frac{C}{(s-a)^n} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \frac{C}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}.$$

1.3.6. Példák.

1. $\dfrac{3}{s^2}=3\cdot\dfrac{1!}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\, 3t$
2. $\dfrac{3}{(s-4)^2}=3\cdot\dfrac{1!}{(s-4)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\, 3te^{4t}$
3. $\dfrac{10}{s^4}=\dfrac{10}{6}\cdot\dfrac{3!}{s^4} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \dfrac{5}{3}t^3$
4. $\dfrac{10}{(s+6)^4}=\dfrac{10}{6}\cdot\dfrac{3!}{(s+6)^4} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \dfrac{5}{3}t^3e^{-6t}$
5. $\dfrac{21}{(2s+1)^7}=\dfrac{21}{2^7\cdot 720}\cdot\dfrac{6!}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^7} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \dfrac{21}{92\,160}t^6e^{-\frac{t}{2}}$

(C) A $\frac{As+B}{as^2+bs+c}$ alakú résztörtek (a nevezőben felbonthatatlan másodfokú polinom áll: $b^2-4ac<0$) inverz Laplace-transzformáltja a cos és sin függvényekre, illetve ezek exponenciális függvénnyel vett szorzatára vezethető vissza. Általános képletet nem adunk, az eljárást a példákon keresztül mutatjuk be.

1.3.7. Példák.

1. $\dfrac{2s-3}{s^2+4}=2\dfrac{s}{s^2+2^2}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{s^2+2^2}\bullet\!\!-\!\!\circ\; 2\cos 2t-\dfrac{3}{2}\sin 2t$

2. $\dfrac{-s+8}{s^2+5}=-\dfrac{s}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\dfrac{8}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\bullet\!\!-\!\!\circ -\cos\sqrt{5}t+\dfrac{8}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t$

3. $\dfrac{4}{s^2+6s+10}=4\cdot\dfrac{1}{(s+3)^2+1}\bullet\!\!-\!\!\circ\; 4e^{-3t}\sin t$

4. $\dfrac{4s}{s^2+6s+10}=\dfrac{4s}{(s+3)^2+1}=\dfrac{4(s+3)}{(s+3)^2+1}-\dfrac{12}{(s+3)^2+1}\bullet\!\!-\!\!\circ\; 4e^{-3t}\cos t-12e^{-3t}\sin t$

5. $\dfrac{4s-7}{2s^2-3s+5}$ nevezője teljes négyzetté alakítva: $2s^2-3s+5=2\left[\left(s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]$.

$$\frac{4s-7}{2s^2-3s+5}=\frac{4}{2}\cdot\frac{s-\frac{7}{4}}{\left(s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=2\cdot\frac{s-\frac{3}{4}-1}{\left(s-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=$$
$$=2\cdot\frac{s-\frac{3}{4}}{\left(s-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2}-2\cdot\frac{4}{\sqrt{31}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{31}}{4}}{\left(s-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2}\bullet\!\!-\!\!\circ$$
$$\bullet\!\!-\!\!\circ\; 2e^{\frac{3}{4}t}\cos\frac{\sqrt{31}}{4}t-\frac{8}{\sqrt{31}}e^{\frac{3}{4}t}\sin\frac{\sqrt{31}}{4}t$$

Valódi racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformáltja A valódi racionális törtfüggvények felbonthatók résztörtek összegére. (Azzal az esettel, amikor a nevezőben felbonthatatlan másodfokú polinom magasabb fokú hatványa áll, nem foglalkozunk.)

A következő példákon tanulmányozhatjuk az inverz transzformáció menetét. A résztörtekre bontást nem részletezzük.

1.3.8. Példák.

1. $\dfrac{2s+4}{s^3-s}=\dfrac{2s+4}{(s-1)\,s\,(s+1)}=\dfrac{3}{s-1}-\dfrac{4}{s}+\dfrac{1}{s+1}\bullet\!\!-\!\!\circ\; 3e^t-4+e^{-t}$

2. $\dfrac{4}{s^3(s-2)}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s-2}\bullet\!\!-\!\!\circ -\dfrac{1}{2}-t-t^2+\dfrac{1}{2}e^{2t}$

3. $\dfrac{13}{(s+2)(s^2+9)}=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{-s+2}{s^2+9}\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-2t}-\cos 3t+\dfrac{2}{3}\sin 3t$

4. $\dfrac{s-8}{s(s-2)^3}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{(s-2)^2}-\dfrac{3}{(s-2)^3}\bullet\!\!-\!\!\circ\; 1-e^{2t}+2te^{2t}-\dfrac{3}{2}t^2e^{2t}$

5. $\dfrac{3s-10}{s(s^2+2s+10)}=-\dfrac{1}{s}+\dfrac{s+5}{(s+1)^2+9}\bullet\!\!-\!\!\circ -1+e^{-t}\left(\cos 3t+\dfrac{4}{3}\sin 3t\right)$

1.3.1. Feladatok

Határozza meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját.

1. $\bar{f}(s) = \frac{5}{4s} + \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\circ$
2. $\bar{f}(s) = \frac{1}{2s-5} + \frac{3}{5s+6} \bullet\!\!-\!\!\circ$
3. $\bar{f}(s) = \frac{4}{(s+7)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ$
4. $\bar{f}(s) = \frac{3s-1}{s^2+5} \bullet\!\!-\!\!\circ$
5. $\bar{f}(s) = \frac{2s+7}{s^2-4s+8} \bullet\!\!-\!\!\circ$
6. $\bar{f}(s) = \frac{8}{s^2(s-2)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ$
7. $\bar{f}(s) = \frac{s-11}{(s-1)(s^2+4)} \bullet\!\!-\!\!\circ$
8. $\bar{f}(s) = \frac{25-19s}{s^2(s^2+6s+25)} \bullet\!\!-\!\!\circ$

1.4. A Laplace-transzformáció alkalmazásai

Emlékezzünk vissza arra, hogy egy ismeretlen függvény deriváltjainak Laplace-transzformáltja csak a kiinduló ismeretlen függvény Laplace-transzformáltját tartalmazza. Ez lehetőséget ad arra, hogy egy differenciálegyenletet (ld. 7.1.4. definíció) átalakítsunk algebrai egyenletté, amelyben az ismeretlen a keresett függvény Laplace-transzformáltja lesz. A módszer alkalmazását a 7. fejezetben fogjuk tárgyalni.

Az operátor-impedancia. Az operátor-impedancia a villamosmérnöki gyakorlatban használatos fogalom, amely a Laplace-transzformáció segítségével nyújt egyszerű módot a váltakozó áramú körökkel kapcsolatos számítások elvégzésére.

1.4.1. Definíció. Az *operátor-impedancia* a feszültség-idő és az áramerősség-idő függvény Laplace-transzformáltjának hányadosa, azaz

$$Z(s) = \frac{\mathcal{L}[u(t)]}{\mathcal{L}[i(t)]} = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{i}(s)} = \frac{U(s)}{I(s)}.$$

1.4.2. Megjegyzés. Figyeljünk arra, hogy a definícióban szereplő hányados nem az $\frac{u(t)}{i(t)}$ függvény transzformáltja.

1.4.3. Tétel. *Az R ohmikus ellenállás operátor-impedanciája:*

$$Z_R(s) = R.$$

Bizonyítás: Az $u(t) = R \cdot i(t)$ egyenletet Laplace-transzformálva az $\bar{u}(s) = R \cdot \bar{i}(s)$ transzformált egyenletet kapjuk, ahonnan átrendezéssel adódik az állítás. □

1.4.4. Tétel. *Az L induktivitású (ideális) tekercs operátor-impedanciája:*

$$Z_L(s) = sL,$$

ha a kezdeti áramerősség $i(0) = 0$.

Bizonyítás: Az $u(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ egyenletet Laplace-transzformálva az $\bar{u}(s) = L \cdot s \cdot \bar{i}(s)$ transzformált egyenletet kapjuk, ahonnan átrendezéssel adódik az állítás. □

1.4.5. Tétel. *A C kapacitású (ideális) kondenzátor operátor-impedanciája:*

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}.$$

Bizonyítás: A $(Q =)\, C \cdot u(t) = \int_0^t i\,(t^*)\,\mathrm{d}t^*$ egyenletet Laplace-transzformálva a $C \cdot \bar{u}(s) = \frac{1}{s}\bar{i}(s)$ transzformált egyenletet kapjuk, ahonnan átrendezéssel adódik az állítás. □

Vegyük észre, hogy az s operátor és a $j\omega$ kifejezés között formai hasonlóság van (ahol j a képzetes egység, ω a körfrekvencia), ezért a $G(j\omega)$ függvény a $G(s)$ átviteli függvényből egyszerű $s = j\omega$ helyettesítéssel átírható. Ugyanez az elv az operátoros impedanciák esetében is megvalósítható, és ezzel a következő kifejezéseket kapjuk:

$$R, \qquad j\omega L, \qquad \frac{1}{j\omega C},$$

amely kifejezéseket a váltakozó áramú körök tárgyalásakor már megismerhetett az Olvasó. Az operátoros impedanciák használatával az áramkörök egyenletei könnyen felírhatók, ugyanis itt is igaz, hogy

- soros kapcsolású áramköri elemek esetén:

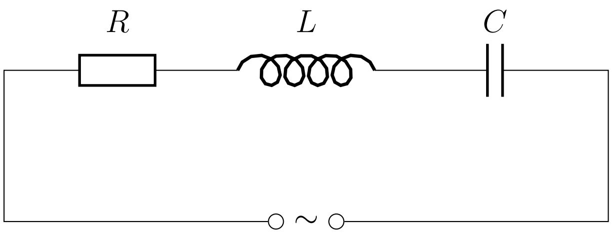
$$Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + \cdots + Z_n(s)\,;$$

- párhuzamos kapcsolású áramköri elemek esetén:

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} + \cdots + \frac{1}{Z_n(s)}.$$

1.4.6. Példa. Egy soros RLC-körben az eredő operátor-impedancia

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}.$$

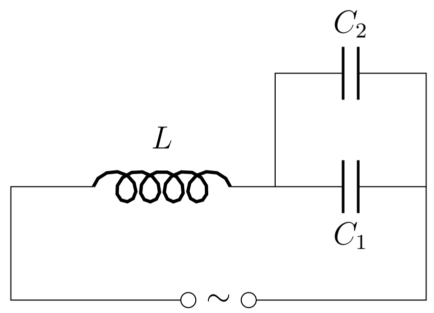


A további számításokat a $Z(s)$ operátor-impedancia segítségével végezhetjük, hasonlóan egyszerű módon mint a komplex impedancia esetén.

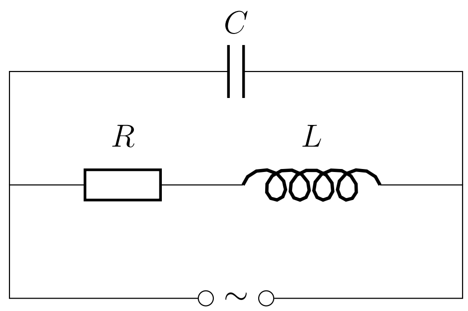
1.4.1. Feladatok

Írja fel az alábbi váltakozó áramú áramkörök operátor-impedanciáját.

1.



2.



2. fejezet

Kétváltozós valós függvények

2.1. Kétváltozós valós függvények értelmezése, ábrázolása

2.1.1. Bevezetés

Az Analízis I tárgyból megismerkedtünk a valós-valós függvényekkel és azok sajátosságaival. Ebben a fejezetben a kétváltozós valós függvényeket fogjuk tanulmányozni. Ezek bevezetésére azért van szükség, mert a körülöttünk levő világ jelenségeit általában nem egy-, hanem többváltozós függvények írják le. Ehhez tekintsük a következő példákat:

2.1.1. Példák.

1. Tekintsünk 1 mól mennyiségű ideális gázt. Ennek viselkedését a $pV = RT$ egyetemes gáztörvény írja le. Ez alapján a hőmérséklet
$$T = \frac{pV}{R}.$$
Itt $R \approx 8{,}3J/K$ az egyetemes gázállandó. Így a gáz hőmérsékletét annak nyomása és térfogata, tehát két változó határozza meg.

2. Írjuk le egy adott földrész (pl. Európa) domborzatát! A földfelszín egy pontjának tengerszint feletti magassága attól függ, hogy az adott pont hányadik szélességi és hosszúsági körön fekszik. A leíráshoz ismét két változóra, a GPS-koordinátákra van szükségünk.

3. Vizsgáljuk most meg, hogy a Földre mekkora vonzóerőt fejtenek ki a Nap és a Naprendszer bolygói együttvéve (a kisbolygókat nem számítva). Ez az erő most a Földnek a Naphoz és a többi bolygóhoz viszonyított aktuális helyzetétől függ. Így ezt a vonzóerőt egy sokváltozós függvény írja le (mégpedig $8 \cdot 3 = 24$, mivel a szóban forgó 8 égitestnek három-három térbeli koordinátája van). Ez a helyzet általános: egy összetettebb fizikai probléma során felmerülő kérdések általában többváltozósak.

Mivel a többváltozós függvények problematikáját már a legegyszerűbb — azaz a kétváltozós — esetben jól lehet tanulmányozni, ebben a jegyzetben a kétváltozós függvények tárgyalására fogunk szorítkozni. Esetenként kitekintést nyújtunk a többváltozós problémára, és a fontosabb tételeket — kiegészítő anyagként — általánosan is megfogalmazzuk.

2.1.2. A sík és részhalmazai

Elsőként a kétváltozós függvények értelmezési tartományával foglalkozunk.

2.1.2. Definíció (Descartes-szorzat).

1. Az $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ halmazt a valós számhalmaz önmagával vett *Descartes-szorzatának* nevezzük.

2. Általában, ha H és $K \subseteq \mathbb{R}$, akkor a $H \times K$ *Descartes-szorzat* alatt a

$$H \times K = \{(x, y) \mid x \in H, y \in K\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

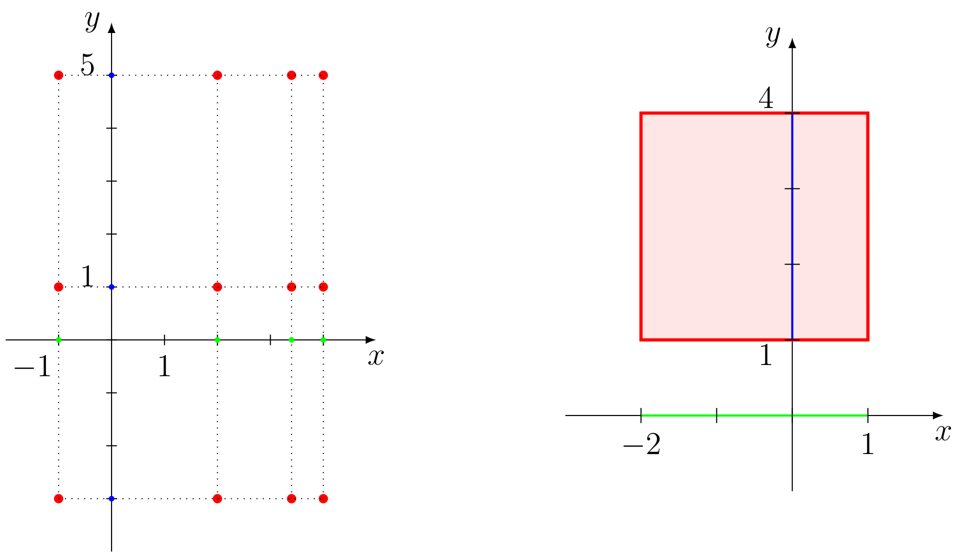
   halmazt értjük.

Vegyük észre, hogy $\mathbb{R}^2$ elemei nem mások, mint a sík pontjainak középiskolából már ismert (Descartes-féle) koordinátái.

2.1.3. Példák.

1. Legyen $H_1 = \{-1; 2; 3{,}4; 4\}$ és $K_1 = \{-3; 1; 5\}$ halmaz. Ekkor $H_1 \times K_1 = \{(-1; -3); (-1; 1); (-1; 5); (2; -3); (2; 1); (2; 5); (3{,}4; -3); (3{,}4; 1); (3{,}4; 5); (4; -3); (4; 1); (4; 5)\} \subseteq \mathbb{R}^2\}$ egy 12-elemű halmaz. (Lásd a 2.1. ábrát.)

2. Legyen $H_2 = [-2, 1]$, $K_2 = [1, 4]$. A $H_2 \times K_2$ téglalapot szintén megtekinthetjük a 2.1. ábrán.

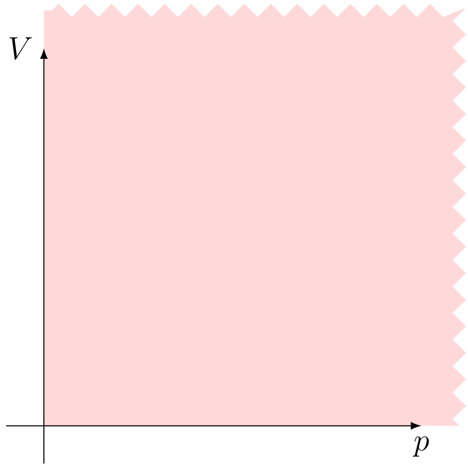


2.1. ábra. $H_1 \times K_1$ és $H_2 \times K_2$

Egyváltozós függvények értelmezési tartománya gyakran nem az egész számegyenes, hanem annak csak egy részhalmaza. Így van ez például a logaritmusfüggvény esetében, amely a pozitív valós számok halmazán ($\mathbb{R}^+$-on) értelmezett. A kétváltozós függvényeknél sem lesz ez másként: értelmezési tartományuk nem feltétlenül az egész sík, hanem annak egy részhalmaza. Vizsgáljuk ezt meg a 2.1.1. példákban szereplő függvényeken.

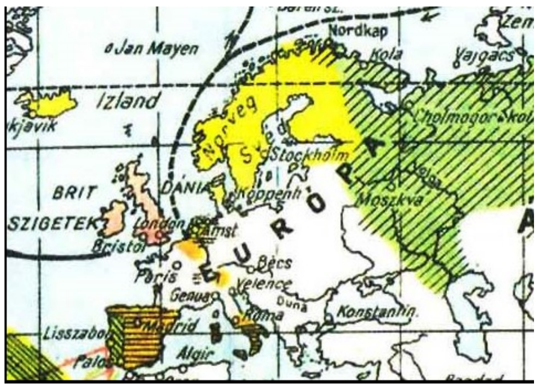
2.1.4. Példák.

1. Az ideális gáz hőmérsékletét leíró képletben a nyomás (p) és a térfogat (V) is csak pozitív értékeket vehet fel (2.2. ábra).



2.2. ábra. $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$: a $T(p,V)$ függvény értelmezési tartománya

2. Európa domborzatának leírásához csak Európa pontjait kell figyelembe vennünk. Ez olyan szélességi kör – hosszúsági kör párokat jelent, amelyekhez tartozó pont a térképen Európában fekszik, lásd 2.3. ábra[1].



2.3. ábra. Európa pontjai

Vegyük észre, hogy a releváns pontok a $[-90;90]\times[0;360]$ tégla részét képezik, ha a GPS-koordinátákat fokokban mérjük.

2.1.3. A kétváltozós függvények fogalma és alaptulajdonságai

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy meg tudjuk adni a kétváltozós függvény fogalmát:

2.1.5. Definíció (Kétváltozós függvény). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$. *Kétváltozós valós függvény* alatt egy $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt értünk. A D halmazt az f függvény *értelmezési tartományának* nevezzük. Jele: D_f. Az $R_f = \{f(x;y) \mid (x;y) \in D_f\} \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pedig a függvény *értékkészlete*.

[1]Forrás: http://mek.oszk.hu/07100/07139/html/pic/3-02.jpg

2.1.6. Megjegyzések.

- A kétváltozós valós függvényeket, ha félreértés nem állhat fenn, gyakran egyszerűen kétváltozós függvényeknek nevezzük.
- Egy kétváltozós f függvény tehát minden D-beli $(x;y)$ számpárhoz hozzárendel (pontosan) egy $f(x;y)\in\mathbb{R}$ valós számot. Ezt a hozzárendenlést megadhatja egy matematikai képlet (mint az ideális gáz hőmérsékletét), de az is lehetséges, hogy ilyen képletet nem tudunk fölírni (mint Európa pontjainak tengerszint feletti magassága esetében).
- Ha másként nincs megadva, itt is érvényes az az elv, hogy a kétváltozós függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$ azon legbővebb részhalmaza, ahol a függvényt megadó kifejezés értelmes, és eredményül valós értéket ad.
- Az értékkészlethez azok a valós számok tartoznak, amelyek előállnak képként. Ez az Európa domborzatát leíró függvény esetében a $[-28;5642]$ intervallum része. Itt a magasságot méterben mérjük. Természetesen a megadott intervallum nem tökéletesen pontos, hiszen a tengerszint feletti magasságot nem mérik ennél pontosabban. Az ideális gáz hőmérsékletére pedig a $T>0$ összefüggést tudjuk csak megadni, a függvény értékkészlete tehát az $\mathbb{R}^+$ halmaz. Természetesen a gáz hőmérsékletére vonatkozó fizikai korlátokat itt nem vettük figyelembe.

2.1.7. Példák. Határozzuk meg az alábbi hozzárendelésekkel megadott függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

1. $f(x;y)=\sin(2x+y)$.

   Megoldás: Ez a kifejezés tetszőleges x és y esetén értelmezhető, így a függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}^2$, az egész sík. Értékkészlete $R_f=[-1;1]$. Ez megegyezik a szinuszfüggvény értékkészletével, hiszen a $2x+y$ kifejezés értéke tetszőleges lehet.

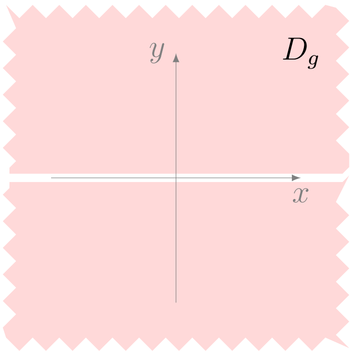
2. $g(x;y)=\frac{x}{y}$.

   Megoldás: Ez a függvény csak $y=0$ esetén nem értelmezhető, így az értelmezési tartomány $D_g=\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}\times\{0\})$. Értékkészlete pedig $R_g=\mathbb{R}$, hiszen például $y=1$ esetén tetszőleges valós szám előáll képként. Az értelmezési tartományt a 2.4. ábra mutatja.

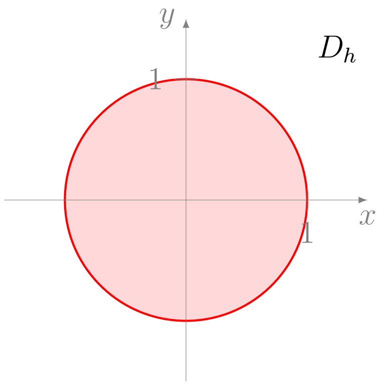
3. $h(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

   Megoldás: Itt az egyetlen megkötés, hogy a gyökjel alatti kifejezés ne legyen negatív. Ezt a feltételt az $x^2+y^2\leqslant 1$ egyenlőtlenséget teljesítő pontok elégítik ki. Így $D_h=$ $=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ az origó középpontú, egységsugarú körlap. Egy szám négyzetgyöke nem lehet negatív, ezért az értékkészletbe csak nemnegatív számok kerülnek. Mivel a gyökjel alatt legfeljebb 1 áll, az értékkészlet elemei sem nagyobbak 1-nél. Ha pedig $0\leqslant r\leqslant 1$, akkor $r=h(\sqrt{1-r^2};0)$. Tehát $R_h=[0;1]$.

4. $k(x;y)=\ln(xy)$



2.4. ábra. A 2.1.7. 2. példabeli g függvény értelmezési tartománya



2.5. ábra. A 2.1.7. 3. példabeli h függvény értelmezési tartománya

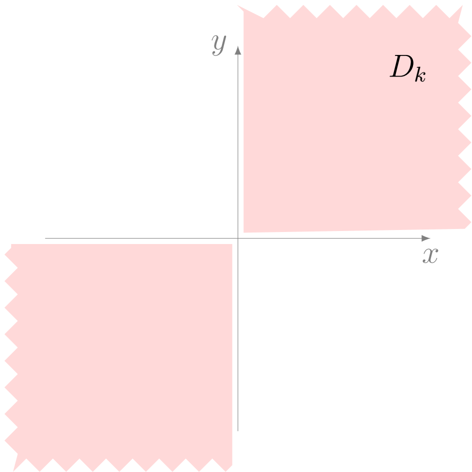
Megoldás: Ennél a függvénynél az a feltétel, hogy a logaritmus argumentuma pozitív legyen: $xy > 0$. Ez akkor teljesül, ha vagy mindkét változó pozitív, vagy mindkét változó negatív. Így az értelmezési tartomány: $D_k = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$. Az értékkészlet pedig $R_k = \mathbb{R}$, mert a logaritmusfüggvénynek ez az értékkészlete, xy pedig tetszőleges pozitív értéket felvehet.

Az egyváltozós valós függvények körében fontos szerepet játszottak a konstans, az identitás-, illetve a lineáris függvények. Ezek kétváltozós általánosításait adjuk meg a következő definícióban.

2.1.8. Definíció (Konstans, koordináta- és lineáris függvények).

- Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x; y) \mapsto c$ hozzárendeléssel értelmezett függvényt *konstans függvénynek* nevezzük.
- A teljes $\mathbb{R}^2$-en értelmezett, $\kappa_x(x; y) = x$, illetve $\kappa_y(x; y) = y$ hozzárendelési szabállyal értelmezett függvényeket *koordinátafüggvényeknek* nevezzük.
- Legyen a, b, $c \in R$ tetszőleges számok. Az $\ell \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell(x; y) = ax + by + c$ képlettel definiált függvényt *lineáris függvénynek* nevezzük.

A továbbiakban a kétváltozós függvények tulajdonságait vizsgáljuk. Ehhez az egyváltozós függvényeknél már megismert tulajdonságokat vesszük alapul.



2.6. ábra. A 2.1.7. 4. példabeli k függvény értelmezési tartománya

2.1.9. Megjegyzések.

- Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan az injektivitás, szürjektivitás és a bijektivitás is értelmezető kétváltozós függvényekre. Ezek a fogalmak megegyeznek az általános függvények hasonló fogalmaival (lásd Analízis I. jegyzet, 1.4.15, 1.4.18. és 1.4.21, illetve 6.1.4. definíciók), kevésbé fontosak azonban a többváltozós analízisben.

- Az egyváltozós valós függvények további tulajdonságai közül a *párosság* és a *páratlanság* érdektelenek a többváltozós esetben, a *monotonitás* és a *konvexitás* fogalma pedig értelmét veszti. Értelmes marad azonban a *szélsőérték* fogalma, ezt a 3. fejezetben tárgyaljuk. Szintén ott tárgyalunk egy új fogalmat, a *nyeregpontét*.

- A *periodicitás* fogalma értelmezhető többváltozós függvényekre, ekkor a periódus egy vektormennyiség lesz.

- Itt tárgyaljuk a korlátosság és a zérushely fogalmát is. Utóbbival már találkoztunk az implicit alakban megadott síkgörbék esetében. A 2.1.16. definícióban a zérushely fogalmának egy általánosítását adjuk.

- A valós-valós függvényekhez hasonlóan értelmezhető egy függvény *megszorítása* az értelmezési tartomány egy részére, továbbá két függvény *összeg-*, *különbség-*, *szorzat-* és *hányadosfüggvénye* is. A definíció azonos az egyváltozós függvények hasonló definícióival, azzal a különbséggel, hogy az értelmezési tartományokat az $\mathbb{R}^2$ halmaz részhalmazaként kell tekinteni (Analízis I. jegyzet 6.1.3 fejezet).

- Nem foglalkozunk az inverzfüggvény fogalmával. (Gondoljuk meg: egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény inverze, ha létezik, egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvény. Ilyen típusú függvényekkel a síkgörbék tárgyalásánál foglalkoztunk.)

- A 2.1.12. definícióban foglalkozunk az összetett függvények kérdésével. Itt definiálunk két speciális függvényösszetételt is. Az összetett függvény fogalmának egységes tárgyalását láthatjuk a 2.1.5. szakaszban.

2.1.10. Definíció (Korlátosság). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt *korlátosnak* nevezzük, ha R_f korlátos, azaz léteznek olyan A és B valós számok, amelyekre

$R_f \subseteq [A;B]$ teljesül. f *alulról korlátos*, ha minden $(x;y) \in D_f$ pontra $f(x;y) \geqslant A$ egy megfelelő $A \in \mathbb{R}$-re; *felülről korlátos* pedig akkor, ha $f(x;y) \leqslant B$ alkalmas $B \in \mathbb{R}$ esetén. A fenti egyenlőtlenségeket kielégítő A, illetve B valós számokat az f függvény *alsó*, illetve *felső* korlátjainak nevezzük.

Egy kétváltozós valós függvény pontosan akkor korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

2.1.11. Példák.

1. Az ideális gáz hőmérsékletét megadó $T(p;V)$ függvény (2.1.1. 1. példa) nem korlátos, de alulról korlátos. Egy alsó korlátja $A = 0$.

2. Az Európa pontjainak tengerszint feletti magasságát leíró függvény (2.1.1. 2. példa) korlátos. Egy alsó korlátja például $A = -100$, egy felső korlátja $B = 10000$.

3. A 2.1.7. példabeli f és h függvények korlátosak ($A = -1$, $B = 1$ alsó, illetve felső korlát mindkét függvényhez), g és k pedig sem alulról, sem felülről nem korlátos.

2.1.12. Definíció (Függvények kompozíciója). Legyenek D_f, D_g, $D_h \subseteq \mathbb{R}^2$, $D_\alpha \subseteq \mathbb{R}$, valamint $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $g\colon D_g \to \mathbb{R}$, $h\colon D_h \to \mathbb{R}$ kétváltozós, $\alpha\colon D_\alpha \to \mathbb{R}$ pedig egyváltozós valós függvény.

- Az $\alpha \circ f$ összetett függvény azokban az $(x;y) \in D_f$ pontokban van értelmezve, amelyekre $f(x;y) \in D_\alpha$. E függvényt az
$$(\alpha \circ f)(x;y) = \alpha(f(x;y))$$
képlet adja meg.

- Az $f \circ (g;h)$ összetett függvény alatt azt a kétváltozós függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya azon $(x;y) \in D_g \cap D_h$ pontokból áll, amelyekre a $(g;h)(x;y) = (g(x;y);h(x;y))$ pont D_f-be esik. A függvényt ekkor az
$$f \circ (g;h)(x;y) = f(g(x;y);h(x;y))$$
képlettel definiáljuk.

2.1.13. Példák.

1. A $\sin(x+y)$ függvényt megkapjuk mint az $\alpha(x) = \sin x$ egyváltozós és az $f(x;y) = x + y$ kétváltozós függvények kompozícióját. Az $\alpha \circ f$ függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, hiszen α a teljes $\mathbb{R}$ halmazon, f pedig a teljes $\mathbb{R}^2$ halmazon van értelmezve.

2. A $\sin x + \cos y$ függvényt megkapjuk mint az $f(x;y) = x+y$ kétváltozós függvénynek a $g(x;y) = \sin x$ és a $h(x;y) = \cos y$ függvényekkel vett kompozícióját. Az $f \circ (g;h)$ függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, mivel f, g és h értelmezési tartománya is $\mathbb{R}^2$.

3. A
$$\sin\left(\frac{x+y}{y-x}\right)$$
függvény előáll az $f(x;y) = \sin(\frac{x}{y})$, a $g(x;y) = x+y$ és a $h(x;y) = y-x$ függvények $f \circ (g;h)$ kompozíciójaként. A g és a h függvények is a teljes síkon vannak értelmezve, azonban az f függvény értelmezési tartománya a $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ halmaz. Mivel az $f \circ (g;h)$ összetett függvény értelmezési tartománya azon $(x;y)$ párokból áll, amelyekre a $(g(x;y);h(x;y)) = (x+y;y-x)$ pont D_f-be esik, ezért $D_{f\circ(g;h)} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x\}$.

4. Legyen $f(x;y)$ egy tetszőleges kétváltozós függvény, a pedig egy valós szám. A $g(x)= =f(x;a)$ képlettel definiált valós-valós függvény előáll mint az f kétváltozós függvény kompozíciója a κ_x koordinátafüggvénnyel és a $c(x;y)=a$ konstansfüggvénnyel (azaz mint az $f\circ(\kappa_x;c)$ összetett függvény). Hasonlóan áll elő a $h(y)=f(a;y)$ képlettel definiált valós-valós függvény.

   Figyeljük meg: az a valós szám választásától függően előfordulhat, hogy a kapott g vagy h függvény az üres függvény. A következő fejezet olvasása során hasonlítsuk össze a példabeli függvényeket a 2.1.16. definícióban szereplő x- és y-nívóvonalakkal.

A 2.1.13. 4. példájában olvasható konstrukciónak mintegy „fordítottja" a következő: Legyen $H\subseteq\mathbb{R}$, $\alpha\colon H\to\mathbb{R}$ pedig egy valós-valós függvény. Ekkor α-t felfoghatjuk kétváltozós függvényként, pontosabban értelmezünk egy kétváltozós f függvényt a következő módon: $D_f=H\times\mathbb{R}$, $f(x;y)=\alpha(x)$ (ahol $x\in H$, azaz $(x;y)\in D_f$). Hasonlóan, a $g\colon\mathbb{R}\times H$, $(x;y)\mapsto\alpha(y)$ hozzárendelés is egy kétváltozós függvényt definiál.
Vegyük észre, hogy tetszőleges a valós szám esetén az f függvényből a 2.1.13. 4. példájában bemutatott eljárással készített valós-valós függvény megegyezik a kiindulási α függvénnyel. Önálló munkaként fogalmazzuk meg az analóg állítást a g függvénnyel kapcsolatban.

2.1.4. Kétváltozós függvények szemléltetése

Egyváltozós függvények esetében megszoktuk, hogy a függvényt grafikonjával szemléltetjük az xy-síkon: a függvény grafikonja a sík $(x;f(x))$ alakú pontjainak halmaza. Hogy ezt általánosíthassuk a kétváltozós függvények esetére, a tér pontjaira van szükségünk:

2.1.14. Definíció (Az $\mathbb{R}^3$ tér). Az $\mathbb{R}^3$ tér a valós számhalmaz önmagával vett háromtényezős Descartes-szorzata, azaz az

$$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x;y;z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

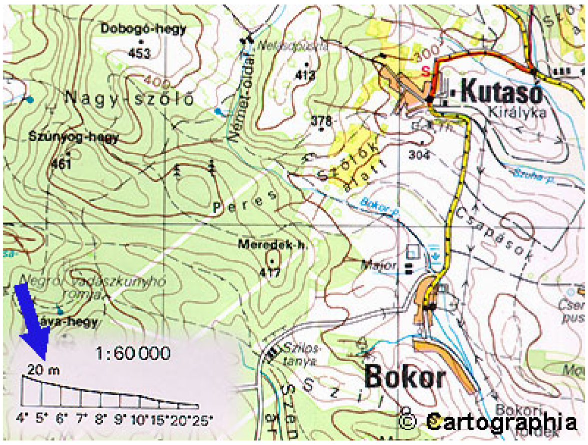
halmaz.

2.1.15. Definíció (Függvénygrafikon). Legyen $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Az $f\colon D\to\mathbb{R}$ kétváltozós függvény *grafikonján* az $\mathbb{R}^3$ tér $(x;y;f(x;y))$, másként jelölve $(P;f(P))$ (ahol $P(x;y)\in D$) alakú pontjainak halmazát értjük.

Míg egy egyváltozós függvény grafikonja egy síkbeli, addig egy kétváltozós függvényé egy térbeli alakzat. Ennek szemléltetésére már egy „terepasztalra" volna szükségünk.
Célunk most olyan szemléltetés megadása, ami egy papírlapra (tehát a síkba) rajzolható. Egyik lehetőség a domborzati térképeken is látható színezés: a pont színe információt ad a függvény pontbeli értékéről. Egy másik lehetőség, amelyet szintén láthatunk a térképeken, a szintvonalak berajzolása (2.7. ábra[2]).
Szintvonalakat akkor kapunk, ha a függvény grafikonját a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal elmetsszük. A pontos definíció a következő:

2.1.16. Definíció (Nívóvonal, szintvonal). Legyen $D\subseteq\mathbb{R}^2$, valamint $f\colon D\to\mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. Válasszunk egy olyan a valós számot, amelyre $(a;y)\in D$ teljesül valamely $y\in\mathbb{R}$ esetén. Hasonlóan, legyen $b\in\mathbb{R}$ olyan, amelyre $(x;b)\in D$ teljesül egy megfelelő $x\in\mathbb{R}$ számmal. Végül c legyen az f függvény értékkészletének egy eleme, azaz $c=f(x;y)$ valamely x, y valós számokkal.

[2] Forrás: http://www.mozaweb.hu/course/termeszet_5/jpg/t5_040-1.jpg és http://terkepismeret.elte.hu/resolveuid/e27479563ca74372acf68a8c6c481c8c



2.7. ábra. Térképészeti megoldások

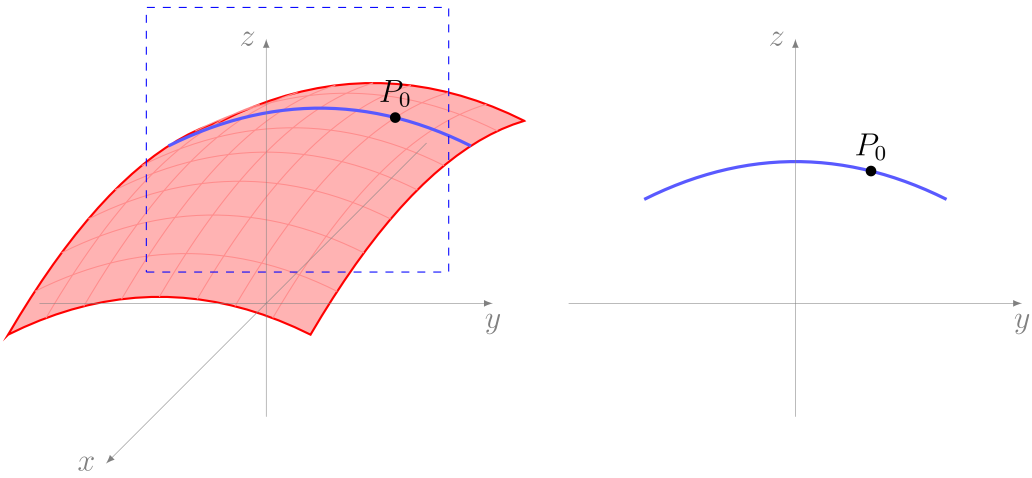
- *x-nívóvonalnak* nevezzük az $x = a$, $z = f(a; y)$,
- *y-nívóvonalnak* az $y = b$, $z = f(x; b)$,
- *z-nívóvonalnak* pedig a $z = f(x; y) = c$

egyenletrendszerű alakzatokat. A nívóvonalak másik elnevezése a *szintvonal*.

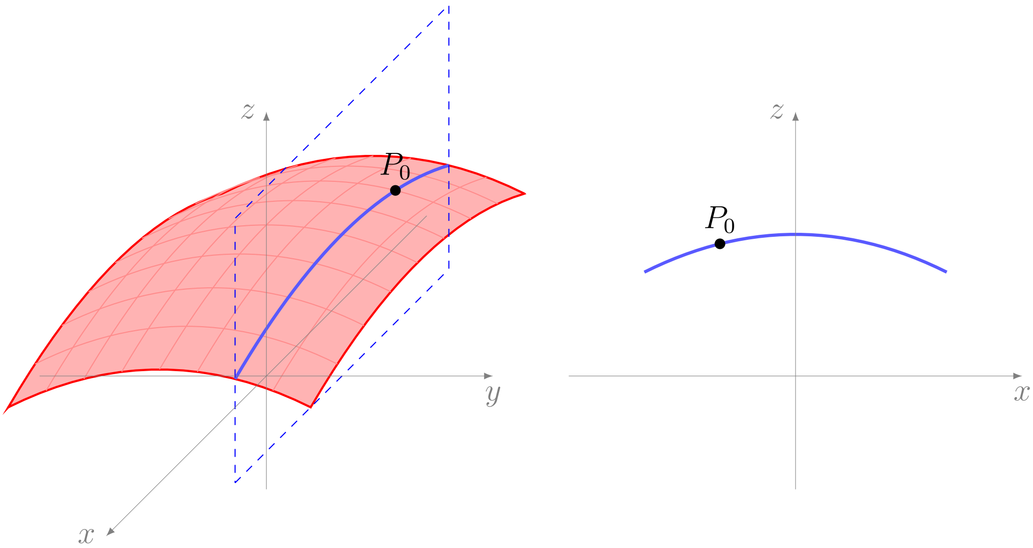
2.1.17. Megjegyzés. Az a feltétel, hogy „$(a; y) \in D$ teljesül valamely y esetén", csak az fejezi ki, hogy a függvény grafikonjának az $x = a$ egyenletű síkkal vett metszésvonala nem üres. Ha ezt a feltétel elhagyjuk, szintvonalként üres alakzatot is kaphatunk. (Például az x=400^o-os szintvonalhoz a földfelszín egyetlen pontja sem tartozik.) Hasonló megjegyzések érvényesek a b-re, illetve c-re vonatkozó kikötésekre is.

A 2.8-2.10. ábrákon a szintvonalak típusait szemléltetjük.

2.1.18. Példák. Határozzuk meg az alábbi függvények szintvonalait!



2.8. ábra. x-nívóvonalak



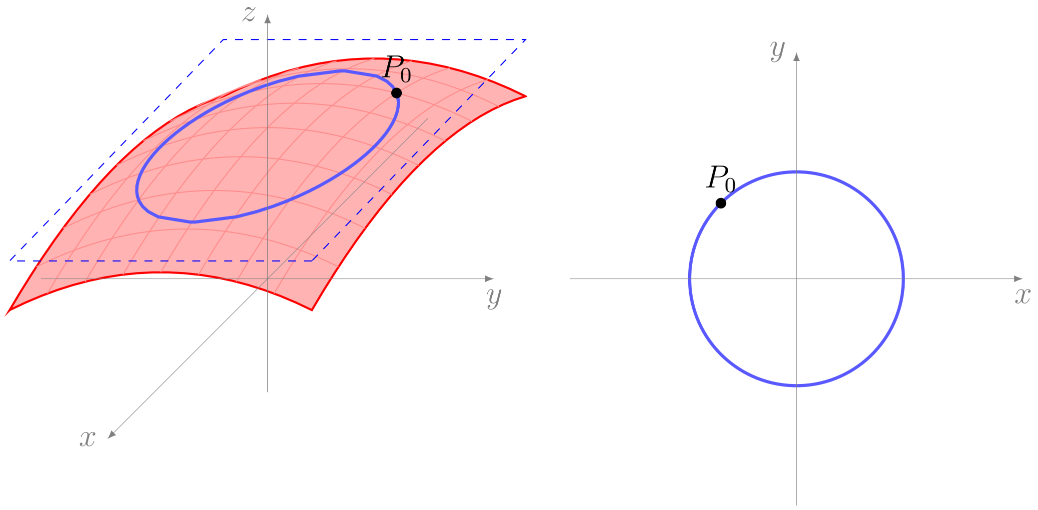
2.9. ábra. y-nívóvonalak

1. $f(x;y) = xy$.

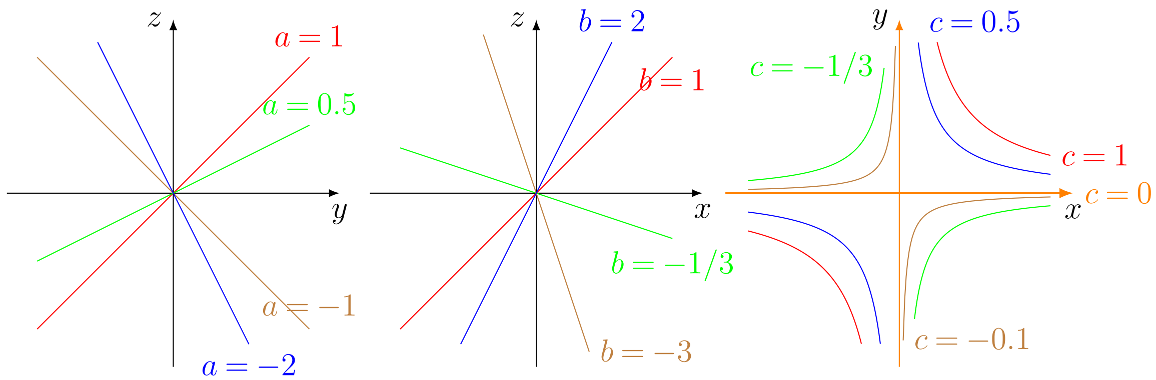
   Megoldás: A függvény értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}^2$, így tetszőleges a-t és b-t választhatunk. Az x-nívóvonalak az $x = a$, $z = ay$ egyenletrendszerű egyenesek, ezek vetületei az yz-síkra a $z = ay$ egyenletű egyenesek. Hasonlóan, az y-nívóvonalak az $y = b$, $z = bx$ egyenletrendszerű egyenesek, amelyek vetületei az xz-síkra a $z = bx$ egyenletű egyenesek. A függvény értékkészlete $\mathbb{R}$, így tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ választható. A z-nívóvonalak a $z = c$, $xy = c$ egyenletrendszerű hiperbolák, illetve $c = 0$ esetén az x- és y-tengely pontjaiból álló halmaz. Ezek vetülete az xy-síkra az $xy = c$ egyenletű hiperbolasereg, illetve a koordinátatengelyek uniója. A szintvonalakat néhány a, b, illetve c értékre a 2.11. ábrán szemlélhetjük.

2. $g(x;y) = x^2 + y^2$.

   Megoldás: Csak a szintvonalak koordinátasíkokra való vetületét határozzuk meg. a és b megint tetszőleges, c viszont csak nemnegatív szám lehet. Az x-szintvonalak



2.10. ábra. z-nívóvonalak



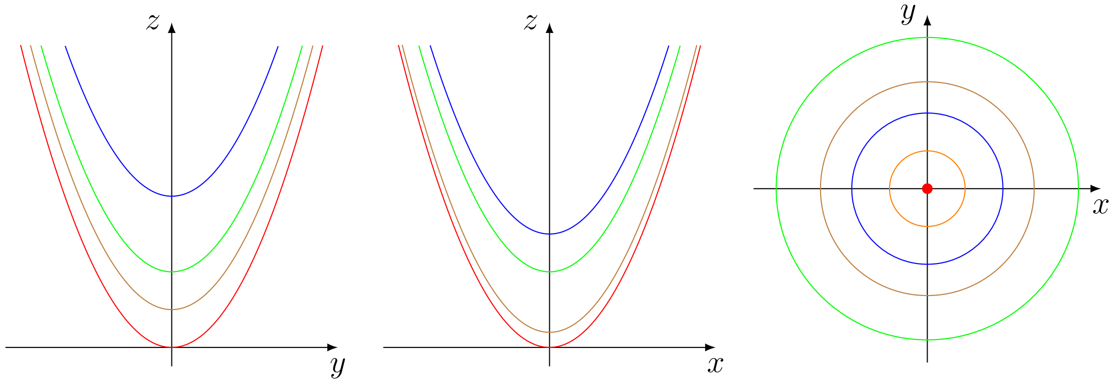
2.11. ábra. Az $f(x;y)=xy$ függvény szintvonalai

vetületei a $z=a^2+y^2$ egyenletű parabolák, az y-szintvonalaké a $z=x^2+b^2$ egyenletű parabolák. Figyeljük meg, hogy ezek a és $-a$, illetve b és $-b$ esetén megegyeznek. A z-szintvonalak vetületei pedig az $x^2+y^2=c$ egyenletű körök (illetve $c=0$ esetén egy pont: az origó). (Lásd 2.12. ábra.)

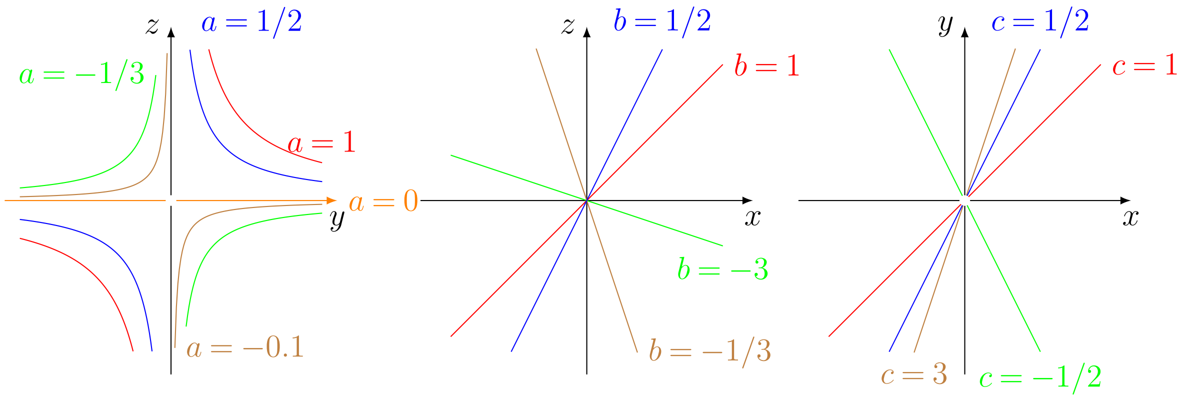
3. $h(x;y)=\frac{x}{y}$

Megoldás: Most a és c tetszőleges, $b\neq 0$. Az x-szintvonalak vetületei a $z=\frac{a}{y}$ egyenletű hiperbolák, illetve az y-tengely az origó nélkül ($a=0$ esetén); az y-szintvonalaké a $z=\frac{x}{b}$ egyenletű egyenesek; míg a z-szintvonalak vetületei az $\frac{x}{y}=c$ egyenletet kielégítő ponthalmaz, azaz az $x=cy$ egyenletű egyenesekből az origó elhagyásával keletkezett alakzatok (2.13. ábra).

A kétváltozós függvények egyik szemléltetési lehetősége tehát több a, b, illetve c választás mellett a keletkező szintvonalak vetületének ábrázolása.



2.12. ábra. A $g(x;y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai



2.13. ábra. A $h(x;y) = \frac{x}{y}$ függvény szintvonalai

2.1.5. Az n-változós eset

Mint már említettük, sok esetben nem két-, hanem három-, vagy többváltozós függvényekre van szükségünk. n változó esetén az értelmezési tartomány az

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

halmaz egy részhalmaza. Többváltozós függvény ábrázolása jóval bonyolultabb, mint a kétváltozósaké, ezért ezzel nem foglalkozunk.
Érdemes azonban az általánosabb függvényfogalmat a 2.1.12. definícióbeli összetett függvények egységes definiálására fölhasználni. Ehhez először értelmezzük a vektorértékű többváltozós függvényeket:

2.1.19. Definíció (Vektorértékű többváltozós függvény). Legyen n és k pozitív egész szám, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^k$ függvényt *vektorértékű többváltozós függvénynek*, vagy *vektor-vektor függvénynek* nevezzük.

2.1.20. Megjegyzések.

- Noha az $\mathbb{R}^k$ tér elemei szigorúan véve pontok, nem pedig vektorok, különösen a fizikai alkalmazások szempontjából sokszor a pontok helyett a pontokba mutató helyvektorokat vizsgáljuk. Így valamely $P \in D$ esetén az $\mathbf{f}(P) \in \mathbb{R}^k$ függvényértéket nem pontként, hanem vektorként tekintjük. Innen ered a vektorértékű függvény elnevezés. Hasonlóan, a $P(x_1;\ldots;x_n)\in\mathbb{R}^n$ pontot is sokszor azonosítjuk a P pontba mutató $\mathbf{x}=(x_1;\ldots;x_n)$ helyvektorral. Ilyenkor nem az $\mathbf{f}(P)$, hanem az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ függvényértékről beszélünk. Ez indokolja a vektor-vektor függvény elnevezést.

- Legyen $P\in D\subseteq\mathbb{R}^n$ Ekkor

$$\mathbf{f}(P)=(f_1(P);f_2(P);\ldots;f_k(P)).$$

Itt $f_1(P)$, …, $f_k(P)$ az $\mathbf{f}(P)$ függvényérték koordinátái. Mivel ezek a P ponttól függnek, f_1, …, f_k a D halmazon értelmezett n-változós valós függvények. Ezeket az $\mathbf{f}$ vektorértékű függvény *koordinátafüggvényeinek* nevezzük. Így $\mathbf{f}$ felfogható egy olyan vektorként, amelynek koordinátái n-változós valós függvények.

2.1.21. Definíció (Összetett függvény általános fogalma). Legyen n, k és l pozitív egész szám, $H\subseteq\mathbb{R}^n$, $K\subseteq\mathbb{R}^k$. Legyenek továbbá $\mathbf{f}\colon H\to\mathbb{R}^k$ és $\mathbf{g}\colon K\to\mathbb{R}^l$ többváltozós vektorértékű függvények. A $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ *összetett függvényen* azt a függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya, $D_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}$ olyan $(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in H$ pontokból áll, amelyekre $\mathbf{f}(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in K$ teljesül, s ezekben a pontokban

$$\mathbf{g}\circ\mathbf{f}(x_1;x_2;\ldots;x_n)=\mathbf{g}(\mathbf{f}(x_1;x_2;\ldots;x_n)).$$

Vegyük észre, hogy a 2.1.12. definíció $\alpha\circ f$ függvényét $n=2$, $k=l=1$ esetben kapjuk. A második pontban definiált $f\circ(g;h)$ függvényt pedig $n=k=2$, $l=1$ esetén kapjuk. Ekkor a $(g;h)$ párt egy kétváltozós, $\mathbb{R}^2$-be képező függvényként fogjuk fel, ez lesz a 2.1.21. definíció $\mathbf{f}$ függvénye, míg a 2.1.12. definícióbeli f függvény a 2.1.21. definíció $\mathbf{g}$ jelű függvénye.

2.1.6. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

   (a) $f(x;y)=\dfrac{x+1}{y^2-4}$;

   (b) $g(x;y)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$;

   (c) $h(x;y)=e^{xy}-\dfrac{1}{x+y}$;

   (d) $k(x;y)=\ln(x^2-y^2)$.

2. Számítsa ki és ábrázolja függvényenként közös koordinátarendszerben az alábbi függvények nívóvonalait a megadott értékekre:

   (a) $f(x;y)=|x+y|$, z-nívóvonalak, $c=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ esetén;

   (b) $g(x;y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, x-nívóvonalak $a=0,\ \pm1,\ \pm2$ esetén;

   (c) $h(x;y)=\sin(x+y)$, y-nívóvonalak $b=0,\ \pm\dfrac{\pi}{6},\ \pm\dfrac{\pi}{2}$ esetén.

2.2. Kétváltozós függvények folytonossága, határértéke

2.2.1. A sík topológiája

Célunk, hogy a kétváltozós függvények analitikus tulajdonságait vizsgáljuk. Ehhez — az egyváltozós esethez hasonlóan — szükségünk lesz a környezet fogalmára. Ez az egyváltozós esetben egy x_0 pont körüli nyílt intervallum volt. Hogy ezt általánosíthassuk a kétváltozós esetre, először bevezetjük két pont távolságának fogalmát, majd megvizsgáljuk a távolság tulajdonságait.

2.2.1. Definíció (Távolság). Legyenek $P(p_1;p_2)$ és $Q(q_1;q_2)$ síkbeli pontok. A

$$d(P;Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$$

valós számot a P és Q pontok *távolságának* nevezzük.

2.2.2. Tétel (A távolság tulajdonságai). *Tetszőleges P, Q és R pontokra fennálnak a következő összefüggések:*

- *A távolság nemnegatív: $d(P;Q) \geqslant 0$, és az egyenlőtlenség $P \neq Q$ esetén szigorú;*
- *A távolság szimmetrikus: $d(P;Q) = d(Q;P)$;*
- *Teljesül a háromszög-egyenlőtlenség: $d(P;Q)+d(Q;R) \geqslant d(P;R)$; itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha Q a $\overline{PR}$ szakasz egy pontja.*

Bizonyítás: Mivel a gyökfüggvény nemnegatív, két pont távolsága sem lehet negatív. $d(P;Q) = 0$ pedig pontosan akkor áll fenn, ha a gyökjel alatti mindkét négyzet nullával egyenlő, vagyis, ha $p_1 = q_1$ és $p_2 = q_2$ teljesül. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $P = Q$. Mivel a négyzetfüggvény páros, azaz $(p_1-q_1)^2 = (q_1-p_1)^2$ tetszőleges p_1 és q_1 számra, ezért $d(P;Q) = d(Q;P)$.
A háromszög-egyenlőtlenséget nem bizonyítjuk. □

Most már bevezethetjük a környezet fogalmát:

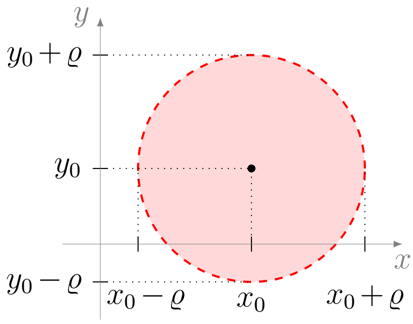
2.2.3. Definíció (Környezet: körlap). Legyen $P_0(x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2$ egy síkbeli pont, $\varrho > 0$ pedig egy valós szám. A P_0 pont ϱ sugarú *környezete* a P_0-hoz ϱ-nál közelebbi pontok halmaza:

$$B(P_0;\varrho) = \{P(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(P;P_0) < \varrho\}.$$

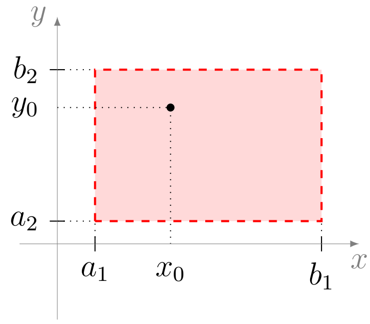
Vegyük észre, hogy a környezet nem más, mint a P_0 pont körüli ϱ sugarú körlap, amely a körvonalat nem tartalmazza. (Ezt nevezzük *nyílt körlapnak.*) Ennek pontjai tehát az

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \varrho^2$$

egyenlőtlenséget kielégítő $P(x;y)$ pontok (2.14. ábra).
Az egyváltozós környezetfogalom általánosítására azonban adódik még egy kézenfekvő definíció:



2.14. ábra. Nyílt körlap



2.15. ábra. Nyílt téglalap

2.2.4. Definíció (Környezet: tégla). Legyen $P_0(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ a sík egy pontja, legyen továbbá $a_1 < x_0 < b_1$ és $a_2 < y_0 < b_2$. Az

$$]a_1; b_1[\times]a_2; b_2[$$

téglát a P_0 pont egy (*téglalap-*)*környezetének* nevezzük (lásd 2.15. ábra).

2.2.5. Definíció (Belső, külső, illetve határpont). Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $P \in \mathbb{R}^2$ egy pont.

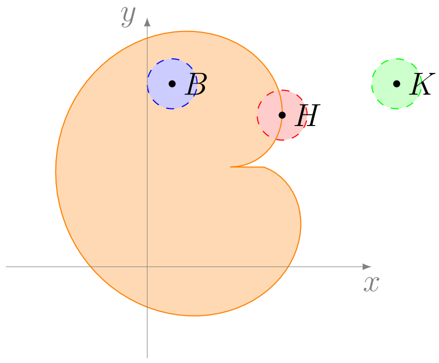
(*i*) *P belső pontja* S-nek, ha az tartalmazza P egy környezetét.

(*ii*) *P külső pontja* S-nek, ha P egy környezetével együtt S-en kívül fekszik.

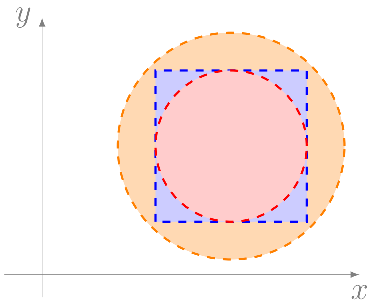
(*iii*) *P határpontja* S-nek, ha P bármely környezete tartalmaz S-beli és S-en kívüli pontokat is.

2.2.6. Megjegyzések.

- A 2.16. ábrán kör alakú környezetet vettünk, de vegyük észre, hogy a definícióban éppúgy használhatunk körlapot, mint téglát környezetként: egy tégla mindig tartalmaz körlapot, s egy körlap is mindig tartalmaz téglát, amint ezt a 2.17. ábra mutatja.
- Adott S halmaz esetén a sík minden pontja a 2.2.5. definícióban szereplő három tulajdonság közül pontosan eggyel rendelkezik: Egy pont nem lehet egyszerre belső és külső pont, hiszen a belső pont S-beli, a külső pont pedig S-n kívüli. Ha pedig



2.16. ábra. Halmaz külső (K), belső (B), illetve határpontja (H)



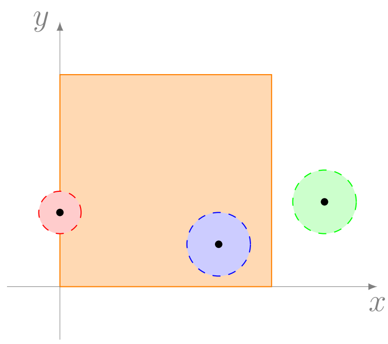
2.17. ábra. Környezetek egymásban

egy pont nem is belső, és nem is külső, ez éppen azt jelenti, hogy ő határpont. Ha ugyanis nincs sem olyan környezet, amelyet S tartalmaz, sem olyan, amelyik S-en kívül fekszik, akkor minden környezet tartalmaz S-beli és S-en kívüli pontokat is. Ez pedig éppen a határpont definíciója.

2.2.7. Példák.

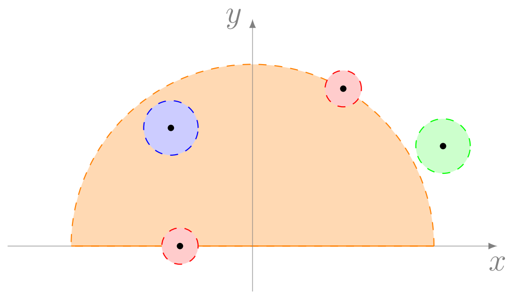
1. Tekintsük először $S = [0; 1] \times [0; 1]$ „zárt” egységnégyzetet. Ennek belső pontjai a $]0; 1[\times]0; 1[$ „nyílt” négyzet pontjai, azaz azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek mindkét koordinátája 0 és 1 közé esik, vagyis $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$ teljesül.

   S külső pontjai az S-en kívüli pontok, határpontjai pedig az egységnégyzet oldalain elhelyezkedő pontok (2.18. ábra).



2.18. ábra. Négyzet belső, külső, illetve határpontja

2. Legyen most $S=\{(x;y) \mid x^2+y^2<1, y\geqslant 0\}$ a „nyílt” egységkör nemnegatív ordinátájú része. S belső pontjai a pozitív ordinátájú pontjai (tehát az $x^2+y^2<1$, $y>0$ egyenlőtlenségeket kielégítő pontok), S határpontjai az $x^2+y^2=1$, illetve $y=0$ egyenletek valamelyikét kielégítő pontjai, a sík többi pontja külső pont. (2.19. ábra).

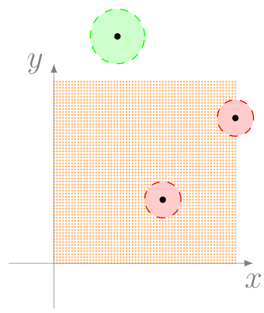


2.19. ábra. Félkör belső, külső, illetve határpontja

3. Tekintsük a $H=\mathbb{R}^2$ halmazt, vagyis a teljes síkot. Mivel ez minden pontot tartalmaz, ezért bármely pont összes környezetét is tartalmazza. Így most a sík minden pontja belső pont. Ebből következően H-nak se határpontja, se külső pontja nincs.

4. Másik végletként vizsgáljuk meg a $H=\emptyset$ halmazt. Mivel ennek egyáltalán nincs pontja, belső pontja sincs. Figyeljük meg, hogy most minden pont külső pont az előző gondolatmenet szerint. Így az üres halmaznak határpontja sincs.

5. Végül legyen H az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjainak halmaza:
$$H=\{(x;y) \mid 0<x,y<1, x,y\in\mathbb{Q}\}.$$
Tudjuk, hogy ez semmilyen körlapot sem tartalmaz, így belső pontja nincs. Külső pontjai az egységnégyzeten kívüli pontok (mint az (a) pontban). Határpontjai pedig a $[0;1]\times[0;1]$ egységnégyzet összes pontja. Ezt a 2.20. ábrán szemléltetjük.



2.20. ábra. Egységnégyzet racionális pontjai

Megjegyezzük, hogy az ábra csak torz képet tud adni a H halmazról, hiszen annak pontjait valójában nem tudjuk ábrázolni.

2.2.8. Definíció (Nyílt, illetve zárt halmaz). Legyen $S\subseteq\mathbb{R}^2$.

(i) S *nyílt*, ha minden pontja belső pont.

(ii) S *zárt*, ha minden $\mathbb{R}^2\setminus S$-beli pont külső.

2.2.9. Megjegyzések.

- Vegyük észre, hogy S akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementere, azaz $\mathbb{R}^2 \setminus S$ zárt.
- S pontosan akkor zárt, ha minden határpontját tartalmazza.
- Abból, hogy S nem nyílt, még nem következik az, hogy zárt, amint ezt az alábbi példák mutatják.

2.2.10. Példák.

1. A nyílt körlapok és téglák (tehát a környezetek) nyílt halmazok.
2. A zárt körlapok (azaz a $d(P;P_0) \leqslant \varrho$ egyenlőtlenséget kielégítő ponthalmazok) és zárt téglák (azaz a $[a_1;b_1] \times [a_2;b_2]$ halmazok) zártak.
3. Az $S = \{(x;y) \mid x^2+y^2 < 1, y \geqslant 0\}$ félkörlap nem zárt, és nem is nyílt. A korábbi meggondolások szerint ugyanis vannak S-be eső és azon kívüli határpontjai is: az $y=0$ ordinátájú S-beli pontok csakúgy, mint a félkörvonal pontjai (ezek nem esnek S-be) határpontok.
4. Az üres halmaz ($\emptyset$) és az egész sík ($\mathbb{R}^2$) nyílt is, zárt is. Gondoljuk meg: más nyílt-zárt halmaz nincs.
5. Az $S = \{(x;y) \mid 0 < x, y < 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$ halmaz se nem zárt, se nem nyílt, hiszen határpontjait sem S, sem $\mathbb{R}^2 \setminus S$ nem tartalmazza.
6. A valós számtengely mint a sík része (tehát $S = \mathbb{R} \times \{0\}$) zárt. Hasonlóan, minden zárt intervallum zárt. A nyílt intervallumok viszont se nem zártak, se nem nyíltak: az intervallum pontjai a hiányzó végponttal együtt határpontok. (Vigyázzunk: ezek a megállapítások az adott halmazokra mint síkbeli halmazokra vonatkoznak, a nyílt intervallum mint $\mathbb{R}$-beli halmaz természetesen nyílt.)

2.2.2. Kétváltozós függvények folytonossága

A valós-valós függvényekhez hasonlóan a kétváltozós függvények esetében is fontos a folytonosság fogalma, amely a jelen fejezet témája.

2.2.11. Definíció (Folytonosság). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, valamint $f\colon D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. Tegyük fel továbbá, hogy a $P_0(x_0;y_0)$ pont a függvény értelmezési tartományának belső pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény a P_0 pontban *folytonos*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $\delta > 0$ érték, amelyre

$$|f(x;y) - f(x_0;y_0)| < \varepsilon, \text{ valahányszor } d(P(x;y), P_0(x_0;y_0)) < \delta$$

teljesül.

2.2.12. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 2.2.11. definíció az egyváltozós függvényekre értelmezett folytonosság fogalmának szó szerinti átvitele kétváltozós függvények esetére. A definíció pongyola megfogalmazása: „f folytonos P_0-ban, ha a P-beli függvényérték közel van $f(P_0)$-hoz, amennyiben a P pont elég közel van P_0-hoz”.

2.2.13. Példák. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk mely pontjaiban folytonosak.

1. Legyen $f(x;y) = c \in \mathbb{R}$ egy konstans függvény.

   Megoldás: f folytonos minden $\mathbb{R}^2$-beli pontban: a függvényértékek különbsége bármely két pont esetén 0, így tetszőleges δ választható, ε-tól függetlenül.

2. Legyen
$$f(x;y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & \text{ha} \quad (x;y) = (0;0) \end{cases}.$$

   Megoldás: Az f függvény az $O(0;0)$ pontban nem folytonos: $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez nem tudunk δ-t megadni, hiszen $|f(x;y) - f(0;0)| = 1 \not< \frac{1}{2}$ egyetlen $P(x;y) \neq O$ esetén sem.

3. Tekintsük most az $f(x;y) = x + y$ függvényt.

   Megoldás: Az f függvény értelmezési tartománya az egész sík. Belátjuk, hogy f tetszőleges $P_0(x_0;y_0)$ pontban folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Az állítjuk, hogy ha x eltérése x_0-tól és y eltérése y_0-tól kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}$, akkor $f(x;y)$ eltérése $f(x_0;y_0)$-tól kisebb, mint ε. Számítsuk ki ugyanis utóbbi eltérést:
$$\begin{aligned} |f(x;y) - f(x_0;y_0)| &= |(x+y) - (x_0+y_0)| = |(x-x_0) + (y-y_0)| \\ &\leqslant |x-x_0| + |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

   Eszerint a $\delta = \varepsilon/2$ választás megfelelő lesz: ha ugyanis a $P(x;y)$ pont a $P_0(x_0;y_0)$ pont δ sugarú környezetébe esik, akkor megfelelő koordinátáik eltérése kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}(=\delta)$:
$$\delta > d(P;P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geqslant \sqrt{(x-x_0)^2} = |x-x_0|.$$

   $|y - y_0| < \delta$ hasonlóan bizonyítható.

2.2.14. Definíció (Folytonosság halmazon). Legyen $H \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$, valamint $f\colon D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. Azt mondjuk, hogy f *folytonos* a H halmazon, ha folytonos minden $P \in H$ pontban. Ha f folytonos az egész értelmezési tartományán, akkor f-et *folytonos függvénynek* nevezzük.

2.2.3. Pontsorozatok

A folytonosság 2.2.2. alfejezetben megismert definíciója Cauchytól származik. A valós-valós függvényekhez hasonlóan a kétváltozós valós függvényekre is teljesül az átviteli elv (Analízis I. 6.4.8. tétel). Ehhez a folytonosság Heine-féle megközelítése szükséges, amely a pontsorozat fogalmán alapul.

2.2.15. Definíció (Pontsorozat). $\mathbb{R}^2$*-beli sorozatnak*, vagy *pontsorozatnak* nevezzük az $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^2$ függvényeket, vagyis azokat, amelyek minden n pozitív egész számhoz egy $P_n(x_n;y_n) \in \mathbb{R}^2$ pontot rendelnek. A pontsorozat jele: $\{P_n\}$.

Egy pontsorozat megadása tehát ekvivalens a valós $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ számsorozatok megadásával. Az $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ sorozatokat a $\{P_n\}$ pontsorozat *koordinátasorozatainak* nevezzük.

A valós sorozatokhoz hasonlóan az $\mathbb{R}^2$-beli sorozatok konvergenciáját is értelmezzük:

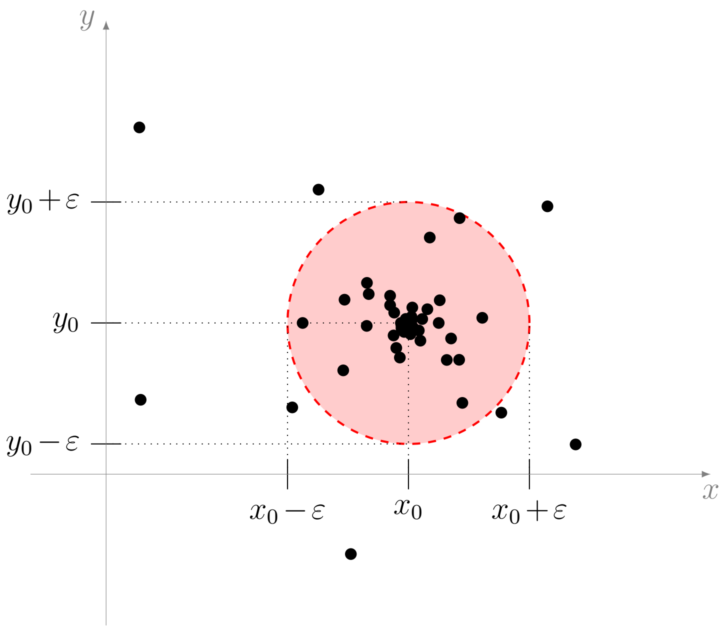
2.2.16. Definíció (Pontsorozat konvergenciája). A $\{P_n\}$ $\mathbb{R}^2$-beli sorozat *konvergens* és *határértéke* a P pont, amennyiben minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex úgy, hogy

$$d(P;P_n) < \varepsilon$$

teljesül minden $n > N$ esetén.

2.2.17. Megjegyzések.

- Figyeljük meg, hogy a pontsorozat konvergenciájának definíciója a valós számsorozat konvergenciafogalmának szó szerinti átvitele a síkbeli esetre.
- A $d(P;P_n) < \varepsilon$ feltétel azt jelenti, hogy a $\{P_n\}$ sorozat N-nél nagyobb indexű tagjai a P pont ε sugarú környezetén belül tartózkodnak. Ezt mutatja a 2.21. ábra.



2.21. ábra. ε sugarú környezeten kívül csak véges sok pont

A következő tétel a pontsorozat és koordinátasorozatai konvergenciája között teremt kapcsolatot:

2.2.18. Tétel. *A $\{P_n(x_n;y_n)\}$ pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ koordinátasorozatai konvergensek.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\{P_n\}$ konvergens, és határértéke a $P(a;b)$ pont. Belátjuk, hogy ekkor mind $\{x_n\}$, mind pedig $\{y_n\}$ konvergens, sőt, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. A $\{P_n\}$ sorozat konvergenciája miatt létezik egy N küszöbindex úgy, hogy

$$\varepsilon > d(P;P_n) = \sqrt{(a-x_n)^2+(b-y_n)^2} \geqslant |a-x_n|$$

teljesül minden $n > N$ esetén, hiszen a gyökjel alatt $|a - x_n|$ négyzeténél nem kisebb szám áll. Ekkor viszont $|a - x_n| < \varepsilon$ minden $n > N$ esetén, ami az $\{x_n\}$ sorozat konvergenciáját bizonyítja. Végezzük el ugyanezt az okoskodást x helyett y-nal, s megkapjuk, hogy $\lim y_n = b$.

Tegyük most fel, hogy $x_n \to a$ és $y_n \to b$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Keresni fogunk egy N küszöbindexet, amely a $\{P_n\}$ pontsorozat konvergenciáját bizonyítja. Válasszunk az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz egy N_x küszöbindexet az $\{x_n\}$, egy N_y küszöbindexet pedig az $\{y_n\}$ sorozat esetén. Legyen $N = \max(N_x; N_y)$, vagyis a két küszöbindex közül a nagyobbik. Ekkor

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ha $n > N_x$, és

$$|b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ha $n > N_y$. Ebből viszont $n > N$ esetén

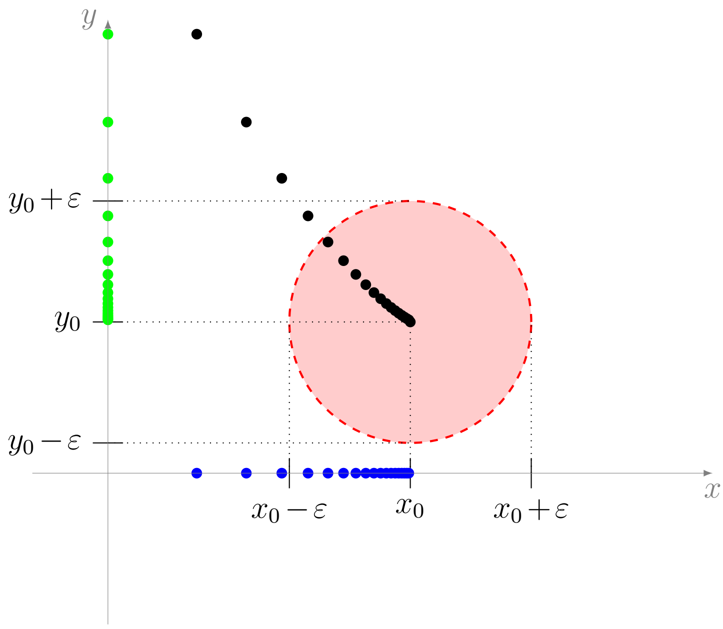
$$|a - x_n|^2 + |b - y_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} = \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2$$

következik, ahonnan

$$d(P; P_n) = \sqrt{|a - x_n|^2 + |b - y_n|^2} < \varepsilon.$$

Tehát a $\{P_n\}$ sorozat konvergens, határértéke pedig P. □

Konvergens pontsorozatok koordinátasorozatainak konvergenciáját szemlélteti a 2.22. ábra.



2.22. ábra. Koordinátasorozat konvergenciája

2.2.19. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a bizonyításban kihasználtuk, hogy minden ε sugarú kör tartalmaz egy ε oldalhosszúságú négyzetet, előbbi viszont egy 2ε oldalhosszúságú négyzetnek része.

2.2.4. Átviteli elv

Most már kimondhatjuk az egyváltozós analízisből ismert átviteli elvet:

2.2.20. Tétel (Átviteli elv). *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egy ponthalmaz, $f : D \to \mathbb{R}$ pedig egy kétváltozós függvény. Legyen továbbá $P_0(x_0; y_0)$ az értelmezési tartomány egy belső pontja. f akkor és csak akkor folytonos a P_0 pontban, ha bármely P_0-hoz tartó D-beli $\{P_n(x_n; y_n)\}$ pontsorozat esetén a függvényértékek $\{f(x_n; y_n)\}$ sorozata konvergens, továbbá*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n; y_n) = f(x_0; y_0).$$

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy f folytonos P_0-ban. Legyen $\{P_n(x_n; y_n)\}$ egy P_0-hoz tartó D-beli pontsorozat. Célunk adott $\varepsilon > 0$ esetén egy N küszöbindex megadása. Tudjuk, hogy létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ teljesül, valahányszor P a P_0 pont δ sugarú környezetében tartózkodik, hiszen f folytonos. Ha viszont a $\{P_n\}$ pontsorozat határértéke P_0, akkor egy küszöbindextől kezdve a sorozat összes eleme a P_0 pont δ sugarú környezetébe esik. Legyen ez a küszöbindex N. Tehát $n > N$ esetén $|f(P_n) - f(P_0)| < \varepsilon$ áll fenn.
Tegyük fel most, hogy f *nem* folytonos P_0-ban. Konstruálunk egy olyan $\{P_n\}$ D-beli pontsorozatot, amelynek határértéke P_0, de amelyre az $\{f(P_n)\}$ sorozat nem tart $f(P_0)$-ba. Létezik ugyanis olyan $\varepsilon > 0$, amelyhez egyetlen $\delta > 0$, így $\delta_n = \frac{1}{n}$ sem „jó”. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ számhoz létezik tehát olyan $P_n \in D$ pont, amelyre $d(P_0; P_n) < \delta_n$, miközben $|f(P_n) - f(P_0)| \geqslant \varepsilon$ áll fenn. Ekkor a $\{P_n\}$ pontsorozat határértéke P_0, a függvényértékek viszont nem tartanak $f(P_0)$-ba. □

2.2.21. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az átviteli elvben megfogalmazott ekvivalens feltétel a folytonosság egy alternatív definíciója. Ezt a definíciót elsősorban akkor kényelmes használni, ha egy függvényről azt szeretnénk belátni, hogy egy adott pontban *nem* folytonos. Ekkor ugyanis elég egy, az adott pontba tartó D-beli pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek határértéke vagy nem létezik, vagy nem egyezik meg a függvény adott pontbeli helyettesítési értékével. Nem szükséges tehát a pont körüli teljes ε sugarú környezetben vizsgálni a függvényértékeket. Ilyen esetekre mutatunk most példát.

2.2.22. Példák.

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a következő képlettel adva:

$$f(x; y) = \begin{cases} xy, & \text{ha } x \neq \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}^+) \\ 1, & \text{ha } x = \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}^+). \end{cases}$$

   Vizsgáljuk f folytonosságát az $O(0; 0)$ pontban. Látjuk, hogy a függvényérték a $P_n(\frac{1}{n}; 0)$ alakú pontokban 1. Így ezek határértéke is 1. A $\{P_n\}$ pontsorozat konvergens, határértéke éppen az O pont. Mivel azonban $f(O) = 0 \cdot 0 = 0 \neq 1$, a függvény ebben a pontban nem folytonos.

2. Legyen most

$$f(x; y) = \begin{cases} \cos \frac{x}{y}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Vizsgáljuk most f folytonosságát a $P_0(\pi;0)$ pontban. Azt állítjuk, hogy itt f nem folytonos. Mivel $f(P_0)=0$, ehhez elég megadnunk egy olyan P_0-ba tartó $\{P_n\}$ pontsorozatot, amelyre $\lim_{n\to\infty} f(P_n)\neq 0$. Ez pedig annak ismeretében, hogy $\cos 2n\pi=1$, könnyűszerrel megoldható. Válasszuk ugyanis a P_n pont koordinátáit a következőképpen: $x_n=\pi$, $y_n=\frac{1}{2n}$. Ekkor $x_n\to\pi$ és $y_n\to 0$, tehát $P_n\to P_0$. Mivel azonban $\frac{x_n}{y_n}=2n\pi$, ezért $f(P_n)=1$. Ennek határértéke valóban nem nulla. Ez bizonyítja, hogy az f függvény a $P_0(\pi;0)$ pontban nem folytonos.

2.2.5. Folytonos függvények tulajdonságai

Most megvizsgáljuk, hogy a folytonos függvények hogyan viselkednek olyan műveletekkel szembent, mint például az összeadás. Hasonló tételeket kapunk eredményül, mint az egyváltozós esetben.
Először egy kézenfekvő tételt mondunk ki arra vonatkozóan, hogy egy egyváltozós függvény folytonos marad, ha kétváltozósnak tekintjük.

2.2.23. Tétel. *Legyen $H\subseteq\mathbb{R}$ egy valós számhalmaz, $\alpha: H\to\mathbb{R}$ egy valós függvény, amely folytonos az $a\in H$ pontban. Értelmezzük az $f: H\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $g:\mathbb{R}\times H\to\mathbb{R}$ kétváltozós függvényeket az $f(x;y)=\alpha(x)$ és $g(x;y)=\alpha(y)$ képletekkel. Ekkor f folytonos minden $P_0(a;y_0)$, g pedig minden $Q_0(x_0;a)$ pontban.*

Bizonyítás: A bizonyítást csak az f függvényre végezzük el, g esetét feladatul tűzzük ki. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Mivel α folytonos a-ban, létezik olyan $\delta>0$, hogy $|x-a|<\delta$ esetén $|\alpha(x)-\alpha(a)|<\varepsilon$ teljesül. Az f függvény definícióját figyelembe véve ez azt jelenti, hogy a $P(x;y)$ pontra

$$|(f(x;y)-f(a;y_0)|<\varepsilon,$$

ha $|x-a|<\delta$ tetszőleges y esetén. Mivel pedig

$$|x-a|\leqslant\sqrt{(x-a)^2+(y-y_0)^2}=d(P;P_0),$$

ezért a $d(P;P_0)<\delta$ feltétel teljesülése esetén $|(f(x;y)-f(a;y_0)|<\varepsilon$ is fennáll. Így f folytonos a P_0 pontban. □

2.2.24. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a 2.2.23. tétel bizonyítása azon múlik, hogy az $x=a$ középvonalú, 2δ széles nyílt sáv tartalmazza az $(a;y_0)$ középpontú, δ sugarú körlapot minden $y_0\in\mathbb{R}$ esetén.

2.2.25. Tétel (Műveletek folytonos függvényekkel). *Legyenek D_f és $D_g\subseteq\mathbb{R}^2$ ponthalmazok, továbbá $f: D_f\to\mathbb{R}$ és $g: D_g\to\mathbb{R}$ kétváltozós függvények. Tegyük fel, hogy a $P_0(x_0;y_0)$ pont mindkét függvény értelmezési tartományának belső pontja, s hogy mind f, mind pedig g folytonos a P_0 pontban. Ekkor P_0-ban folytonosak a következő függvények:*

- *$c\cdot f$ (tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ esetén),*
- *$f+g$,*
- *$f-g$,*
- *$f\cdot g$,*

- *valamint $g(P_0) \neq 0$ esetén $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$.*

Bizonyítás: Mivel P_0 az f és g függvény értelmezési tartományának belső pontja, ezért belső pontja lesz az összes felsorolt függvény értelmezési tartományának is: $D_{cf} = D_f$, továbbá $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$. Mivel D_f tartalmazza P_0-nak egy ϱ_1, D_g pedig egy ϱ_2 sugarú környezetét, ezért a metszet tartalmazza P_0-nak a $\varrho = \min(\varrho_1; \varrho_2)$ sugarú környezetét. $D_{\frac{1}{g}} = D_{\frac{f}{g}}$ pedig $D_f \cap D_g$-ből g zérushelyeinek elhagyásával áll elő. Mivel g folytonos P_0-ban, ezért létezik egy olyan $\delta > 0$ sugarú környezet, amelyben g értéke pozitív (δ-t $\varepsilon = |g(P_0)|$-hoz választva). Ekkor $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ értelmezési tartománya tartalmazza P_0-nak az $r = \min(\varrho_1; \varrho_2; \delta)$ sugarú környezetét. Tehát P_0 mindegyik értelmezési tartománynak belső pontja.
Alkalmazzuk az átviteli elvet. Legyen $\{P_n\}$ egy P_0-hoz tartó pontsorozat, amely része a vizsgálandó függvény értelmezési tartományának. Mivel ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$, ezért

- $\lim\limits_{n\to\infty} cf(P_n) = cf(P_0)$ a sorozatokról tanultak értelmében (Analízis I. 5.3.4. tétel).

A többi függvény esetén $\lim\limits_{n\to\infty} g(P_n) = g(P_0)$ is teljesül. A sorozatokra vonatkozó műveleti szabályok értelmében (Analízis I. 5.3.5, 5.3.6, 5.3.7. és 5.3.9. tételek) tehát

- $\lim\limits_{n\to\infty} (f(P_n) + g(P_n)) = f(P_0) + g(P_0)$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (f(P_n) - g(P_n)) = f(P_0) - g(P_0)$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (f(P_n) \cdot g(P_n)) = f(P_0) \cdot g(P_0)$,

továbbá, $g(P_0) \neq 0$ esetén

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{g(P_n)} = \frac{1}{g(P_0)}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(P_n)}{g(P_n)} = \frac{f(P_0)}{g(P_0)}$. □

Az egyváltozós esethez hasonlóan megvizsgáljuk az összetett függvények folytonosságát is. A következő tételt mondhatjuk ki:

2.2.26. Tétel. *Legyen$D_\alpha \subseteq \mathbb{R}$, D_f, D_g és $D_h \subseteq \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $\alpha: D_\alpha \to \mathbb{R}$ egyváltozós, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$, $h: D_h \to \mathbb{R}$ pedig kétváltozós függvény.*

(i) *Tegyük fel, hogy f folytonos a $P_0(x_0; y_0)$ pontban, α pedig folytonos az $f(x_0; y_0) \in \mathbb{R}$ helyen. Ekkor az $\alpha \circ f$ függvény folytonos az $(x_0; y_0)$ pontban.*

(ii) *Legyenek most g és h folytonosak az $(x_0; y_0)$ pontban, f pedig a $(g(x_0; y_0), h(x_0; y_0))$ pontban. Ekkor az $f \circ (g; h)$ összetett függvény folytonos az $(x_0; y_0)$ pontban.*

Bizonyítás:

(i) Mivel α folytonos az $f(x_0; y_0)$ pontban, ezért valamely $\varrho > 0$-ra az $]f(x_0; y_0) - - \varrho; f(x_0; y_0) + \varrho[$ intervallum része α értelmezési tartományának. Mivel pedig f folytonos a $P_0(x_0; y_0)$ pontban, ezért ennek létezik egy $\vartheta > 0$ sugarú környezete, amely része D_f-nek, s amelynek $P(x; y)$ pontjaira teljesül az $|f(P) - f(P_0)| < \varrho$ feltétel. Ekkor azonban a P pont eleme az $\alpha \circ f$ függvény értelmezési tartományának. Így P_0 ezen értelmezési tartomány belső pontja.

Legyen a $\{P_n\} \subseteq D_{\alpha \circ f}$ olyan pontsorozat, amelynek határértéke P_0. Ekkor az $\{f(P_n)\}$ sorozat határértéke $f(P_0)$, tehát az $\{\alpha(f(P_n))\}$ sorozat határértéke $\alpha(f(P_0))$. Ezzel az átviteli elv értelmében bizonyítottuk $\alpha \circ f$ P_0-beli folytonosságát.

(*ii*) Mivel most f folytonos a $(g(P_0);h(P_0))$ pontban, ennek létezik egy olyan téglakörnyezete, amely része D_f-nek. Azaz

$$[g(P_0)-\varrho_1; g(P_0)+\varrho_1]\times[h(P_0)-\varrho_2; h(P_0)+\varrho_2]\subseteq D_f$$

alkalmas ϱ_1, ϱ_2 pozitív számokra. Mivel pedig g és h is folytonos P_0-ban, ezért P_0-nak létezik olyan ϑ_1, illetve ϑ_2 sugarú környezete, amely része D_g-nek, illetve D_h-nak, s amelyre

$$|g(P)-g(P_0)|<\varrho_1, \qquad \text{ha} \quad d(P_0;P)<\vartheta_1,$$

illetve

$$|h(P)-h(P_0)|<\varrho_2, \qquad \text{ha} \quad d(P_0;P)<\vartheta_2.$$

Ezért P_0-nak a $\vartheta=\min(\vartheta_1;\vartheta_2)$ sugarú környezete része $D_{f\circ(g;h)}$-nak, így utóbbinak P_0 belső pontja.

Legyen $\{P_n\}\subseteq D_{f\circ(g;h)}$ egy P_0-hoz tartó pontsorozat. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} g(P_n)=g(P_0)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} h(P_n)=h(P_0)$. A 2.2.18. tétel értelmében ekkor a $\{(g(P_n);h(P_n))\}$ pontsorozat határértéke a $(g(P_0);h(P_0))$ pont. f folytonossága miatt ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f\circ(g;h)(P_n)=\lim_{n\to\infty} f(g(P_n);h(P_n))=f(g(P_0);h(P_0))=f\circ(g;h)(P_0)$$

következik. Így $f\circ(g;h)$ folytonos a P_0 pontban. □

2.2.27. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a folytonos függvények összegének folytonosságára vonatkozó tétel a 2.2.26. tételnek következménye. Legyen ugyanis $a(x;y)=x+y$. Mint a 2.2.13. 3. példában megmutattuk, a folytonos az egész síkon. Az $f+g$ függvény előáll, mint $a\circ(f;g)$. Így a 2.2.26. tétel ii. pontja éppen $f+g$ folytonosságát mondja ki. Természetesen hasonló állítás vonatkozik függvények különbségére, szorzatára és hányadosára is.

2.2.28. Példa. A $\sin x+\cos y$, a $\sin(x+y)$ és a $\sin\dfrac{x+y}{y-x}$ függvények folytonosak az értelmezési tartományuk minden pontjában, hiszen a kompozícióban részt vevő függvények mindegyike az. Általánosabban: az elemi függvényekből algebrai műveletekkel előállítható függvények mindegyike folytonos az értelmezési tartománya belső pontjaiban.

2.2.6. Kétváltozós függvények határértéke

Tekintsük a folytonosság definíciójánál már vizsgált

$$f(x;y)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad (x;y)\neq(0;0)\\ 0, & \text{ha} \quad (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

függvényt. Már láttuk, hogy f nem folytonos az $O(0;0)$ pontban. Látjuk viszont azt is, hogy az f függvény a mindenütt folytonos, $g(x;y)\equiv 1$ függvény „elrontásával” keletkezett. Hasonló eljárással, azaz a függvényérték egyetlen pontban való megváltoztatásával bármely folytonos függvényt „elronthatunk”, ezzel azonban a függvénynek az adott pont körüli viselkedését nem változtatjuk meg. Hogy ezt a viselkedést megfoghassuk, bevezetjük a kétváltozós függvény határértékének fogalmát is:

2.2.29. Definíció (Határérték). Legyen az f függvény értelmezve a $P_0(x_0;y_0)$ pont egy környezetében, kivéve esetleg magát a P_0 pontot. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a P_0 pontban A, amennyiben tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$ érték, hogy

$$|f(x;y) - A| < \varepsilon,$$

valahányszor $0 < d(P(x;y), P_0(x_0;y_0)) < \delta$ teljesül. Ennek kifejezésére a

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = A$$

jelölést használjuk.

2.2.30. Megjegyzések.

- A definícióban szereplő $0 < d(P(x;y), P_0(x_0;y_0))$ kitétel azt jelenti, hogy a P és P_0 pontok különböznek.
- Vegyük észre, hogy ha a 2.2.29. definícióban A helyére $f(x_0;y_0)$-t írunk, és nem kötjük ki, hogy a $P(x;y)$ és a $P_0(x_0;y_0)$ pontok különbözzenek, akkor éppen a folytonosság 2.2.11. definícióját kapjuk.

Nagyon fontos tudnunk, hogy az $(x;y) \to (x_0;y_0)$ határérték nem koordinátánként, hanem a 2.2.16. definíció szerint értendő. Általában ugyanis a

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x;y)\right) \qquad \text{és a} \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x;y)\right)$$

határértékek nem egyeznek meg. Erre példa az

$$f(x;y) = \frac{x+y}{y-x}$$

függvény. Számítsuk ki ugyanis a fenti határértékeket $x_0 = y_0 = 0$ esetén!

$$\lim_{y\to 0} f(x;y) = \frac{x}{-x} = -1,$$

így

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x;y)\right) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

A másik sorrendben képzett határértékekre azonban

$$\lim_{x\to 0} f(x;y) = \frac{y}{y} = 1,$$

tehát

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x;y)\right) = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

adódik. Így a két sorrendben elvégzett limeszképzés eredménye különbözik. Természetesen ekkor a

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$$

határérték sem létezik. A helyzet azonban még ennél is bonyolultabb: adott függvényre a fenti két határérték megegyezhet anélkül, hogy a függvénynek az adott pontban volna határértéke. Erre példa az

$$f(x;y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

függvény. Az állítás igazolását feladatul tűzzük ki.
Amennyiben azonban egy f függvénynek létezik határértéke egy adott P_0 pontban, akkor mindkét sorrendben elvégzett határérték létezik, és megyegyezik az f függvény P_0-beli határértékével.
A függvények folytonosságához hasonlóan a határértékre is érvényes az átviteli elv:

2.2.31. Tétel. *Legyen az f függvény értelmezve a $P_0(x_0;y_0)$ pont egy környezetében, kivéve esetleg a P_0 pontban magában. Ekkor $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ pontosan akkor teljesül, ha bármely P_0-ba tartó $\{P_n(x_n;y_n)\}\subseteq D_f\setminus\{P_0\}$ pontsorozat esetén a $\{z_n\}=\{f(P_n)\}$ sorozat határértéke az A szám.*

A tétel bizonyítása hasonló a 2.2.20. tétel bizonyításához, ezért elhagyjuk.
A következő tétel a folytonosságnál látott tételek analógiája, bizonyításuk is hasonló, ezért a bizonyítást az Olvasóra bízzuk:

2.2.32. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f és g kétváltozós függvények értelmezve vannak a $P_0(x_0;y_0)$ pont egy környezetében, kivéve esetleg a P_0 pontban. Tegyük fel továbbá, hogy mind az f, mindpedig a g függvénynek létezik határértéke a P_0 pontban, mégpedig $\lim_{P\to P_0} f(P)=a$ és $\lim_{P\to P_0} g(P)=b$. Ekkor a cf, $f\pm g$ és $f\cdot g$ függvényeknek is van határértékük P_0-ban, mégpedig*

- $\lim\limits_{P\to P_0} c\cdot f(P)=c\cdot a$ *(tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ esetén),*
- $\lim\limits_{P\to P_0} (f(P)+g(P))=a+b$,
- $\lim\limits_{P\to P_0} (f(P)-g(P))=a-b$,
- $\lim\limits_{P\to P_0} (f(P)\cdot g(P))=a\cdot b$, *valamint*
- $g(P_0)\neq 0$ *esetén* $\lim\limits_{P\to P_0}\frac{1}{g(P)}=\frac{1}{b}$ *és* $\lim\limits_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)}=\frac{a}{b}$.

Az alfejezet zárásaként a végtelennel mint határértékkel foglalkozunk.

2.2.33. Definíció (∞ mint határérték). Legyen az f függvény a $P_0(x_0;y_0)$ pont egy környezetében értelmezve, kivéve esetleg a P_0 pontban magában.

- $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=\infty$, ha bármely K számhoz megadható olyan $\delta>0$ érték, amellyel $f(P)>K$ teljesül, valahányszor $0<d(P;P_0)<\delta$.
- $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=-\infty$, ha bármely K számhoz megadható olyan $\delta>0$ érték, mellyel $f(P)<K$ teljesül, valahányszor $0<d(P;P_0)<\delta$.
- a P_0 pontot az f függvény *pólusának* nevezzük, ha $\lim\limits_{P\to P_0}|f(P)|=\infty$ teljesül.

Figyeljük meg, hogy a P pont most is különbözik P_0-tól. Az átviteli elv megfogalmazását feladatul tűzzük ki.

2.2.34. Példa. Tekintsük az

$$f(x;y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

függvényt. Ennek értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. A függvény D_f minden pontjában folytonos a már ismertetett tételek értelmében. Vizsgáljuk most meg határértékét az O origóban. Mivel a függvényérték egy P pontban éppen a P pont origótól vett távolságnégyzetének a reciproka, ezért $d(P;O) < \delta$ esetén

$$f(x;y) = \frac{1}{d^2(P;O)} > \frac{1}{\delta^2},$$

ezért adott pozitív K-hoz a $\delta = 1/\sqrt{K}$ választás megfelelő. (Negatív K esetén bármely $\delta > 0$ számot választhatjuk.) Így az f függvény origóbeli határértéke ∞.

2.2.7. Határpontbeli folytonosság, illetve határérték

Emlékezzünk rá, hogy az egyváltozós függvényeknek értelmeztük a féloldali folytonosságát is. Szeretnénk ezt kétváltozós függvényekre általánosítani. Féloldali folytonosságot és határértéket általában az értelmezési tartomány határain vizsgáltunk. Most kétváltozós függvényekre fogjuk értelmezni folytonosságot, illetve a határértéket az értelmezési tartomány egy határpontjában. Előbbi definíciója a következő:

2.2.35. Definíció (Határpontbeli folytonosság). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, amelynek a $P_0 \in D$ pont határpontja. Legyen továbbá $f\colon D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. f *folytonos* P_0-ban, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $\delta > 0$ szám, amelyre

$$|f(x;y) - f(x_0;y_0)| < \varepsilon, \text{ valahányszor } d(P(x;y), P_0(x_0;y_0)) < \delta \text{ és } P \in D$$

teljesül.

2.2.36. Definíció (Határpontbeli határérték). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, amelynek a $P_0 \in \mathbb{R}^2$ pont határpontja. Legyen továbbá $f\colon D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. Azt mondjuk, hogy f *határértéke* P_0-ban az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $\delta > 0$ szám, amelyre

$$|f(x;y) - A| < \varepsilon, \text{ valahányszor } 0 < d(P(x;y); P_0(x_0;y_0)) < \delta \text{ és } P \in D$$

teljesül.

2.2.37. Megjegyzések.

- Figyeljük meg, hogy a folytonosság definíciójánál ismét feltettük, hogy P_0 a D halmazban van, míg a határérték definíciójához e feltevésre nem volt szükségünk. Ott ellenben a vizsgált $P(x;y)$ pontokról kellett kikötnünk, hogy P_0-tól különböznek, és egyúttal D-beliek.

- A határpontbeli folytonosság, illetve határérték fogalmára is érvényes az átviteli elv. Ennek megfogalmazását az Olvasóra bízzuk.

- A folytonosságról és a határértékről kimondott összes tétel változatlanul érvényben marad, ha belső pont helyett határpontban vizsgáljuk e tulajdonságokat.

2.2.38. Példák.

1. Legyen az $f(x;y) = xy$ képlettel definiált függvény értelmezési tartománya a $D = [0;1] \times [1;3]$ zárt téglalap. A tanult tételek értelmében f folytonos értelmezési tartománya minden belső pontjában. A 2.2.36. definíció viszont lehetővé teszi, hogy megvizsgáljuk folytonosságát az értelmezési tartomány egy határpontjában, például a $P_0(0;2)$ pontban. Mivel $f(0;2) = 0$, ezért az átviteli elv alapján azt kell belátnunk, hogy tetszőleges D-beli $P_n(x_n;y_n) \to P_0$ esetén $f(x_n;y_n) \to 0$. Azonban $f(x_n;y_n) = x_n y_n$, ami a sorozatok szorzatának határértékéről szóló tétel szerint $0 \cdot 2 = 0$-hoz tart.

2. Legyen most f a $D = \{(0;0), (\frac{1}{k};y) \mid k \in \mathbb{N}^+, y \in \mathbb{R}\}$ halmazon értelmezett függvény, amelyet az $f(x;y) = x$ képlet ad meg. D-nek a $P_0(0;0)$ pont határpontja, hiszen bármilyen kis $r > 0$ sugarú környezetében van $(\frac{1}{n};0)$ alakú pont és van D-n kívüli, például irracionális koordinátájú pont is. Megmutatjuk, hogy f folytonos a P_0 pontban. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor a $\delta = \varepsilon$ választás megfelelő. Ha ugyanis a $P(x;y) \in D$ pont olyan, hogy $0 < d(P;P_0) < \delta$ teljesül, akkor biztosan $0 < x < \varepsilon$ is fennál (D csak pozitív abszcisszájú pontokat tartalmaz). Így f folytonos P_0-ban.

2.2.8. Korlátos zárt halmazon folytonos függvények

A valós-valós függvények esetében fontos szerepet játszottak a korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények. Ennek analógiájaként most megvizsgáljuk a korlátos, zárt halmazon értelmezett folytonos függvényeket.

2.2.39. Definíció (Korlátos halmaz). A $D \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazt *korlátosnak* nevezzük, ha megadható olyan $R \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy D része az origó középpontú, R sugarú körlapnak.

2.2.40. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egy korlátos és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor vannak olyan $A, B \in D$ pontok, hogy $f(A) \leqslant f(P) \leqslant f(B)$ teljesül minden $P \in D$ esetén. Ekkor az f függvény értékkészlete a $[f(A); f(B)]$ zárt intervallum.*

Bizonyítás: A bizonyítás hasonló az egyváltozós esethez. Először belátjuk, hogy f korlátos függvény. Tegyük fel ugyanis, hogy f például felülről nem korlátos. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra létezik $P_n(x_n;y_n) \in D$, amelyre $f(P_n) > n$ teljesül. A $\{P_n\}$ pontsorozat $\{x_n\}$ koordinátasorozata korlátos, így létezik egy $\{x_{n_k}\}$ konvergens részsorozata. Az $\{y_{n_k}\}$ sorozat szintén korlátos, így ennek is létezik egy $\{y_{n_{k_\ell}}\}$ konvergens részsorozata. Mivel konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens, ezért ekkor az $\{x_{n_{k_\ell}}\}$ sorozat is konvergens. Így a 2.2.18. tétel értelmében a $\{P_{n_{k_\ell}}\}$ pontosorozat is konvergens. Legyen határértéke az R pont. Az átviteli elv (2.2.20. tétel) szerint ekkor az $\{f(P_{n_{k_\ell}})\}$ függvényérték-sorozatnak létezik határértéke, mégpedig $f(R)$. Ez azonban ellentmond a P_n pontok választásának (miszerint $f(P_n) > n$), tehát f felülről korlátos függvény. Hasonlóan bizonyítható, hogy f alulról is korlátos.
Legyen $\beta = \sup\{f(P) \mid P \in D\}$ az f függvény értékkészletének legkisebb felső korlátja. Belátjuk, hogy létezik egy olyan $B \in D$ pont, amelyre $f(B) = \beta$. Mivel β legkisebb felső korlát, ezért $\beta - \frac{1}{n}$ nem felső korlát egyetlen $n \in \mathbb{N}^+$ esetén sem. Létezik tehát olyan Q_n

pont, hogy $f(Q_n) > \beta - \frac{1}{n}$. Az előző bekezdésbeli érvelés szerint a $\{Q_n\}$ pontsorozatnak van egy $\{Q_{n_k}\}$ konvergens részsorozata. Legyen a B pont e részsorozat határértéke. Ekkor $\lim\limits_{k\to\infty} f(Q_{n_k}) = f(B)$. A $\{\beta - \frac{1}{n_k}\}$ sorozat minden tagja kisebb, mint az $\{f(Q_{n_k})\}$ sorozat megfelelő tagja, így határértékeikre érvényes a $\beta \leqslant f(B)$ összefüggés. Mivel azonban β a függvényértékek felső korlátja, valódi egyenlőtlenség nem állhat fenn. Tehát $\beta = f(B)$ teljesül.
Hasonlóan látható be, hogy létezik egy olyan $A\in D$ pont, amelyre $f(A)=\alpha=\inf\{f(P) \mid P\in \in D\}$.
Az utolsó állításhoz megvizsgáljuk a függvény viselkedését az $\overline{AB}$ szakaszon. Legyenek az A és B pont koordinátái $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$. Definiáljuk az $\varphi\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ valós-valós függvényt az

$$\varphi(t) = f(a_1 + t\cdot(b_1 - a_1); a_2 + t\cdot(b_2 - a_2))$$

képlettel. Vegyük észre, hogy φ az f és két lineáris függvény összetétele. Egyrészt $R_\varphi \subseteq R_f$ teljesül. Másrészt φ folytonos a $[0;1]$ zárt intervallumon (2.2.26. tétel), ebből kifolyólag R_φ tartalmazza a $[\varphi(0);\varphi(1)] = [f(A);f(B)]$ zárt intervallumot (Analízis I, 6.4.22. tétel). Így $[f(A);f(B)] \subseteq R_f$, ahonnan $[f(A);f(B)] = R_f$. □

A 2.2.40. tétel értelmében egy korlátos, zárt halmazon folytonos f függvénynek mindig van globális minimuma ($f(A)$) és maximuma ($f(B)$).

2.2.9. Az n-változós eset

Az n-változós esetben a távolságfogalom a következő:

$$d(P(x_1;x_2;\ldots;x_n);Q(y_1;y_2;\ldots;y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Ennek segítségével a nyílt körlap általánosításaként definniálhatjuk a $P_0(a_1;\ldots;a_n)$ középpontú, ϱ sugarú *n-dimenziós nyílt gömböt*:

$$B_\varrho(P_0) = \{P(x_1;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n \mid d(P_0;P) < \varrho\}.$$

Legyenek $\alpha_1 < \beta_1$, …, $\alpha_n < \beta_n$ valós számok. A nyílt tégla mintájára bevezetjük az *n-dimenziós nyílt tégla* fogalmát. Ez a következő:

$$T_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} =]\alpha_1;\beta_1[\times\ldots\times]\alpha_n;\beta_n[\subseteq \mathbb{R}^n.$$

A $B_\varrho(P_0)$ nyílt gömböt és $P_0 \in T_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ esetén a $T_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ nyílt téglát egyaránt a P_0 pont *környezetének* nevezzük.
Ezen környezetfogalom felhasználásával a fejezet összes definíciója és tétele szó szerint átvihető az n-változós esetre.

2.2.10. Feladatok

1. Legyen $\alpha\colon D_\alpha \to \mathbb{R}$ egy valós-valós függvény, y_0 pedig D_α egy belső pontja. Bizonyítsa be, hogy a $g\colon D_\alpha\times\mathbb{R}$, $g(x;y)=\alpha(y)$ kétváltozós függvény folytonos az $(x_0;y_0)$ pontban, ha α folytonos az y_0 pontban.

2. Vizsgálja meg az
$$f(x;y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$
függvényt az origó környékén. Határozza meg a
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x;y)\right) \qquad \text{és a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x;y)\right)$$
határértékeket. Számítsa ki a függvényértékeket a $P_n(\frac{1}{n};\frac{1}{n})$ pontokban, és ezek alapján lássa be, hogy a
$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$$
határérték nem létezik.

3. Fogalmazza meg az átviteli elvet az adott pontbeli végtelen határérték esetére.

4. Fogalmazza meg az átviteli elvet az értelmezési tartomány határpontjában vett határértékre, illetve folytonosságra.

3. fejezet

Kétváltozós valós függvények differenciálszámítása

Az egyváltozós függvények menetének vizsgálatához bevezettük a derivált fogalmát. Ebben a fejezetben ezt a fogalmat általánosítjuk kétváltozós függvényekre. A kétváltozós függvények természete miatt több deriváltfogalom is létezik. Így bevezetjük a parciális derivált, a totális derivált és az iránymenti derivált fogalmát is. Megmutatjuk, hogy ezek alkalmasak a függvény viselkedésének leírására. Megismerjük a teljes differenciál kétváltozós alakját és az érintősík egyenletét is. Végül megmutatjuk, hogy a differenciálszámítás segítségével hogyan határozhatók meg egy kétváltozós függvény szélsőértékhelyei.

3.1. A parciális derivált

Emlékezzünk, hogy az egyváltozós függvény deriváltját azért vezettük be, mert a függvénygrafikon egy pontjához húzott érintő egyenes meredekségét akartuk meghatározni. Ez a kétváltozós esetben ebben a formában nem lehetséges, hiszen a kétváltozós függvény grafikonja általában egy felület, amelynek érintője nem egy egyenes, hanem egy sík.
A parciális derivált fogalma éppen ezt a problémát oldja meg: a függvény egyik változójáról mintegy „elfelejtkezünk”, s a függvényt, mint a másik változótól függő egyváltozós függvényt deriváljuk. Ezt fogalmazzuk meg precízen a következő alfejezetben.

3.1.1. Az x szerinti parciális derivált fogalma

3.1.1. Definíció (x szerinti parciális derivált). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ pedig egy kétváltozós függvény. Legyen a $P_0(x_0; y_0)$ pont olyan, hogy valamely pozitív r-rel

$$]x_0 - r, x_0 + r[\times \{y_0\} \subseteq D$$

teljesüljön.

- f-nek a P_0 pontban vett x *szerinti differenciahányadosai* az

$$\frac{f(x; y_0) - f(x_0; y_0)}{x - x_0} \quad (x \in]x_0 - r; x_0 + r[)$$

  hányadosok.

- f-nek a P_0 pontban vett x *szerinti parciális deriváltja* pedig ezen differenciahányadosok x_0-beli határértéke, azaz a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x;y_0) - f(x_0;y_0)}{x - x_0}$$

határérték, amennyiben ez létezik és véges.

3.1.2. Jelölés. A parciális deriváltra a következő jelöléseket használjuk:

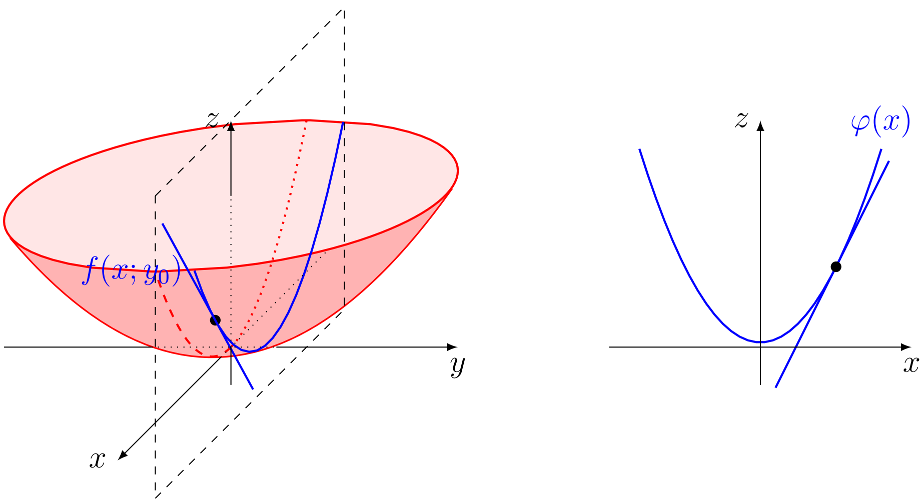
$$f'_x(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P=P_0}.$$

3.1.3. Megjegyzések.

- A 3.1.1. definícióban az f függvény értelmezési tartományára adott feltétel miatt $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$ esetén a differenciahányadosok léteznek, így ezek határértéke (annak létezése) vizsgálható.

- Legyen φ egy valós-valós függvény, amelyet a $\varphi(x) = f(x;y_0)$ képlet definiál. Ekkor φ értelmezési tartománya tartalmazza az $]x_0 - r; x_0 + r[$ szakaszt. Vegyük észre, hogy a 3.1.1. definícióbeli differenciahányadosok éppen a φ függvény differenciahányadosai, azaz a $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$ értékek. Ezek x_0-beli határértéke tehát nem más, mint $\varphi'(x_0)$. Így $f'_x(x_0;y_0) = \varphi'(x_0)$.

- Az $f(x;y_0)$ függvény éppen az f függvénynek egy y-nívóvonala (2.1.16. definíció), a φ függvény pedig ennek az xz-síkra vett vetülete. Így az x szerinti parciális derivált nem más, mint e nívóvonal érintő egyenesének meredeksége (3.1. ábra).



3.1. ábra. Az x szerinti parciális derivált

3.1.4. Példák. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek létezik-e x szerinti parciális deriváltjuk a megadott P_0 pontokban. Ha létezik, számítsuk is ki az értékét.

1. Legyen $f(x;y) = c$ egy konstans függvény ($c \in \mathbb{R}$ adott), a $P_0(x_0;y_0)$ pont pedig tetszőleges.

Megoldás: A 3.1.1. definícióbeli $r > 0$ szám tetszés szerint választható, hiszen $D_f = \mathbb{R}^2$. Az összes x szerinti differenciahányados értéke 0:

$$\frac{f(x;y_0) - f(x_0;y_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Így ezek határértéke, tehát $f'_x(x_0;y_0) = 0$ minden $(x_0;y_0)$ pontban.

2. Vizsgáljuk meg most az $\ell(x;y) = 2x + 3y$ lineáris függvény x szerinti parciális deriváltját egy tetszőleges $P_0(x_0;y_0)$ pontban ($D_\ell = \mathbb{R}^2$).

   Megoldás: A differenciahányadosok:

   $$\frac{\ell(x;y_0) - \ell(x_0;y_0)}{x - x_0} = \frac{(2x + 3y_0) - (2x_0 + 3y_0)}{x - x_0} = \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} = 2 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2.$$

   Így $\ell'_x(x_0;y_0) = 2$ bármely P_0 pontban.

3. Legyen most $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a következő függvény:

   $$g(x;y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_0 = y_0 = 0 \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

   A vizsgált pont pedig legyen a $P_0(0;0)$ pont.

   Megoldás:

   $$\frac{g(x;0) - g(0;0)}{x - 0} = \frac{1 - 0}{x - 0} = \frac{1}{x}.$$

   Ezek határértéke $x \to 0$ esetén nem létezik, így ezen g függvénynek a $(0;0)$ pontban nem létezik x szerinti parciális deriváltja.

4. Vizsgáljuk most meg a

   $$h(x;y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0 \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

   függvényt egy tetszőleges $P_0(x_0;y_0)$ pontban.

   Megoldás: Ismét $D_h = \mathbb{R}^2$ áll fenn. Az x szerinti differenciahányados kiszámítását az alábbi esetekben külön-külön végezzük. A számításokat nyomon követhetjük a 3.2. ábrán.

   (*i*) $x_0 \neq 0$ és $y_0 \neq 0$: Legyen $r = |x_0|$. Ekkor a függvényérték az $]x_0 - r; x_0 + r[\times \{y_0\}$ szakaszon 1. Így az összes differenciahányados

   $$\frac{h(x;y_0) - h(x_0;y_0)}{x - x_0} = \frac{1 - 1}{x - x_0} = 0,$$

   tehát $h'_x(x_0;y_0) = 0$.

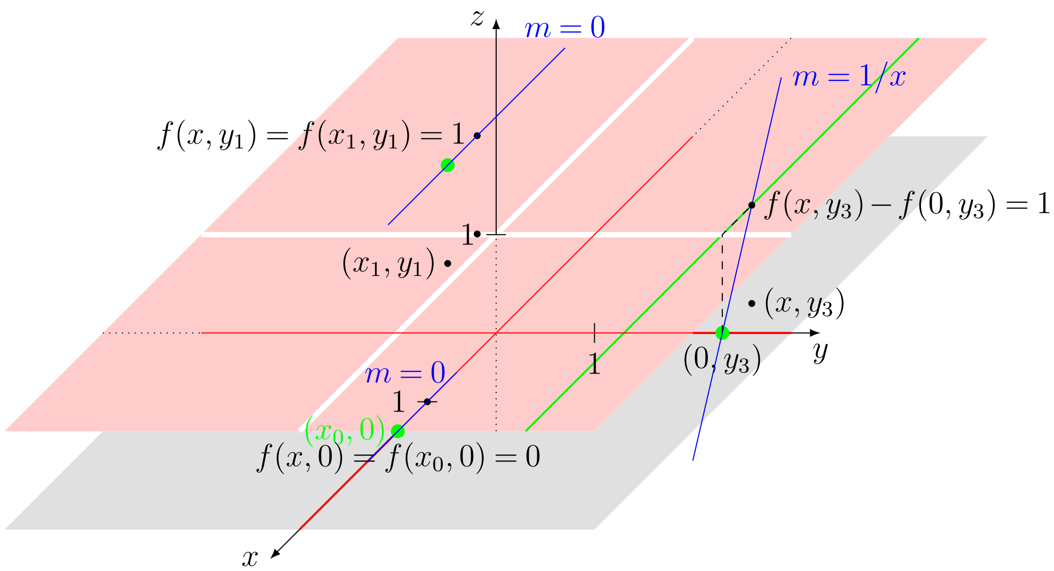
(*ii*) $y_0 = 0$, x_0 tetszőleges: A függvényérték minden $(x;0)$ pontban 0, így az előző esethez hasonlóan a differenciahányadosok 0-val egyenlők. Tehát ebben az esetben is $h'_x(x_0;y_0) = 0$ teljesül.

(*iii*) $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$: Ekkor a függvényérték az $(x;y_0)$ pontban $x \neq 0$ esetén 1, míg $f(0;y_0) = 0$ A differenciahányadosok

$$\frac{h(x;y_0) - h(0;y_0)}{x-0} = \frac{1-0}{x-0} = \frac{1}{x},$$

így a határérték x_0-ban nem létezik.

A fentiek alapján a h'_x parciális deriváltfüggvény értelmezési tartománya a $D_{h'_x} = \{(x;y) \mid x \neq 0 \text{ vagy } y = 0\}$ halmaz, és itt $h'_x(x;y) = 0$.



3.2. ábra. A 3.1.4. 4. példabeli differenciahányadosok

3.1.2. Műveleti tulajdonságok

Természetesen a képlettel megadott függvények x szerinti parciális deriváltját a gyakorlatban nem a definícióra visszavezetve határozzuk meg, hanem a már ismert deriválási szabályokat alkalmazzuk. Ezek alakja a kétváltozós esetben a következő:

3.1.5. Tétel. *Legyenek D_f és $D_g \subseteq \mathbb{R}^2$ ponthalmazok. Legyenek továbbá $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ és $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvények, amelyek az $(x_0;y_0)$ pontban x szerint parciálisan deriválhatók. Ekkor $c \cdot f$ ($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges), $f \pm g$, $f \cdot g$, továbbá $g(x_0;y_0) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is parciálisan deriválható x szerint az $(x_0;y_0)$ pontban, s deriváltjukra az alábbi összefüggések teljesülnek:*

- $(c \cdot f)'_x(x_0;y_0) = c \cdot f'_x(x_0;y_0)$,
- $(f+g)'_x(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0) + g'_x(x_0;y_0)$,

- $(f-g)'_x(x_0;y_0)=f'_x(x_0;y_0)-g'_x(x_0;y_0)$,
- $(f\cdot g)'_x(x_0;y_0)=f'_x(x_0;y_0)\cdot g(x_0;y_0)+f(x_0;y_0)\cdot g'_x(x_0;y_0)$ és
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_x(x_0;y_0)=\dfrac{f'_x(x_0;y_0)\cdot g(x_0;y_0)-f(x_0;y_0)\cdot g'_x(x_0;y_0)}{g^2(x_0;y_0)}$.

Bizonyítás: Mivel $f'_x(x_0;y_0)$ megegyezik a 3.1.1. definícióban szereplő φ függvény deriváltjával, $g'_x(x_0;y_0)$ pedig a $\psi(x)=g(x;y_0)$ függvény deriváltjával, ezért a 3.1.5. tételbeli deriválási szabályok az egyváltozós deriválási szabályok egyenes következményei. □

3.1.6. Tétel. *Legyen $D_\alpha\subseteq\mathbb{R}$, $D_f\subseteq\mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $f\colon D_f\to\mathbb{R}$ egy kétváltozós, $\alpha\colon D_\alpha\to\mathbb{R}$ pedig egy egyváltozós függvény. Amennyiben f parciálisan deriválható x szerint a $P_0(x_0;y_0)$ pontban, α pedig deriválható az $f(x_0;y_0)$ helyen, akkor az $\alpha\circ f$ függvénynek létezik x szerinti parciális deriváltja a $P_0(x_0;y_0)$ pontban, továbbá*

$$(\alpha\circ f)'_x(x_0;y_0)=\alpha'(f(x_0;y_0))\cdot f'_x(x_0;y_0).$$

Bizonyítás: Alkalmazzuk az egyváltozós analízisből már ismert „lánc-szabályt” az α és a $\varphi(x)=f(x;y_0)$ függvényekre. □

A következő példákban gyakoroljuk a képlettel megadott függvények x szerinti parciális deriváltjának a deriválási szabályokkal történő kiszámítását. A függvények értelmezési tartománya minden esetben legyen $\mathbb{R}^2$-nek az a legbővebb részhalmaza, amelyen az adott kifejezések értelmesek.

3.1.7. Példák.

1. Tekintsük először az $f(x;y)=xy$ függvényt. Ennek értelmezési tartománya az egész $\mathbb{R}^2$ sík. Az x szerinti parciális derivált egy $P_0(x_0;y_0)$ pontban tehát a $\varphi(x)=xy_0$ egyváltozós függvény deriváltja az x_0 helyen. Az y_0 értéket paraméterként kezeljük. Tehát a „konstansszor x” függvénnyel állunk szemben, amelynek deriváltja éppen az adott konstans, tehát $f'_x(x_0;y_0)=\varphi'(x_0)=y_0$. Így az f'_x parciális deriváltfüggvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, értéke pedig $f'_x(x;y)=y$.

2. Legyen most $f(x;y)=\frac{x}{y}$. Az értelmezési tartomány a $D_f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\mid y\neq 0\}$ halmaz. y értékét ismét paraméterként kezelve látjuk, hogy ez a függvény is „konstansszor x” alakú, tehát az x szerinti parciális derivált ismét a konstans értéke. Így $f'_x(x;y)=\frac{1}{y}$. Látjuk, hogy $D_{f'_x}=D_f$.

3. Vizsgáljuk most meg az $f(x;y)=\sin(x^2+y^2)$ függvényt. Ez az egyváltozós $\alpha(x)=\sin x$ és a kétváltozós $g(x;y)=x^2+y^2$ függvények $\alpha\circ g$ kompozíciója. Tudjuk, hogy $\alpha'(x)==\cos x$. Ez a $g(x;y)$ helyen a $\cos(x^2+y^2)$ értéket veszi fel. A g függvény egy összeg, így deriváltja a tagok deriváltjának összege. Ebből az y^2 tag most konstansnak minősül, tehát deriváltja 0. Az x^2 tag x szerinti parciális deriváltja pedig a szokásos $2x$. Ebből az f függvény deriváltjára a következőt kapjuk:

$$f'_x(x;y)=(\alpha\circ g)'_x(x;y)=\alpha'(g(x;y))\cdot g'_x(x;y)=(\cos(x^2+y^2))\cdot 2x.$$

4. Határozzuk meg végül az

$$f(x;y)=\frac{x\operatorname{tg}y-\sin x\cos y}{(x^2y+1)^2}$$

függvény x szerinti parciális deriváltját. Látjuk, hogy az f függvény egy hányados, így a hányados deriváltjára vonatkozó tételt kell alkalmaznunk. A számláló egy összeg, amelynek tagjai x egy-egy függvényének konstansszorosai (azaz az együtthatók csak y-tól függnek). Ezért a számláló x szerinti parciális deriváltja $\operatorname{tg}y-$ $-\cos x\cos y$. A nevező pedig egy összetett függvény: az $\alpha(x)=x^2$ egyváltozós és a $g(x;y)=x^2y+1$ kétváltozós függvény összetétele. Ezért x szerinti deriváltja $2(x^2y+$ $+1)\cdot 2xy$. Tehát az eredeti f függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x;y)=\frac{(\operatorname{tg}y-\cos x\cos y)\cdot(x^2y+1)^2-(x\operatorname{tg}y-\sin x\cos y)\cdot 2(x^2y+1)\cdot 2xy}{(x^2y+1)^4}.$$

3.1.3. Az y szerinti parciális derivált fogalma

Térjünk most át a kétváltozós függvény másik változója szerinti parciális deriváltra. A definíció az x szerinti derivált definíciójának értelemszerű átalakításával adódik:

3.1.8. Definíció (y szerinti parciális derivált). Legyen $D\subseteq\mathbb{R}^2$, $f\colon D\to\mathbb{R}$ pedig egy kétváltozós függvény. Legyen a $P_0(x_0;y_0)$ pont olyan, hogy valamely pozitív r-rel

$$\{x_0\}\times]y_0-r;y_0+r[\subseteq D$$

teljesüljön.

- f-nek a P_0 pontban vett y *szerinti differenciahányadosai* az

$$\frac{f(x_0;y)-f(x_0;y_0)}{y-y_0}\qquad\left(=\frac{\psi(y)-\psi(y_0)}{y-y_0}\right)$$

  hányadosok.

- f-nek a P_0 pontban vett x *szerinti parciális deriváltja* pedig ezen differenciahányadosok x_0-beli határértéke, azaz a

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0;y)-f(x_0;y_0)}{y-y_0}$$

  határérték, amennyiben ez létezik és véges.

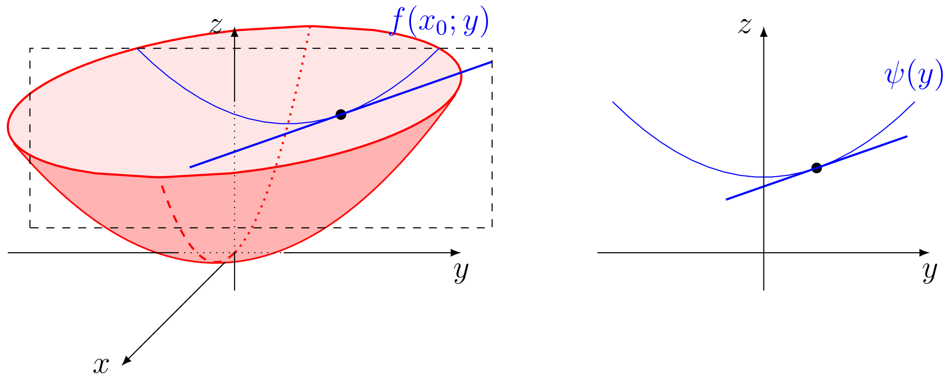
3.1.9. Jelölés. Az y szerinti parciális deriváltra a következő jelöléseket használjuk:

$$f'_y(P_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P=P_0}.$$

3.1.10. Megjegyzések.

- A 3.1.8. definícióban az f függvény értelmezési tartományára adott feltétel miatt $y\in]y_0-r;y_0+r[$ esetén az y szerinti differenciahányadosok léteznek, így ezek határértéke vizsgálható.

- A $\psi(y) = f(x_0; y)$ képlettel definiált valós-valós függvény értelmezési tartománya tartalmazza az $]y_0 - r; y_0 + r[$ szakaszt. A 3.1.8. definícióbeli differenciahányadosok a ψ függvény differenciahányadosai, így $f'_y(x_0; y_0) = \psi'(y_0)$.
- Az $f(x_0; y)$ függvény éppen az f függvénynek egy x-nívóvonala, a ψ függvény pedig ennek az yz-síkra vett vetülete. Így az y szerinti parciális derivált nem más, mint e nívóvonal érintő egyenesének meredeksége (3.3. ábra).



3.3. ábra. y szerinti parciális derivált

Tekintsünk két példát az y szerinti parciális derivált kiszámítására.

3.1.11. Példák.

1. Legyen $f(x; y) = |x| \cdot y$. Az y szerinti differenciahányados egy $P_0(x_0; y_0)$ pontban
$$\frac{f(x_0; y) - f(x_0; y_0)}{y - y_0} = \frac{|x_0| \cdot y - |x_0| \cdot y_0}{y - y_0} = |x_0|.$$
Mivel ez nem függ y-tól, ezért határértéke $y \to y_0$ esetén $|x_0|$. Így az y szerinti parciális derivált tetszőleges pontban létezik, értéke pedig $f'_y(x_0; y_0) = |x_0|$.

2. Legyen most $f(x; y) = x \cdot |y|$. Vizsgáljuk meg, mely $P_0(x_0; y_0)$ pontokban létezik ennek a függvénynek y szerinti parciális deriváltja. Az alábbi eseteket különböztetjük meg:

   (i) $y_0 > 0$: Válasszuk az $r = y_0$ értéket. Ekkor a függvény az $\{x_0\} \times]y_0 - r; y_0 + r[= \{x_0\} \times]0; 2y_0[$ szakaszon az $f(x_0; y) = x_0 y$ alakot ölti. A differenciahányadosok:
   $$\frac{f(x_0; y) - f(x_0; y_0)}{y - y_0} = \frac{x_0 y - x_0 y_0}{y - y_0} = x_0.$$
   Ennek $y \to y_0$ esetén határértéke is x_0. Így $f'_y(x_0; y_0) = x_0$.

   (ii) $y_0 < 0$: Most $r = -y_0$ választással $f(x_0; y) = -x_0 y$. Az előzőhöz hasonló számítással $f'_y(x_0; y_0) = -x_0$ adódik.

   (iii) $y_0 = 0$, $x_0 \neq 0$: A differenciahányadosok most:
   $$\frac{f(x_0; y) - f(x_0; y_0)}{y - y_0} = \frac{x_0 \cdot |y| - x_0 \cdot 0}{y - 0} = x_0 \cdot \operatorname{sgn} y = \pm x_0.$$
   Itt $\operatorname{sgn} y = \pm 1$ aszerint, hogy y pozitív vagy negatív. Látjuk, hogy $y \to 0$ esetén határérték, azaz az y szerinti parciális derivált nem létezik.

(*iv*) $x_0 = y_0 = 0$: Ebben az esetben $f(x_0; y) = 0$, így a differenciahányadosok és azok határértéke is 0. A y szerinti parciális derivált tehát ebben a pontban $f'_y(0;0) = 0$.

Azt kaptuk tehát, hogy az y szerinti parciális deriváltfüggvény értelmezési tartománya $D_{f'_y} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ vagy } x = 0\}$, értéke pedig

$$f'_y(x;y) = \begin{cases} x, & \text{ha } y > 0, \\ -x, & \text{ha } y < 0, \\ 0, & \text{ha } x = y = 0, \end{cases}$$

tehát ekkor $f'_y(x;y) = x \operatorname{sgn} y$.

3.1.4. Műveleti tulajdonságok

Az y szerinti parciális deriváltra hasonló tételek igazak, mint az x szerintire. Ezeket most felsoroljuk:

3.1.12. Tétel. *Legyen D_f és $D_g \subseteq \mathbb{R}^2$, legyenek továbbá $f: D_f \to \mathbb{R}$ és $g: D_g \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvények, amelyek az $(x_0; y_0)$ pontban y szerint parciálisan deriválhatók. Ekkor $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$, továbbá $g(x_0; y_0) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is parciálisan deriválható y szerint az $(x_0; y_0)$ pontban. A parciális deriváltakra az alábbi összefüggések teljesülnek:*

- $(c \cdot f)'_y(x_0; y_0) = c \cdot f'_y(x_0; y_0)$,
- $(f + g)'_y(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) + g'_y(x_0; y_0)$,
- $(f - g)'_y(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) - g'_y(x_0; y_0)$,
- $(f \cdot g)'_y(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) \cdot g(x_0; y_0) + f(x_0; y_0) \cdot g'_y(x_0; y_0)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_y (x_0; y_0) = \dfrac{f'_y(x_0; y_0) \cdot g(x_0; y_0) - f(x_0; y_0) \cdot g'_y(x_0; y_0)}{g^2(x_0; y_0)}$.

3.1.13. Tétel. *Legyen $D_\alpha \subseteq \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $f: D_f \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós, $\alpha: D_\alpha \to \mathbb{R}$ pedig egy egyváltozós függvény. Tegyük fel, hogy f a $P_0(x_0; y_0)$ pontban y szerint parciálisan deriválható, valamint hogy α deriválható az $f(x_0; y_0)$ helyen. Ekkor az $\alpha \circ f$ függvénynek létezik y szerinti parciális deriváltja a $P_0(x_0; y_0)$ pontban, továbbá*

$$(\alpha \circ f)'_y(x_0; y_0) = \alpha'(f(x_0; y_0)) \cdot f'_y(x_0; y_0).$$

3.1.14. Példák.

1. Számítsuk ki az $f(x;y) = xy$ függvény y szerinti parciális deriváltfüggvényét. x-et állandónak tekintve, f „konstansszor y” alakú, tehát deriváltja a konstans együttható, vagyis $f'_y(x;y) = x$.

2. Határozzuk meg az $f(x;y) = \frac{x}{y}$ függvény y szerinti parciális deriváltfüggvényét. f értelmezési tartománya az $y \neq 0$ egyenlőtlenséggel megadott ponthalmaz. Azonos átalakítással az $f(x;y) = xy^{-1}$ alakhoz jutunk, amely „konstansszor hatványfüggvény” alakú. Ezért y szerinti parciális deriváltja létezik D_f minden pontjában, mégpedig

$$f'_y(x;y) = xy^{-2} \cdot (-1) = -\frac{x}{y^2}.$$

3. Legyen most $f(x;y) = \operatorname{tg}(2x+\ln y)$. Ez az $\alpha(x) = \operatorname{tg} x$ egyváltozós függvénynek a $g(x;y) = 2x+\ln y$ kétváltozós függvénnyel vett kompozíciója. Ismert, hogy $\alpha'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, ezt kell a $g(x;y)$ helyen kiértékelni. A $g(x;y)$ függvény y-szerinti parciális deriváltja pedig $\frac{1}{y}$. Így a keresett derivált:

$$f'_y(x;y) = \frac{1}{\cos^2(2x+\ln y)} \cdot \frac{1}{y}$$

az értelmezési tartomány minden pontjában.

3.1.5. Az n-változós eset

Természetesen egy n-változós f függvény esetében is értelmezhető a parciális derivált fogalma, a definíciót a kétváltozós definíció értelemszerű átalakításával kapjuk. Ebben az esetben nem két, hanem n parciális derivált létezhet. A $P_0(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ pontban az x_i szerinti parciális deriválthoz a differenciahányadosokat a $P(a_1;\ldots;a_{i-1};x_i;a_{i+1};\ldots;a_n)$ alakú pontok segítségével képezzük. Az értelmezési tartományra a

$$\{a_1\}\times\ldots\times\{a_{i-1}\}\times]a_i-r;a_i+r[\times\{a_{i+1}\}\times\ldots\times\{a_n\}\subseteq D_f$$

feltétel adódik alkalmas $r>0$ esetén. Az i-ik parciális derivált:

$$f'_{x_i}(P_0) = \lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1;\ldots;a_{i-1};x_i;a_{i+1};\ldots;a_n)-f(a_1;\ldots;a_n)}{x_i-a_i},$$

amennyiben ez létezik és véges. Figyeljük meg, hogy itt a

$$\varphi(x_i) = f(a_1;\ldots;a_{i-1};x_i;a_{i+1};\ldots;a_n)$$

egyváltozós valós függvény deriváltjáról van szó. Ebben az esetben tehát x_i kivételével az összes változót konstansnak tekintjük (összesen $n-1$ darabot).
A deriválási szabályokra vonatkozó 3.1.5. és 3.1.12. tételek, továbbá az összetett függvény deriválására vonatkozó 3.1.6. és 3.1.13. tételek érvényben maradnak, ha az x, illetve y szerinti parciális deriválást mindenütt x_i szerinti deriválásra cseréljük (bármely $1\leqslant i\leqslant n$ esetén).

3.1.15. Példa. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x;y;z)=x^2y\sin(x+2z)$. Mivel f most háromváltozós, ezért három parciális deriváltja lesz:

$$\begin{aligned}
f'_x(x;y;z) &= 2xy\sin(x+2z)+x^2y\cos(x+2z),\\
f'_y(x;y;z) &= x^2\sin(x+2z),\\
f'_z(x;y;z) &= x^2y(\cos(x+2z))\cdot 2.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük még, hogy vektorértékű többváltozós függvények parciális deriváltjait is értelmezzük, ezek a koordinátafüggvények parciális deriváltjai. Így egy n-változós, $\mathbb{R}^k$-ba képező függvénynek $n\cdot k$ darab parciális deriváltja lehetséges.

3.2. A totális derivált

Az eddig tárgyalt parciális derivált nagy hiányossága, hogy a függvénynek csak a kérdéses P_0 pontra illesztett „célkeresztbeli” viselkedésétől függ: a definícióban még azt sem tettük fel, hogy az adott függvény a P_0 pont egy környezetében értelmezve legyen. Így nem maradhat érvényben az egyváltozós esetből jól ismert, a deriválható függvények folytonosságára vonatkozó tétel sem.
Ugyanez az oka annak, hogy a két parciális derivált létezése még nem garantálja az érintősík létezését az adott pontban. Szemléletes példa erre a 3.1.4. 4. példájában tárgyalt függvény, amely a koordinátatengelyeken 0-t, másutt pedig 1-et vesz föl.
Egy harmadik hiányosság, amelyet az Olvasó már bizonyára észrevett, az összetett függvények deriválására vonatkozik: eddig nem tárgyaltuk ugyanis az $f\circ(g;h)$ típusú összetett függvényre vonatkozó deriválási szabályt. Ennek oka, hogy e szabály kimondásához egy erősebb fogalom: a totális derivált fogalma szükséges.

3.2.1. A totális derivált fogalma

3.2.1. Definíció (Totális differenciálhatóság). Legyen $D\subseteq\mathbb{R}^2$, $f\colon D\to\mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény, $P_0(x_0;y_0)$ pedig D egy belső pontja. f-et a P_0 pontban *totálisan differenciálhatónak* nevezzük, ha alkalmas δ_1 és $\delta_2\in\mathbb{R}$ értékekkel

$$f(x;y)-f(x_0;y_0)=\delta_1(x-x_0)+\delta_2(y-y_0)+\varepsilon_1(x;y)\cdot(x-x_0)+\varepsilon_2(x;y)\cdot(y-y_0)$$

teljesül, ahol ε_1 és ε_2 olyan kétváltozós függvények, amelyek P_0 egy környezetében értelmezve vannak, és határértékük a P_0 pontban 0.

3.2.2. Megjegyzések.

- A 3.2.1. definíció szemléletesen azt fejezi ki, hogy ha a P pont P_0-hoz „közel” fekszik, akkor a függvényértékek különbsége $x-x_0$ és $y-y_0$ egy lineáris függvényével közelíthető. Mivel ugyanis ε_1 és ε_2 határértéke a P_0 helyen 0, ezért a P_0 pont egy kis környezetében $|\varepsilon_1(x;y)|$ lényegesen kisebb, mint $|\delta_1|$, $|\varepsilon_2(x;y)|$ pedig lényegesen kisebb, mint $|\delta_2|$. Ezért itt az $\varepsilon_1(x;y)\cdot(x-x_0)$ és az $\varepsilon_2(x;y)\cdot(y-y_0)$ szorzat abszolút értéke lényegesen kisebb, mint $\delta_1(x-x_0)$, illetve $\delta_2(y-y_0)$ abszolút értéke. Ezért e kis környezetben

$$f(x;y)-f(x_0;y_0)\approx\delta_1(x-x_0)+\delta_2(y-y_0).$$

- Figyeljük meg, hogy a 3.2.1. definíció az egyváltozós függvények differenciálhatósága szükséges és eléséges feltételének (Analízis I, 7.1.18. tétel) két változóra átalakított változata.

  Az egyváltozós derivált definíciójában (Analízis I, 7.1.7. definíció) ugyanis $x-x_0$-lal osztunk. Ezt nem lehet egy az egyben átvinni két változóra, hiszen a $\overrightarrow{P_0P}$ vektorral nem tudunk osztani. Ezért lett a totális differenciálhatóság definíciója ilyen „körmönfont”.

- Vegyük észre, hogy a definícióban szereplő δ_1 és δ_2 számok fölírhatók egy $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1;\delta_2)$ vektorként, az ε_1 és ε_2 függvények pedig egy $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1;\varepsilon_2)$ vektorértékű függvényként (2.1.19. definíció). Ezzel a jelöléssel a definícióbeli egyenlőség az

$$f(P)-f(P_0)=\boldsymbol{\delta}\overrightarrow{P_0P}+\boldsymbol{\varepsilon}(x;y)\overrightarrow{P_0P}$$

egyszerűbb alakot ölti (itt vektorok skaláris szorzatát olvashatjuk).

3.2.3. Definíció (Gradiensvektor). Legyen f egy kétváltozós függvény, amely a P_0 pontban totálisan deriválható. Az f függvény P_0 pontbeli *gradiensvektorán* vagy *deriváltvektorán* (*totális deriváltján*) azt a vektort értjük, amelynek két koordinátája a totális derivált definíciójában szereplő δ_1 és δ_2 számok.

3.2.4. Jelölés.

$$\mathbf{grad} f(P_0) = \nabla f(P_0) = \mathbf{f}'(P_0) \qquad (= (\delta_1; \delta_2)).$$

Kiejtésben: „grad” f, illetve „nabla” f.

3.2.5. Példa. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x;y) = xy$ függvény totálisan deriválható-e a $P_0(1;2)$ pontban. Végezzük el a $P(x;y)$ pontbeli függvényértékre a következő azonos átalakítást:

$$f(P) = xy = (1+(x-1)) \cdot (2+(y-2)) = 2+2(x-1)+1(y-2)+(x-1)(y-2).$$

Így

$$f(P) - f(P_0) = 2(x-1)+1(y-2)+(y-2)(x-1)+0(y-2),$$

ami a $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 1$, $\varepsilon_1(x;y) = y-2$, $\varepsilon_2 = 0$ jelölések bevezetésével éppen a 3.2.1. definícióbeli egyenlőséget adja. Mivel $P \to P_0$ esetén az ε_1 és ε_2 függvények határértéke 0, látjuk, hogy f totálisan deriválható a P_0 pontban, gradiensvektora a $\mathbf{grad} f(P_0) = (2;1)$ vektor. Megjegyezzük, hogy hasonló okoskodás működik tetszőleges $P_0(x_0;y_0)$ pontban a $\delta_1 = y_0$, $\delta_2 = x_0$ értékekkel, így $\mathbf{f}'(x_0;y_0) = (y_0;x_0)$. A konkrét számítások elvégzését feladatul tűzzük ki.

3.2.2. A totális derivált tulajdonságai

A totális derivált már a céljainknak megfelelő fogalom, amint ezt a következő tételek is mutatják.

3.2.6. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény totálisan deriválható a $P_0(x_0;y_0)$ pontban. Ekkor f folytonos P_0-ban.*

Bizonyítás: Vizsgáljuk a $\lim_{P \to P_0} f(P)$ határértéket. A 3.2.1. definícióbeli egyenlőségen a következő átalakítást végezhetjük:

$$f(P) = f(P_0) + \delta_1(x-x_0) + \delta_2(y-y_0) + \varepsilon_1(x;y) \cdot (x-x_0) + \varepsilon_2(x;y) \cdot (y-y_0) \underset{P \to P_0}{\longrightarrow} f(P_0),$$

hiszen $f(P_0)$-on kívül az egyes tagok P_0-ban 0-hoz tartanak. □

A totális derivált lényegében nem új, hanem erősebb fogalom, mint a parciális deriváltaké. Ezt mutatja a következő tétel:

3.2.7. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény totálisan deriválható a $P_0(x_0;y_0)$ pontban. Ekkor f mindkét parciális deriváltja létezik a P_0 pontban. Sőt, a definícióban szereplő δ_1 és δ_2 értékek megegyeznek a két parciális deriválttal:*

$$\delta_1 = f'_x(x_0;y_0) \qquad \text{és} \qquad \delta_2 = f'_y(x_0;y_0).$$

Így $\mathbf{f}'(P_0) = (f'_x(P_0); f'_y(P_0))$.

Bizonyítás: A bizonyítást δ_1-re végezzük el. Az állítás δ_2-re vonatkozó részét hasonlóan megkaphatjuk.
Vizsgáljuk a függvényértéket a $P(x;y_0)$ alakú pontokban. Ekkor a totális derivált definíciójában szereplő egyenlőség a következő lesz:

$$f(x;y_0)-f(x_0;y_0)=\delta_1(x-x_0)+\varepsilon_1(x;y_0)\cdot(x-x_0).$$

Ezt $x-x_0$-lal osztva

$$\frac{f(x;y_0)-f(x_0;y_0)}{x-x_0}=\delta_1+\varepsilon_1(x;y_0)$$

adódik. A két oldal határértékét képezve $x\to x_0$ esetén pedig megkapjuk, hogy $f'_x(P_0)=$ $=\delta_1$. □

Bár pusztán a parciális deriváltak létezéséből nem következtethetünk egy függvény totális deriválhatóságára, bizonyos további feltételek teljesülése esetén ez mégis megtehető:

3.2.8. Tétel. *Legyen $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy az $f:D\to\mathbb{R}$ kétváltozós függvény mindkét változója szerint parciálisan deriválható a $P_0(x_0;y_0)$ pont egy környezetében. Tegyük fel továbbá, hogy a parciális deriváltfüggvények a P_0 pontban folytonosak. Ekkor f totálisan deriválható a P_0 pontban.*

Bizonyítás: Válasszuk a $\varrho>0$ számot úgy, hogy f parciális deriváltjai létezzenek $]x_0-$ $-\varrho;x_0+\varrho[\times]y_0-\varrho;y_0+\varrho[$ téglán. A $\delta_1=f'_x(P_0)$ és $\delta_2=f'_y(P_0)$ értékekhez konstruálunk ε_1 és ε_2 függvényeket, amelyek a 3.2.1. definíció feltételeinek eleget tesznek.
Legyen φ az $]x_0-\varrho;x_0+\varrho[$ intervallumon a $\varphi(x)=f(x;y_0)$ képlettel definiált függvény. Ekkor φ differenciálható, így folytonos az értelmezési tartományán, továbbá φ' folytonos az x_0 pontban.
Legyen $x\in]x_0-\varrho;x_0+\varrho[$ adott. Ekkor $a=x_0$, $b=x$ választással teljesülnek a Lagrange-féle középértéktétel feltételei (Analízis I. 7.3.6. tétel). Tehát létezik az $]x_0;x[$ intervallumban egy olyan ξ pont, amelyre

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(\xi)\cdot(x-x_0),$$

azaz

$$f(x;y_0)-f(x_0;y_0)=f'_x(\xi;y_0)\cdot(x-x_0)$$

teljesül.
Vizsgáljuk most meg az $]y_0-\varrho;y_0+\varrho[$ intervallumon a $\psi_x(y)=f(x;y)$ összefüggéssel értelmezett függvényt. Ez a teljes értelmezési tartományán deriválható. A fentiekhez hasonlóan egy adott $y_0-\varrho<y<y_0+\varrho$ értékre Lagrange középértéktételének alkalmazásával a

$$\psi_x(y)=\psi_x(y_0)+(\psi_x)'(\eta)\cdot(y-y_0)+$$

illetve

$$f(x;y)-f(x;y_0)=f'_y(x;\eta)\cdot(y-y_0)+$$

összefüggésekhez jutunk. Ezzel a $P(x;y)$ pontbeli függvényértékre

$$\begin{aligned}f(P)-f(P_0)&=f(x;y)-f(x;y_0)+f(x;y_0)-f(x_0;y_0)=\\&=f'_x(\xi;y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x;\eta)\cdot(y-y_0)\end{aligned}$$

adódik. Vegyük észre, hogy

$$\varepsilon_1(x;y) = f'_x(\xi;y_0) - f'_x(P_0)$$

és

$$\varepsilon_2(x;y) = f'_y(x;\eta) - f'_y(P_0)$$

választással a fenti egyenlőség a kívánt (3.2.1. definícióbeli) alakot ölti. Szükséges még megvizsgálnunk ε_1 és ε_2 határértékét a P_0 pontban. Azonban a parciális deriváltak P_0 pontbeli folytonosságára vonatkozó feltétel éppen azt garantálja, hogy ε_1 és ε_2 a P_0 helyen 0-hoz tart. □

3.2.9. Következmény. *Az (egyváltozós) elemi függvényekből a 2.2.23. tételben leírt módon, valamint algebrai műveletek és az összetettfüggvény-képzés akár többszöri alkalmazásával előállított kétváltozós függvények értelmezési tartományuk minden pontjában totálisan deriválhatók.*

3.2.10. Példa. Az $f(x;y)=xy$ függvényről tudjuk, hogy parciális deriváltjai az $f'_x(x;y)= =y$ és $f'_y(x;y)=x$ függvények. Mivel ezek tetszőleges pontban folytonosak, ezért a függvény minden pontban totálisan deriválható. Gradiensvektora a

$$\mathbf{grad}\, f(x;y) = (y;x)$$

vektor, amint ez a 3.2.5. példa alapján világos.

A 3.2.8. tétel, illetve 3.2.9. következmény azért is fontos, mert a totális derivált létezése szükséges az összetett függvény deriválására vonatkozó tételben. A tételt bizonyítás nélkül közöljük:

3.2.11. Tétel (Láncszabály). *Legyenek f, g és h kétváltozós függvények. Tegyük fel, hogy g és h is parciálisan deriválható mind x, mind pedig y szerint a $P_0(x_0;y_0)$ pontban. Tegyük fel továbbá, hogy f totálisan deriválható a $Q_0(g(P_0);h(P_0))$ pontban. Ekkor az $f\circ$ $\circ(g;h)$ összetett függvény mindkét változója szerint parciálisan deriválható a P_0 pontban, és teljesülnek az*

$$(f\circ(g;h))'_x = f'_x(Q_0)\cdot g'_x(P_0) + f'_y(Q_0)\cdot h'_x(P_0)$$

és

$$(f\circ(g;h))'_y = f'_x(Q_0)\cdot g'_y(P_0) + f'_y(Q_0)\cdot h'_y(P_0)$$

összefüggések.

3.2.12. Megjegyzések.

- A 3.2.11. tételben szereplő g és h függvényekről csak azt kötöttük ki, hogy parciálisan deriválhatók legyenek a P_0 pontban. Fontos azonban, hogy az f függvény a $(g(P_0);h(P_0))$ pontban totálisan deriválható legyen. Ezt mutatjuk meg a 3.2.13. 4. példában, ahol egy olyan f függvényt adunk meg, amely parciálisan deriválható, ám totálisan nem, s amelyre a láncszabály alkalmazása hamis eredményt ad.

- Fizikai problémák esetén az egyes fizikai mennyiségek más mennyiségek függvényeként fejezhetők ki. Például az egyetemes gáztörvény

$$T = \frac{pV}{nR}$$

alakjában a hőmérséklet (T) a nyomás (p) és a térfogat (V) függvénye. Ha ez utóbbiak függnek például a magasságtól (h) és az időtől (t), akkor a hőmérséklet magasságtól és időtől való függése egy összetett függvény. Ennek parciális deriváltjait sokszor a következő alakban szokás írni:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial h} + \frac{\partial T}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial h}$$

valamint

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Ezért szokás a matematikában előforduló (és konkrét fizikai jelentéssel nem bíró) függvények esetén is az $f'_x = f'_g \cdot g'_x + f'_h \cdot h'_x$ jelölés alkalmazása.

- Egy másik fontos fizikai alkalmazás, amikor egy mennyiségnek az r és φ polárkoordináták szerinti parciális deriváltjait szeretnénk meghatározni. Ilyenkor az $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ összefüggések segítségével a polárkoordinátáktól való függést összetett függvényként kezelhetjük. Ezt világítjuk meg a 3.2.13. 3. példában.

3.2.13. Példák.

1. Határozzuk meg az $f(x;y) = \ln(\mathrm{tg}(x+y) + 2(x^2 - y^2))$ függvény parciális deriváltjait.

   Megoldás: E függvény a totálisan deriválható $g(x;y) = \ln(x+2y)$ függvény kompozíciója az $u(x;y) = \mathrm{tg}(x+y)$ és a $v(x;y) = x^2 - y^2$ függvényekkel. A szóban forgó függvények parciális deriváltjai:

$$g'_x(x;y) = \frac{1}{x+2y} \quad \text{és} \quad g'_y(x;y) = \frac{2}{x+2y},$$
$$u'_x(x;y) = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \quad \text{és} \quad u'_y(x;y) = \frac{1}{\cos^2(x+y)},$$

   valamint

$$v'_x(x;y) = 2x \quad \text{és} \quad v'_y(x;y) = -2y.$$

   Így az összetett függvény parciális deriváltjai:

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x+y) + 2(x^2 - y^2)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x+y)} + \frac{2}{\mathrm{tg}(x+y) + 2(x^2 - y^2)} \cdot 2x$$

   és

$$f'_y(x;y) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x+y) + 2(x^2 - y^2)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x+y)} + \frac{2}{\mathrm{tg}(x+y) + 2(x^2 - y^2)} \cdot (-2y).$$

2. Számítsuk ki az $f(u;v)=uv^2$ függvény x és y szerinti parciális deriváltját, ha $u(x;y)= \cos(x+y)$ és $v(x;y)=\frac{x}{y}$.

   Megoldás:

$$
\begin{aligned}
f'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = -v^2\sin(x+y) + 2uv\frac{1}{y} \\
&= -\frac{x^2\sin(x+y)}{y^2} + \frac{2\cos(x+y)x}{y^2}
\end{aligned}
$$

   és

$$
\begin{aligned}
f'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = -v^2\sin(x+y) - 2uv\frac{x}{y^2} \\
&= -\frac{x^2\sin(x+y)}{y^2} - \frac{2\cos(x+y)x^2}{y^3}.
\end{aligned}
$$

3. Határozzuk meg az $f(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ függvény r és φ polárkoordináták szerinti parciális deriváltjait.

   Megoldás: f az $x(r;\varphi)=r\cos\varphi$ és $y=r\sin\varphi$ összefüggéseken keresztül függ r-től és φ-től. A feladat megoldásához a következő parciális deriváltakra van szükségünk:

$$
\begin{aligned}
&f'_x(x;y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{és} \qquad f'_y(x;y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}, \\
&x'_r(r;\varphi) = \cos\varphi \qquad \text{és} \qquad x'_\varphi(r;\varphi) = -r\sin\varphi,
\end{aligned}
$$

   valamint

$$
y'_r(r;\varphi) = \sin\varphi \qquad \text{és} \qquad y'_\varphi(r;\varphi) = r\cos\varphi.
$$

   Ezért

$$
\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\cdot\cos\varphi - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\cdot\sin\varphi = -\frac{2}{r^3},
$$

   valamint

$$
\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\cdot(-r\sin\varphi) - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\cdot r\cos\varphi = 0.
$$

   Megjegyezzük, hogy erre az eredményre közvetlenül eljuthattunk volna, hiszen

$$
f(x;y) = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2},
$$

   így

$$
\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2}{r^3} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0.
$$

4. Legyen f a 3.1.4. 4. példabeli függvény, azaz

$$f(x;y)=\begin{cases}1, & \text{ha } xy\neq 0,\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

g és h pedig legyenek a $g(x;y)=x+y$, $h(x;y)=x-y$ képletekkel adottak. Számítsuk ki az $f\circ(g;h)$ függvény parciális deriváltjait.

Megoldás: Az a feltétel, hogy $(x+y)(x-y)\neq 0$, az $x\neq\pm y$ feltétellel ekvivalens. Így az összetett függvény

$$f\circ(g;h)(x;y)=f(x+y;x-y)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\neq\pm y,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Mivel ekkor $f(0;0)=0$ és $f(x;0)=1$, ha $x\neq 0$, továbbá $f(0;y)=1$, ha $y\neq 0$, ezért a 3.1.1. és 3.1.8. definíciókban szereplő φ és ψ függvények az $x_0=0$, illetve $y_0=$ $=0$ helyeken nem folytonosak, tehát itt nem is deriválhatóak. Ezért az $f\circ(g;h)$ függvénynek a $P_0(0;0)$ helyen nem léteznek parciális deriváltjai.

3.2.3. Az n-változós eset

A P_0 pontbeli totális derivált egy n-változós valós f függvényre is értelmezhető (ahol P_0 a D_f értelmezési tartomány egy belső pontja). A definíció vektoralakja megegyezik a kétváltozós esetével. Akkor nevezzük tehát f-et a P_0 pontban totálisan differenciálhatónak, ha létezik egy $\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{R}^n$ vektor és egy n-változós, vektorértékű $\boldsymbol{\varepsilon}\colon H\to\mathbb{R}^n$ függvény (ahol P_0 a $H\subseteq D_f$ halmaz egy belső pontja), amelyre teljesül a $\lim\limits_{P\to P_0}\boldsymbol{\varepsilon}(P)=\mathbf{0}$ feltétel és fennáll a

$$f(P)-f(P_0)=\boldsymbol{\delta}\overrightarrow{P_0P}+\boldsymbol{\varepsilon}(P)\overrightarrow{P_0P}$$

egyenlőség. A feltételeknek megfelelő $\boldsymbol{\delta}$ vektort pedig az f függvény deriváltvektorának, vagy gradiensvektorának nevezzük.
A totális derivált definíciójának összegalakja pedig a változók számának megfelelően „hosszabb” a 3.2.1. derfinícióbelinél, f-et akkor mondjuk az értelmezési tartomány egy $P_0(p_1;\ldots;p_n)$ belső pontjában totálisan differenciálhatónak, ha léteznek δ_1, …, δ_n valós számok és a P_0 pont egy $H\subseteq D_f$ környezetében értelmezett ε_1, …, ε_n n-változós valós függvények, amelyekkel

$$f(P)-f(P_0)=\delta_1(x_1-p_1)+\ldots+\delta_n(x_n-p_n)+\varepsilon_1(P)(x_1-p_1)+\ldots+\varepsilon_n(P)(x_n-p_n)$$

teljesül, ahol $P(x_1;\ldots;x_n)\in H$, továbbá ε_1, …, ε_n határértéke a P_0 pontban 0.
A 3.2.6, 3.2.7. és 3.2.8. tételek értelemszerű változtatások mellett az n-változós esetben is érvényben maradnak. A 3.2.11. tétel ugyancsak érvényben marad, alakja azonban kissé bonyolultabbá válik, ezért pontosan leírjuk:

3.2.14. Tétel (Láncszabály). *Legyen $D_f\subseteq\mathbb{R}^n$, $D_g\subseteq\mathbb{R}^k$, $f\colon D_f\to\mathbb{R}$ egy n-változós függvény, $\mathbf{g}\colon D_{\mathbf{g}}\to\mathbb{R}^n$ pedig egy k-változós, vektorértékű függvény. Tegyük fel, hogy $\mathbf{g}=$ $=(g_1;\ldots;g_n)$ koordinátafüggvényei (azaz a k-változós g_j függvények) a $P_0\in D_{\mathbf{g}}$ pontban minden változójuk szerint parciálisan deriválhatók, f pedig a $\mathbf{g}(P_0)$ pontban totálisan* *deriválható. Ekkor az $f \circ \mathbf{g}$ k-változós függvény a P_0 pontban minden változója szerint parciálisan deriváltható, parciális deriváltjaira pedig érvényes az*

$$(f \circ \mathbf{g})'_{x_i}(P_0) = \sum_{j=1}^{n} f'_{x_j}(\mathbf{g}(P_0)) \cdot (g_j)'_{x_i}(P_0)$$

összefüggés.

Megjegyezzük még, hogy vektorértékű többváltozós függvények totális deriválhatósága is értelmezhető. A definíció azonban bonyolultabb, ezzel a kérdéssel jelen jegyzetben nem foglalkozunk. Annyit jegyzünk csak meg, hogy $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazából $\mathbb{R}^k$-ba képező függvény totális deriváltja már nem egy vektor, hanem egy $n \times k$-as mátrix.

3.2.4. Feladatok

1. A definíció alkalmazásával vizsgálja meg, hogy az

$$f(x;y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } x \geqslant -y, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

   függvénynek mely pontokban létezik x, illetve y szerinti parciális deriváltja. Ahol valamelyik létezik, számítsa is ki azt.

2. Számítsa ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjfüggvényeit. Határozza meg a parciális deriváltfüggvények értelmezési tartományát.

   (a) $f(x;y) = x^2y^3 - 6x^7y + x^2 + y - 3$;

   (b) $f(x;y) = \ln(x+y^2)$;

   (c) $f(x;y) = e^{xy^2-2} + \sin x \cos y$;

   (d) $f(x;y) = \dfrac{x+\sin y}{\cos(y-x)}$.

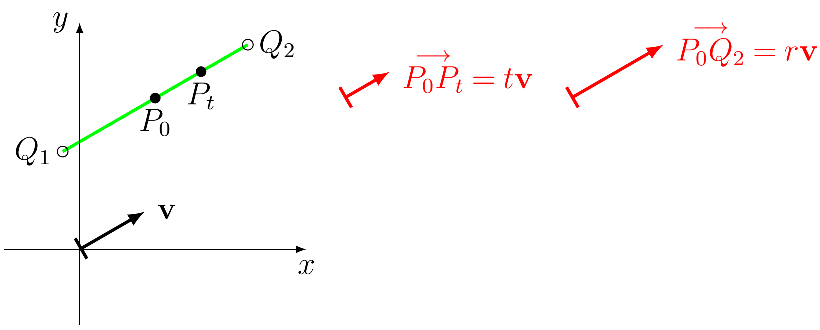
3. Lássa be a definíció alapján, hogy az $f(x;y) = xy$ függvény totálisan deriválható

   (a) a $P_0(3;-1)$ pontban;

   (b) tetszőleges $Q_0(x_0;y_0)$ pontban.

3.3. Az iránymenti derivált

A parciális deriváltak a kétváltozós függvényeknek az x- illetve y-tengellyel párhuzamos egyenesek mentén tanúsított viselkedéséről adnak információt. Ebben a fejezetben más irányokba eső egyenesek mentén vizsgáljuk a függvények viselkedését. Ennek kulcsfogalma az iránymenti derivált.



3.4. ábra. $\overline{Q_1Q_2} \subseteq D_f$

3.3.1. Az iránymenti derivált definíciója

3.3.1. Definíció (Iránymenti derivált). Legyen $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ egy egységvektor. Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény értelmezve van a $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenes egy P_0-t tartalmazó nyílt szakaszán, azaz valamely $r > 0$-ra a $Q_1(x_0 - - rv_1, y_0 - rv_2)$ és $Q_2(x_0 + rv_1, y_0 + rv_2)$ végpontok közötti szakaszon. Azt mondjuk, hogy f-nek a P_0 pontban létezik a ***v** irányhoz tartozó iránymenti deriváltja*, ha létezik és véges a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1; y_0 + tv_2) - f(x_0; y_0)}{t}$$

határérték. Ha a $\mathbf{v}$ vektor irányszöge α, szokás ezt a mennyiséget az *α szöghöz tartozó iránymenti derivált*nak is nevezni.

3.3.2. Jelölés.

$$f'_{\mathbf{v}}(P_0) = f'_{\alpha}(P_0).$$

3.3.3. Megjegyzések.

- Vegyük észre, hogy a definícióban a függvényértéket azokban a $P_t(x_0 + tv_1; y_0 + tv_2)$ pontokban vizsgáljuk, amelyekre $\overrightarrow{P_0P_t} = t\mathbf{v}$ teljesül, tehát $|t| < |r|$ esetén a P_t pont valóban a megadott $\overline{Q_1Q_2}$ szakaszon helyezkedik el (3.4. ábra). Ekkor $|\overrightarrow{P_0P_t}| = |t|$, hiszen $\mathbf{v}$ egységvektor. A definícióban a limeszképzés tehát a

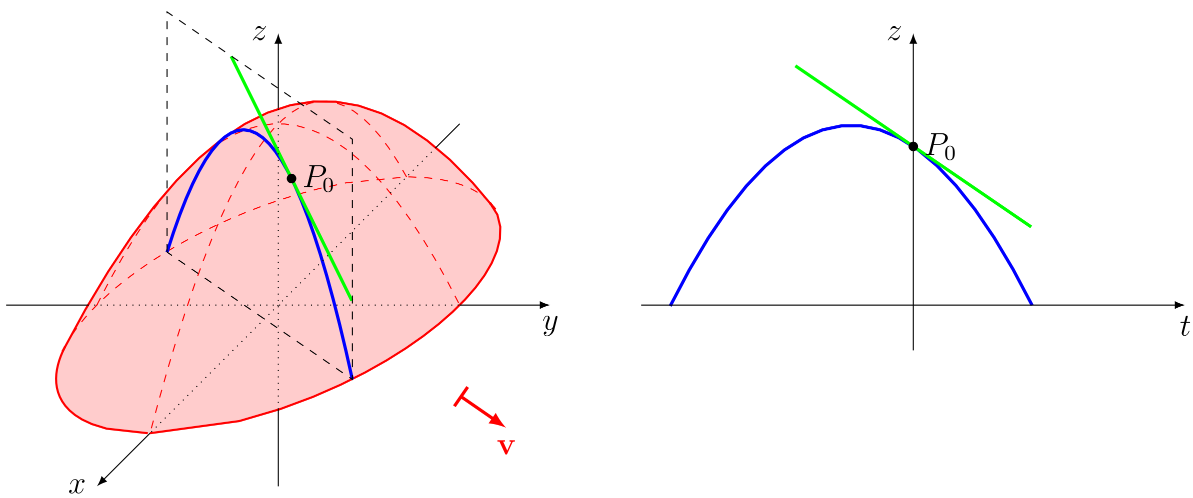
  $$\frac{f(P_t) - f(P_0)}{\operatorname{sgn} t \cdot |\overrightarrow{P_0P_t}|}$$

  hányadosra vonatkozik. Itt $\operatorname{sgn} t = \pm 1$ aszerint, hogy t pozitív vagy negatív, azaz aszerint, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor a $\mathbf{v}$ vektorral egyező vagy ellentétes irányú.

- Az iránymenti derivált azon görbe érintő egyenesének a meredeksége, amelyet a függvény grafikonjának és a P_0-on átmenő, α irányszögű egyenesre illeszkedő, z-tengellyel párhuzamos („függőleges”) sík metszeteként kapunk. E síkot arról az oldalról kell szemlélnünk, amelyikről a $\mathbf{v}$ vektor „jobbra” mutat (3.5. ábra).

- A $\mathbf{v}(1; 0)$ vektorhoz, azaz az $\alpha = 0°$-hoz tartozó iránymenti derivált éppen az x szerinti parciális derivált, hiszen ekkor az $x = x_0 + t$ jelölés bevezetésével éppen az x szerinti differenciahányadosok $t = x - x_0 \to 0$ határértékét vizsgáljuk. Hasonlóan, a $\mathbf{v}(0; 1)$ vektorhoz, azaz az $\alpha = 90°$-hoz tartozó iránymenti derivált az y-szerinti parciális deriválttal egyezik meg.

- Ha adott $\mathbf{v}$ vektorra létezik az f függvény iránymenti deriváltja valamely P_0 pontban, akkor a $-\mathbf{v}$ vektorhoz tartozó iránymenti derivált is létezik ugyanebben a pontban, mégpedig
$$f'_{-\mathbf{v}}(P_0) = -f'_{\mathbf{v}}(P_0).$$
Ennek oka, hogy a definícióban szereplő t-hez tartozó függvényérték megegyezik a $-\mathbf{v}$ vektor esetén a $-t$-hez tartozó függvényértékkel, hiszen
$$f(x_0+tv_1;y_0+tv_2) = f(x_0+(-t)(-v_1);y_0+(-t)(-v_2))$$
teljesül. A $-\mathbf{v}$ vektor esetén tehát a definícióbeli nevezőben $-t$ szerepel ugyanahhoz a számlálóhoz, tehát a $-\mathbf{v}$ vektor esetén ugyanazon értékek ellentettjének vesszük a 0-beli határértékét.



3.5. ábra. Iránymenti derivált

3.3.4. Példa. Számítsuk ki az $f(x;y) = xy$ függvény iránymenti deriváltjait a $P_0(0;0)$ és a $P_1(1;1)$ pontban. Tekintsünk egy tetszőleges α irányt. Az ehhez tartozó egységvektor a $\mathbf{v}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ vektor. Tekintsük először a P_0 pontot.

$$\frac{f(x_0+tv_1;y_0+tv_2)-f(x_0;y_0)}{t} = \frac{f(t\cos\alpha;t\sin\alpha)}{t} = \frac{t^2\cos\alpha\sin\alpha}{t} = \frac{1}{2}t\sin 2\alpha.$$

Ennek határértéke $t\to 0$ esetén 0. Így az összes iránymenti derivált a P_0 pontban 0. Vizsgáljuk meg most az α szöghöz tartozó P_1 pontbeli iránymenti deriváltat.

$$\frac{f(1+t\cos\alpha;1+t\sin\alpha)-f(1;1)}{t} = \frac{1+t\cos\alpha+t\sin\alpha+t^2\cos\alpha\sin\alpha-1}{t} =$$
$$= \cos\alpha+\sin\alpha+t\cos\alpha\sin\alpha.$$

Ennek határértéke $t\to 0$ esetén $f'_{\alpha}(1;1) = \cos\alpha+\sin\alpha$.

3.3.2. Az iránymenti derivált meghatározása

Az iránymenti derivált kiszámítására ad módszert a következő tétel:

3.3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f függvény totálisan deriválható a P_0 pontban. Ekkor tetszőleges α szöghöz tartozik iránymenti derivált P_0-ban, mégpedig*

$$\begin{aligned} f'_\alpha(P_0) &= \mathbf{grad} f(P_0)\mathbf{v} \\ &= f'_x(P_0)\cos\alpha + f'_y(P_0)\sin\alpha, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{v}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ *az* α *irányszögű egységvektor.*

3.3.6. Példák.

1. Számítsuk ki az $f(x;y)=xy$ függvény iránymenti deriváltjait a $P_0(0;0)$ és a $P_1(1;1)$ pontban. A 3.2.10. példából már tudjuk, hogy f totálisan deriválható az egész síkon, továbbá $f'_x(x;y)=y$, $f'_y(x;y)=x$. Mivel $\nabla f(P_0)=\mathbf{0}$, ezért ebben a pontban az összes iránymenti derivált értéke 0.

   $\nabla f(P_1)=(1;1)$, így a 3.3.5. tétel alapján az α szöghöz tartozó iránymenti derivált

   $$f_\alpha(P_1)=(1;1)(\cos\alpha;\sin\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha.$$

2. Határozzuk meg az $f(x;y)=e^{xy}$ függvény $\alpha=30°$-os és $\beta=45°$-os szögekhez tartozó iránymenti deriváltjait a $P_0(0;0)$ és a $P_1(1;2)$ pontokban.

   Az α-hoz, illetve β-hoz tartozó egységvektorok $\mathbf{v}_\alpha(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$ és $\mathbf{v}_\beta(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$.

   A függvény két parciális deriváltfüggvénye $f'_x(x;y)=ye^{xy}$, illetve $f'_y(x;y)=xe^{xy}$. Mivel ezek mindenütt folytonosak, az f függvény totálisan deriválható minden $\mathbb{R}^2$-beli pontban. Így az iránymenti deriváltak kiszámítására alkalmazható a 3.3.5. tétel. A parciális deriváltfüggvényekbe a P_0 és a P_1 pontok koordinátáit behelyettesítve kapjuk, hogy

   $$\nabla f(P_0)=\mathbf{0} \qquad \text{és} \qquad \nabla f(P_1)=(2e^2;e^2).$$

   Ebből következően a P_0-beli összes iránymenti derivált 0-val egyenlő. A P_1-beli iránymenti deriváltakat a $\mathbf{v}_\alpha$, illetve $\mathbf{v}_\beta$ vektorokkal való skaláris szorzás útján kapjuk:

   $$f'_\alpha(P_1)=\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2};\tfrac{1}{2}\right)(2e^2;e^2)=\frac{2\sqrt{3}+1}{2}e^2$$

   és

   $$f'_\beta(P_1)=\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2};\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(2e^2;e^2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}e^2.$$

Vizsgáljuk most meg egy P_0-ban totálisan deriválható f függvény P_0-beli iránymenti deriváltjának viselkedését, ahogy α 0°-tól 360°-ig változik. Az iránymenti deriváltat a

$$\mathbf{grad} f(P_0)\mathbf{v}_\alpha = |\mathbf{grad} f(P_0)|\cdot\cos\varphi(\mathbf{v}_\alpha;\mathbf{grad} f(P_0))$$

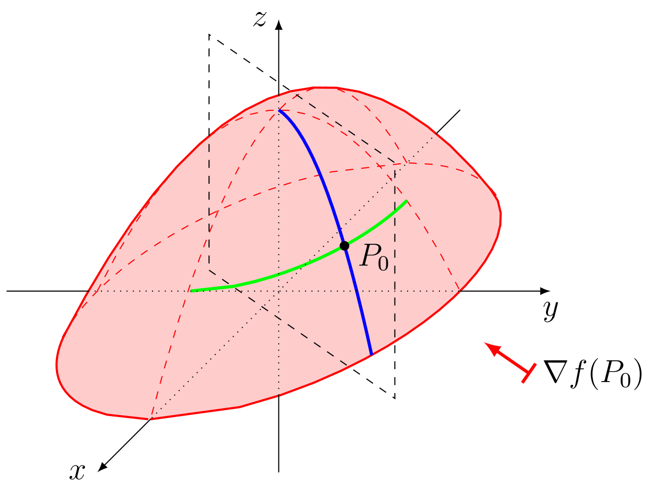
össszefüggés adja meg, ahol $\varphi(\mathbf{v}_\alpha;\mathbf{grad} f(P_0))$ $\mathbf{v}_\alpha$ és a P_0-beli gradiensvektor által bezárt szög. (Figyelembe vettük azt is, hogy $|\mathbf{v}_\alpha|=1$.) A koszinuszfüggvényt pedig már ismerjük: értékei -1 és $+1$ közé esnek. Így az iránymenti derivált értéke $-|\nabla f(P_0)|$ és $+|\nabla f(P_0)|$ között változik. Sőt, ennél többet is tudunk:

- $f'_\alpha(P_0) = |\nabla f(P_0)|$, amikor $\mathbf{v}_\alpha$ iránya megegyezik $\nabla f(P_0)$ irányával;
- $f'_\alpha(P_0) = -|\nabla f(P_0)|$, amikor $\mathbf{v}_\alpha$ iránya ellentétes $\nabla f(P_0)$ irányával;
- végül $f'_\alpha(P_0) = 0$, amikor $\mathbf{v}_\alpha$ merőleges a pontbeli gradiensvektorra.

Ez a következő tételt eredményezi:

3.3.7. Tétel. *Legyen az f függvény totálisan deriválható a P_0 pontban. Tegyük fel továbbá, hogy $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$. Ekkor a függvény legmeredekebben a P_0-beli gradiensvektor irányában nő, illetve az ezzel ellentétes irányban csökken a leggyorsabban. Az erre merőleges két irányban pedig a függvény érintő egyenese vízszintes.*

A 3.3.7. tétel összhangban van azzal a hegymászás közben szerzett tapasztalatunkkal, hogy a legmeredekebb kaptatóval ellentétes irányban lejt legjobban a hegyoldal, illetve az erre merőleges irányban húzódik a szintvonal (3.6. ábra).



3.6. ábra. A függvény viselkedése a gradiensvektor irányában és arra merőlegesen

3.3.8. Példa. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x;y) = xy$ függvény egy tetszőleges $P_0(x_0;y_0)$ pontot alapul véve, mely irányban növekszik legjobban. Mivel f az egész síkon totálisan deriválható, alkalmazhatóak az alfejezet tételei. A gradiensvektor a P_0 pontban: $\mathbf{grad} f(P_0) = (y_0;x_0)$, így ez a keresett irány, legalábbis, ha P_0 egy, az origótól különböző pont. Az erre merőleges $\pm(x_0;-y_0)$ irányban pedig „pihenőt” tart a függvény, azaz a hozzá tartozó iránymenti deriváltja 0.

3.3.9. Megjegyzés. Olyan $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektorhoz tartozó iránymenti deriváltat is definiálhatunk, amely nem feltétlenül egységvektor. Ekkor az eddig tárgyalt képletek mindegyikében $|\mathbf{u}|$-kel osztanunk kell:

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{u}}(P_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tu_1;y_0+tu_2) - f(x_0;y_0)}{t|\mathbf{u}|} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{grad} f(P_0)\mathbf{u} \end{aligned}$$

3.3.3. Az n-változós eset

Legyen most $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ egy n-változós függvény, $P_0(p_1;\ldots;p_n) \in D_f$. Az f függvény P_0 pontbeli, $\mathbf{v}(v_1;v_2;\ldots;v_n)$ egységvektorhoz tartozó iránymenti deriváltját ugyanúgy értelmezzük, mint a kétváltozós esetben, azaz

$$f'_{\mathbf{v}}(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_1+tv_1;p_2+tv_2;\ldots;p_n+tv_n) - f(p_1;p_2;\ldots;p_n)}{t},$$

amennyiben ez létezik és véges. Itt feltesszük, hogy alkalmas $r>0$ valós számra $|t|<r$ esetén a $P_t(p_1+tv_1;\ldots;p_n+tv_n)$ pontok D_f-be esnek.
Fontos különbség azonban, hogy $\mathbb{R}^n$-ben α irányszög nem létezik, ezért α-hoz tartozó iránymenti derivált sem létezik. A $\mathbf{v}$ vektor megadása tehát minden esetben szükséges.
Az értelemszerű változtatásokkal a 3.3.5. és 3.3.7. tételek mindazonáltal érvényben maradnak n-változós függvényekre is. Megjegyezzük azonban, hogy $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok olyan irány létezik, amely a gradiensvektorra merőleges. Az iránymenti derivált mindezen irányokban eltűnik.

3.3.4. Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi függvények adott irányokhoz tartozó iránymenti deriváltjait a megadott pontokban. Ne felejtse el ellenőrizni, hogy a szóban forgó függvények totálisan deriválhatók.

   (a) $f(x;y) = x^2+2xy-y+5$, $\mathbf{v}(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_0(-1;2)$;

   (b) $f(x;y) = \sin(x+2y)$, $\mathbf{v}(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_0(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3})$;

   (c) $f(x;y) = \ln(xy)+y\,\mathrm{tg}(\pi x)$, $\mathbf{v}(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$, $P_0(1;1)$.

2. Határozza meg a következő függvények α szöghöz tartozó iránymenti deriváltjait a megadott pontokban.

   (a) $f(x;y) = x+y$, $\alpha = 60°$, $P_0(3;1)$, $P_1(5;-20)$. (Mit vesz észre?)

   (b) $f(x;y) = \mathrm{arctg}(\frac{x}{y})$, $\alpha = 75°$, $P_0(1;1)$.

   (c) $f(x;y) = x^2+y^2$, $\alpha = 20°$, $P_0(3;4)$.

3. Mely irányban nőnek, illetve csökkennek legnagyobb mértékben az alábbi függvények a megadott pontokban? Készítsen ábrát!

   (a) $f(x;y) = x+y$, $P_0(3;1)$, $P_1(5;-20)$. (Mit vesz észre?)

   (b) $f(x;y) = \sin(\pi(x^2-y^2))$, $P_0(1;-1)$.

   (c) $f(x;y) = x^2-2y^2$, $P_0(-2;1)$.

4. Keresse meg az alábbi függvények megadott pontjában a szintvonal érintőjének irányát.

   (a) $f(x;y) = x+y$, $P_0(3;1)$, $P_1(5;-20)$. (Mit vesz észre?)

   (b) $f(x;y) = 12-3(x-1)^2-(y-2)^4$, $P_0(1;2)$.

   (c) $f(x;y) = \sin(xy)$, $P_0(\frac{\pi}{6};1)$.

3.4. A teljes differenciál

Ebben a fejezetben általánosítjuk a valós-valós függvények témaköréből már ismert differenciál fogalmát.

3.4.1. A teljes differenciál fogalma

Az egyváltozós függvények esetében az érintő egyenes egyenletének felírásához bevezettük a differenciál fogalmát (Analízis I. 7.1.22. definíció). Ennek általánosítása a kétváltozós esetben az érintősík egyenletének felírásához is használható teljes differenciál.

3.4.1. Definíció (Teljes differenciál). Legyen az f függvény totálisan deriválható a P_0 pontban. Az f függvény P_0-beli *teljes differenciálja* a

$$\mathrm{d}f|_{P_0}(x-x_0;y-y_0) = f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)$$

lineáris függvény.

3.4.2. Megjegyzések.

- A $\mathrm{d}x = x-x_0$ és $\mathrm{d}y = y-y_0$ jelölés bevezetésével a teljes differenciál alakja:

  $$\mathrm{d}f|_{P_0}(\mathrm{d}x;\mathrm{d}y) = f'_x(P_0)\,\mathrm{d}x+f'_y(P_0)\,\mathrm{d}y,$$

  illetve ha még a $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x;\mathrm{d}y)$ jelölést is bevezetjük, akkor a

  $$\mathrm{d}f|_{P_0}(\mathrm{d}\mathbf{r}) = \nabla f(P_0)\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

  skaláris szorzatot kapjuk.

- A $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ jelöléseket az teszi indokolttá, hogy a P_0 ponttól való „kis” elmozdulást képzelünk el, amelynek során az f függvény értéke is „kicsiny”, $\mathrm{d}f$ mértékben változik. Másként fogalmazva, a teljes differenciál ábrázolásához használt koordinátarendszer középpontját az $(x_0;y_0;f(P_0))$ pontban képzeljük el. Később éppen a teljes differenciál segítségével fogjuk a függvényértéket egy, a P_0-hoz „közeli” P_1 pontban megbecsülni.

- Egy függvény teljes differenciálja különböző P_0 pontokban természetesen általában különböző. Ezért tüntettük fel a jelölésben a P_0 pontot is. Ha azonban nem áll fenn a tévedés veszélye, sokszor a pongyolább $\mathrm{d}f = f'_x\,\mathrm{d}x+f'_y\,\mathrm{d}y$ jelölést alkalmazzuk.

3.4.3. Példák.

1. Határozzuk meg az $f(x;y) = ye^x$ függvény teljes differenciálját a $P_0(0;1)$ pontban. Számítsuk ki értékét a $\mathrm{d}x = 0{,}1$, $\mathrm{d}y = -0{,}2$ helyen.

   Megoldás: A parciális deriváltfüggvények $f'_x(x;y)=ye^x$ és $f'_y(x;y)=e^x$. Ezek helyettesítési értéke a P_0 pontban $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 1$. Így a teljes differenciál

   $$\mathrm{d}f|_{P_0} = \mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$

   Ebbe a megadott értékeket behelyettesítve a

   $$\mathrm{d}f(0{,}1;-0{,}2) = 0{,}1+(-0{,}2) = -0{,}1$$

   értékhez jutunk.

2. Számítsuk most ki az $f(x;y)=\sin x-\cos y$ függvény $P_0(0;\frac{\pi}{2})$ és $P_1(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6})$ pontbeli teljes differenciálját.

   Megoldás: A parciális deriváltfüggvények $f'_x(x;y)=\cos x$ és $f'_y(x;y)=\sin y$. Ezek helyettesítési értékei a P_0 pontban $f'_x(P_0)=f'_y(P_0)=1$, míg a P_1 pontban $f'_x(P_1)=\frac{1}{2}$ és $f'_y(P_1)=-\frac{1}{2}$. Így a két pontbeli teljes differenciál

   $$\mathrm{d}f|_{P_0}(\mathrm{d}x;\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

   valamint

   $$\mathrm{d}f|_{P_1}(\mathrm{d}x;\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

3.4.2. Az érintősík egyenlete

Emlékezzünk rá, hogy egyváltozós függvények esetén az érintő egyenes egyenlete $y=$ $=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ volt (Analízis I. 7.1.15. definíció, illetve 7.1.17.3. példa). Ennek kétváltozós általánosítása az értintősík egyenlete.

3.4.4. Definíció (Érintősík). Tegyük fel, hogy az f függvény totálisan deriválható a $P_0(x_0;y_0)$ pontban. A

$$z=f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)+f(P_0)$$

egyenletű síkot az f függvény P_0 pontbeli *értintősíkjának* nevezzük.

A 3.7. ábrán egy kétváltozós függvény egy érintősíkját szemléltetjük.

3.4.5. Megjegyzések.

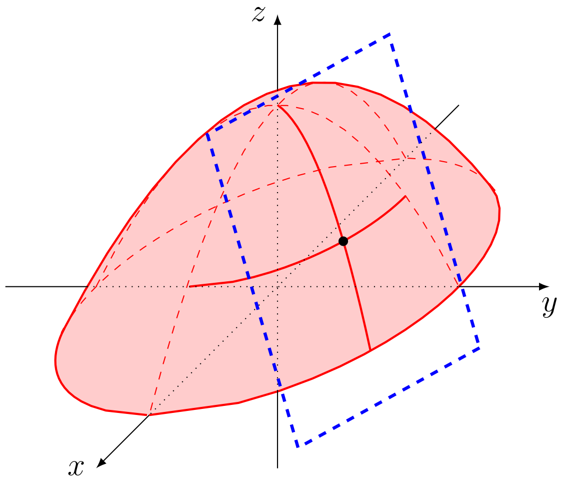
- A 3.4.4. definícióbeli képlet változói x és y, az egyenlőség jobb oldalán szereplő összes többi kifejezés konstans.
- Vegyük észre, hogy a $z-f(P_0)$ kifejezés éppen az f függvény P_0-beli teljes differenciálja a $\mathrm{d}x=x-x_0$, $\mathrm{d}y=y-y_0$ helyen.
- Általánosságban az érintősík egy bonyolult fogalom, amelyet itt nem tárgyalunk. A mi számunkra elég az a sajátossága, hogy az f függvény grafikonján a $(P_0;f(P_0))$ ponton keresztül haladó tetszőleges görbe P_0-hoz tartozó érintő egyenese ebbe a síkba esik. A 3.4.4. definícióban megadott sík e tulajdonságát jelen jegyzetben nem bizonyítjuk.

3.4.6. Példák.

1. Határozzuk meg az $f(x;y)=x^2y-2x+3y-1$ függvény $P_0(1;2)$ pontbeli értintősíkjának egyenletét.

   Megoldás: Először a parciális deriváltfüggvényeket határozzuk meg. Ezek $f'_x(x;y)=$ $=2xy-2$ és $f'_y(x;y)=x^2+3$, amelyek mindenütt folytonosak, így a függvény valóban totálisan deriválható. A P_0-beli helyettesítési értékek $f'_x(1;2)=2$ és $f'_y(1;2)=4$, illetve $f(1;2)=5$. Így az érintősík egyenlete:

   $$z=2(x-1)+4(y-2)+5=2x+4y-5.$$



3.7. ábra. Érintősík

2. Számítsuk most ki az $f(x;y)=\sin(xy)$ függvény értintősíkját a $P_0(\frac{1}{3};\pi)$ pontban.

   Megoldás: A parciális deriváltfüggvények $f'_x(x;y)=y\cos(xy)$ és $f'_y(x;y)=x\cos(xy)$, folytonosak. A helyettesítési értékek $f'_x(\frac{1}{3};\pi)=\pi\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{2}$ és $f'_y(\frac{1}{3};\pi)=\frac{1}{6}$, illetve $f(\frac{1}{3};\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az értinősík egyenlete tehát

$$z=\frac{\pi}{2}(x-\frac{1}{3})+\frac{1}{6}(y-\pi)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2}x+\frac{y}{6}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.4.3. A függvényérték közelítése

A teljes differenciál egy másik alkalmazása a függvényérték közelítése egy, az adott ponthoz közeli pontban. Ez szintén az egyváltozós eset analógiája: az f függvény értékét egy P_1 pontban a P_0-beli érintősík P_1 pontban vett helyettesítési értékével közelítjük:

$$\begin{aligned}f(P_1)\approx & f(P_0)+\mathrm{d}f|_{P_0}(\overrightarrow{P_0P_1})=\\ & f(x_0;y_0)+f'_x(x_0;y_0)(x_1-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y_1-y_0).\end{aligned}$$

3.4.7. Példák.

1. Közelítsük az $f(x;y)=x^2y-2x+3y-1$ függvény értékét a $P_1(1{,}1;1{,}9)$ pontban a $P_0(1;2)$ pontbeli teljes differenciál (illetve érintősík) segítségével.

   Megoldás: Esetünkben $\mathrm{d}x=x_1-x_0=0{,}1$ és $\mathrm{d}y=y_1-y_0=-0{,}1$. A 3.4.6. 1. példában kiszámított értékeket a közelítés képletébe helyettesítve

$$f(P_1)\approx 2\cdot 0{,}1+4\cdot(-0{,}1)+5=4{,}8.$$

   Számológéppel könnyen ellenőrizhetjük, hogy a pontos függvényérték $f(P_1)=4{,}799$.

2. Számítsuk most ki egy $r_1=4{,}1$cm sugarú, $m_1=16{,}02$cm magasságú henger térfogatának közelítő értékét.

Megoldás: A számításokhoz az $r_0 = 4$cm sugarú, $m_0 = 16$cm magasságú henger térfogatának pontos értékét vesszük alapul. A térfogatot a $V(r;m) = r^2\pi m$ kétváltozós függvény adja meg. Ennek értéke az $r_0=4$, $m_0=16$ helyen $V_0=256\pi(\mathrm{cm}^3)$. A térfogatfüggvény parciális deriváltfüggvényei $V_r' = 2r\pi m$ és $V_m' = r^2\pi$, amelyek helyettesítési értéke a megadott helyen $V_r'(4;16) = 128\pi$ és $V_m'(4;16) = 16\pi$. Így a közelítés

$$V_1 \approx 256\pi + 0{,}1\cdot 128\pi + 0{,}02\cdot 16\pi = 269{,}12\pi.$$

Számológéppel kiszámítva a pontos értéket $V_1 = 269{,}2962\pi$ adódik.

3. Egy téglalap alakú kert oldalai $a_0 = 100$m és $b_0 = 20$m. Mekkora lesz a kert területe, ha egy jogvita után az oldalhosszúságok $a_1 = 99{,}8$m-re és $b_1 = 20{,}1$m-re módosulnak?

   Megoldás: A kert területét a $T(a;b) = ab$ függvény írja le. Ennek értéke az eredeti adatokkal $T_0 = 2000(\mathrm{m}^2)$. A parciális deriváltfüggvények és helyettesítési értékeik: $T_a'(a;b) = b$, $T_b'(a;b) = a$, $T_a'(a_0;b_0) = 20$, $T_b'(a_0;b_0) = 100$. A terület közelítő értéke tehát

$$T_1 \approx 2000 + 20\cdot(-0{,}2) + 100\cdot 0{,}1 = 2006.$$

   A pontos érték pedig $T_1 = 2005{,}98\mathrm{m}^2$.

3.4.4. Az n-változós eset

A teljes differenciál fogalma értelemszerű átalakítással n-változós függvényekre is értelmezhető: az f n-változós függvény teljes differenciálja egy $P_0 \in D_f$ pontban, amelyben az f függvény totálisan differenciálható,

$$\mathrm{d}f|_{P_0}(\mathrm{d}x_1;\ldots;\mathrm{d}x_n) = f'_{x_1}(P_0)\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + f'_{x_n}(P_0)\,\mathrm{d}x_n.$$

Itt a változók $\mathrm{d}x_1$, …, $\mathrm{d}x_n$, a képletben szereplő többi kifejezés pedig konstans. A $\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x_1;\ldots;\mathrm{d}x_n)$ vektor bevezetésével változatlanul a

$$\mathrm{d}f|_{P_0}(\mathrm{d}\mathbf{r}) = \nabla f(P_0)\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

képlet adja meg a teljes differenciált.

Gondoljuk meg azonban, hogy n-változós függvény esetében az érintősík értelmetlen fogalom (ha $n > 2$), hiszen ebben az esetben a függvénygrafikon nem egy felület, hanem egy számunkra elképzelhetetlen „$n-1$-dimenziós” alakzat. Így ebben az esetben „érintő $n-1$-dimenziós tér”-ről, más szóval érintő hipersíkról beszélhetünk.

A függvényérték mindazonáltal ugyanolyan módon becsülhető a teljes differenciál segítségével, mint két változó esetén, azaz az

$$f(P_1) \approx f(P_0) + \mathrm{d}f|_{P_0}(\overrightarrow{P_0P_1})$$

képlettel. Ez $P_0(p_1;\ldots;p_n)$ és $P_1(x_1;\ldots;x_n)$ pontok esetében részletesen

$$f(x_1;\ldots;x_n) \approx f(p_1;\ldots;p_n) + f'_{x_1}(p_1;\ldots;p_n)(x_1-p_1) + \ldots + f'_{x_n}(p_1;\ldots;p_n)(x_n-p_n).$$

3.4.5. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények megadott pontbeli teljes differenciálját.

   (a) $f(x;y) = xy^3 - xy + 2x + y - 1$, $P_0(2;-1)$;

   (b) $f(x;y) = \frac{\sin x}{y}$, $P_0(-\frac{\pi}{2};1)$;

   (c) $f(x;y) = \ln(x-y)$, $P_0(4;3)$.

2. Írja föl a következő függvények érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban.

   (a) $f(x;y) = \frac{y}{x}$, $P_0(1;1)$;

   (b) $f(x;y) = x^2y^2 - x + 2y - 4$, $P_0(-2;1)$;

   (c) $f(x;y) = 6x - 2y + 1$, $P_0(1;3)$, $P_1(-1;5)$. (Mit vesz észre?)

3. Becsülje meg az alábbi függvények P_1-beli értékét a P_0-beli érintősík segítségével. A közelítést ellenőrizze a pontosabb érték számológéppel történő kiszámításával.

   (a) $f(x;y) = \sqrt{xy}$, $P_0(9;1)$, $P_1(8{,}99;1{,}02)$.

   (b) $f(x;y) = e^{x+2y}$, $P_0(-1;1)$, $P_1(-1{,}1;1{,}2)$.

   (c) $f(x;y) = x^2 \operatorname{tg} y$, $P_0(-1;\frac{\pi}{4})$, $P_1(-0{,}9;0{,}8)$. (Három tizedesjeggyel számoljon.)

4. Közelítőleg mekkora a felszíne annak a hengernek, amelynek sugara $r_1 = 4{,}1$cm, magassága pedig $m_1 = 16{,}02$cm? A közelítést a 3.4.7. 2. példabeli $r_0 = 4$cm sugarú, $m_0 = 16$cm magasságú henger felszíne alapján végezze. (Egy r sugarú, m magasságú henger felszíne $A = 2r^2\pi + 2r\pi m$.)

3.5. Magasabb rendű parciális deriváltak

3.5.1. A magasabb rendű parciális derivált fogalma

Egy kétváltozós függvény parciális deriváltjai maguk is kétváltozós függvények. Így lehetőség nyílik ezen deriváltak parciális deriválására is.

3.5.1. Definíció (Másodendű parciális deriváltak). Legyen f egy kétváltozós függvény. Az $f'_x(x;y)$, $f'_y(x;y)$ függvények parciális deriváltjait (ha ezek léteznek) az f függvény *másodrendű parciális deriváltjainak* nevezzük. Ezek jelölésére az

$$f''_{xx}(P) = (f'_x)'_x(P) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P),$$
$$f''_{xy}(P) = (f'_x)'_y(P) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P),$$

illetve

$$f''_{yx}(P) = (f'_y)'_x(P) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P),$$
$$f''_{yy}(P) = (f'_y)'_y(P) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)$$

szimbólumokat használjuk. Az f''_{xy} és f''_{yx} függvényeket *vegyes* parciális deriváltfüggvényeknek nevezzük.

3.5.2. Megjegyzések.

- Figyeljük meg, hogy az f''_{xy} jelölésben először az x szerinti, majd az y szerinti parciális deriválás végezzük el, míg a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
jelölést akkor használjuk, ha előbb y, majd pedig x szerint deriválunk.

- A másodrendű parciális deriváltak parciális deriválásával bevezethetőek az f függvény f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, $\ldots$, f'''_{yyy} *harmadrendű* parciális deriváltjai, illetve értelemszerűen bármely $m \in \mathbb{N}^+$ esetén m-edrendű parciális deriváltjai is. Mivel számunkra közvetlen hasznuk a másodrendű deriváltaknak lesz, ezért elsősorban ezekkel fogunk foglalkozni.

- Vegyük észre, hogy míg elsőrendű parciális deriváltfüggvényből kettő, addig másodrendűből már 4, n-edrendűből pedig 2^n darab létezhet.

3.5.3. Példák.

1. Számítsuk ki az $f(x;y) = x^2y - 3y^2 + x - 2y + 1$ függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit.

   Megoldás: Mivel $f'_x(x;y) = 2xy + 1$ és $f'_y(x;y) = x^2 - 6y - 2$, ezért a másodrendű parciális deriváltak a következők:
$$f''_{xx}(x;y) = 2y \qquad\qquad f''_{xy}(x;y) = 2x$$
   illetve
$$f''_{yx}(x;y) = 2x \qquad\qquad f''_{yy}(x;y) = -6.$$
   Az f függvény értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}^2$, ugyanitt értelmezve vannak az első- és másodrendű parciális deriváltfüggvények is.

2. Határozzuk meg most az $f(x;y) = e^{xy}$ másodrendű parciális deriváltjait. Számítsuk ki f néhány magasabb rendű parciális deriváltját is.

   Megoldás: Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények
$$f'_x(x;y) = ye^{xy} \qquad \text{és} \qquad f'_y(x;y) = xe^{xy}.$$
   Így a másodrendű deriváltak:
$$\begin{aligned} f''_{xx}(x;y) &= y^2e^{xy} & \qquad f''_{xy}(x;y) &= e^{xy} + xye^{xy} \\ f''_{yx}(x;y) &= e^{xy} + xye^{xy} & \qquad f''_{yy}(x;y) &= x^2e^{xy}. \end{aligned}$$
   Néhány magasabb rendű derivált:
$$\begin{aligned} f'''_{xxx}(x;y) &= y^3e^{xy} \\ f^{(4)}_{xxxx}(x;y) &= y^4e^{xy} \\ f'''_{xxy}(x;y) &= 2ye^{xy} + y^2e^{xy}x \\ f^{(4)}_{xxyy}(x;y) &= 2e^{xy} + 2ye^{xy}x + 2ye^{xy}x + y^2e^{xy}x^2 = e^{xy}(x^2y^2 + 4xy + 2). \end{aligned}$$
   A függvény és bármely parciális deriváltjának értelmezési tartománya is a teljes $\mathbb{R}^2$ halmaz.

3. Számítsuk most ki az $f(x;y)=\frac{x}{y}$ függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit.

   Megoldás: A függvény értelmezési tartománya a
$$D_f = \{(x;y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$$
   halmaz. Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények
$$f'_x(x;y) = \frac{1}{y} \qquad \text{és} \qquad f'_y(x;y) = -\frac{x}{y^2}.$$
   Látjuk, hogy $D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_f$. A másodrendű deriváltak
$$f''_{xx}(x;y) = 0 \qquad f''_{xy}(x;y) = -\frac{1}{y^2}$$
$$f''_{yx}(x;y) = -\frac{1}{y^2} \qquad f''_{yy}(x;y) = \frac{2x}{y^3}.$$
   A másodrendű parciális deriváltfüggvények értelmezési tartománya szintén a fenti D_f halmaz.

4. Határozzuk meg végül az $f(x;y)=\sin(\frac{y}{x})$ függvény másodrendű parciális deriváltjait.

   Megoldás: A függvény értelmezési tartomnya
$$D_f = \{(x;y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0\}.$$
   Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:
$$f'_x(x;y) = \left(\cos\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} \qquad \text{és} \qquad f'_y(x;y) = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}.$$
   Innen a másodrendűek
$$f''_{xx}(x;y) = \frac{2y}{x^3}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$
$$f''_{xy}(x;y) = -\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}\cdot\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$
$$f''_{yx}(x;y) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$
$$f''_{yy}(x;y) = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x}.$$
   Az első- és másodrendű parciális deriváltfüggvények érelmezési tartománya is a D_f halmaz.

Vegyük észre, hogy a 3.5.3. példák mindegyikében $f''_{xy} = f''_{yx}$ teljesült. Bár ez nem általános érvényű tulajdonság, de igen sok lényeges esetben így van. Ezt az alkalmazások szempontjából igen hasznos és ezért fontos tulajdonságot fogalmazzuk meg az alábbi tételben, amelyet nem bizonyítunk:

3.5.4. Tétel (Young). *Tegyük fel, hogy az f függvény másodrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak a P_0 pont egy környezetében. Ekkor az*
$$f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$$
egyenlőség teljesül.

3.5.5. Megjegyzések.

- Az elemi függvényekből a 3.2.9. következményben leírt módon előállítható kétváltozós függvények teljesítik a Young-tétel feltételeit, így ezek vegyes parciális deriváltjai megegyeznek.
- A tételből közvetlenül következik az n-edik parciális deriváltakra vonatkozó állítás: Ha az n-edik parciális deriváltak mind léteznek és folytonosak P_0 egy környezetében, akkor a deriválás eredménye nem függ a változók sorrendjétől, amelyek szerint deriválunk, kizárólag attól, hány x szerinti és hány y szerinti parciális deriválást végzünk el.

3.5.2. Az n-változós eset

Egy n-változós f függvény magasabb rendű parciális deriváltjai ugyanúgy értelmezhetőek, mint egy kétváltozós függvényé. A lehetséges parciális deriváltak száma azonban lényegesen nagyobb: másodrendű deriváltból már n^2 létezhet. Ezekre azonban a 3.5.4. Young-tétel szó szerint érvényes, így a folytonossági feltételek teljesülése esetén a megfelelő vegyes parciális deriváltak megegyeznek.

3.5.3. Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltfüggvényeit:

   (a) $f(x;y) = 6x - 5y + 4$;

   (b) $f(x;y) = x^2 + 2xy - y^2 + 3x - y + 1$;

   (c) $f(x;y) = x^3y + xy - 6x - 2y + \pi$;

   (d) $f(x;y) = \sin xy$;

   (e) $f(x;y) = \ln xy^2$;

   (f) $f(x;y) = x \operatorname{tg} y$.

2. Határozza meg a következő függvények megadott magasabb rendű parciális deriváltfüggvényeit:

   (a) $f(x;y) = e^{x+y}$, f'''_{xxx}, f'''_{yyx}, $f^{(4)}_{xxxx}$;

   (b) $f(x;y) = y \sin x$, f'''_{yyy}, f'''_{xxx}, f'''_{xyy}, $f^{(4)}_{xxyy}$. (Mit vesz észre?)

3.6. Szélsőérték-számítás

Ebben a fejezetben először a szélsőérték fogalmát járjuk körül. Később feltételt adunk differenciálható függvény szélsőértékének létezésére.

3.6.1. A szélsőérték fogalma

3.6.1. Definíció (Szélsőérték). Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény, $P_0(x_0;y_0) \in D$. Azt mondjuk, hogy f-nek *szélsőértéke* van a P_0 helyen, mégpedig az alább megadott típusú, ha a következő feltételek valamelyike teljesül:

- *abszolút maximum*: ha $f(P_0) \geqslant f(P)$ bármely $P \in D$-re;
- *abszolút minimum*: ha $f(P_0) \leqslant f(P)$ bármely $P \in D$-re;
- *lokális maximum*: ha D tartalmazza P_0 egy környezetét, s $f(P_0) \geqslant f(P)$ teljesül minden olyan P pontra, amely e környezetbe esik;
- *lokális minimum*: ha D tartalmazza P_0 egy környezetét, s $f(P_0) \leqslant f(P)$ teljesül minden olyan P pontra, amely e környezetbe esik.

A P_0 pontot *szélsőértékhelynek* (mégpedig *lokális*, illetve *abszolút minimumhelynek*, illetve *maximumhelynek*), az $f(P_0)$ függvényértéket pedig *szélsőértéknek* (mégpedig *lokális*, illetve *abszolút minimumnak*, illetve *maximumnak*) nevezzük.

3.6.2. Megjegyzések.

- Az abszolút szélsőértéket szokás *globális* szélsőértéknek is nevezni.
- Ha a 3.6.1. definícióban szigorú egyenlőtlenséget követelünk meg, akkor *szigorú* szélsőértékről beszélünk (például szigorú lokális maximumról).
- A szélsőérték lehet tehát abszolút vagy lokális aszerint, hogy az egész értelmezési tartományra, vagy csak P_0 egy környezetére vonatkozik (amely környezet része az értelmezési tartománynak).
- Lehet maximum vagy minimum aszerint, hogy $f(P_0)$ ezen a tartományon a legnagyobb vagy a legkisebb érték.
- Abszolút szélsőérték az értelmezési tartomány egy belső pontjában mindig lokális szélsőérték is.
- Szigorú maximum (minimum) pedig mindig maximum (minimum) is.

3.6.3. Példák.

1. Az $f(x;y) = x^2 + y^2$ függvénynek a $P_0(0;0)$ pontban szigorú abszolút és egyúttal lokális minimuma van, mivel $f(0;0) = 0$, és minden más pontban a függvényérték pozitív, P_0 pedig belső pont, hiszen $D_f = \mathbb{R}^2$.
2. Az $f(x;y) = |x|$ függvénynek a $(0;y)$ pontokban abszolút és egyúttal lokális minimuma van, mivel ezeken a helyeken a függvényérték 0, másutt pozitív ($D_f = \mathbb{R}^2$). Ez a minimum lokálisan sem szigorú, mert mindegyik $(0;y_0)$ pont bármely környezetében van másik $(0;y)$ alakú pont, ahol a függvényérték szintén 0.
3. Az $f(x;y) = \sin x \sin y$ függvénynek a $P_0(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ pontban abszolút és egyúttal lokális maximuma van, mert $f(P_0) = 1$, és ez a lehetséges legnagyobb függvényérték (ezúttal is $D_f = \mathbb{R}^2$). Ez a maximum szigorú lokális maximum, mert P_0-nak például az $r = \frac{\pi}{2}$ sugarú környezetében bármely más helyen vett függvényérték kisebb. A $[0;\pi]$ szakaszon ugyanis a szinuszfüggvény nemnegatív, és egyedül $\frac{\pi}{2}$-ben veszi föl az 1 értéket. Ezen a tartományon tehát akár x, akár y értéke különbözik $\frac{\pi}{2}$-től, az $f(x;y)$ függvényérték 1-nél kisebb lesz.

4. Az $f(x;y) = |1-x^2-y^2|$ függvénynek a $P_0(0;0)$ helyen szigorú lokális maximuma van. A P_0 pont $r=1$ sugarú környezetében a függvényérték ugyanis 1-nél kisebb. Ez a maximum nem abszolút: elegendően nagy x esetén ugyanis $f(x;y)$ bármilyen nagy értéket felvehet.

5. Az $f(x;y)=c$ $(D_f=\mathbb{R}^2)$ konstansfüggvénynek minden pontban abszolút és egyúttal lokális maximuma és minimuma is van. Ez a szélsőérték azonban nem szigorú.

6. Az $f(x;y) = x+y$ függvénynek egyetlen pontban sincs szélsőértéke, x értékének növelésével ugyanis a függvényérték nő, csökkentésével pedig csökken.

3.6.2. A parciális deriváltak és a szélsőérték kapcsolata

Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk, hogy parciálisan deriválható függvény szélsőértékhelyei milyen összefüggést mutatnak a parciális deriváltakkal.

3.6.4. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvénynek a $P_0(x;y) \in D$ helyen szélsőértéke van. Ha f a P_0 pontban x szerint parciálisan deriválható, akkor $f'_x(P_0) = 0$. Hasonlóan, ha f a P_0 helyen y szerint parciálisan deriválható, akkor $f'_y(P_0) = 0$.*

Bizonyítás: Tekintsük a $\varphi(x) = f(x;y_0)$ függvényt. Ekkor φ-nek az x_0 helyen szélsőértéke van. Ha f-nek P_0-ban létezik az x szerinti parciális deriváltja, akkor a 3.1.1. definíció értelmében alkalmas $r > 0$ valós számra φ értelmezési tartománya tartalmazza az $]x_0 - -r; x_0+r[$ intervallumot, továbbá φ deriválható az x_0 helyen. Az egyváltozós függvények szélsőértékhelyen vett deriváltjára vonatkozó tétel (Analízis I. 7.3.2. tétel) értelmében $\varphi'(x_0)=0$. Mivel azonban $\varphi'(x_0)=f'_x(x_0;y_0)$ teljesül, a feltételekből $f'_x(x_0;y_0)=0$ következik. Az előző okfejtést a $\psi(y) = f(x_0;y)$ függvényre elvégezve abban az esetben, ha f-nek létezik a P_0-ban y szerinti parciális deriváltja, az y-ra vonatkozó állítást kapjuk. □

3.6.5. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a tétel nem állítja, hogy bármelyik parciális derivált létezik, csak annyit: „ha létezik, akkor nulla”. Az első példabeli $f(x;y)=|x|$ függvénynek például nem létezik az origóban x szerinti deriváltja, noha itt szélsőértéke van. Létezik viszont $f'_y(0;0)$, és ez nullával egyenlő. A $g(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvény grafikonja egy forgáskúp, ennek az origóban egyik parciális deriváltja sem létezik, a függvénynek ezen a helyen mégis szigorú abszolút minimuma van.

3.6.6. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ és legyen $f\colon D \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény. Azokat a $P_0(x_0;y_0) \in D$ pontokat, amelyekben f mindkét változója szerint parciálisan deriválható, és amelyekben mindkét parciális derivált eltűnik (azaz nullával egyenlő), a függvény *stacionárius pontjainak* nevezzük. Azokban a stacionárius pontokban, amelyekben a függvénynek nincs szélsőértéke, *nyeregpontja* van.

3.6.7. Megjegyzés. Stacionárius pontok tehát azok a pontok, ahol a függvénynek „lehet, hogy szélsőértéke van”. Pontosabban fogalmazva: más pontban biztosan nincs a függvénynek szélsőértéke.

3.6.8. Példák. Határozzuk meg az alábbi függvények stacionárius pontjait:

1. $f(x;y) = c$.

Megoldás: f-nek minden pontban mindkét parciális deriváltja nulla, így a sík összes pontja stacionárius pont (egyúttal szélsőértékhely is).

2. $f(x;y) = x + y$.

   Megoldás: Az f függvénynek mindkét parciális deriváltja azonosan 1, így ennek a függvénynek nincs stacionárius pontja.

3. Tekintsük most az $f(x;y) = x^2 + y^2$ függvényt.

   Megoldás: f két parciális deriváltja $f'_x(x;y) = 2x$ és $f'_y(x;y) = 2y$. Mindkét derivált egyedül a $P_0(0;0)$ pontban tűnik el. Így az f függvénynek ez az egyetlen stacionárius pontja. Mivel itt a függvénynek minimuma van, ezért itt nincs nyeregpontja.

4. Legyen $f(x;y) = \sin x \sin y$.

   Megoldás: A parciális deriváltak $f'_x(x;y) = \cos x \sin y$, illetve $f'_y(x;y) = \sin x \cos y$. Mivel $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem tűnhet el, az $f'_x(x;y) = 0$, $f'_y(x;y) = 0$ egyenletrendszer megoldásai a $\cos x = 0$, $\cos y = 0$ és a $\sin x = 0$, $\sin y = 0$ egyenletrendszerek megoldásainak együttese.

   Az előbbi egyenletrendszert a $(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + \ell\pi)$ alakú pontok, utóbbit pedig a $(k\pi; \ell\pi)$ alakú pontok elégítik ki (k és ℓ tetszőleges egész számok). Ezek tehát az f függvény stacionárius pontjai. Világos azonban, hogy f-nek a $(k\pi; \ell\pi)$ alakú pontokban nincs szélsőértéke, hiszen itt a függvényérték nulla, míg x és y kis megváltoztatásával f mind negatív, mind pozitív értéket fölvehet. Így f-nek a $(k\pi; \ell\pi)$ alakú pontokban (k, $\ell \in Z$ tetszőleges) nyeregpontja van.

   A $(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + \ell\pi)$ alakú pontokban viszont a függvényérték 1 vagy -1, ami a lehetséges legnagyobb, illetve legkisebb. Így ezekben a pontokban f-nek szélsőértéke van. Ez a szélsőérték lokális maximum, ha a függvényérték 1, vagyis a $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi)$, illetve $(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi; \frac{\pi}{2} + (2\ell+1)\pi)$ alakú pontokban; lokális minimum, ha a függvényérték -1, vagyis a $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + (2\ell+1)\pi)$, illetve $(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi; \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi)$ alakú pontokban. (k és ℓ minden esetben tetszőleges egész szám.) Mivel a lokális maximumhelyek mindegyikében a függvényérték 1, a lokális minimumhelyek mindegyikében pedig -1, ezért megállapíthatjuk, hogy ezek a szélsőértékhelyek egyúttal abszolútak is.

3.6.3. Szélsőérték és a másodrendű parciális deriváltak

A szélsőérték létezésének adja egy elégséges feltételét a következő tétel:

3.6.9. Tétel (Lokális szélsőérték elégséges feltétele). *Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvénynek léteznek és folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai a P_0 stacionárius pont egy környezetében. Ekkor f-nek szigorú lokális szélsőértéke van a P_0 helyen, amennyiben*

$$D_f(P_0) = f''_{xx}(P_0) \cdot f''_{yy}(P_0) - {f''_{xy}}^2(P_0) > 0$$

teljesül. Ez esetben, ha $f''_{xx}(P_0) > 0$, akkor a szélsőérték minimum, ha pedig $f''_{xx}(P_0) < 0$, akkor maximum.

3.6.10. Megjegyzések.

- Hangsúlyozzuk, hogy a tétel csak stacionárius pontban érvényes, hiszen más pontban a függvénynek nem lehet szélsőértéke. Hiába pozitív tehát $D_f(P_0)$ valamely P_0 pontban, ha itt az elsőrendű parciális deriváltak nem tűnnek el, a pontban nincs szélsőérték.

- A tétel nem vizsgálja, hogy az adott helyeken abszolút szélsőérték van-e. Vegyük észre: ez nem is volna lehetséges, hiszen a parciális deriváltak csak a függvény lokális viselkedéséről hordoznak információt. A globális szélsőértékek keresése összetettebb probléma, a lokális szélsőértékhelyek meghatározása után az e helyeken felvett függvényértékek összehasonlítása és a határokon való viselkedés vizsgálata után dönthető el.

- Vegyük észre, hogy a megadott feltételek mellett $f''_{xx}(P_0) = 0$ nem teljesülhet. Ekkor ugyanis $D_f(P_0) = f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0) - {f''_{xy}}^2(P_0) = -{f''_{xy}}^2(P_0) \leqslant 0$.

- Hasonló okokból $D_f(P_0) > 0$ esetén, ha $f''_{xx}(P_0) > 0$, akkor $f''_{yy}(P_0) > 0$ is fennáll. Ellenkező esetben ugyanis a $f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)$ szorzat nulla vagy negatív, ebből ${f''_{xy}}^2(P_0)$-t kivonva nem kaphatunk pozitív számot.

- Végül, ha $f''_{xx}(P_0) < 0$ teljesül, akkor $f''_{yy}(P_0) < 0$ is fennáll.

- Vegyük észre, hogy a $D_f(P_0)$ érték tulajdonképpen a másodrendű parciális deriváltakból készített determináns értéke:

$$D_f(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}.$$

3.6.11. Példák.

1. Mutassuk meg, hogy az $f(x;y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$ függvénynek a $P_0(2;-1)$ pontban lokális minimuma van.

   Megoldás: Elsőként megjegyezzük, hogy az f függvény teljesíti a másodrendű parciális deriváltak folytonosságára vonatkozó feltételt, hiszen olyan függvényekből áll elő algebrai műveletekkel, amelyek teljesítik azt. Vizsgáljuk meg most, hogy a P_0 pont a függvénynek valóban stacionárius pontja-e. Ehhez először kiszámítjuk a parciális deriváltfüggvényeket: $f'_x(x;y) = 2x - 4$ és $f'_y(x;y) = 2y + 2$. Ezeket a P_0 pontban kiértékelve az $f'_x(P_0) = 4 - 4 = 0$, illetve az $f'_y(P_0) = -2 + 2 = 0$ eredményre jutunk, tehát a P_0 ténylegesen stacionárius pont.

   Most megvizsgáljuk a tételben szereplő $D_f(P_0)$ kifejezés értékét. Ehhez először a másodrendű parciális deriváltakat számítjuk ki: $f''_{xx}(x;y) = 2$, $f''_{xy}(x;y) = 0$ és $f''_{yy}(x;y) = 2$, tehát

$$D_f(P_0) = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0.$$

   Ezért f-nek a P_0 pontban lokális szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(P_0) = 2 > 0$, ez a szélsőérték minimum. Figyeljük meg, hogy az $f''_{xx}(P_0)$ és $f''_{yy}(P_0)$ értékek előjele valóban megegyezik.

Az f függvénynek a P_0 pontban nem csak lokális, hanem abszolút minimuma van. Erről algebrai átalakítások segítségével közvetlenül meggyőződhettünk volna, hiszen

$$f(x;y) = (x-2)^2 3(x+1)^2,$$

ami mindenütt pozitív, kivéve a P_0 pontban, ahol a függvényérték 0.

2. Mutassuk meg most, hogy az $f(x;y)=x^3-y^2-3x$ függvénynek a $P_0(-1,0)$ pontban lokális maximuma van.

   Megoldás: A folytonossági kritérium ismét teljesül. Számítsuk ki tehát elsőként az elsőrendű parciális deriváltakat: $f'_x(x;y)=3x^2-3$, $f'_y(x;y)=-2y$. Ezekbe a P_0 pont koordinátáit behelyettesítve kapjuk, hogy $f'_x(P_0) = 3-3 = 0$, illetve $f'_y(P_0) = 0$. P_0 tehát valóban stacionárius pont.

   Második lépésként számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat: $f''_{xx}(x;y)=6x$, $f''_{xy}(x;y) = 0$ és $f''_{yy}(x;y) = -2$. Ezekbe P_0-t helyettesítve $D_f(P_0) = (-6)\cdot(-2) - - 0^2 = 12 > 0$, így P_0-ban lokális szélsőérték van. $f''_{xx}(P_0)$ előjelét megvizsgálva (ez negatív), megállapítjuk, hogy P_0 lokális maximumhely.

A tétel lehetőséget nyújt arra, hogy egy f függvény szélsőértékhelyeit meghatározzuk:

3.6.12. Algoritmus (Lokális szélsőértékek meghatározása).

- Ha a függvény elemi függvényekből összeállított kétváltozós függvény, 0. lépésként megállapítjuk, hogy a másodrendű parciális deriváltak folytonosak az értelmezési tartomány minden pontjában. Megjegyezzük, hogy ebből következően a Young-tétel miatt a vegyes parciális deriváltak közül csak egyet kell majd kiszámítanunk.
- 1. lépésként meghatározzuk f elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit.
- 2. lépésként megoldjuk a keletkező

  $$\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 0 \\ f'_y(x;y) &= 0 \end{aligned}$$

  egyenletrendszert. A kapott $P_0(x_0;y_0)$, $P_1(x_1;y_1)$, ... pontok (esetleg végtelen sokan) a függvény stacionárius pontjai.
- 3. lépésként meghatározzuk a másodrendű parciális deriváltfüggvényeket.
- 4. lépésként ezeket kiértékeljük az összes P_i stacionárius pontban, és megvizsgáljuk a $D_f(P_i)$ számok előjelét. Amelyik pozitív, ott f-nek lokális szélsőértéke van.
- 5. lépésként a kapott szélsőértékhelyeken megvizsgáljuk az $f''_{xx}(P_i)$ előjelét is. Ahol pozitív, ott lokális minimum, ahol negatív, ott lokális maximum van.
- Végül, 6. lépésként kiszámítjuk az $f(P_i)$ szélsőértékeket is (a megfelelő P_i pontokban).

3.6.13. Példák. A 3.6.12. algoritmus segítségével határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit:

1. $f(x;y) = x^2 + y^2$.

   Megoldás: f-nek korábban már meghatároztuk a stacionárius pontjait, de a teljesség kedvéért végigvisszük a 3.6.12. eljárást. A parciális deriváltfüggvények: $f'_x(x;y) = 2x$ és $f'_y(x;y) = 2y$. Ezek közös zérushelye az $O(0;0)$ pont.

   A másodrendű parciális deriváltfüggvények: $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 0$ és $f''yy = 2$. Így $D(O) = = 4 > 0$ adódik. Mivel $f''_{xx} = 2 > 0$, a kapott helyen lokális minimum van. Értéke $f(0;0) = 0$.

2. $f(x;y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 6y + 1$.

   Megoldás: A parciális deriváltfüggvények és a belőlük adódó egyenletrendszer:

   $$\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 2x - 2y - 2 = 0, \\ f'_y(x;y) &= -2x + 6y - 6 = 0. \end{aligned}$$

   Az első egyenletből $x = 1 + y$ adódik, amely a másodikba behelyettesítve a

   $$-2(1+y) + 6y - 6 = 0$$

   egyenletet, azaz az $y = 2$ megoldást eredményezi. Innen $x = 3$. A függvénynek tehát egyetlen stacionárius pontja van, a $P_0(3;2)$ pont.

   A másodrendű parciális deriváltak $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -2$ és $f''_{yy} = 6$. Így $D_f(P_0) = 2 \cdot 6 - -(-2)^2 = 8 > 0$, tehát P_0 szélsőértékhely. Mivel $f''_{xx} = 2 > 0$, ezért a függvénynek itt lokális minimuma van. A minimum értéke $f(3;2) = -8$.

3.6.4. Nyeregpont és a másodrendű parciális deriváltak

A következő tételben megvizsgáljuk, hogy a másodrendű deriváltakból hogyan lehet arra következtetni, hogy egy függvénynek egy adott helyen nyeregpontja van.

3.6.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvénynek léteznek és folytonosak a másodrendű parciális deriváltjai a P_0 stacionárius pont egy környezetében. Az f függvénynek a P_0 pontban nyeregpontja van, amennyiben*

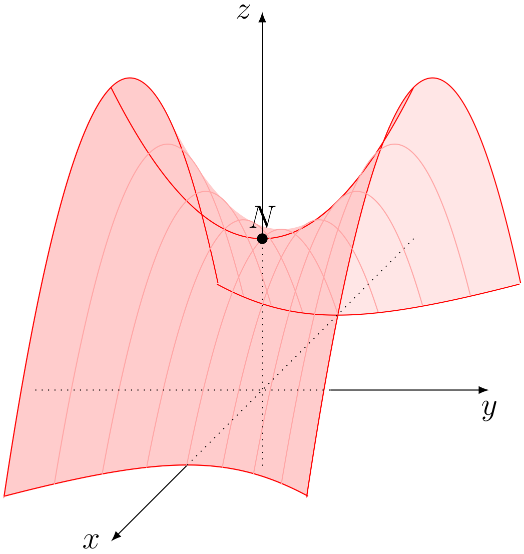
$$D_f(P_0) = f''_{xx}(P_0) \cdot f''_{yy}(P_0) - {f''_{xy}}^2(P_0) < 0$$

teljesül.

3.6.15. Megjegyzések.

- A „nyeregpont” elnevezés a (valódi) lónyereg középső pontjára utal, ahol a lovas ül, és amely keresztirányban maximumhely (a lovas két lába lefelé lóg), hosszanti irányban pedig minimumhely (hogy a lovas ne csúszkáljon a nyergen). Megmutatható, hogy a tétel feltételeinek eleget tevő pontban kijelölhető két, egymásra merőleges irány, amelyek közül az egyikben a függvénynek maximuma, míg a másikban minimuma van. Egy függvény nyeregpontját a 3.8. ábrán tanulmányozhatjuk.

- Vegyük észre, hogy ha $f''_{xx}(P_0)$ és $f''_{yy}(P_0)$ előjele különbözik, akkor a függvénynek P_0-ban szükségképpen nyeregpontja van. Ekkor ugyanis $D_f(P_0)$ negatív.



3.8. ábra. Nyeregpont: az N pont

3.6.16. Példák.

1. Mutassuk meg, hogy az $f(x;y)=x^2-y^2$ függvénynek a $P_0(0;0)$ pontban nyeregpontja van.

   Megoldás: Először is megállapítjuk, hogy a függvény másodrendű parciális deriváltjai mindenütt folytonosak. Az elsőrendű deriváltak: $f'_x(x;y)=2x$ és $f'_y(x;y)=-2y$. Ezekbe a P_0 pont koordinátáit behelyettesítve 0-t kapunk, tehát P_0 valóban stacionárius pont.

   A másodrendű deriváltak: $f''_{xx}(x;y)=2$, $f''_{xy}(x;y)=0$, illetve $f''_{yy}(x;y)=-2$. Ebből $D_f(P_0)=2\cdot(-2)-0=-4<0$. Tehát a függvénynek P_0-ban valóban nyeregpontja van.

2. Mutassuk most meg, hogy az $f(x;y)=xy-2x-y+1$ függvénynek a $P_0(1;2)$ pontban nyeregpontja van.

   Megoldás: Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények $f'_x(x;y)=y-2$ és $f'_y(x;y)=x-1$, ezek a P_0 pontban valóban eltűnnek. Így P_0 stacionárius pont. A másodrendű parciális deriváltak $f''_{xx}(x;y)=0$, $f''_{xy}(x;y)=1$ és $f''_{yy}(x;y)=0$. Tehát $D_f(P_0)=-1$, így P_0-ban f-nek nyeregpontja van.

3.6.17. Megjegyzés. A tétel alapján a szélsőértékhelyek keresésére szolgáló 3.6.12. algoritmust kiegészíthetjük a következő ponttal:

- 4. lépés kiegészítése: amely P_i pontokban $D_f(P_i)$ előjele negatív, ott a függvénynek nyeregpontja van.

Ha a stacionárius pontban $f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-{f''_{xy}}^2(P_0)=0$ teljesül, a 3.6.9. és 3.6.14. tételek nem adnak választ arra, hogy a függvénynek szélsőértéke vagy nyeregpontja van az adott helyen. Ilyenkor ennek eldöntésére más módszert kell keresni.

3.6.18. Példák. Keressük meg az alábbi függvények szélsőértékeit és nyeregpontjait.

1. $f(x;y) = x^3 - 3xy + 6y + 2$.

   Megoldás: A parciális deriváltak: $f'_x(x;y) = 3x^2 - 3y$, illetve $f'_y(x;y) = -3x + 6$. A $-3x+6=0$ egyenlet megoldása $x=2$, ezt behelyettesítve a $3x^2 - 3y = 0$ egyenletbe, a $12 - 3y = 0$ egyenlethetz jutunk. Így $y = 4$. A függvény egyenletlen stacionárius pontja tehát a $P_0(2;4)$ pont.

   A másodrendű parcális deriváltak: $f''_{xx}(x;y) = 6x$, $f''_{xy}(x;y) = -3$ és $f''_{yy}(x;y) = 0$. Tehát $D_f(P_0) = -9$. A függvénynek P_0-ban tehát nyeregpontja van.

2. $f(x;y) = x^3 - y^2 - 6xy - 5y + 2$.

   Megoldás: Az f függvény esetében az

$$\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 3x^2 - 6y &&= 0 \\ f'_y(x;y) &= -2y - 6x - 5 &&= 0 \end{aligned}$$

   egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $x^2 = 2y$ adódik, így a második egyenletben $2y$ helyére x^2-et írunk. Így x-re -1-gyel való szorzás utána az

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

   másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldása

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = -3 \pm 2.$$

   Így $x_1 = -1$, $x_2 = -5$. Innen $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{25}{2}$. A függvény stacionárius pontjai tehát

$$P_1\left(-1; \tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{és} \qquad P_2\left(-5; \tfrac{25}{2}\right).$$

   A másodrendű deriváltfüggvények: $f''_{xx}(x;y) = 6x$, $f''_{xy}(x;y) = -6$ és $f''_{yy}(x;y) = -2$. Behelyettesítés után

$$D_f(P_1) = (-6)\cdot(-2) - (-6)^2 = -24 < 0$$

   és

$$D_f(P_2) = (-30)\cdot(-2) - (-6)^2 = 24 > 0$$

   adódik. Ezért a P_1 pontban nyeregpont, P_2-ben pedig lokális szélsőérték, mégpedig maximum van.

3. $f(x;y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + y^2 - 1$.

   Megoldás: A parciális deriváltak és a belőlük adódó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 4x^3 - 4x = 0 \\ f'_y(x;y) &= 4y^3 + 2y = 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből $x(x^2-1)=0$, azaz $x_0=0$, $x_1=1$ és $x_2=-1$ adódik. A másodikból pedig $y(2y^2+1)=0$, amelynek $y=0$ az egyetlen megoldása. Így a stacionárius pontok $P_0(0;0)$, $P_1(1;0)$ és $P_2(-1;0)$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x;y) = 12x^2-4$$
$$f''_{xy}(x;y) = 0$$

és

$$f''_{yy}(x;y) = 12y^2+2.$$

Ezek helyettesítési értékei a stacionárius pontokban:

	P_0	P_1	P_2
f''_{xx}	-4	8	8
f''_{xy}	0	0	0
f''_{yy}	2	2	2
D_f	-8	16	16

Így P_0-ban nyeregpont van, P_1 és P_2 pedig lokális szélsőértékhely. Mindkét pontban minimum van, hiszen f''_{xx} előjele pozitív.

4. $f(x;y) = x^2y-6xy+y^2$.

   Megoldás: f parciális deriváltjaiból adódó egyenletrendszer:

$$f'_x(x;y) = 2xy-6y \quad = 0$$
$$f'_y(x;y) = x^2-6x+2y = 0.$$

   Az első egyenletet átalakítva $(x-3)y=0$, ahonnan $x=3$ vagy $y=0$. Ha $x_0=3$, akkor a második egyenletből $9-18+2y=0$, azaz $y_0=4{,}5$. Ha pedig $y_1=0$, akkor $x^2-6x=0$, tehát $x_1=0$, $x_2=6$. Tehát a stacionárius pontok: $P_0(3;4{,}5)$, $P_1(0;0)$ és $P_2(6;0)$.

   A másodrendű deriváltak $f''_{xx}(x;y)=2y$, $f''_{xy}(x;y)=2x-6$ és $f''_{yy}(x;y)=2$. Így $D_f(P_0)=$ $=18-0>0$, $D_f(P_1)=D_f(P_2)=-36<0$. Így P_0-ban lokális szélsőérték, mégpedig minimum van, P_1-ben és P_2-ben pedig nyeregpont.

5. Végül tekintsünk egy komplikáltabb esetetet: vizsgáljuk meg a 3.6.8. 4. példabeli $f(x;y)=\sin x \sin y$ függvényt.

   Megoldás: A parciális deriváltfüggvények $f'_x(x;y)=\cos x \sin y$, illetve $\sin x \cos y$. A 3.6.8. 4. példa eredményei szerint a stacionárius pontok a $P_{k,\ell}(\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+\ell\pi)$, valamint a $Q_{k,\ell}(k\pi;\ell\pi)$ alakú pontok (itt $k,\ell\in\mathbb{Z}$ teljesül).

   A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f''_{xx}(x;y) = -\sin x \sin y,$$
$$f''_{xy}(x;y) = \cos x \cos y$$
$$f''_{yy}(x;y) = -\sin x \sin y.$$

Ezeknek a $P_{k,\ell}$ stacionárius pontokban vett helyettesítési értékei:

$$f''_{xx}(P_{k,\ell}) = f''_{yy}(P_{k,\ell}) = \pm 1$$
$$f''_{xy}(P_{k,\ell}) = 0$$

Így $D_f(P_{k,\ell}) = 1 > 0$, ezekben a pontokban tehát lokális szélsőérték van. A szélsőérték típusának eldöntéséhez vizsgáljuk meg $f''_{xx}(P_{k,\ell})$ előjelét. Mivel $\sin x$ a $\frac{\pi}{2} + 2t\pi$ alakú pontokban $+1$-et, a $\frac{\pi}{2} + (2t+1)\pi$ alakú pontokban pedig -1-et vesz föl, $f''_{xx}(P_{k,\ell})$ előjele pozitív, ha k és ℓ egyike páros, másika páratlan, negatív, ha vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Tehát például a $P_{2;3}$, illetve a $P_{-1;4}$ pontokban lokális minimum, míg a $P_{6;10}$, illetve a $P_{9;-21}$ pontokban lokális maximum van.

A másodrendű parciális deriváltak helyettesítési értékei a $Q_{k,\ell}$ pontokban:

$$f''_{xx}(Q_{k,\ell}) = f''_{yy}(Q_{k,\ell}) = 0,$$
$$f''_{xy}(x,y)(Q_{k,\ell}) = \pm 1,$$

így ezeken a helyeken $D_f(Q_{k,\ell}) = 0 - 1 < 0$, a k és ℓ értékétől függetlenül. Így a $Q_{k,\ell}$ pontokban nyeregpont van.

3.6.5. Az n-változós eset

A szélsőérték fogalma n változó esetén szó szerint megegyezik a kétváltozós függvényekre vonatkozó definícióval. A deriváltak ugyanúgy eltűnnek a szélsőértékhelyeken, mint a kétváltozós esetben.
A szélsőérték létezésére vonatkozó elégséges feltétel azonban lényegesen bonyolultabb, mint kétváltozós függvények esetében. Ekkor ugyanis az n^2 darab másodrendű derivált egy $n \times n$-es táblázatba foglalható. E táblázat bizonyos aldeterminánsainak előjele alapján dönthető el, hogy az adott stacionárius pontban van-e szélsőérték, és milyen jellegű. E tételt bonyolultsága miatt nem részletezzük.

3.6.6. Feladatok

1. A definíció felhasználásával határozza meg a következő függvények szélsőértékeit. Adja meg a szélsőérték fajtáját is.

   (a) $f(x;y) = x^4 + y^4$;

   (b) $f(x;y) = x^2 - 2x + y^2 + 1$;

   (c) $f(x;y) = e^{-x^2-y^2}$.

   (d)* $f(x;y) = \sin xy$;

2. Számítsa ki a következő függvények szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait.

   (a) $f(x;y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2$;

   (b) $f(x;y) = 2xy - 4x + 6y - 1$;

   (c) $f(x;y) = x^2 - y^2 + 2x$;

   (d) $f(x;y) = xy - x^2 - y^2 + 3y - 5$;

   (e) $f(x;y) = xy^2 - x^2 - 2y^2 + 1$;

(f) $f(x;y) = x^3 - y^3 + 3xy\,;$

(g) $f(x;y) = y^3 + xy^2 + xy - 2x - 1\,;$

(h) $f(x;y) = x^4 + y^2 + 24x - 2y + \pi.$

4. fejezet

Kétváltozós függvények integrálszámítása

Az egyváltozós függvények integrálfogalmához hasonló módon értelmezhetjük a két- (vagy több-) változós függvények integrálját is.
Emlékezzünk vissza az egyváltozós függvények integrálszámításánál tanultakra. A motiváció az volt, hogy kiszámítsuk az x-tengely és az egyváltozós függvénygörbe által közrezárt síkidom (előjeles) területét egy adott intervallumban. A módszer az volt, hogy az intervallumot részintervallumokra osztottuk, egy-egy részintervallumban pedig olyan magasságú téglalap területével közelítettünk, amelynek magassága az intervallumból vett helyen felvett függvényérték. A definíció szerint akkor tekintettük integrálhatónak a függvényt az adott intervallumon, ha ezen közelítéseknek létezett határértéke bármely végtelenül finomodó felosztássorozat esetén.
Hasonlóan fogunk eljárni kétváltozós függvények esetén is. Szeretnénk kiszámítani az xy sík és a függvényfelület közötti test (előjeles) térfogatát egy adott tartományon. Ehhez a tartományt résztartományokra osztjuk, egy-egy tartományban olyan magasságú (hengerszerű) testtel közelítünk, amelynek magassága a tartományból vett helyen felvett függvényérték. Majd vizsgáljuk, hogy ezen közelítéseknek létezik-e határértéke végtelenül finomodó felosztássorozatok esetén.
Ahhoz azonban, hogy a kettős integrál fogalmát így analóg módon definiálni tudjuk, szükségünk van többek között a területfogalom vagy a tartományfelosztás fogalmának általánosítására.

4.1. A területfogalom általánosítása

Bizonyos síkidomok területét ismerjük, mint például a téglalap; ennek segítségével fogjuk értelmezni a sík (az $\mathbb{R}^2$ tér) egy tetszőleges korlátos H részhalmazának mérhetőségét.
Mivel a H halmaz korlátos, létezik egy olyan téglalap (általánosan egy kétdimenziós tégla), amelynek a H halmaz minden pontja eleme:

$$H \subseteq \{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Vegyük az $[a;b]$ intervallum egy m-részes és a $[c;d]$ intervallum egy n-részes felosztását:

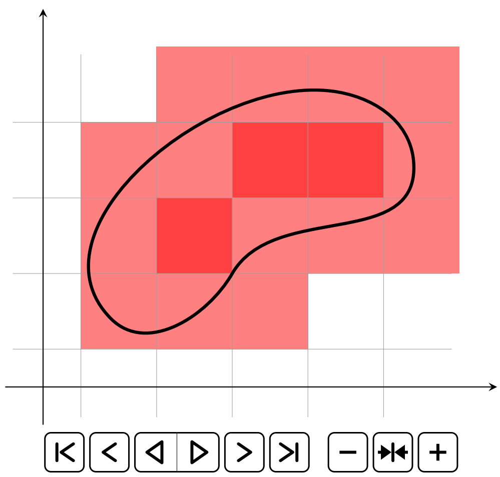
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

Az x_i pontokon átfektetett, y tengellyel párhuzamos, valamint az y_j pontokra illeszkedő, x tengellyel párhuzamos egyenesek az eredeti téglalapot egy téglalaprács mentén résztéglalapokra bontják. A téglalap ezen résztéglalapokra történő felosztását jelöljük F_{mn}-nel. A felosztás finomságának nevezzük a legnagyobb résztéglalap átmérőjét[1], és jelöljük $d(F_{mn})$-nel. Világos, hogy minél kisebb $d(F_{mn})$, a felosztás annál „sűrűbb”, finomabb.

Ezek után tekintsük azokat a résztéglalapokat, amelyeknek van (akárcsak egy) közös pontja a H halmazzal, és ezek területének összegét jelölje $A_{F_{mn}}$. Mivel a H halmaz minden pontja eleme ennek a *külső* téglalaphalmaznak, így a területének mértéke (amennyiben létezik) legfeljebb $A_{F_{mn}}$. Tekintsük ugyanakkor azokat a résztéglalapokat, amelyeknek minden pontja eleme a H halmaznak, és ezek területösszegét jelölje $a_{F_{mn}}$. Mivel a H halmaz ezt a *belső* téglalaphalmazt teljesen lefedi, ezért a területének mértéke (már ha létezik) legalább $a_{F_{mn}}$.

Vegyük ezután az F_{mn} felosztásokhoz tartozó *külső területek* alsó határát, amelyet jelöljünk $A(H)$-val; majd a *belső területek* felső határát, amelyet jelöljünk $a(H)$-val. Világos, hogy akkor tulajdoníthatunk területet a H halmaznak, ha a fenti két érték megegyezik, vagyis a kettő közötti $A_{F_{mn}} - a_{F_{mn}}$ *köztes terület* nagyságának alsó határa 0.

Az alábbi animáción azt követheti nyomon, hogy egy finomodó felosztássorozat esetén hogyan változik az alakzatot közelítő külső és belső téglalapok területe. A sötétebb piros a belső résztéglalapokat, a sötétebb és a világosabb színezés együtt a külső résztéglalapokat ábrázolja. A finomodó felosztássorozat esetén a belső téglalapok területe monoton nő, a külső (vagy fedő) téglalapok területe monoton fogy, míg a külső és belső téglalapok területének különbsége egyre inkább elvékonyodik, 0-hoz tart.



4.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a korlátos H halmaz *mérhető*, ha a H halmazra meghatározott $A(H)$ „külső terület” és $a(H)$ „belső terület” megegyezik. Ezt az értéket a H halmaz mértékének nevezzük, és $\mu(H)$-val jelöljük.

4.1.2. Megjegyzések.

- Az intervallumok felosztása nem feltétlenül egyenletes; a definíció nem köti ki, hogy egyenlő hosszúságú részintervallumokra kell osztani a befoglaló intervallumokat.
- Amennyiben $a(H) < A(H)$, akkor a H halmaz nem mérhető. Ilyen halmaz például, ha vesszük az egységnégyzet azon pontjait, amelyeknek az első koordinátája irracionális; ekkor $a(H) = 0$, míg $A(H) = 1$.

[1]Egy ponthalmaz átmérője a két legtávolabb lévő pontjának távolsága; ez téglalap esetén az átló hosszát jelenti.

- Az is előfordul, hogy a H halmaz nem-üres, a mértéke viszont 0. Ilyen a síkon bármilyen véges ponthalmaz vagy az egyenesek, görbék (korlátos) darabjai.
- Megmutatható, hogy ha H_1 és H_2 mérhető halmazok, akkor $H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2$ és $H_1 \setminus H_2$ is az.

A fenti mértékfogalom megfelel a korábbi területfogalomnak, ugyanis a téglalapok, háromszögek, sokszögek mértéke megegyezik területükkel, de a fogalom ennél általánosabb. Belátható, hogy erre a mértékfogalomra igazak az alábbi (a felsőbb matematikában axiómaként kezelt) tulajdonságok:

1. Ha H mérhető, akkor $\mu(H) \geqslant 0$.
2. Ha H_1 és H_2 két egybevágó, mérhető alakzat, akkor $\mu(H_1) = \mu(H_2)$.
3. Ha H_1 és H_2 két mérhető alakzat, akkor $H_1 \cup H_2$ és $H_1 \cap H_2$ is az, és $\mu(H_1 \cup H_2) = = \mu(H_1) + \mu(H_2) - \mu(H_1 \cap H_2)$.
4. Az egységnyi oldalú négyzet mérhető, és mértéke 1.

A mérhető ponthalmazokat a továbbiakban *tartománynak* fogjuk nevezni.

4.2. A kettős integrál

Legyen az f kétváltozós függvény korlátos az A mérhető halmazon. Vegyük az A tartomány egy F_n felosztását, amelyben az A_1, A_2, $\ldots$, A_n halmazok mindegyike mérhető, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$, de bármely két résztartomány metszete nulla mértékű. A felosztás finomsága alatt értjük a legnagyobb átmérőjű halmaz átmérőjét:

$$d(F_n) = \max_i d(A_i)\,.$$

A motivációnknak megfelelően az A_i résztartományon közelítjük a térfogatot egy olyan A_i alapú testtel, amelynek magassága az A_i résztartományból vett helyen felvett függvényérték: $f(P_i)\,\mu(A)$, ahol $P_i \in A_i$; majd összegezzük őket:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\mu(A),$$

ezzel megkapjuk az f függvény A tartományon vett egy *Riemann-féle integrálközelítő összegét.* Ha ennek létezik véges határértéke bármely végtelenül finomodó felosztássorozat esetén, akkor a függvény integrálható az A tartományon.

4.2.1. Definíció (Kettős integrál). A mérhető A tartományon értelmezett f függvény *Riemann-integrálható* ezen a tartományon, ha a

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\mu(A_i), \qquad \text{ahol } P_i \in A_i$$

határérték létezik és véges. Az f függvény A tartományon vett *Riemann-integrálján* vagy *kettős integrálján* ezt a véges határértéket értjük. Jelölése:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\mu(A_i) = \iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A.$$

4.2.2. Megjegyzések.

- Ha az A integrálási tartomány nulla mértékű, akkor minden részhalmaza, és így minden felosztása is nulla mértékű, ezért a kettős integrál értéke minden függvényre 0. A kettős integrál értéke akkor „érdekes”, ha az integrálási tartomány nem nulla mértékű, azaz klasszikus értelemben vett *síkidom*. A folytonos függvény grafikonja és az xy sík csak ebben az esetben zár közre klasszikus értelemben vett *testet*.

- Vegyük észre, hogy a definíciót kétváltozós függvények integrálhatóságának céljával adtuk meg, de abban lényegileg nem használtuk ki e specialitást. A Riemann-integrálhatóság fenti fogalma érvényes n-változós függvények n-dimenziós tartományon vett Riemann-integrálhatóságára is, azonban a jelölésben különbséget teszünk:

$$\int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A, \qquad \iiint\limits_V f(P)\,\mathrm{d}V,$$

  ahol I, A és V rendre 1-, 2- és 3-dimenziós tartományt (azaz intervallumot, területet és térfogatot) jelöl.

4.2.1. A kettős integrál tulajdonságai

A definícióból az egyváltozós integrálhoz hasonló tulajdonságok vezethetők le a kettős integrál esetén is.

4.2.3. Tétel (Aránytartó). *Ha f integrálható az A tartományon, akkor, akkor bármely c valós szám esetén cf függvény is integrálható ugyanitt, és*

$$\iint\limits_A cf(P)\,\mathrm{d}A = c\iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A.$$

Bizonyítás:

$$\iint\limits_A c\cdot f(P)\,\mathrm{d}A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} c\cdot f(P_i)\,\mu(A_i) = c\lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\mu(A_i) = c\iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A.$$

□

4.2.4. Tétel (Összegtartó; integrandus szerinti additivitás). *Ha f és g függvény integrálható az A tartományon, akkor az $f+g$ összegfüggvény is integrálható ugyanitt, és*

$$\iint\limits_A (f+g)(P)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A + \iint\limits_A g(P)\,\mathrm{d}A.$$

Bizonyítás:

$$\iint\limits_A (f+g)(P)\,\mathrm{d}A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} (f+g)(P_i)\,\mu(A_i) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} (f(P_i)+g(P_i))\,\mu(A_i) =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\mu(A_i) + \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_n)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\,\mu(A_i) = \iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A + \iint\limits_A g(P)\,\mathrm{d}A.$$

4.2.5. Tétel (Tartomány szerinti addivitás). *Ha f integrálható az A_1 és A_2 tartományon, akkor f integrálható az $A_1 \cup A_2$ tartományon is; továbbá ha $A_1 \cap A_2$ nulla mértékű tartomány, akkor*

$$\iint\limits_{A_1 \cup A_2} f(P)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{A_1} f(P)\,\mathrm{d}A + \iint\limits_{A_2} f(P)\,\mathrm{d}A.$$

Bizonyítás: Ha $A_1 \cap A_2$ nulla mértékű tartomány, a bizonyítás az alábbi átalakításon alapul:

$$\iint\limits_{A_1 \cup A_2} f(P)\,\mathrm{d}A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d(F_{12,n})\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\mu(A_{12,i}) =$$

$$\lim_{\substack{n_1\to\infty \\ d\left(F_{1,n_1}\right)\to 0}} \sum_{i=1}^{n_1} f(P_i)\,\mu(A_{1,i}) + \lim_{\substack{n_2\to\infty \\ d\left(F_{2,n_2}\right)\to 0}} \sum_{i=1}^{n_2} f(P_i)\,\mu(A_{2,i}) = \iint\limits_{A_1} f(P)\,\mathrm{d}A + \iint\limits_{A_2} f(P)\,\mathrm{d}A,$$

ahol F_{1,n_1}, F_{2,n_2}, $F_{12,n}$ rendre az A_1, A_2, $A_1 \cup A_2$ halmazok n_1, n_2, n részes felosztását jelölik. Jobbról balra olvasva könnyű látni az átalakítás helyességét, hiszen A_1, A_2 felosztásait egyesítve $A_1 \cup A_2$ egy felosztását kapjuk; ilyenkor $n = n_1 + n_2$. Belről jobbra követve az átalakítást pedig, ha $A_1 \cup A_2$ olyan felosztásait tekintjük, amelyek tartalmaznak olyan résztartományt, amelynek nem nulla mértékű metszete van A_1 és A_2 mindegyikével, ezek a minden határon túl finomodó átmenet esetén „eltűnnek”, nulla mértékűvé válnak. Ezért tekinthetjük csak azokat a felosztásokat, amelyek ilyen résztartományt nem tartalmaznak. □

4.2.6. Tétel (Az integrál triviális becslése). *Ha f integrálható az A tartományon, $m = \inf\limits_{P\in A} f(P)$ és $M = \sup\limits_{P\in A} f(P)$, akkor*

$$m\mu(A) \leqslant \iint\limits_{A} f(P)\,\mathrm{d}A \leqslant M\mu(A)\,.$$

(Ha f folytonos az A zárt tartományon, akkor $m = \min\limits_{P\in A} f(P)$ és $M = \max\limits_{P\in A} f(P)$ a Weierstrass-tétel értelmében.)

Bizonyítás: Mivel $m \leqslant f(P) \leqslant M$ minden $P \in A$ pont esetén, illetve $\mu(A) = \sum_i \mu(A_i)$ a felosztás tulajdonságából következően, ezért

$$m\mu(A) = \sum_i m\mu(A_i) \leqslant \sum_i f(P_i)\,\mu(A_i) \leqslant \sum_i M\mu(A_i) = M\mu(A)\,.$$

A szükséges határátmenet végrehajtásával a tétel állítását kapjuk. □

4.2.7. Következmény. *Ha f integrálható az A tartományon és $f(P) \geqslant 0$ bármely $P \in A$ esetén, akkor*

$$\iint\limits_{A} f(P)\,\mathrm{d}A \geqslant 0.$$

Bizonyítás: Mivel a tartomány minden P pontjában $f(P) \geqslant 0$, nyilvánvaló, hogy $m = \inf\limits_{P\in A} f(P) \geqslant 0$. Alkalmazzuk az előző tételt:

$$0 \leqslant m\mu(A) \leqslant \iint\limits_{A} f(P)\,\mathrm{d}A.$$

□

4.2.8. Tétel (Monotonitás). *Ha f és g integrálható az A tartományon és $f(P) \geqslant g(P)$ bármely $P \in A$ esetén, akkor*

$$\iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A \geqslant \iint\limits_A g(P)\,\mathrm{d}A.$$

Bizonyítás: Mivel a tartomány minden P pontjában f legalább akkora értéket vesz fel, mint g, ezért az $f-g$ függvény minden értéke nem-negatív. Alkalmazzuk rá az előző, következményként megfogalmazott állítást:

$$\begin{aligned} \iint\limits_A (f-g)(P)\,\mathrm{d}A &\geqslant 0, \\ \iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A - \iint\limits_A g(P)\,\mathrm{d}A &\geqslant 0, \\ \iint\limits_A f(P)\,\mathrm{d}A &\geqslant \iint\limits_A g(P)\,\mathrm{d}A. \end{aligned}$$

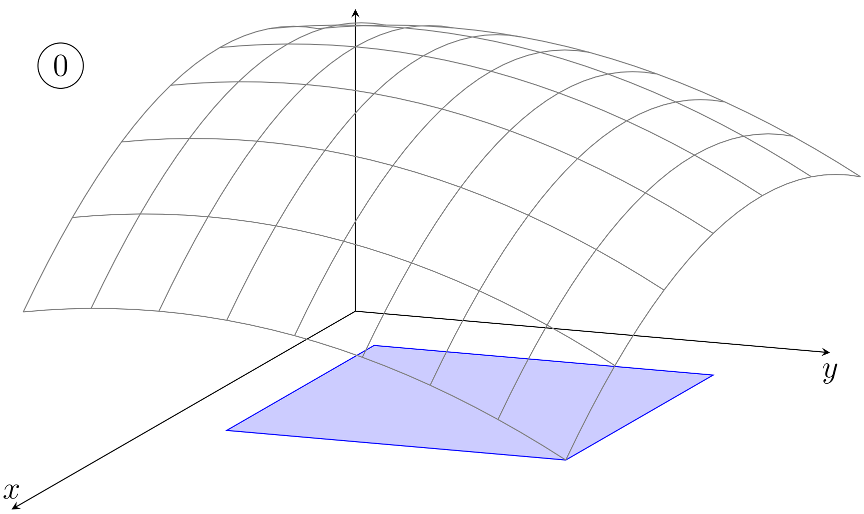
□

4.3. A kettős integrál kiszámítása téglalaptartományon

Az előző alfejezetben a kettős integrált úgy definiáltuk, hogy az alaptartományt elemi résztartományokra bontottuk, és ezen tartományokon egy hengerszerű test (előjeles) térfogatával közelítettük a függvényfelület és az (xy) sík által közrezárt (előjeles) térfogat értékét. Végezzük el ezt a műveletsorozatot most abban az esetben, ha az integrálási tartomány téglalap alakú (amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel), azaz

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\} = [a;b]\times[c;d]$$

alakban írható fel. Ebben az esetben bontsuk az A tartományt elemi téglalapokra a koordinátatengelyekkel párhuzamosan.



Kövessük az egyváltozós függvények esetén megismert definíciót (minden lépésnél külön kattintva az ábrára):

1. Osszuk fel az $[a;b]$ és $[c;d]$ intervallumokat részintervallumokra: az osztópontokat jelölje x_i $(i=0;\dots;m,\ x_0=a,\ x_m=b)$ és y_j $(j=0;\dots;n,\ y_0=c,\ y_n=d)$.

2. Egy adott résztartományon $[x_{i-1};x_i]\times[y_{j-1};y_j]$ válasszunk egy pontot, jelölje $(\xi_i;\eta_j)$; azaz $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ és $\eta_j\in[y_{j-1};y_j]$.

3. Ezen a tartományon közelítsük a függvényfelület alatti térfogatot egy olyan hasábbal, amelynek magassága a függvény $(\xi_i;\eta_j)$ pontban felvett értéke, azaz $f(\xi_i;\eta_j)$:

$$V_{i;j}=f(\xi_i;\eta_j)\,\Delta x_i\Delta y_j,$$

   ahol $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ és $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$.

4. Összegezzük ezen hasábok térfogatát, így megkapjuk a függvényfelület alatti térfogat egy közelítését:

$$V\approx\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i;\eta_j)\,\Delta x_i\Delta y_j.$$

5. Végül vegyünk végtelenül finomodó felosztássorozatot, azaz osszuk az intervallumokat végtelen sok részre úgy, hogy közben a részintervallumok hossza 0-hoz tart:

$$V=\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ \Delta x_i,\Delta y_j\to 0}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i;\eta_j)\,\Delta x_i\Delta y_j.$$

4.3.1. Definíció. Az $f(x;y)$ kétváltozós függvény Riemann-integrálható az

$$\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b;c\leqslant y\leqslant d\}\subseteq D_f$$

téglalaptartományon, ha az alábbi határérték létezik és véges:

$$\iint\limits_{[a;b]\times[c;d]}f(x;y)\,\mathrm{d}(x;y)=\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ \Delta x_i,\Delta y_j\to 0}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i;\eta_j)\,\Delta x_i\Delta y_j,$$

ahol x_i $(i\in\{0;1;\dots;m\})$ az $[a;b]$, míg y_j $(j\in\{0;1;\dots;n\})$ a $[c;d]$ intervallum felosztása, $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ és $\eta_j\in[y_{j-1};y_j]$, valamint $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ és $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$.

4.3.2. Megjegyzések.

- Az intervallumok felosztása nem feltétlenül egyenlő hosszúságú részintervallumokra történő felosztást jelent.

- A résztéglalapon közelítő (elemi) hasábok nem feltétlenül négyzet alapúak.

Bár a függvény téglalapon vett kettős integrálját speciális felosztássorozattal (résztéglalapokra bontással) definiáltuk (újra), bebizonyítható, hogy amennyiben létezik a függvény integrálja, úgy az megegyezik a fenti definícióban szereplő fogalommal. Továbbá a kettős integrál visszavezethető két egyváltozós integrálra, ráadásul abban az integrálás sorrendje is felcserélhető. Ezt, a kettős integrál kiszámításához nélkülözhetetlen állítást a következő tételben bizonyítás nélkül mondjuk ki.

4.3.3. Tétel (Fubini-tétel). *Ha az $f(x;y)$ kétváltozós függvény integrálható a $T = [a;b]\times[c;d] \subseteq D_f$ téglalaptartományon, akkor*

$$\iint\limits_T f(P)\,\mathrm{d}(x;y) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x;y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x;y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

(A jelölésben a zárójelezés elhagyható.)

Tehát a téglalapon integrálható f függvény határozott integrálja úgy számítható ki, hogy először az f kétváltozós függvényt csak x függvényének tekintjük (y-t konstansként kezeljük), ezt a függvényt integráljuk x szerint az x-hez tartozó határok között, majd a kapott függvényt (amelyben x már nem szerepel) integráljuk y szerint az y-hoz tartozó határok között. Az integrálás fordított sorrendben (x és y sorrendjét felcserélve) is elvégezhető, és az előző módon kapott értékkel megegyező eredményt ad.

4.3.4. Példák.

1. Számítsuk ki az $f(x;y) = y\cos(x+y^2)$ függvény $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times[0;\sqrt{\pi}]$ tartományon vett integrálját.

   Számítsuk ki az integrál értékét először úgy, hogy elsőként az x változó szerinti integrálást hajtjuk végre:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos\left(x+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} y\left[\sin\left(x+y^2\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y =$$
$$= \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} y\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+y^2\right)-\sin y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y^2\right)+\cos y^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\pi-\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)\right) = -1.$$

   Végezzük el az integrálást fordított sorrendben is:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} y\cos\left(x+y^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+y^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x+\pi)-\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\cos(x+\pi)+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(0+0-(1+1)\right) = -1.$$

   Láthatjuk, hogy a két eredmény megegyezik.

2. Számítsuk ki az $f(x;y) = \sqrt{3x+4y}$ függvény $[0;3]\times[0;4]$ tartományon vett integrálját.

Számítsuk ki az integrál értékét először úgy, hogy elsőként az x változó szerinti integrálást hajtjuk végre:

$$\int_0^4 \int_0^3 \sqrt{3x+4y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \left[\frac{(3x+4y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 3}\right]_0^3 \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^4 \frac{2}{9}\left((9+4y)^{\frac{3}{2}} - (4y)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{9}\left[\frac{(9+4y)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\cdot 4} - \frac{(4y)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\cdot 4}\right]_0^4 =$$
$$= \frac{2}{90}\left(25^{\frac{5}{2}} - 16^{\frac{5}{2}} - \left(9^{\frac{5}{2}} - 0\right)\right) = \frac{1}{45}(3125-1024-243) = \frac{1858}{45}.$$

Ugyanez fordított sorrendben:

$$\int_0^3 \int_0^4 \sqrt{3x+4y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[\frac{(3x+4y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 4}\right]_0^4 \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^3 \frac{1}{6}\left((3x+16)^{\frac{3}{2}} - (3x)^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\left[\frac{(3x+16)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\cdot 3} - \frac{(3x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\cdot 3}\right]_0^3 =$$
$$= \frac{2}{90}\left(25^{\frac{5}{2}} - 9^{\frac{5}{2}} - \left(16^{\frac{5}{2}} - 0\right)\right) = \frac{1}{45}(3125-243-1024) = \frac{1858}{45}.$$

A két eredmény itt is megegyezik.

3. Számítsuk ki az $f(x;y) = ye^{2xy}$ függvény $\{(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ tartományon vett integrálját.

   Számítsuk ki az integrál értékét úgy, hogy elsőként az x változó szerinti integrálást hajtjuk végre:

$$\int_0^2 \int_0^1 ye^{2xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 y\left[\frac{e^{2xy}}{2y}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{2}\left(e^{2y}-1\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2y}}{2} - y\right]_0^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^4}{2} - 2 - \left(\frac{1}{2} - 0\right)\right) = \frac{e^4}{4} - \frac{5}{4} \approx 12{,}400.$$

   Ha először az y változó szerint végezzük az integrálást (parciális integrálással), akkor olyan x-től függő integradust kapunk, amelynek nem tudjuk a primitív függvényét meghatározni.

4.3.5. Megjegyzés. Nem minden esetben lehetséges az integrálás sorrendjét felcserélni, ha analitikus módszerrel szeretnénk az integrál értékét meghatározni. Sok esetben pedig nehézségi különbség van a kétfajta módszer között.

4.3.1. Feladatok

Számítsa ki az alábbi kétváltozós f függvények kettős integrálját a megadott T téglalaptartományon.

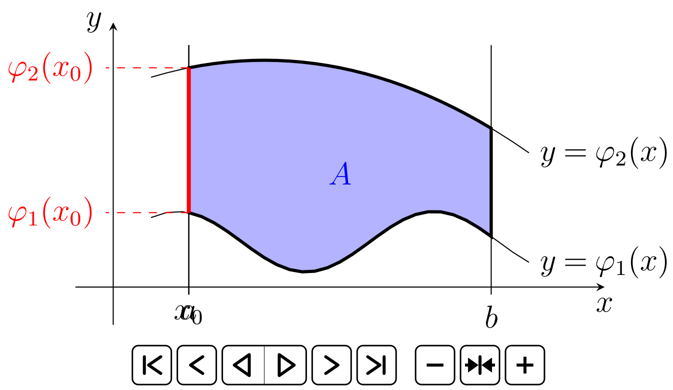
1. $f(x;y) = \frac{1}{x} + xy - 4y^2$, $\quad T = [1;2]\times[0;3]$.
2. $f(x;y) = \frac{\sqrt{x}+y^2}{x^2}$, $\quad T = [1;3]\times[0;9]$.
3. $f(x;y) = \cos(2x-y)$, $\quad T = \left[0;\frac{\pi}{3}\right]\times[0;\pi]$.

4.4. A kettős integrál kiszámítása normáltartományon

Mit tehetünk akkor, ha a kettős integrált nem téglalaptartományon, hanem egyváltozós függvényekkel leírható (közrezárható) tartományon szeretnénk kiszámítani? Elsőként nézzük meg, hogyan lehet ilyen tartományok pontjait halmazjelölésekkel leírni.

4.4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A tartomány x-tengelyre nézve normáltartomány, ha az $x = a$, $x = b$ egyenesek egy szakasza, valamint az $y = \varphi_1(x)$ és $y = \varphi_2(x)$ folytonos függvények grafikonjainak egy-egy darabja határolja; azaz bármely $P(x; y) \in A$ pontjának koordinátáira fennállnak az $a \leqslant x \leqslant b$ és $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ egyenlőtlenségek.

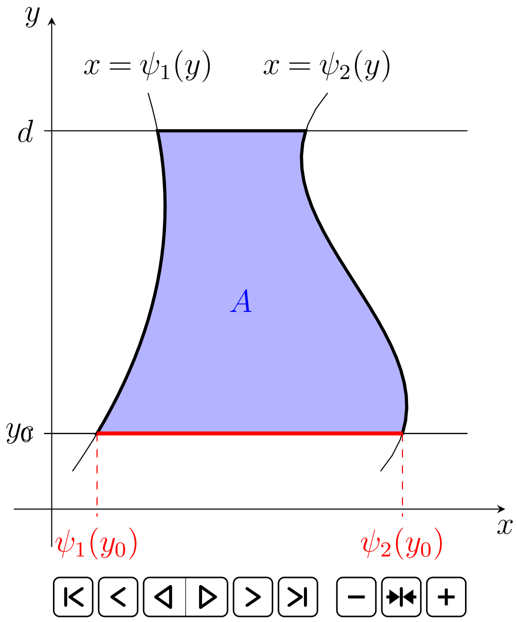
A definíció szemléletesen azt jelenti, hogy az $x = x_0$ egyenletű (azaz x-tengelyre merőleges) egyenesek és az A tartomány metszete minden $a \leqslant x_0 \leqslant b$ esetén egy szakasz (amely esetleg elfajuló, vagyis egyetlen pont).



Az animáció elindításával láthatja, hogy úgy tudjuk az A (x-tengelyre nézve) normáltartomány minden pontját végigpásztázni, ha x a-tól b-ig minden értéket felvesz, míg y attól függően veszi fel az értékeket, hogy x értéke éppen mennyi. Egy adott x_0 esetén y a határoló függvények által meghatározott $\varphi_1(x_0)$ és $\varphi_2(x_0)$ értékek közé esik.
Analóg módon definiálhatjuk az y-tengelyre nézve normáltartomány fogalmát.

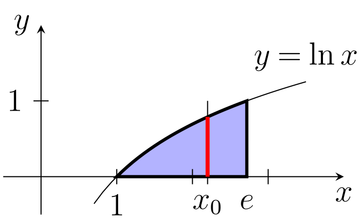
4.4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A tartomány y-tengelyre nézve normáltartomány, ha az $y = c$, $y = d$ egyenesek egy szakasza, valamint az $x = \psi_1(y)$ és $x = \psi_2(y)$ folytonos függvények grafikonjainak egy-egy darabja határolja; azaz bármely $P(x; y) \in A$ pontjának koordinátáira fennállnak a $c \leqslant y \leqslant d$ és $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$ egyenlőtlenségek.

A definíció szemléletesen azt jelenti, hogy az $y = y_0$ egyenletű (azaz y-tengelyre merőleges) egyenesek és az A tartomány metszete minden $c \leqslant y_0 \leqslant d$ esetén egy szakasz (amely esetleg elfajuló, vagyis egyetlen pont).
Az animáción láthatja a különbséget az y-tengelyre nézve normáltartomány esetében. Most az y-tengelyre merőleges szakaszokkal söpörjük végig az A tartományt: az y változó c és d értékek között változik, míg az x értéke attól függ mennyi éppen az y. Egy adott y_0 érték esetén a határoló függvények által meghatározott $\psi_1(y_0)$ és $\psi_2(y_0)$ között vesz fel értékeket.



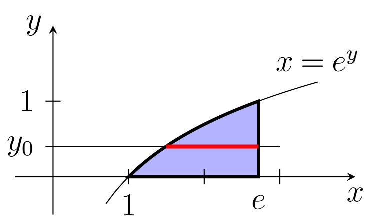
Figyeljük meg most újra az előző tartományt. Láthatjuk, hogy az y-tengelyre nézve nem normáltartomány, mert vannak olyan y-tengelyre merőleges egyenesek, amelyek metszete a tartománnyal nem egy, hanem két diszjunkt szakasz (például az ott szaggatott vonallal jelölt $y = \varphi_1(x_0)$ egyenletűek közül az, ahol x_0 az a vagy a b végpont közelében jár).

4.4.3. Példa. Írjuk fel normáltartományként azt a ponthalmazt, amelyet az x-tengely és az $y = \ln x$ függvény grafikonja zár közre az $x \in [1; e]$ intervallumban.



Ha a tartományt x-tengelyre nézve normáltartományként tekintjük, akkor az x változó 1 és e között vesz fel értékeket, y pedig x-től függően 0 és $\ln x$ közötti értékeket:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant e, 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}.$$



Ha a tartományt y-tengelyre nézve normáltartományként tekintjük, akkor az y változó 0 és 1 között vesz fel értékeket, x pedig y-tól függően e^y és e közötti értékeket:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, e^y \leqslant x \leqslant e\}.$$

Térjünk rá a kettős integrál kiszámítására normáltartományon.
Az integrálás ebben az esetben hasonlóan végezhető el, mint a téglalaptartományon, ilyenkor azonban a belső integrálás határai nem konstans értékek, hanem a külső integrál változójától függő értékek.
Ha az A tartomány x-tengelyre nézve normáltartomány, akkor

$$\iint_A f(P)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Tehát először az f függvényt az y változó függvényének tekintve (x-et konstans paraméterként kezelve) integrálunk a $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ határok között. A kapott függvény x-nek egyváltozós függvénye lesz, és ezt integráljuk az a és b között.

Ugyanígy járhatunk el akkor is, ha az A tartomány y-tengelyre nézve normáltartomány:

$$\iint_A f(P)\,\mathrm{d}A = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4.4.4. Példák.

1. Integráljuk az $f(x;y) = \frac{y}{x}$ kétváltozós függvényt azon a tartományon, amelyet az x-tengely és az $y = \ln x$ függvény grafikonja zár közre az $x \in [1;e]$ intervallumban.

   A tartományt a korábbi példában már felírtuk normáltartományként mindkét változatban. Számítsuk ki az integrál értékét mindkét esetben.

   Ha a tartományt x-tengelyre nézve normáltartományként tekintjük, akkor

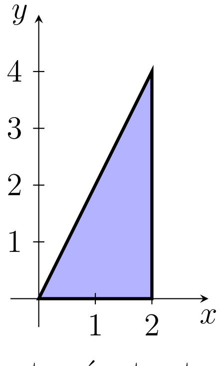
$$\iint_A \frac{y}{x}\,\mathrm{d}A = \int_1^e \int_0^{\ln x} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^e \left[\frac{y^2}{2x}\right]_0^{\ln x} \mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 0\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln^3 x}{3}\right]_1^e = \frac{1}{6}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{6}.$$

   Ha a tartományt y-tengelyre nézve normáltartományként tekintjük, akkor

$$\iint_A \frac{y}{x}\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{e^y}^{e} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[y \ln|x|\right]_{e^y}^{e} \mathrm{d}y = \int_0^1 y\left(\ln e - \ln e^y\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1 y\,(1-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(y - y^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{6}.$$

   A két eredmény, természetesen, megegyezik.

2. Integráljuk az $f(x;y) = x + 2y$ kétváltozós függvényt a $(0;0)$, $(2;0)$, $(2;4)$ csúcspontú háromszög-tartományon.



   A háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$$y = 0$$
$$x = 2$$
$$y = 2x$$

   Ha a tartományt x-tengelyre nézve normáltartományként tekintjük, akkor

$$\iint_A (x+2y)\,\mathrm{d}A = \int_0^2 \int_0^{2x} (x+2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[xy + y^2\right]_0^{2x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^2 \left(x \cdot 2x + (2x)^2 - 0\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 6x^2\,\mathrm{d}x = \left[2x^3\right]_0^2 = 2 \cdot 2^3 - 0 = 16.$$

Ellenőrzésképpen végezzük el az integrálást úgy is, hogy a tartományt y-tengelyre nézve normáltartományként tekintjük:

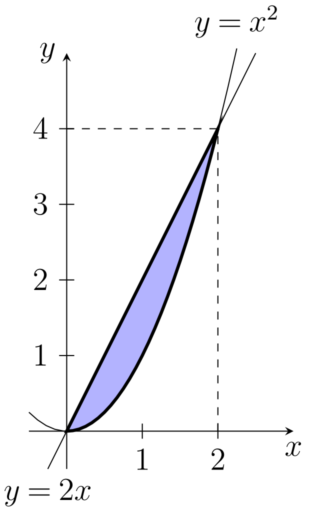
$$\iint\limits_A (x+2y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_0^4 \int\limits_{\frac{y}{2}}^2 (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 \left[\frac{x^2}{2}+2xy\right]_{\frac{y}{2}}^2 \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(2+4y-\left(\frac{y^2}{8}+y^2\right)\right)\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 \left(2+4y-\frac{9}{8}y^2\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left[2y+2y^2-\frac{3y^3}{8}\right]_0^4 = \left(8+32-\frac{3}{8}\cdot 4^3-0\right) = 16.$$

A két eredmény, természetesen, itt is megegyezik.

3. Integráljuk az $f(x;y)=\cos\frac{y}{x}$ kétváltozós függvényt az $y=x^2$ és az $y=2x$ egyenletű görbék által közrezárt tartományon.



A tartomány mindkét tengelyre nézve normáltartomány, de az integrandust megfigyelve észrevehetjük, hogy annak x szerinti primitív függvényét nem tudjuk analitikus formában kifejezni, ezért y szerint kell majd először integrálnunk. Emiatt mindenképpen x-tengelyre nézve normáltartományként kell kezelnünk az integrálási tartományt.
A görbék metszéspontjai: $(0;0)$ és $(2;4)$.

$$A = \left\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0\leqslant x\leqslant 2,\, x^2\leqslant y\leqslant 2x\right\}.$$

$$\iint\limits_A \cos\frac{y}{x}\,\mathrm{d}A = \int\limits_0^2 \int\limits_{x^2}^{2x} \cos\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[\frac{\sin\frac{y}{x}}{\frac{1}{x}}\right]_{x^2}^{2x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 x\left(\sin 2-\sin x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x\sin 2\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 x\sin x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\sin 2\right]_0^2 -$$

$$-\left(\left[-x\cos x\right]_0^2 - \int\limits_0^2 -\cos x\,\mathrm{d}x\right) = 2\sin 2-0+2\cos 2-0-\left[\sin x\right]_0^2 =$$

$$= 2\sin 2+2\cos 2-(\sin 2-0) = \sin 2+2\cos 2 \approx 0{,}077.$$

4.4.5. Megjegyzések.

- Ha az integrálási tartomány nem normáltartomány, akkor általában felbontható olyan normáltartományok uniójára, amelyek közös része nulla mértékű tartomány. Az integrálást ilyen esetben minden normáltartományra külön-külön el kell végezni, és az integrál értéke ezen eredmények összege lesz.

- Az integrálást nem minden esetben tudjuk mindkét sorrendben elvégezni analitikus módszerekkel; ha azonban ez megtehető, akkor (értelemszerűen) ugyanazt az eredményt kell kapnunk.

4.4.1. Feladatok

Számítsa ki az alábbi kétváltozós f függvények kettős integrálját a megadott normáltartományon.

1. $f(x;y) = x + 2y$ az $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ és $y = \sin x$ egyenletű görbék által közrezárt tartományon.
2. $f(x;y) = 4x^2y - 2x^2 - y^2$ az $y = 2$ és $y = x^2$ egyenletű görbék által közrezárt tartományon (mindkét sorrendben lehetséges).
3. $f(x;y) = xy + \sqrt{x}$ az $y = x$ és $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrezárt tartományon (mindkét sorrendben lehetséges).
4. $f(x;y) = \frac{y}{x+2}$ az origó középpontú 2 sugarú körlap x-tengely feletti ($y \geqslant 0$) felén.
5. $f(x;y) = 2x + 4$ az $y^2 = 2x$ és $y = x - 4$ egyenletű görbék által közrezárt tartományon.
6. $f(x;y) = \frac{y}{x^2}$ az $(1;0)$, $(1;2)$ és $(3;2)$ csúcspontú háromszög-tartományon (mindkét sorrendben lehetséges).

4.5. A kettős integrál alkalmazásai

Testek térfogata

A kettős integrál elsődleges alkalmazása a térfogatszámítás, ennek motivációjával vezettük be a fogalmat. Mivel a kettős integrál geometriai jelentése a függvényfelület és az xy sík által közrezárt test *előjeles* térfogata, ezt figyelembe kell vennünk a térfogat kiszámításakor.

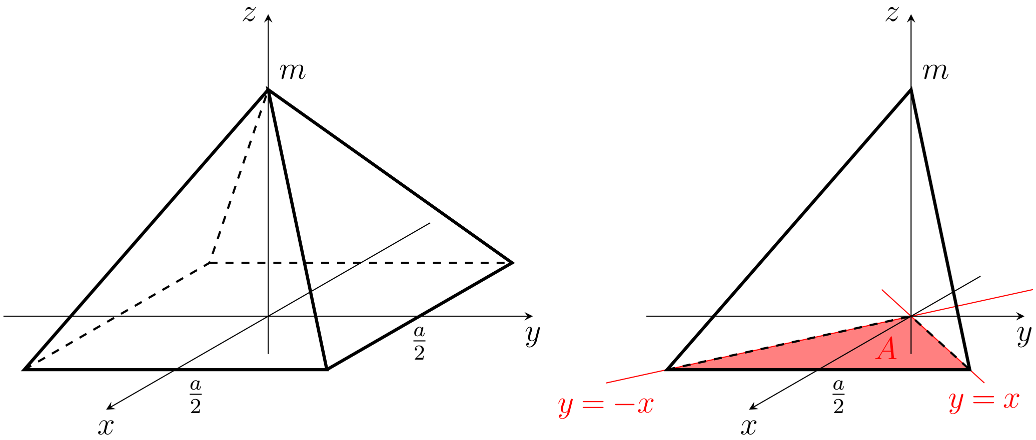
4.5.1. Tétel. *Ha az f függvény integrálható az $A \subseteq D_f$ tartományon, és annak minden pontjában $f(x;y) \geqslant 0$, akkor az xy sík és a $z = f(x;y)$ egyenletű felület által közrezárt test térfogata:*

$$V = \iint_A f(P)\,\mathrm{d}A.$$

4.5.2. Példák.

1. Az előző alfejezetben már szerepeltek példák. Minden olyan esetben, ahol a megadott tartományon $f \geqslant 0$, az adott példa értelmezhető térfogatszámítási feladatként is.
2. Számítsuk ki az a alapélű, m magasságú négyzetalapú gúla térfogatát.

   A gúlát helyezzük el úgy a koordináta-rendszerben, hogy az alaplapja az xy síkon legyen, csúcspontja pedig a z tengelyen, így a gúlát négy síkfelület (lineáris függvény) alatti testként jellemezhetjük. A gúlát az alaplap átlóin átmenő függőleges síkokkal osszuk négy egyenlő térfogatú testre, így csak egyetlen lineáris függvényt kell majd integrálnunk.



A negyedgúla oldallap síkjának egyenlete: $\frac{2x}{a}+\frac{z}{m}=1$, amelyből z-t kifejezve megkapjuk az integrálandó függvényt: $f(x;y)=m-\frac{2m}{a}x$.

Az integrálási tartomány: $A=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2}, -x\leqslant y\leqslant x\right\}$.

$$\frac{V}{4}=\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-x}^{x}\left(m-\frac{2m}{a}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Először az y szerinti integrálást végezzük el:

$$\int\limits_{-x}^{x}\left(m-\frac{2m}{a}x\right)\mathrm{d}y=\left[\left(m-\frac{2m}{a}x\right)y\right]_{-x}^{x}=2x\left(m-\frac{2m}{a}x\right).$$

Végül az x változó szerint integrálunk:

$$\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(2xm-\frac{4m}{a}x^2\right)\mathrm{d}x=\left[x^2m-\frac{4x^3m}{3a}\right]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{a^2m}{4}-\frac{4a^3m}{3a\cdot 8}=\frac{a^2m}{12}.$$

Figyelembe véve, hogy ezzel a negyedgúla térfogatát kaptuk meg, a gúla térfogata $V=\frac{a^2m}{3}$, amely megegyezik a középiskolában tanultakkal: a gúla térfogata az alapterülete (a^2) és magassága szorzatának harmada.

Testek felszíne

Kettős integrál segítségével függvényfelületek felszínét is meg tudjuk határozni.

4.5.3. Tétel. *Az A tartományon folytonos és a belső pontokban differenciálható $f(x;y)$ függvény felszínét megadó formula:*

$$S=\iint\limits_A\sqrt{1+f_x'^2(P)+f_y'^2(P)}\,\mathrm{d}A,$$

ahol f_x' és f_y' az f függvény x és y változó szerinti parciális deriváltját jelöli.

Bizonyítás: A formula igazolásához szükségünk van arra a térgeometriai ismeretre, hogy egy sík felületdarab merőleges vetületének területét megkapjuk, hogy a felületdarab területét megszorozzuk $\cos\varphi$-vel, ahol φ a felületdarab és a vetületi sík szöge.
Bontsuk fel a függvényfelületet elemi felületdarabokra az A tartomány $\{A_i\}$ felosztásának megfelelően. Egy-egy ilyen felületdarab területe az előbbiek szerint $\frac{\mu(A_i)}{\cos\varphi_i}$, ahol φ_i az A_i résztartomány és a felette elhelyezkedő elemi felületdarab szöge. A $\cos\varphi_i$ meghatározásához segítségünkre lesz a felületdarab $\mathbf{n}_i$ normálvektora és a skaláris szorzat. Emlékezzünk vissza, hogy a függvényfelület egy normálvektora megadható a parciális deriváltak segítségével. Hogy megfelelő szöget kapjunk a skaláris szorzatból, közülük egy olyat szorozzunk össze a $\mathbf{k} = (0;0;1)$ egységvektorral, amelynek harmadik koordinátája pozitív, például $\mathbf{n}_i = \left(-f'_x(P_i)\,;-f'_y(P_i)\,;1\right)$-et, ahol $P_i \in A_i$:

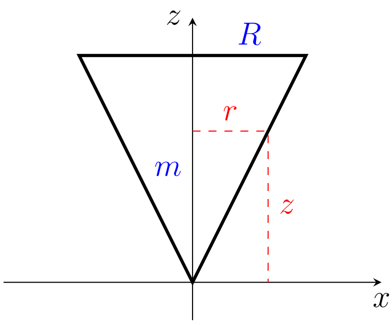
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_i = |\mathbf{k}|\cdot|\mathbf{n}_i|\cdot\cos\varphi_i = 1\cdot\sqrt{1+f'^2_x(P_i)+f'^2_y(P_i)}\cdot\cos\varphi_i.$$

A skaláris szorzatot koordinákkal kiszámítva: $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}_i = 1$. Innen $\cos\varphi_i$ a normálvektor hosszának reciproka, és ezzel a függvényfelület elemi darabjának felszíne már kifejezhető:

$$\sqrt{1+f'^2_x(P_i)+f'^2_y(P_i)}\cdot\mu(A_i)\,.$$

Ha ezeket a mennyiségeket összegezzük, majd vesszük a határértékét egy végtelenül finomodó felosztássorozat esetén, éppen a tételben szereplő integrált kapjuk. □

4.5.4. Példa. Számítsuk ki az R sugarú, m magasságú kúp palástjának felszínét.
A kúpot helyezzük el a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcsa az origóban legyen, forgástengelye pedig a z tengely pozitív félegyenesére essen.



Az xz-metszetű ábrán hasonlóságok alapján: $\frac{z}{m} = \frac{r}{R}$, ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ebből z-t kifejezve adódik a kúp palástját leíró függvény:

$$f(x;y) = \frac{m}{R}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Az integrálási tartomány az origó középpontú, R sugarú körlap, amelyet az alábbi módon adhatunk meg normáltartományként:

$$A = \left\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid -R \leqslant x \leqslant R, -\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}\right\}.$$

A felszínképlet alkalmazásához határozzuk meg f parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{m}{R}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{m}{R}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ezekkel az integrandus:

$$\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}=\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}.$$

A palást felszíne:

$$\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

A konstans integradus miatt az y szerinti integrálás egyszerű:

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}\,\mathrm{d}y=\left[y\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}=2\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}\sqrt{R^2-x^2}.$$

Végül az x szerinti integrál:

$$\int_{-R}^{R}2\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}\int_{-R}^{R}2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

amelyet helyettesítéses integrálással tudunk elvégezni. Ha azonban észrevesszük, hogy a fenti felírásban az integrál pont az R sugarú kör területe, akkor külön számítás nélkül beírhatjuk az értékét, $R^2\pi$:

$$S=\sqrt{1+\frac{m^2}{R^2}}\cdot R^2\pi=\sqrt{R^2+m^2}\cdot R\pi.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $a=\sqrt{R^2+m^2}$ a kúp alkotója, akkor megkapjuk a korábbról ismert $S=aR\pi$ képletet.

Síkidomok területe és súlypontja

Ha a konstans 1 függvényt integráljuk egy adott A tartományon, akkor egy olyan hengerszerű test térfogatát kapjuk, amelynek alapja az A tartomány, magassága pedig 1. Ezen test térfogatának mérőszáma ezek szerint megegyezik az A tartomány $\mu(A)$ területmértékével, így a kettős integrált síkidomok területének kiszámítására is használhatjuk:

$$\mu(A)=\iint_A 1\,\mathrm{d}A.$$

Ha ismerjük a síkidom (felületi) sűrűségét, akkor ezzel szorozva a síkidom tömegét is megkapjuk. A terület vagy a súlypont kiszámítására az egyváltozós integrál is alkalmas; a kettős integrál viszont lehetőséget teremt arra is, hogy ne csak homogén sűrűségű síkidomok tömegét vagy súlypontját határozzuk meg.

4.5.5. Tétel. *A $\varrho(x;y)$ felületi sűrűségeloszlású síkidom tömege:*

$$m=\iint_A \varrho(P)\,\mathrm{d}A.$$

Bizonyítás: Az $\{A_i\}$ felosztás egy elemi darabjának tömege közelíthető a területi mértékének és egy tetszőleges pontjában vett (felületi) sűrűség szorzatával: $\varrho(P_i)\,\mu(A_i)$, ahol $P_i \in A_i$. Ezeket összegezve egy integrálközelítő összeget kapunk, amelynek végtelenül finomodó felosztássorozatra vett határértéke a fenti kettős integrál. □

4.5.6. Tétel. *A $\varrho(x;y)$ felületi sűrűségeloszlású síkidom C tömegközéppontjának $(x_C;y_C)$ koordinátái:*

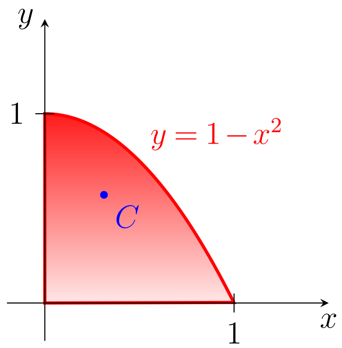
$$x_C = \frac{1}{m}\iint\limits_A x\varrho(x;y)\,\mathrm{d}A \qquad \text{és} \qquad y_C = \frac{1}{m}\iint\limits_A y\varrho(x;y)\,\mathrm{d}A.$$

Bizonyítás: A tömegközéppont sajátsága, hogy a C pontba sűrített tömeg bármely tengelyre ugyanakkora forgatónyomatékot fejt ki, mint a kiterjedt tömeg. Számítsuk ki az y-tengelyre a saját súly által kifejtett forgatónyomatékot. A C pontba koncentrált tömeg esetén ez az mg súly és a tengelytől való távolság szorzata: mgx_C. A síkidom forgatónyomatékának kiszámításához vegyük egy felosztását. Ha a tetszőleges A_i elem egy pontja $P_i(x_i;y_i)$, akkor súlya $\varrho(P_i)\,\mu(A_i)\,g$, távolsága a tengelytől x_i. A szorzatukat (az elemi forgatónyomatékokat) összegezve a teljes forgatónyomaték egy közelítését kapjuk:

$$x_C mg \approx \sum_i x_i \varrho(P_i)\,\mu(A_i)\,g.$$

Végtelenül finomodó felosztássorozatot véve pontos értéket kapunk. Az egyenletet rendezve (m-mel osztva és g-vel egyszerűsítve) a tételben állítását kapjuk eredményül.
Az x-tengelyre vonatkozó forgatónyomaték analóg módon történő meghatározásával a súlypont y_C koordinátájához jutunk. □

4.5.7. Példa. Határozzuk meg annak a síkidomnak a tömegközéppontját, amelyet az $y = 1 - x^2$ parabola metsz ki az I. síknegyedből, és amelynek felületi sűrűségeloszlását a $\varrho(x;y) = y$ függvény határozza meg.
Az ábrán a sűrűségeloszlást árnyékolással szemléltetjük; sötétebb szín nagyobb sűrűségű anyagnak felel meg:



A síkidom tömege:

$$m = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x^2} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}.$$

A súlypont-koordináták képletében szereplő további integrálok:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - x^3 + \frac{x^5}{2}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12};$$

valamint

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - x^2 + x^4 - \frac{x^6}{3}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{16}{105}.$$

Ezekből következően a tömegközéppont koordinátái:

$$x_C = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{15}} = \frac{5}{16} \qquad \text{és} \qquad y_C = \frac{\frac{16}{105}}{\frac{4}{15}} = \frac{4}{7}.$$

Síkidomok tehetlenségi nyomatéka Hasonló elv alapján adhatunk képletet a tehetetlenségi nyomatékra is.

4.5.8. Tétel. *A $\varrho(x;y)$ felületi sűrűségeloszlású síkidom x és y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:*

$$\Theta_x = \iint_A y^2 \varrho(x;y) \,\mathrm{d}A \qquad \textit{és} \qquad \Theta_y = \iint_A x^2 \varrho(x;y) \,\mathrm{d}A.$$

Bizonyítás: Az m tömegű anyagi pont adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka mr^2, ahol r a pont távolsága a tengelytől. Vegyük az A síkidom felosztásának egy A_i elemét, és legyen egy tetszőleges pontja $P_i(x_i;y_i)$. Az A_i elem tömege $\varrho(P_i)\,\mu(A_i)$, távolsága az x-tengelytől y_i, míg az y-tengelytől x_i. Emiatt hozzájárulása az x és y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékhoz rendre

$$y_i^2 \varrho(P_i)\,\mu(A_i) \qquad \text{illetve} \qquad x_i^2 \varrho(P_i)\,\mu(A_i)\,.$$

A mennyiségeket összegezve, majd a szokásos határátmenetet elvégezve a tétel állításában szereplő kettős integrálokat kapjuk eredményül. □

4.5.9. Példa. Határozzuk meg az előző példában szereplő síkidom x és y-tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

$$\Theta_x = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} y^3 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - x^2 + \frac{3x^4}{2} - x^6 + \frac{x^8}{4}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^5}{10} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{36}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{10} - \frac{1}{7} + \frac{1}{36} = \frac{32}{315};$$

valamint

$$\Theta_y = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{x^6}{2}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{14}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} = \frac{4}{105} = \frac{12}{315}.$$

(Helyes, hogy az x-tengelyre vonatkozó tehetlenségi nyomaték többszöröse lett az y-tengelyre vonatkozónak, hiszen a sűrűbb anyag, ezáltal a nagyobb tömeg az x-tengelytől távolabb helyezkedik el. A síkidomot könnyebb az y-tengely körül forgatni, mint az x-tengely körül.)

4.5.1. Feladatok

1. Mekkora annak a hasábszerű testnek a térfogata, amelynek alaplapja az xy síkon az $(1;0)$, $(1;2)$ és $(3;2)$ csúcspontú háromszög, fedőlapja pedig az $f(x;y)=\frac{y}{x^2}$ függvény által meghatározott felület?

2. Mekkora annak a testnek a térfogata, amelyet az $f(x;y)=2x+4$ függvény grafikonja és az xy sík zár közre az $y^2 = 2x$ és $y = x - 4$ egyenletű görbék által közrezárt tartományon?

3. Számítsa ki a $(0;0)$, $(2;0)$, $(1;1)$ csúcspontú háromszög tömegközéppontjának koordinátáit, ha sűrűségeloszlása $\varrho(x;y) = x$.

4. Számítsa ki annak a síklemeznek az x- és y-tengelyre vonatkozó tehetlenségi nyomatékát, amelynek sűrűségeloszlása $\varrho(x;y) = xy$, és amelyet az $y = 0$, $x = 1$ és $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbék határolnak.

5. Egy 2 cm sugarú, félkör alakú fémlap úgy helyezkedik el a koordináta-rendszerben, hogy átmérője az x-tengelyre illeszkedik és szimmetriatengelye az y-tengely. A fémlapon a töltéssűrűség felületi eloszlása $\varrho(x;y)=\frac{y}{x+2}\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{cm}^2}\right]$. Mekkora a fémlemez teljes töltése?

5. fejezet

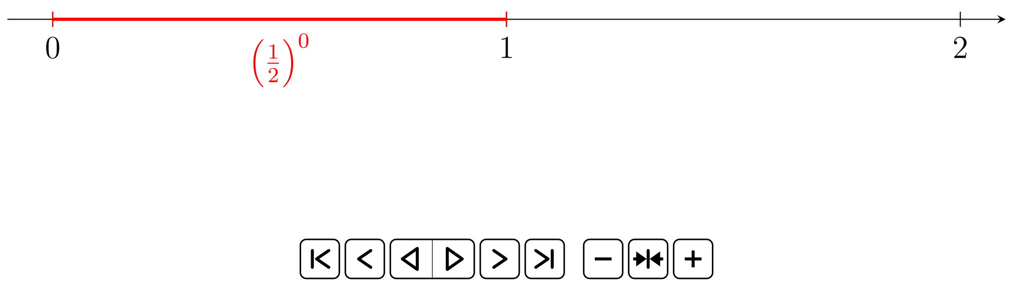
Numerikus sorok

5.1. A numerikus sor fogalma és konvergenciája

Vizsgáljuk meg a

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

összeget n néhány értékére, azaz adjuk össze az $\frac{1}{2}$ hatványait a nulladiktól kezdve az n-edikig. Szemléletesebben tudjuk követni az alábbi animáció elindításával:



5.1. ábra. A $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$ összeg néhány n értékre

Úgy látszik az ábrán, hogy bármeddig folytatjuk is az összeadást, a 2-t nem fogjuk átlépni. Ennek oka, hogy minden egyes „lépésnél” a 2-ig hátralévő távolság felét tesszük meg (először 1-et, aztán a hátralévő 1 felét, $\frac{1}{2}$-et, majd a hátralévő $\frac{1}{2}$ felét, $\frac{1}{4}$-et, stb.), amelynek az eredménye, hogy hiába adunk hozzá a meglévő összeghez pozitív (0-nál nagyobb) számokat akár a végtelenségig, az összeg mégis véges marad.
Írjuk le a fenti tapasztalatot pontos matematikai eszközökkel.

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{0} &= 1 &&= 2-1;\\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{0}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1} &= \tfrac{3}{2} &&= 2-\tfrac{1}{2};\\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{0}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2} &= \tfrac{7}{4} &&= 2-\tfrac{1}{4};\\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{0}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3} &= \tfrac{15}{8} &&= 2-\tfrac{1}{8};\\
&= \vdots &&=\\
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{0}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} &= \tfrac{2^{n+1}-1}{2^{n}} &&= 2-\tfrac{1}{2^{n}}.
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban szereplő általános összefüggés könnyen igazolható (pl. teljes indukcióval). A fenti tapasztalat szerint érdemes volna értelmezni a végtelen sok tagból álló összeget is; ezt a korábbi tanulmányaink alapján a végtelenben vett határérték segítségével tehetjük meg:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=2.$$

Amint látjuk, bizonyos esetekben a végtelen tagú összegeknek is véges értéket tulajdoníthatunk. Ehhez vezessük be a pontos fogalmakat.

5.1.1. Definíció (Numerikus sor). Legyen adva egy $\{a_k\}$ számsorozat. Az

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

jelöléssel megadott végtelen sok tagú formális összeget *numerikus sornak* nevezzük. Az $\{a_k\}$ sorozat a numerikus sor *generáló sorozata*, elemei a numerikus sor tagjai.

5.1.2. Megjegyzések.

- A „numerikus” jelző arra utal, hogy a sor tagjai számok, ezáltal megkülönböztetve a későbbiekben bevezetendő más típusú soroktól, nevezetesen a függvénysoroktól.
- A bevezetendő tulajdonságok szempontjából nincs jelentősége, hogy a generáló sorozat melyik eleme a sor kezdő eleme. Az első példában $k=0$ volt a kezdő elem; az általános definíciókban és tételekben $k=1$ lesz.

5.1.3. Példa. A bevezetőben látott numerikus sor generáló sorozata az $a_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k$ sorozat; a sor maga pedig a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

A $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ jelölésben rejlő végtelen darab összeadásnak algebrailag nincs értelme; értéket a fentebb látott módszer általánosításával, a részletösszegeken keresztül tudunk neki tulajdonítani.

5.1.4. Definíció (Részletösszeg-sorozat). A $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ numerikus sor generáló sorozata első n tagjának összegét a numerikus sor *n-edik részletösszegének* nevezzük:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

A $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ numerikus sor részletösszegeiből képezett $\{s_n\}$ sorozat a sor *részletösszeg-sorozata.*

5.1.5. Definíció (Konvergens sor; a sor összege). A $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ numerikus sor *konvergens*, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. Az $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozat határértékét a $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ sor *összegének* nevezzük. Azt, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ sor konvergens, és összege az $s=\lim_{n\to\infty}s_n$ szám, a következőképpen jelöljük:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=s.$$

A numerikus sor *divergens*, ha nem konvergens.

5.1.6. Megjegyzés. Amennyiben a sor részletösszeg-sorozatának határértéke ∞ vagy $-\infty$, akkor a sor divergens, de ebben az esetben is használjuk az alábbi jelölést:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \qquad \text{vagy} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty.$$

Összefoglalva tehát, a végtelen numerikus sort a részletösszeg-sorozatán keresztül tudjuk vizsgálni, amelyet úgy kapunk, hogy a sor első n (tehát véges sok) tagját adjuk össze. Amennyiben a részletösszeg-sorozat konvergens, akkor a sor is konvergens, és összege a részletösszeg-sorozat határértéke.

5.1.7. Példa. A bevezető példa első néhány részletösszegét már korábban felírtuk:

$$s_0 = 1, \qquad s_1 = \frac{3}{2}, \qquad s_2 = \frac{7}{4}, \qquad s_3 = \frac{15}{8}, \qquad \ldots$$

Azt is láttuk, hogy a részletösszeg-sorozat általános eleme: $s_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. A részletösszeg-sorozat határértéke, és ezzel a sor összege:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

5.1.8. Definíció (Abszolút konvergens sor). A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a tagjainak abszolút értékéből képezett

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + \cdots$$

sor (is) konvergens.
Azokat a konvergens sorokat, amelyek nem abszolút konvergensek, szokás *feltételesen konvergens soroknak* nevezni.

5.1.9. Tétel. *Az abszolút konvergens sorok konvergensek is.*

Bizonyítás: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozatának konvergenciáját a sorozatok Cauchy-féle konvergenciakritériumának segítségével bizonyítjuk.
A generáló sorozat elemeinek abszolút értékeiből képezett sor részletösszeg-sorozatát jelöljük $\{s_n^*\}$-gal, azaz

$$s_n^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Adott $\varepsilon > 0$ esetén válasszuk meg a megfelelő n_ε küszöbindexet, amelyre igaz, hogy bármely $n_1, n_2 > n_\varepsilon$ esetén $\left|s_{n_2}^* - s_{n_1}^*\right| < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ugyanez a küszöbindex megfelel az $\{s_n\}$ sorozatnak is. Legyen $n_\varepsilon < n_1 < n_2$.

$$|s_{n_2} - s_{n_1}| = |a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}| \leqslant |a_{n_1+1}| + |a_{n_1+2}| + \cdots + |a_{n_2}| = \left|s_{n_2}^* - s_{n_1}^*\right| < \varepsilon,$$

tehát az $\{s_n\}$ sorozat is konvergens.
(A $\left|\sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |a_k|$ egyenlőtlenség a valós számokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség általánosítása, annak véges sokszori alkalmazásával igazolható.) □

5.1.10. Példák.

1. A bevezető példában láttuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ sor konvergens, és összege 2:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

   A sor abszolút konvergens is, hiszen minden tagja pozitív, így a generáló sorozat tagjainak abszolút értékéből képezett sor megegyezik magával a sorral, amely konvergens.

2. A $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ sor $-1<q<1$ esetén abszolút konvergens, és összege $\frac{1}{1-q}$.
   Számítsuk ki először a sor összegét:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

   Felhasználtuk a mértani sorozat első $n+1$ tagjának összegképletét, valamint hogy $|q|<1$ esetén $\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=0$.
   Az abszolút konvergencia ellenőrzéséhez ugyanezeket a lépéseket használjuk:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|q^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty}|q|^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|q|^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-|q|^{n+1}}{1-|q|} = \frac{1}{1-|q|},$$

   azaz a sorösszeg ebben az esetben is véges. Tehát a $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ sor $-1<q<1$ esetén abszolút konvergens.

3. Kovergens az $a_k=k$ sorozattal generált $\sum_{k=1}^{\infty} k$ sor?
   A sor részletösszeg-sorozata:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

   Nézzük meg ennek határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n+1)}{2} = \infty,$$

   tehát a sor divergens, összege végtelen: $\sum_{k=1}^{\infty} k=\infty$.

4. Kovergens az $a_k=(-1)^k$ sorozattal generált $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-1+\ldots$ sor?
   A sor részletösszeg-sorozata:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1-1=0 \\ s_2 &= 1-1+1=1 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

   Az s_n sorozatnak nem létezik határértéke (sem véges, sem végtelen; oszcillálva divergens), tehát a sor divergens, összege nem létezik. (Természetesen, így nem is abszolút konvergens.)

5. Konvergens a $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ sor?

   A sor általános tagja racionális tört. A részletösszeg-sorozat előállításához először bontsuk résztörtekre az általános tagját:

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k+1}$$
$$1 = A(k+1) + B(k-1)$$

$$\text{Ha } k=1, \text{ akkor } 1=2A, \quad \text{azaz } A=\frac{1}{2}.$$
$$\text{Ha } k=-1, \text{ akkor } 1=2B, \quad \text{azaz } B=-\frac{1}{2}.$$

   Az előállításból tehát

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right),$$

   így a részletösszeg-sorozat tagjai (elegendően nagy n esetén):

$$s_n = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

   A részletösszegek csak véges sok tagot tartalmaznak, így az összeadandók átrendezhetők. (Ezt azért hangsúlyozzuk, mert az 5.4. alfejezetben látni fogjuk, hogy a végtelen tagú összegek, vagyis a sorok tagjait nem lehet minden esetben átrendezni.) Ez a tulajdonság jól is jön, hiszen figyeljük meg, hogy sok tag pozitív és negatív előjellel is szerepel, ezért összegük 0. Csak azok a tagok maradnak meg, amelyeknek nincsen ellenkező előjelű párja; ilyenek a felírás elején és végén fordulnak elő. Csak a megmaradó tagokat felsorolva az n-edik részletösszeg:

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

   A sor összege a részletösszeg-sorozat határértéke (amennyiben létezik), azaz

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4}.$$

   (Mivel a sor csak pozitív tagokat tartalmaz, ezért abszolút konvergens is.)

A numerikus sorok konvergenciájának egy szükséges feltételét fogalmazza meg a következő tétel.

5.1.11. Tétel. *Ha egy sor konvergens, akkor az általános tagja* 0*-hoz tart.*

Bizonyítás: Mivel a sor konvergens, a részletösszeg-sorozatának határértéke véges, jelölje ezt s. A részletösszeg-sorozat két szomszédos tagjának különbsége pont a generáló sor egyik tagjával egyenlő: $a_n = s_n - s_{n-1}$. Ezt felhasználva:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$ □

A fenti tétel szemléletes jelentése, hogy ha végtelen sok szám összeadásával véges összeget szeretnénk eredményül kapni, ahhoz *szükséges*, hogy „egyre kisebb (abszolút értékű)", a végtelenben eltűnő számokat adjunk össze. (A feltétel nem elégséges; erre a későbbi alfejezetekben látunk példát.)

5.1.12. Példa. A tétel alapján rögtön megmondhattuk volna, hogy az előző példák közül $\sum_{k=1}^{\infty} k$ sor divergens, mert általános tagja ∞-hez tart; illetve $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ is divergens, mert a generáló sorozatának nincs határértéke.

5.1.1. Feladatok

Adottak az alábbi numerikus sorok:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{k+1}$$

1. Mi a sorok generáló sorozata? Mi az általános tag?
2. Számítsa ki a sorok első néhány részletösszegét.
3. Mely sorok biztosan divergensek?
4. Írja fel a sorok n-edik részletösszegét (az utolsó kivételével) zárt alakban.
5. Mennyi a konvergens sorok összege?

5.2. Konvergenciakritériumok

A numerikus sorok alkalmazásai során gyakran előfordul, hogy a sor összegét nem feltétlenül szükséges ismernünk vagy talán nem is tudjuk meghatározni, de mégis szükségünk van annak ismeretére, hogy a sor konvergens vagy divergens. A kérdés eldöntésére szolgálnak a konvergenicakritériumok, amelyek közül néhánnyal ebben az alfejezetben fogunk megismerkedni.
Az előző leckében már megfogalmaztuk a sorok konvergenciájának egy szükséges feltételét. Mivel ez a konvergencia egyik legalapvetőbb kritériuma, itt megismételjük.

5.2.1. Tétel. *Ha egy sor konvergens, akkor az általános tagja* 0*-hoz tart; azaz*

$$\text{ha } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens, akkor } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

A konvergenciakritériumokat külön fogjuk megfogalmazni állandó előjelű (jeltartó) és váltakozó előjelű (alternáló) sorokra, ezért először ezeket definiáljuk.

5.2.2. Definíció (Jeltartó sor). A numerikus sor *állandó előjelű* (*jeltartó*), ha általános tagjai véges sok kivétellel vagy mind nem-negatívak, vagy mind nem-pozitívak.

5.2.3. Megjegyzés. A jeltartó sorok közül elegendő csak a nem-negatív tagú sorokat vizsgálni, hiszen ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nem-pozitív tagú sor, akkor az ellentettje, $\sum_{k=1}^{\infty} (-a_k)$ nem-negatív tagú sor, és pontosan akkor konvergens, ha az eredeti sor is konvergens. Továbbá, a nem-negatív tagú sorokból a 0 tagokat – amennyiben vannak ilyenek – elhagyhatjuk, a sorösszeget nem befolyásolják, ezért az állandó előjelű sorok helyett leginkább csak a *pozitív tagú sorokat* vizsgáljuk és említjük.

5.2.4. Definíció (Alternáló sor). A numerikus sor *váltakozó előjelű (alternáló)*, ha bármely két szomszédos tagja közül az egyik nem-negatív, a másik nem-pozitív, azaz bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $a_n \cdot a_{n+1} \leqslant 0$.

A váltakozó előjelű sorokat az alábbi alakban szokás megadni: legyen a_k állandó előjelű (tipikusan nem-negatív elemű) sorozat; ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

váltakozó előjelű sor.

5.2.5. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

sor váltakozó előjelű.

5.2.1. Leibniz-féle sorok

A váltakozó előjelű sorok egy fontos speciális osztályát adja meg a következő definíció.

5.2.6. Definíció (Leibniz-féle sor). Legyen $\{a_k\}$ nem-negatív sorozat. Ekkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

váltakozó előjelű sor *Leibniz-féle sor*, ha $\{a_k\}$ monoton fogyó sorozat.

5.2.7. Példa. Az előző példában szereplő $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ sor Leibniz-féle, mert váltakozó előjelű és $a_k = \frac{1}{k}$ monoton fogyó.

A Leibniz-féle sorok konvergenciájára vonatkozó feltételt fogalmaz meg a következő tétel. A feltétel jelentősége az egyszerűsége mellett az, hogy szükséges és elégséges is egyben.

5.2.8. Tétel. *Egy Leibniz-féle sor akkor és csak akkor konvergens, ha általános tagja* 0*-hoz tart.*

Bizonyítás: A feltétel szükségessége nyilvánvaló, hiszen ennek hiánya esetén bármely sor divergens. Ezért csak az elégségesség bizonyításával kell foglalkoznunk.
Vizsgáljuk a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ sor részletösszeg-sorozatának páratlan illetve páros indexű tagjait, és használjuk ki, hogy $\{a_k\}$ sorozat monoton fogyó, ezért $a_{2m-1} \geqslant a_{2m} \geqslant a_{2m+1}$:

$$\begin{aligned} s_{2m+1} &= s_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} \leqslant s_{2m-1}, \\ s_{2m} &= s_{2m-2} + a_{2m-1} - a_{2m} \geqslant s_{2m-2}. \end{aligned}$$

Tehát a részletösszeg-sorozat páratlan indexű tagjaiból álló részsorozata monoton fogyó, ezért felülről korlátos (egy felső korlát $s_1 = a_1$); míg a páros indexű tagjaiból képezett részsorozata monoton növő, így alulról korlátos (egy alsó korlát $s_2 = a_1 - a_2$). Továbbá mivel $s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} \geqslant 0$, ezért igaz az alábbi egyenlőtlenséglánc:

$$a_1 - a_2 \leqslant s_{2m} \leqslant s_{2m+1} \leqslant a_1.$$

Az $\{s_{2m+1}\}$ és az $\{s_{2m}\}$ részsorozatok mindegyike monoton és korlátos, ezért konvergens is. A (véges) határértékükre felírhatjuk, hogy

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} - \lim_{m\to\infty} s_{2m} = \lim_{m\to\infty} (s_{2m+1} - s_{2m}) = \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0,$$

vagyis határértékük megegyezik. Ebből következően az eredeti – a két részsorozatból újból összefésült – $\{s_n\}$ sorozat is konvergens.
(Amennyiben a sor első általános tagja negatív, azaz a sor $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ alakban írható fel, akkor a bizonyítást hasonlóan végezhetjük, de ekkor a részletösszeg-sorozat páratlan indexű tagokat tartalmazó részsorozata lesz monoton növő, míg a páros indexűekből álló lesz monoton fogyó.) □

5.2.9. Példa. A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ sor konvergens, mert Leibniz-féle és

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 0.$$

5.2.10. Megjegyzések.

- Bár a tétel a Leibniz-féle sorok általános tagjának 0-hoz tartását írja elő, amely tartalmazza a váltakozó előjelet biztosító (-1)-hatványt is, ez pontosan akkor tart 0-hoz, ha a (-1)-hatvány nélküli tag 0-hoz tart:

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{k+1} a_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

  ezért általában csak a_k határértékét szokás kiszámítani.

- Tekintsük a következő sorozatot:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páratlan;} \\ \frac{2}{k}, & \text{ha } k \text{ páros.} \end{cases}$$

  Ez a sorozat a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0+1+0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}+\cdots$ sort generálja, amely megegyezik a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sorral, ezért – mint később látni fogjuk – divergens. A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tekinthető váltakozó előjelű sornak, mert a $\frac{2}{k}$ tagok nem-negatívak, míg a 0 tagok nem-pozitívak. Általános tagja viszont hiába tart 0-hoz, mégsem Leibniz-féle sor, ugyanis az $\{a_k\}$ sorozat nem monoton fogyón tart 0-hoz. Így a fenti tétel nem alkalmazható rá.

5.2.2. Pozitív tagú sorok

A továbbiakban pozitív tagú sorokra vonatkozó kritériumokat fogalmazunk meg. Látni fogjuk, hogy itt nincs olyan egyszerű dolgunk mint az alternáló sorok esetében. Mivel $a_k >$ > 0, így a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozata (szigorúan) monoton nő. Ahhoz, hogy $\{s_n\}$ (és így a sor maga is) konvergens legyen, szükséges és elégséges, hogy korlátos is legyen. Az alábbi konvergenciakritériumokkal a részletösszeg-sorozat korlátosságára vonatkozó elégséges feltételeket írunk elő. A tételek bizonyításában is csak erre szorítkozunk.

Majoráns-minoráns kritériumok

5.2.11. Definíció (Majoráns sor). Ha véges sok k indextől eltekintve $0<a_k\leqslant b_k$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor egy *majoráns sora.*

5.2.12. Tétel (Majoráns kritérium). *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor egy majoráns sora $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, és a majoráns sor konvergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens.*

Bizonyítás: Legyen k^* egy olyan index, amelyre minden $k \geqslant k^*$ esetén már $a_k \leqslant b_k$ teljesül. Vizsgáljuk a $\sum_{k=k^*}^{\infty} a_k$ sor $\{s_n^*\}_{n\geqslant k^*}$, valamint a $\sum_{k=k^*}^{\infty} b_k$ sor $\{t_n^*\}_{n\geqslant k^*}$ részletösszeg-sorozatát. Világos, hogy bármely $n\geqslant k^*$ esetén $s_n^*\leqslant t_n^*$, és mivel a majoráns sor konvergens, ezért $\{t_n^*\}$ sorozat korlátos. Legyen egy felső korlátja K, és az eredeti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozata korlátosságának belátásához vegyük vissza az elejéről hiányzó véges összeget. Nyilvánvaló, hogy $n < k^*$ esetén

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < \infty.$$

Ha $n \geqslant k^*$, akkor pedig

$$s_n = \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k + s_n^* \leqslant \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k + t_n^* \leqslant \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k + K < \infty.$$

□

5.2.13. Definíció (Minoráns sor). Ha véges sok k indextől eltekintve $0<b_k\leqslant a_k$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor egy *minoráns sora.*

5.2.14. Tétel (Minoráns kritérium). *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor egy minoráns sora $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, és a minoráns sor divergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is divergens.*

Bizonyítás: A bizonyítást a majoráns kritériummal azonos gondolatmenetet követve, de éppen fordított logika szerint végezhetjük. A minoráns sor részletösszeg-sorozata nem korlátos, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor részletösszeg-sorozata sem lehet korlátos, így a sor divergens. □

Hányadoskritériumok

5.2.15. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor esetén megadható olyan $q < 1$ szám, hogy véges sok k index kivételével*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q,$$

akkor a sor konvergens.

Bizonyítás: Legyen k^* egy olyan index, amelyre már minden $k \geqslant k^*$ esetén teljesül a $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1$ feltétel. Ekkor $k \geqslant k^*$ esetén

$$a_k \leqslant q a_{k-1} \leqslant q^2 a_{k-2} \leqslant \ldots \leqslant q^{k-k^*} a_{k^*}.$$

Legyen $b_k = a_k$, ha $k < k^*$; valamint $b_k = q^{k-k^*} a_{k^*}$, ha $k \geqslant k^*$. A $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor konvergens:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{k^*-1} a_k + \sum_{k=k^*}^{\infty} q^{k-k^*} a_{k^*} = B + a_{k^*} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = B + a_{k^*} \frac{1}{1-q}.$$

Az első k^*-1 (véges sok) tag összegét B-vel jelöltük. A fentiek alapján $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor egy majoráns sora, és konvergens. A majoráns kritérium alapján így a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens. □

A tétel által támasztott követelményt többnyire nehéz ellenőrizni. Egyszerűbb dolgunk van, ha létezik a $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ hányadosok sorozatának határértéke, mert ha a határérték 1-nél kisebb, akkor csak véges sok hányados tag lehet az 1-nél kisebb határérték bármely környezetén kívül, ezért megadható a tételnek megfelelő $q<1$ szám. Ha viszont a határérték 1-nél nagyobb, akkor a hányadosok közül végtelen sok van az 1-nél nagyobb határérték bármely környezetében, így nem lehet, hogy közülük csak véges sok vesz fel 1-nél nagyobb értéket, ezért ekkor a sor divergens. A fentiek miatt a tételt inkább az alábbi formában használjuk:

5.2.16. Tétel (Hányadoskritérium). *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor szomszédos tagjai hányadosának létezik a*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$$

határértéke, akkor

- *$A<1$ esetén a sor konvergens;*
- *$A>1$ esetén a sor divergens;*
- *$A=1$ esetén nem eldönthető (lehet konvergens és divergens is).*

Bizonyítás: Legyen $A<1$. Az $\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\}$ sorozat konvergenciája miatt a tagok közül csak véges sok lehet a határérték $\varepsilon=\frac{1-A}{2}>0$ sugarú környezetén kívül, ezért véges sok kivételtől eltekintve $\frac{a_{k+1}}{a_k}<A+\varepsilon=\frac{A+1}{2}<1$. Az előző tétel feltételeinek megfelel a $q=\frac{A+1}{2}$ választás. Legyen most $A>1$. Egy bizonyos küszöbindextől kezdve az $\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\}$ sorozat minden eleme a határérték $\varepsilon=A-1$ sugarú környezetében van, azaz $\frac{a_{k+1}}{a_k}>A-\varepsilon=1$. Átrendezve $a_{k+1}>a_k$, azaz $\{a_k\}$ a küszöbindextől kezdve szigorúan monoton nő, és pozitív tagú sorozat lévén a határértéke nem lehet 0. A sor konvergenciájának szükséges feltétele nem teljesül, így divergens. □

5.2.17. Példák.

1. Konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ sor?

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1,$$

tehát a sor konvergens.

2. Konvergens a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor?

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

tehát ezzel a módszerrel nem dönthető el.

Gyökkritériumok

Hasonló módon működik a következő kritérium is.

5.2.18. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sorhoz megadható olyan $q < 1$ szám, hogy véges sok k index kivételével*

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q,$$

akkor a sor konvergens.

Bizonyítás: Mivel a fenti egyenlőtlenség a generáló sorozat csak véges sok tagjára nem teljesül, ezért létezik egy k^* index, hogy minden $k \geqslant k^*$ esetén $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q$, azaz $a_k \leqslant q^k$. Legyen $b_k = a_k$, ha $k < k^*$; és $b_k = q^k$, ha $k \geqslant k^*$. A $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor egy majoráns sora, és mivel $q < 1$, ezért konvergens. A majoráns kritérium alapján így a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens. □

A hányadoskritériumnál vázolt okok miatt ezt a tételt is inkább az alábbi formában használjuk:

5.2.19. Tétel (Gyökkritérium). *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor általános tagjai k-adik gyökének létezik a*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$$

határértéke, akkor

- *$A < 1$ esetén a sor konvergens;*
- *$A > 1$ esetén a sor divergens;*
- *$A = 1$ esetén nem eldönthető (lehet konvergens és divergens is).*

Bizonyítás: Legyen $A<1$. A $\left\{\sqrt[k]{a_k}\right\}$ sorozat konvergenciája miatt a tagok közül csak véges sok lehet a határérték $\varepsilon = \frac{1-A}{2} > 0$ sugarú környezetén kívül, ezért véges sok kivételtől eltekintve $\sqrt[k]{a_k} < A+\varepsilon = \frac{A+1}{2} < 1$. Az előző tétel feltételeinek megfelel a $q = \frac{A+1}{2}$ választás. Legyen most $A > 1$. Egy bizonyos küszöbindextől kezdve a $\left\{\sqrt[k]{a_k}\right\}$ sorozat minden eleme a határérték $\varepsilon = A-1$ sugarú környezetében van, azaz $\sqrt[k]{a_k} > A-\varepsilon = 1$. Átrendezve $a_k >$ > 1, azaz a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor egy minoráns sora $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, amely divergens, így a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is divergens. □

5.2.20. Példák.

1. Konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ sor?

   $$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{e^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{e} = \frac{1}{e} < 1,$$

   tehát a sor konvergens.

2. Konvergens a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor?

   $$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1,$$

   tehát ezzel a módszerrel nem dönthető el.

Integrálkritérium

Végül nézzünk egy olyan konvergenciakritériumot, amely igen jól alkalmazható monoton fogyó, pozitív tagú sorokra.

5.2.21. Tétel (Integrálkritérium). *Legyen az* $f\colon\ [1;\infty[\to\mathbb{R}^+$ *monoton fogyó függvény. A* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *numerikus sor akkor és csak akkor konvergens, ha az* $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *improprius integrál konvergens.*

Bizonyítás: Mivel az f függvény monoton fogyó, tetszőleges $[k;k+1]$ intervallumon ($k\geqslant 1$) a maximumhelye az intervallum baloldali végpontjában van, értéke $f(k)$. A $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ sor minden s_n részletösszege ennek megfelelően az $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál definíciójában előírt, $[1;n+1]$ intervallumon vett Riemann-integrál felső integrálközelítő összegét adja meg (minden részintervallumban $\Delta x_k=1$), ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k)\geqslant\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha az improprius integrál divergens, azaz értéke ∞, akkor a sorösszeg sem véges. Hasonlóan: tetszőleges $[k-1;k]$ intervallumon ($k\geqslant 2$) a függvény minimumhelye az intervallum jobboldali végpontjában van, értéke $f(k)$. A $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ sor minden s_n részletösszege az $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál definíciójában megkövetelt, $[1;n]$ intervallumon vett Riemann-integrál egy alsó integrálközelítő összegét adja meg (minden részintervallumban $\Delta x_k=1$), ezért hasonlóan (de a határértéket itt nem részletezve)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)=f(1)+\sum_{k=2}^{\infty} f(k)\leqslant f(1)+\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha az improprius integrál konvergens, azaz értéke véges, akkor a sorösszeg is véges. (Illusztrációt a tételt követő megjegyzéseknél, az 5.2. ábrán találunk.) □

5.2.22. Példák.

1. Konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{e^k}$ sor?

   Az $f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$ függvény minden egész k helyen pont a $\frac{k}{e^k}$ értékeket veszi fel és (szigorúan) monoton fogyó az $[1;\infty[$ intervallumon (mert deriváltja, $f'(x)=$ $=(1-x)\,e^{-x}$ negatív ezen az intervallumon). A függvény primitív függvényét parciális integrálással határozhatjuk meg.

   $$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,\mathrm{d}x=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-\,(x+1)\,e^{-x},$$

   így az improprius integrálja az $[1;\infty[$ intervallumon

   $$\int_1^{\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x=\Big[-\,(x+1)\,e^{-x}\Big]_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{e^x}+2e^{-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^x}+\frac{2}{e}=0+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}.$$

   A határérték kiszámításánál a l'Hôpital-szabályt alkalmaztuk. Mivel az improprius integrál konvergens, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{e^k}$ sor is konvergens.

2. Konvergens a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ sor?

   Az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény minden egész k helyen pont az $\frac{1}{k}$ értékeket veszi fel és monoton fogyó.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln|x|]_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln|x|-\ln 1=\infty.$$

   Mivel az imprmusrius integrál divergens, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ sor is divergens.

5.2.23. Megjegyzések.

- Az általános tagban faktoriálist tartalmazó sorokra általában csak a hányadoskritériumot tudjuk használni.
- Az integrálkritérium általánosabban úgy is igaz, ha a tételben szereplő f függvény csak valamely $c>1$ értéktől kezdve, azaz a $[c;\infty[$ intervallumon monoton fogyó.
- Az integrálkritérium kizárólag a sor konvergenciájáról ad információt, a sor összegéről nem. Tehát a konvergens improprius integrál értéke nem egyezik meg a sor összegével.

  Példaként alkalmazzuk az integrálkritériumot az előző leckében látott

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}$$

  konvergens sorra. Az $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ függvény a tétel feltételeinek megfelel, primitív függvényét szintén résztörtekre bontással határozhatjuk meg.

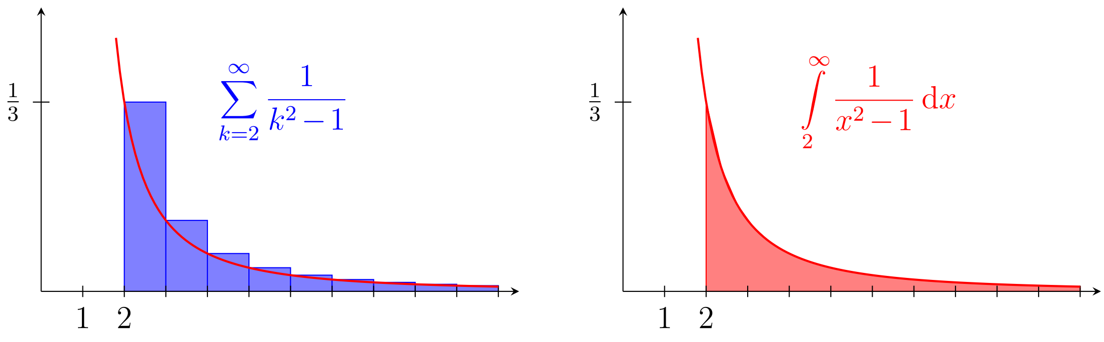
$$\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

  Az improprius integrálja a $[2;\infty[$ intervallumon

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\right|=0+\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3},$$

  amely nem egyezik meg $\frac{3}{4}$-del.

  A két érték különbözősége nyilvánvalóvá válik, ha meggondoljuk, hogy az improprius integrál a függvénygörbe alatti végtelen terület mértékét adja meg, míg a sor egy olyan alakzatét, amely egységnyi alapélű és $a_k=f(k)$ magasságú téglalapokból áll. Figyeljük meg a különbözőséget a két ábrán (a szemléletesség kedvéért az egységek az x és az y tengelyen különbözők, valamint a sor ábráján berajzoltuk a függvény grafikonját is).



5.2. ábra. Az integrálkritérium

5.2.3. Feladatok

Állapítsa meg valamelyik konvergenciakritérium segítségével, hogy az alábbi numerikus sorok konvergensek-e.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)!}{3^k}$

5.3. Nevezetes numerikus sorok

Az alfejezetben néhány nevezetes numerikus sor konvergenciáját vizsgáljuk meg.

5.3.1. A mértani sor

5.3.1. Definíció (Mértani sor). Az $a_k = a_0 q^k$ $(a_0 \neq 0)$ mértani sorozatból képezett $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k$ numerikus sor neve: *mértani sor.*

A mértani sor konvergenciáját és összegét a definíció alapján vizsgálhatjuk.
Ha $q = 1$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_0$ sor összege a_0 előjelétől függően egyértelműen ∞ vagy $-\infty$, tehát divergens.
Ha $q \neq 1$, akkor a mértani sor részletösszeg-sorozata a mértani sorozat összegképlete alapján:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

A határértéke kiszámításakor azt kell figyelembe vennünk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1; \\ 1, & \text{ha } q = 1; \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1; \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \leqslant -1. \end{cases}$$

Láthatóan csak abban az esetben kapunk konvergens sort, ha $|q| < 1$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = a_0 \frac{1}{1-q}.$$

(A 5.1.10.2. példában beláttuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ abszolút konvergens. Ezt felhasználva a jelenlegi $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ sor is abszolút konvergens.)
Összefoglalva tehát:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \begin{cases} \infty \text{ vagy } -\infty, & \text{ha } q \geqslant 1; \\ a_0 \frac{1}{1-q}, & \text{ha } -1 < q < 1; \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \leqslant -1. \end{cases}$$

5.3.2. Példák.

1. A fejezet bevezető példájaként látott $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ sor is mértani sor volt $a_0 = 1$ és $q = \frac{1}{2}$ értékekkel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

2. A 5.1.10.4. példában láttuk a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ mértani sort, amelyben $q = -1$, ezért a sor divergens, összege nem létezik.

3. Mennyi a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}}$ sor összege?

   Kis átalakítással látható, hogy mértani sorról van szó $a_0 = 3$ és $q = \frac{3}{4}$ értékekkel, ezért a sor konvergens:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 3^k}{(2^2)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 12.$$

4. Mennyi a $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^{\frac{k}{3}}}{100}$ sor összege?

   Némi átalakítással

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^{\frac{k}{3}}}{100} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{100} \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{100} \cdot 5 \left(\sqrt[3]{5}\right)^{k-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{20} \left(\sqrt[3]{5}\right)^k$$

   megkapjuk, hogy $a_0 = \frac{1}{20}$ és $q = \sqrt[3]{5} > 1$, ezért a sor összege ∞, tehát divergens.

5.3.2. A harmonikus sor

5.3.3. Definíció (Harmonikus sor). Az $a_k = \frac{1}{k}$ sorozatból képezett $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ numerikus sor neve: *harmonikus sor.*

Az előző alfejezetben az integrálkritérium alkalmazásaként láttuk, hogy a harmonikus sor összege végtelen, tehát divergens.
Most vizsgáljuk az általánosabb $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$ sort, amely az $\alpha=1$ speciális esetként tartalmazza a harmonikus sort. A sor konvergenciájának elemzéséhez az integrálkritériumot használjuk: $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ megfelel a feltételeknek. Az előző alfejezetben már megállapítottuk, hogy ha $\alpha = 1$ (azaz harmonikus sor esetén) a sor divergens.
Ha $\alpha \neq 1$, akkor

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1},$$

amely csak abban az esetben konvergens, ha $-\alpha+1 < 0$, azaz $\alpha > 1$.
A fentiek alapján a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ típusú sorok között a harmonikus sor a „határ”: $0 < \alpha \leqslant 1$ esetén a sor divergens, de bármilyen $\alpha > 1$ esetén már konvergens.

5.3.4. Megjegyzések.

- A harmonikus sor a tipikus példa arra, hogy a numerikus sor általános tagjának 0-hoz konvergálása csak szükséges, de nem elégséges feltétel arra, hogy a sor konvergens legyen: $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

A továbbiakat érdekességként említjük meg:

- A harmonikus sor összege ∞, de rendkívül „lassan divergál” a végtelenbe. Például az első 1000 illetve 10 000 tagjának összege is csekély

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} \approx 7{,}485 \qquad \text{illetve} \qquad \sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{k} \approx 9{,}788;$$

  de még az első 10^{43} tag összege sem éri el a 100-at.

- A váltakozó előjellel vett harmonikus sor, amint azt az előző leckében láttuk, Leibniz-féle sor, és $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ miatt konvergens. Összege

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2,$$

  amelyet a függvénysorok témakörében bizonyítunk (6.4.6.6. példa).

- Az $\alpha = 2$ esetén előálló konvergens (hiperharmonikus) sor összege

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- Még abban az esetben is divergens sort kapunk eredményül, ha a harmonikus sorban csak a prímszámok reciprokát szerepeltetjük:

$$\sum_{p \text{ prím}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \infty.$$

- A harmonikus sor elnevezés onnan származik, hogy egy egységnyi hullámhosszúságú hang felhangjai (felharmonikusai) az $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ hullámhosszúságú hangok.

5.3.3. Feladatok

1. Állapítsa meg, hogy az alábbi mértani sorok(ra visszavezethető sorok) konvergensek-e; és ha igen, határozza meg az összegüket.

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{3^{2k}}$

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k}$

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} 5^{k-2}$

   (d) $\sum_{k=0}^{\infty} 5^{2-k}$

   (e) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\pi^{k-1}}{3^k}$

   (f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{16^k}$

2. Állapítsa meg, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$ „általánosított” harmonikus sor konvergens-e.

5.4. Műveletek konvergens sorokkal

Természetes módon felmerül, hogy numerikus sorokkal műveleteket végezzünk. Elsőként megszokott műveletek esetén vizsgáljuk meg a sorok konvergenciáját, majd olyan műveletekkel foglalkozunk, amelyeket csak sorok esetén értelmezhetünk. Látni fogjuk, hogy bizonyos esetekben körültekintően kell eljárnunk.

5.4.1. Tétel. *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens és összege A, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k$ sor is konvergens, és összege cA.*

Bizonyítás: A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor részletösszeg-sorozatát jelölje $\{s_n\}$. Ekkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k$ részletösszeg-sorozata $\{c \cdot s_n\}$. A sorozatoknál tanultak szerint így

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} s_n = cA. \qquad \square$$

5.4.2. Tétel. *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sor konvergens, összegük rendre A és B, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)$ sor is konvergens, és összege $A+B$.*

Bizonyítás: A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor részletösszeg-sorozatát jelölje $\{s_n\}$, míg a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sorét $\{t_n\}$. Nyilvánvaló, hogy ekkor az összegsor részletösszeg-sorozata $\{s_n+t_n\}$, amely két konvergens sorozat összege. A sorozatoknál tanultak szerint így

$$\lim_{n\to\infty} (s_n+t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = A+B. \qquad \square$$

5.4.3. Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz, azaz egy konvergens sort nem lehet tetszőleges módon „szétválasztani". Emlékezzünk vissza az első alfejezetben megismert $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ sorra, amely konvergens. Már ott is láttuk, hogy $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1}$, ezért azt gondolhatnánk, hogy az eredeti sor a $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1}$ és a $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{k+1}$ sorok összege. Ez azonban nem igaz; az utóbbi két sor ugyanis divergens.

5.4.4. Definíció (Zárójelezett sor). Adjuk össze az $\{a_k\}$ sorozat első ℓ_1 ($\ell_1 \in \mathbb{Z}^+$) elemét. Az a_{ℓ_1+1}-edik elemtől kezdve újfent adjuk össze a sorozat soron következő ℓ_2 ($\ell_2 \in \mathbb{Z}^+$) elemét, majd folytassuk az eljárást hasonlóan. Ha a_i^* jelöli az i-edik (ℓ_i-tagú) összeget, azaz

$$a_i^* = a_{\ell_1+\cdots+\ell_{i-1}+1} + \cdots + a_{\ell_1+\cdots+\ell_i},$$

akkor a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^*$ sor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor egy *zárójelezett sora.*

5.4.5. Példa. Zárójelezzük a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ sort úgy, hogy a generáló sorozatában mindig két elem összegét képezzük ($\ell_i = 2$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots .$$

A zárójelezések

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k\,(k+1)}$$

alakúak minden páratlan, azaz $k = 2i-1$ alakú ($i \in \mathbb{Z}^+$) index esetén. Ezért az új generáló sorozat: $a_i^* = \frac{1}{2i(2i-1)}$. A zárójelezett sor:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i\,(2i-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \cdots ,$$

amely egyébként – az eredeti sorral ellentétben – pozitív tagú sor.

5.4.6. Tétel. *Egy konvergens numerikus sor minden zárójelezett sora is konvergens, és a két sor összege megegyezik.*

Bizonyítás: Használjuk a definíció jelöléseit, és vizsgáljuk a zárójelezett sor $\{s_m^*\}$ részletösszeg-sorozatát:

$$\begin{aligned} s_m^* &= a_1^* + a_2^* + \cdots + a_m^* = \\ &= (a_1 + \cdots + a_{\ell_1}) + (a_{\ell_1+1} + \cdots + a_{\ell_1+\ell_2}) + \cdots + \left(a_{\ell_1+\cdots+\ell_{m-1}+1} + \cdots + a_{\ell_1+\cdots+\ell_m}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\ell_1+\cdots+\ell_m} a_k = s_{\ell_1+\cdots+\ell_m}. \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy az $\{s_m^*\}$ sorozat az $\{s_n\}$ sorozat egy részsorozata. Mivel az utóbbi konvergens, az előbbi is az, és a határértékük megegyezik, ez pedig pontosan a tétel állítása.□

5.4.7. Példa. A fentebb látott zárójelezett sor összege a 5.3.4. második megjegyzése értelmében:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i\,(2i-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = \ln 2.$$

5.4.8. Megjegyzések.

- A tétel megfordítása nem igaz: nem szabad a konvergens sor általános tagját tetszés szerinti összeggel helyettesíteni, majd a zárójelezést törölve és az összeg tagjait az új sor általános elemeként tekintve azonos sorösszegű sort felírni.

  Triviális példaként tekintsük a $\sum_{k=1}^{\infty} 0$ konvergens sort. Helyettesítsük minden 0 helyére az $1+(-1)$ összeget:
  $$0+0+0+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\,.$$
  Ha a zárójelezést töröljük, akkor a jobb oldalon a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sort kapjuk, amely divergens.

- Vegyük elő újra a $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ sort (5.1.10.5. példa) és gondolkozzunk el azon, hogy nem követtünk-e el hibát, amikor az általános tagot résztörtekre bontottuk, a résztörtek összegével helyettesítettük, majd a zárójelezés megszüntetésével a pozitív és negatív előjelű, azonos abszolút értékű tagokat töröltük. Lapozzuk fel újra a sorösszeg kiszámításának módját, és vegyük észre azt a lényeges momentumot, hogy nem a sorban, hanem a részletösszegekben szüntettük meg a zárójelezést. A részletösszegekben pedig mindig csak véges sok tag van, ezért ez minden további nélkül végrehajtható.

  Az itt látott két példa remekül illusztrálja, hogy a végtelen tagú összegekre miért nem lehet *műveletként* tekinteni.

A zárójelezéshez hasonló óvatossággal kell bánni a sorok átrendezésével is.

5.4.9. Definíció (Átrendezett sor). Ha az $\{a_k\}$ generáló sorozatban a tagok sorrendjét megváltoztatjuk, azaz definiálunk egy $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, $k \mapsto k^*$ bijektív megfeleltetést, akkor az $\{a_{k^*}\}$ sorozat által generált $\sum_{k^*=1}^{\infty} a_{k^*}$ sor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor egy *átrendezett sora.*

5.4.10. Példa. Képezzük a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergens sor egy átrendezését úgy, hogy minden pozitív előjelű (páratlan sorszámú, $k=2i-1$) általános tag mögé „hozzuk előre” a kétszer annyiadik sorszámú ($2k=4i-2$) és a következő negatív előjelű ($2k+2=4i$) általános tagot. Ebből az első kettőt zárójelezzük is egyúttal (konvergens sor zárójelezhető):
$$\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{4i-2}\right)-\frac{1}{4i}=\frac{2-1}{4i-2}-\frac{1}{4i}=\frac{1}{4i-2}-\frac{1}{4i}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right).$$
Figyeljük meg, hogy az átrendezés milyen hatással van a sorra:
$$\begin{aligned}\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Ellentmondásra jutottunk. A hibát ott követtük el, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ nem abszolút, csak feltételesen konvergens.

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő tételt.

5.4.11. Tétel. *Az abszolút kovergens numerikus sor bármely tetszőlegesen átrendezett sora is konvergens, és összege megegyezik az eredeti sor összegével.*

6. fejezet

Függvénysorok

6.1. A függvénysor fogalma és konvergenciatartománya

Az előző kötet 5. fejezetében számsorozatokat vizsgáltunk. E kötet 5. fejezetében pedig olyan végtelen összegekkel foglalkoztunk, amelyek tagjai számok voltak. Ugyanezt megtehetjük függvényekkel is. A fejezetben elsősorban a függvénysorokra fókuszálunk, de a fogalmakat és a bizonyításokat érthetőbbé teszi, ha a függvénysorozatok fogalmát is bevezetjük.

6.1.1. Definíció (Függvénysorozat). Legyenek az f_1, f_2, ..., f_k, ... közös értelmezési tartományon értelmezett függvények. Ekkor az $\{f_k\}$ sorozatot *függvénysorozatnak* nevezzük. Az f_k függvény a függvénysorozat *k-adik tagja.*

6.1.2. Példa. Legyen $f_k(x) = x^k$. Ekkor az alábbi függvényekből álló sorozatot kapjuk: x, x^2, x^3, x^4, ...
A későbbiekben érdemes lesz ezt a függvénysorozatot a 0-dik tagjától indítani. Ebben az esetben az x^0 függvényt a konstans 1 függvénnyel azonosítjuk, bár formálisan a 0 helyen nem volna értelmezve. Ez a konvenció később a tárgyalásmód egységének kényelmét szolgálja. Így tehát a függvénysorozat: 1, x, x^2, x^3, x^4, ...
Figyeljük meg, hogy ha egy értelmezési tartmánybeli x_0 értéket a függvénysorozatba (pontosabban a függvénysorozat minden tagjába) behelyettesítünk, akkor egy numerikus sorozatot kapunk. Ha $x_0 = -3$, akkor az $1, -3, 9, -27, 81, \dots$, azaz a $(-3)^k$ sorozat adódik, amely divergens. Ha $x_0 = \frac{1}{5}$, akkor az $\left(\frac{1}{5}\right)^k$, ha pedig $x_0 = 1$, akkor a konstans 1 sorozatot kapjuk. E két utóbbi sorozat konvergens, de határértékük eltér. A függvénysorozatból behelyettesítéssel adódó numerikus sorozat konvergenciája és határértéke függ a behelyettesített értéktől.

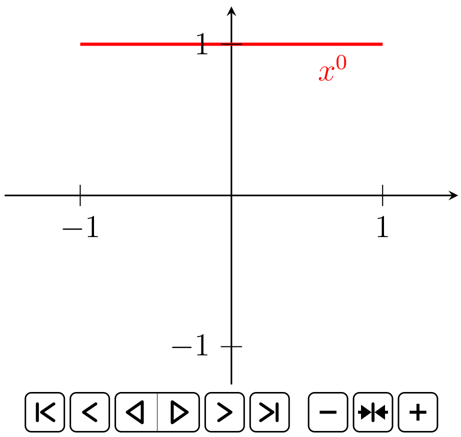
6.1.3. Definíció (Konvergenciatartomány, határfüggvény). Azok az x_0 értékek alkotják az $\{f_k\}$ függvénysorozat *konvergenciatartományát*, amelyeket a függvénysorozatba behelyettesítve konvergens numerikus sorozat adódik. Azt az f függvényt, amely x függvényében megadja az $\{f_k\}$ függvénysorozat határértékét, a függvénysorozat *határérték-függvényének* (vagy röviden *határfüggvényének*) nevezzük, és így jelöljük:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,.$$

6.1.4. Példa. Az $\{x^k\}$ függvénysorozat a már korábban megismert geometriai sorozat, amelyről megállapítottuk, hogy $-1 < x \leqslant 1$ esetén konvergens, azaz a konvergenciatartománya a $]-1;1]$ intervallum. Határértéke x-től függően:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 < x < 1; \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Ezzel megadtuk a sorozat határfüggvényét. A 6.1. ábra animációján megfigyelhetjük a sorozat első néhány elemét (pirossal ábrázolva), és a végén kék színnel megjelenik a határfüggvény.



6.1. ábra. Az $f_k(x) = x^k$ függvénysorozat elemei

Ezek után ismerjük meg a függvénysorokat.

6.1.5. Definíció (Függvénysor). Legyenek az $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ közös értelmezési tartományon értelmezett függvények. Az

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

végtelen sok tagú (formális) összeget *függvénysornak* nevezzük. Az f_k függvények a *függvénysor tagjai*, míg az első n darab függvény

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

összege a függvénysor *n-edik részletösszegfüggvénye*. A részletösszegfüggvények $\{s_n\}$ függvénysorozata a függvénysor *részeltösszegfüggvény-sorozata* (vagy röviden *részletösszegsorozata*).

Ha egy értelmezési tartománybeli x_0 értéket a függvénysorba helyettesítünk, akkor egy numerikus sort kapunk.

6.1.6. Példa. Tekintsük a

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

képlettel megadott függvénysort. A függvénysor n-edik részletösszegfüggvénye az $1+x+$ $+x^2+\cdots+x^n$ függvény, a részletösszegfüggvényekből álló $\{1; 1+x; 1+x+x^2; \ldots\}$ függvénysorozat a függvénysor részletösszegsorozata.
Ha egy értelmezési tartománybeli x_0 értéket a függvénysorba behelyettesítünk, akkor egy numerikus sort kapunk. Ha $x_0 = 2$, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1+2+4+8+\cdots+2^k+\cdots$$

numerikus sort kapjuk, amelyről tudjuk, hogy divergens, mert 2 hányadosú mértani sor.
Ha $x_0 = \frac{1}{3}$, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^k+\cdots$$

numerikus sort kapjuk, amely konvergens, és összege $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, mert $\frac{1}{3}$ hányadosú mértani sor.

Látható, hogy bizonyos x_0 értékeket behelyettesítve konvergens, míg más értékekre divergens numerikus sort kapunk. A függvénysorból behelyettesítéssel adódó numerikus sor konvergenciája és összege függ a behelyettesített értéktől.

6.1.7. Definíció (Konvergenciatartomány, összegfüggvény). A $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor *konvergenciatartománya* azon értelmezési tartománybeli x_0 értékek halmaza, amelyeket a függvénysorba behelyettesítve a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ numerikus sor konvergens. Valamely H halmazon konvergens $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor *összegfüggvénye* az az $s(x)$ függvény, amelynek értéke bármely $x \in H$ esetén megadja az x behelyettesítésével adódó numerikus sor összegét, azaz bármely $x \in H$ esetén

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Figyeljük meg, hogy a függvénysorozatok és -sorok konvergenciájának 6.1.3. és 6.1.7. definícióiban *pontonkénti konvergenciát* definiáltunk, a behelyettesítéssel adódó numerikus sor megfelelő tulajdonságára hivatkoztunk. A függvénysorok esetében úgy is fogalmazhatunk, hogy pontosan akkor konvergens, ha a részletösszegfüggvényeinek sorozata konvergens.

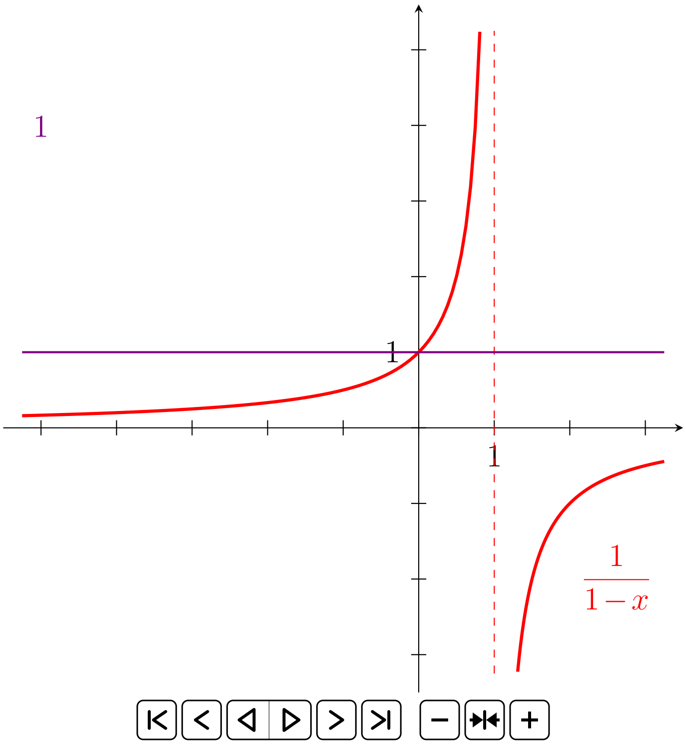
6.1.8. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor a már megismert mértani sor. Bármely érték behelyettesítésével egy konkrét numerikus mértani sor adódik. Ez pontosan akkor konvergens, ha a hányadosának abszolút értéke kisebb mint 1. Mivel itt x a hányados, a sor pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, vagyis a sor konvergencia-tartománya a $]-1;1[$ intervallum. A sor összegfüggvénye pedig az $s(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{ha } |x| < 1.$$

A 6.2. animáción figyeljük meg, hogyan változik az összeg egyre több tag hozzáadásával a $]-1;1[$ konvergenciatartományban, illetve azon kívül. Az ábrán pirossal jelölve látható az $\frac{1}{1-x}$ összegfüggvény, de nem csak a konvergenciatartományban.

6.1.9. Definíció (Abszolút konvergencia). A $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ függvénysor *abszolút konvergens* a H halmazon, ha a $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$ függvénysor konvergens ugyanezen halmazon.

6.1.10. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor abszolút konvergens a $]-1;1[$ intervallumon, hiszen a $\sum_{k=0}^{\infty} \left|x^k\right|$ függvénysor konvergens ugyanezen az intervallumon, mert $|x|$ hányadosú mértani sor, az $\left|x^k\right| = |x|^k$ azonosság miatt.



6.2. ábra. A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor.

6.2. Műveletek függvénysorokkal

Az alábbiakban megvizsgáljuk hogyan és milyen feltételek mellett lehet műveleteket végezni függvénysorokkal.

6.2.1. Tétel. *A konvergens függvénysorok rendelkeznek a homogén lineáris tulajdonsággal, azaz*

- *összegtartók, vagyis ha $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ függvénysorok konvergensek, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k+g_k)$ is konvergens, és*
$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_k+g_k)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k+\sum_{k=1}^{\infty} g_k;$$
- *aránytartók, vagyis ha $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergens, akkor tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ esetén a $\sum_{k=1}^{\infty} cf_k$ függvénysor is konvergens, és*
$$\sum_{k=1}^{\infty} cf_k=c\sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Bizonyítás: A tulajdonságok igazolásához elegendő az egyes x_0 pontokban adódó numerikus sorokra és az ott megismert tulajdonságokra hivatkozni. □

6.2.1. Egyenletesen konvergens függvénysorok

Függvényekről lévén szó, fontos tudnunk azt is, hogy hogyan viselkedik a függvénysor deriválás és integrálás során. Korábbi tanulmányokból ismert, hogy függvények véges összegét tagonként lehet deriválni és integrálni:

$$(f_1+f_2+\dots+f_n)'=f_1'+f_2'+\dots+f_n' \quad \text{és} \quad \int(f_1+f_2+\dots+f_n)=\int f_1+\int f_2+\dots+\int f_n.$$

Mielőtt megvizsgáljuk a végtelen összegek viselkedését deriválás és integrálás szempontjából, figyeljük meg az alábbi, meglepő jelenségeket. Amint látni fogjuk, végtelen összegekre általában nem teljesülnek a véges összegeknél megszokott tulajdonságok. Emiatt meg kell majd ismernünk a függvénysor konvergenciájának egy szigorúbb feltételét, az egyenletesen konvergens függvénysorok fogalmát. Bár külön nem foglalkoztunk velük, a szemléltetést először függvénysorozatokon végezzük, emlékeztetve arra, hogy a sorok összegét sorozatok határértékeként definiáltuk.

6.2.2. Példák.

1. Folytonos függvények sorozatának határértéke nem feltétlenül folytonos függvény.

   Tekintsük ismét az $f_k(x)=x^k$ függvénysorozatot, amelynek minden tagja folytonos. Megállapítottuk, hogy a $]-1;1]$ intervallum a konvergenciatartománya, illetve hogy a határfüggvénye:

   $$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } -1<x<1; \\ 1, & \text{ha } x=1; \end{cases}$$

   amely nem folytonos. A 6.1. animáción is láthatjuk, hogy a függvénysorozat pirossal jelölt elemei folytonosak, míg a kékkel jelölt határfüggvény nem.

   Ha már a folytonosság sem a megszokott módon viselkedik végtelen sok függvény esetén, akkor ezt nem remélhetjük a differenciálás vagy integrálás műveletétől sem. Ezt a következő két példa is igazolja.

2. A határfüggvény deriváltja nem a deriváltak határfüggvénye.

   Tekintsük az $f_k(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}$ függvénysorozatot: $\left\{x;\frac{x^2}{2};\frac{x^3}{3};\dots\right\}$. Világos, hogy bármely $x\in\,]-1;1]$ esetén az adódó sorozat határértéke 0. Hangsúlyozzuk, hogy most $x=1$ esetén is 0 a határérték, hiszen az $\left\{\frac{1}{k+1}\right\}$ sorozatról van szó. Ezért

   $$\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)'=0'=0.$$

   Ha viszont előbb a differenciálást végezzük el, $f_k'(x)=x^k$, ezért

   $$\lim_{k\to\infty} f_k'(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } -1<x<1; \\ 1, & \text{ha } x=1; \end{cases}$$

   vagyis

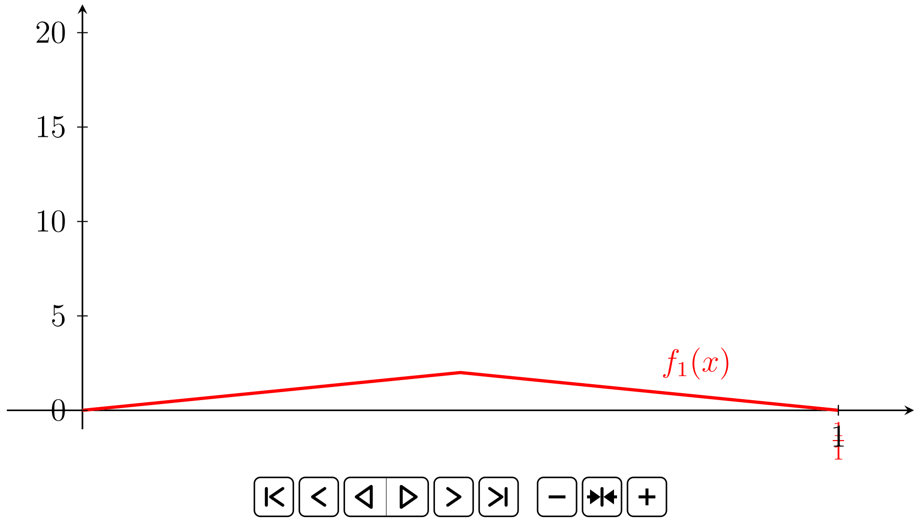
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)\neq\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_k(x)\right).$$

3. A határfüggvény integrálja nem az integrálok határfüggvénye.

   A $[0;1]$ intervallumon tekintsük azt a függvénysorozatot, amelynek f_k tagja úgy áll elő, hogy grafikonja a $\left[0;\frac{1}{k}\right]$ intervallumban az intervallum fölé rajzolt, $2k$ magasságú egyenlőszárú háromszög két szára, az intervallumon kívül pedig 0:

   $$f_k(x)=\begin{cases} 4k^2x, & \text{ha } 0\leqslant x<\frac{1}{2k}; \\ 4k-4k^2x, & \text{ha } \frac{1}{2k}\leqslant x<\frac{1}{k}; \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{k}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

A 6.3. ábra animációján a függvénysorozat első néhány tagját ábrázoltuk. A két tengelyen az egységeket jelentősen eltérőre vettük a megjeleníthetőség kedvéért.



6.3. ábra. A 6.2.2.3. példában definiált $\{f_k\}$ függvénysorozat elemei

A függvénysorozat határfüggvénye a konstans 0 függvény, hiszen a $[0;1]$ intervallum bármely pontját szemeljük is ki, egy bizonyos indextől kezdve a függvénysorozat minden eleme 0 értéket vesz fel az adott helyen. (Az intervallum két végpontjában pedig mindig 0 a függvényérték.) A konstans 0 függvény integrálja a $[0;1]$ intervallumon 0:

$$\int_0^1 \left(\lim_{k\to\infty} f_k(x) \right) \mathrm{d}x = 0.$$

Másrészről viszont a függvénysorozatot úgy alkottuk meg, hogy minden tagjának integrálja a $[0;1]$ intervallumon (a háromszög területe) 1 egységnyi legyen, így az integrálok sorozata a konstans 1 sorozat, amelynek határértéke 1:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \right) = 1.$$

A példában így

$$\int_0^1 \left(\lim_{k\to\infty} f_k(x) \right) \mathrm{d}x \neq \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

A 6.2.2. példák alapján talán már érezhető is, hogy a problémát a függvénysorozatok intervallumvégpontokhoz közeli viselkedése okozza. A 6.2.2.1. példában az 1-hez közeli helyeken a sorozat „végtelenül lassan” tart a határértékéhez. Például $\varepsilon = 0{,}1$-hez egyre nagyobb és nagyobb küszöbindexet kell meghatároznunk, hogy a tagok eltérése a határértéktől kisebb legyen ε-nál, minél közelebb van x az 1-hez. Ugyanez a helyzet a 6.2.2.3. példa függvénysorozatával is a 0-hoz közeli helyeken. Hiába válik előbb-utóbb minden helyen 0-vá a sorozat, ha ez egyre nagyobb küszöbindextől kezdve következik be, minél közelebb van x a 0 helyhez. Azt is érezzük, hogy mindez nem így volna, ha az intervallumból „lecsípnénk” egy kicsit, akármilyen kicsi legyen is, mert semelyik ilyen intervallumbeli helyen nem maradnának ε-nál nagyobb függvényértékek. Ezt a tulajdonságot definiáljuk a következőkben.

6.2.3. Definíció (Egyenletes konvergencia). Az $\{f_k\}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergens* a H halmazon és határértékfüggvénye az f függvény, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található egy n_ε küszöbindex, hogy ha $n \geqslant n_\varepsilon$, akkor bármely $x \in H$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

A definíció lényeges eleme, hogy a küszöbindex csak ε-nak függvénye, x-nek nem, vagyis bármely kis ε-hoz létezik egy „univerzális”, x-től független küszöbindex, hogy onnantól kezdve *minden* adódó numerikus sor részletösszeg-sorozatának tagjai már ε-nál közelebb vannak a határértékhez.

6.2.4. Példák.

1. A 6.2.2.1. példában szereplő $f_k(x) = x^k$ függvénysorozat a $]-1;1]$ intervallumon nem egyenletesen konvergens, de bármilyen $-1 < a < b < 1$ esetén az $[a;b]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

   Legyen $\varepsilon > 0$ és $c = \max\{|a|\,;|b|\}$. Ekkor bármely $x \in [a;b]$ esetén

   $$|x^n - 0| = |x|^n \leqslant c^n.$$

   Ha n-et úgy választjuk meg, hogy $c^n < \varepsilon$, azaz ($c < 1$ miatt)

   $$n > \log_c \varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln c},$$

   akkor teljesül az egyenletes konvergencia feltétele. Látható, hogy bármelyik $\frac{\ln \varepsilon}{\ln c}$-nél nagyobb egész szám megfelel küszöbindexnek. Az is egyértelmű, hogy a -1 és az 1 (megfelelő féloldali) környezetét ki kell zárni az egyenletes konvergencia tartományából, ellenkező esetben nem létezik küszöbindex, ugyanis (az $\varepsilon \geqslant 1$ érdektelen esetek kivételével)

   $$\lim_{c \to 1^-} \frac{\ln \varepsilon}{\ln c} = \infty.$$

2. A 6.2.2.3. példában szereplő $f_k(x)$ függvénysorozat a $[0;1]$ intervallumon nem egyenletesen konvergens, de bármely $[a;b] \subseteq]0;1]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

   Fontos, hogy itt sem elég csak magát a 0-t eltávolítani a konvergenciatartományból (azaz a függvénysorozat a $]0;1]$ intervallumon sem egyenletesen konvergens), hanem valamilyen környezetével együtt kell kizárni. Ezért fogalmazhatunk úgy is, hogy bármilyen $0 < \delta < 1$ esetén a $[\delta;1]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

6.2.5. Állítás. *Az egyenletesen konvergens függvénysorozatok konvergensek.*

Bizonyítás: Az állítás nyilvánvaló, hiszen ha általánosan létezik megfelelő küszöbindex, akkor az adódó numerikus sorozatokra külön-külön is. □

6.2.6. Megjegyzések.

- A konvergens függvénysorok viszont nem mindig egyenletesen konvergensek, hiszen attól még, hogy a behelyettesítéssel adódó numerikus sorok konvergensek, azaz bármely ε-hoz mindegyikük esetén létezik megfelelő küszöbindex, nem biztos, hogy létezik a behelyettesített értéktől független küszöbindex is.
- A definícióból nyilvánvaló, hogy az egyenletes konvergenciának akkor van értelme, ha az értelmezési tartomány nem egyelemű, tipikusan valamely intervallum. Továbbá a példákból világos, hogy mindig hozzá kell tennünk, hogy *mely intervallumon* egyenletesen konvergens az adott függvénysorozat. Ha ez egyértelmű (rögzítjük a függvénysorozattal kapcsolatban), vagy csak magára a fogalomra utalunk, akkor az egyszerűség kedvéért elhegyjuk.

6.2.7. Tétel (Cauchy). *Az $\{f_k\}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens a H halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található egy n_ε küszöbindex, hogy ha $m, n \geqslant n_\varepsilon$, akkor bármely $x \in H$ esetén*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

A tétel a konvergencia Cauchy-féle feltételét fogalmazza meg, de nem pontonként, hanem globálisan, vagyis minden pontban érvényes (univerzális) küszöbindex létezését követeli meg. A tételt nem bizonyítjuk.
Ezek után térjünk át a függvénysorok egyenletes konvergenciájára. A pontonkénti konvergenciához hasonlóan itt is az $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozat egyenletes konvergenciáját követeljük meg.

6.2.8. Definíció (Egyenletes konvergencia). A $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ függvénysor *egyenletesen konvergens* a H halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található egy n_ε küszöbindex, hogy ha $n \geqslant n_\varepsilon$, akkor bármely $x \in H$ esetén

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon,$$

ahol $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, a függvénysor n-edik részletösszege.

Az egyenletes konvergencia Cauchy-féle feltételét is megfogalmazhatjuk függvénysorokra, figyelembe véve, hogy $m < n$ esetén a részletösszegek különbsége

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} f_k$$

alakban írható.

6.2.9. Tétel (Cauchy). *A $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens a H halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található egy n_ε küszöbindex, hogy ha $n > m \geqslant n_\varepsilon$, akkor bármely $x \in H$ esetén*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

6.2.10. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor egyenletesen konvergens az $[a;b]$ intervallumon $-1 < a < b < 1$ esetén.

A bizonyításhoz használjuk fel a Cauchy-tulajdonságot, és legyen $c = \max\{|a|\,;|b|\}$. Felhasználjuk még, hogy bármely $x \in [a;b]$ esetén $|x| \leqslant c < 1$.

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x^k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \left|x^k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|^{m+1}}{1-|x|} \leqslant \frac{c^{m+1}}{1-c} \leqslant c^{m+1}.$$

Mivel $c<1$, ezért $\lim_{m\to\infty} c^{m+1}=0$. Emiatt létezik olyan n_ε küszöbindex, hogy már bármely $m+1 \geqslant n_\varepsilon$ esetén $c^{m+1} < \varepsilon$, így teljesül a sorra vonatkozó Cauchy-feltétel.

6.2.2. Egyenletes konvergencia és folytonosság

A függvénysorok differenciálhatósága és integrálhatósága előtt a folytonosságukat vizsgáltuk. Azt tapasztaltuk, hogy hiába folytonosak a függvénysor(ozat) tagjai, a határérték nem feltétlenül folytonos. Reményeink szerint az egyenletesen konvergensek viszont már rendelkeznek a kívánt tulajdonságokkal.

6.2.11. Tétel. *Az $\{f_k\}$ függvénysorozat legyen egyenletesen konvergens a H halmazon, határértéke az f függvény, és legyen $x_0 \in H$. Ha a függvénysorozat minden tagja folytonos az x_0 pontban, akkor f is folytonos x_0-ban. Továbbá, ha minden f_k folytonos a H halmazon, akkor f is folytonos a H halmaz minden pontjában.*

Bizonyítás: Be kell látnunk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely olyan $x \in H$ esetén, amelyre $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. A bizonyítás az alábbi átalakításon alapul:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|\,.$$

Adott pozitív ε-hoz válasszuk meg k-t úgy, hogy a jobb oldalon álló összeg első és harmadik tagja kisebb legyen mint $\frac{\varepsilon}{3}$. Ilyen k létezik. A harmadik tag esetén arra hivatkozunk, hogy x_0 része $\{f_k\}$ konvergenciatartományának, így bizonyos küszöbindextől kezdve minden k-ra igaz. Az első tag esetén pedig $\{f_k\}$ egyenletes konvergenciája miatt egy küszöbindextől kezdve x-től függetlenül minden k-ra teljesül. Rögzítsünk egy ennek megfelelő k indexet, és válasszuk meg az x_0 pont δ sugarú környezetét úgy, hogy a középső tag is kisebb legyen mint $\frac{\varepsilon}{3}$. Ezt pedig az f_k függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt tehetjük meg. Összegezve a kívánt állításhoz jutunk.
A H halmazon való folytonosság a függvények minden $x_0 \in H$ pontbeli folytonosságából a fentiek alapján következik. □

Figyeljük meg, hogy a feltételek közül nem hagyhatjuk ki, hogy a függvénysorozat konvergenciája egyenletes legyen. Enélkül már a háromtagú összeg első tagja esetén korlátozni kényszerülnénk a szóba jöhető x értékeket, és ez nem feltétlenül esne egybe a kívánt δ megválasztásának megfelelőkkel.

6.2.12. Példa. Az x^k függvénysorozat határfüggvénye a $]-1;1[$ intervallumon folytonos. Az állítás igazolásához kis trükkhöz kell folyamodnunk, mert a függvénysorozat a $]-1;1[$ intervallumon nem egyenletesen konvergens. Bármely x_0 pont befoglalható egy olyan $[a;b]$ intervallumba, amelyet teljes egészében lefed a $]-1;1[$ intervallum:

$$x_0 \in [a;b] \subseteq\,]-1;1[\,.$$

A 6.2.4.1. példában már megállapítottuk, hogy az x^k függvénysorozat az ilyen $[a;b]$ intervallumon egyenletesen konvergens. A sorozat minden tagja folytonos x_0-ban, így a határfüggvény is. Ezt a 6.1. ábrán láthatjuk is; az f határfüggvénynek csak az 1 helyen van szakadási pontja.

Függvénysorok folytonosságára is átvihetjük a fenti ismereteket.

6.2.13. Tétel. *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ függvénysor egyenletesen konvergens a H halmazon, és az f_k függvények mindegyike folytonos ugyanitt, akkor az s összegfüggvény is folytonos H-n.*

Bizonyítás: Az
$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$
részletösszeg függvénysorozat egyenletesen konvergens, mert így definiáltuk a függvénysorok egyenletes konvergenciáját. Valamint minden tagja folytonos H-n, mert véges sok folytonos függvény összege. A 6.2.13. tétel értelmében $s(x)$ határfüggvény, amely egyben a függvénysor összegfüggvénye, is folytonos. □

6.2.14. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor $s(x) = \frac{1}{1-x}$ összegfüggvénye folytonos a $]-1;1[$ intervallumon.
Alkalmazzuk a 6.2.12. példában látott módszert. A függvénysor ugyan nem egyenletesen konvergens a $]-1;1[$ intervallumon, de a 6.2.10. példa alapján bármely $[a;b] \subseteq]-1;1[$ intervallumon igen. A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor $x_0 \in]-1;1[$ pontbeli folytonosságának igazolásához válasszunk olyan $[a;b]$ intervallumot, amely tartalmazza x_0-t és része $]-1;1[$ intervallumnak. A tétel feltételei teljesülnek, így az összegfüggvény folytonos x_0-ban.

6.2.3. Egyenletes konvergencia és integrálhatóság

Az alfejezet bevezetőjében láttuk, hogy végtelen tagú összeget nem lehet minden esetben tagonként integrálni. Sejtésként megfogalmaztuk, hogy éppúgy mint a folytonosság esetén, az integrálás tekintetében is kevés a sor konvergenciája, az egyenletes konvergenciát kell megkövetelnünk. A sejtést a következő tétel igazolja, amelyet először szintén sorozatokra fogalmazunk meg.

6.2.15. Tétel. *Ha az $\{f_k\}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $[a;b]$ intervallumon, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, valamint az f_k függvények folytonosak, akkor*
$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás: Mivel f_k-k folytonosak, az előzőek értelmében f is az, így integrálható az $[a;b]$ intervallumon. Legyen $\varepsilon > 0$; ehhez keresünk olyan k_ε küszöbindexet, hogy bármely $k > k_\varepsilon$ esetén
$$\left| \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\left|\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_k(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \max_{x\in[a;b]} |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x = (b-a)\max_{x\in[a;b]} |f_k(x)-f(x)|\,.$$

A levezetésben szereplő maximumérték létezését a Weierstrass-tétel biztosítja, ugyanis minden $f_k - f$ függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Mivel az $\{f_k\}$ sorozat egyenletesen konvergens, létezik x-től független k_ε küszöbindex, hogy bármely $k > k_\varepsilon$ esetén

$$\max_{x\in[a;b]} |f_k(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Behelyettesítve, a bizonyítás elején megfogalmazott állításhoz jutunk. □

6.2.16. Példa. A tétel értelmében bármely $-1 < a < b < 1$ esetén

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b x^k\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{k\to\infty} x^k\,\mathrm{d}x = \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ha $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor részletösszegfüggvényeinek sorozatára alkalmazzuk a 6.2.15 tételt, következményként megkapjuk a sorok integrálhatóságára vonatkozó állítást.

6.2.17. Tétel. *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor f_k tagjai folytonosak az $[a;b]$ intervallumon, és a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor egyenletesen konvergens ugyanezen intervallumon, akkor a függvénysor összegfüggvénye integrálható az $[a;b]$ intervallumon, és*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k.$$

A tétel azt állítja, hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens függvénysora tagonként integrálható; azaz az integrálás és a végtelen tagú összegzés művelete felcserélhető.

6.2.18. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[0;x]$ intervallumon bármely $0 < x < 1$ esetén. Ezért

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x$$

$$[-\ln(1-t)]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$$

Vegyük észre, hogy ezzel nagyon egyszerűen meghatároztuk az $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$ függvénysor összegfüggvényét a $[0;1[$ intervallumon. E lehetőség nélkül sokkal bonyolultabb lett volna.

6.2.19. Megjegyzések. A függvénysorok integrálhatóságáról szóló tételben erős feltételeket írtunk elő. A függvénysorok tagonként integrálhatók az alábbi lazább feltételek esetén is, de ezek bizonyításával nem foglalkozunk.

- Ha az $\{f_k\}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez az I intervallumon, a sorozat minden tagja integrálható I-n, akkor f is integrálható I-n és
$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k.$$
- Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ függvénysor egyenletesen konvergens az I intervallumon, f_k mindegyike integrálható I-n, akkor s is integrálható I-n és
$$\int_I s = \int_I \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I f_k.$$
- A tétel feltételei még tovább lazíthatók. Ha az integrálható $\{f_k\}$ függvények sorozatáról csak a pontonkénti konvergenciát feltételezzük, akkor „cserébe” meg kell követelnünk, hogy *egyenletesen korlátos* legyen, továbbá azt is, hogy az f határfüggvény integrálható legyen (ez ugyanis ilyenkor nem következik a tagok integrálhatóságából) ahhoz, hogy f integrálja megegyezzen az integrálok határértékével.

  A 6.3. ábra függvénysorozata nem egyenletesen korlátos; a sorozat tagjai ugyan mind korlátos függvények, de nem létezik univerzális, minden függvényre egyszerre érvényes (felső) korlát, ezért nem igaz a kívánt tulajdonság.

  Ha ugyanezen példában a függvényeket úgy definiálnánk, hogy a háromszögek magassága állandó, például 1 legyen (amely egyúttal univerzális felső korlátnak is megfelel), akkor a függvénysorozat elemeiben a háromszögek területe 0-hoz tartana, azaz az integrálok határértéke is ugyanúgy 0 lenne, mint a határfüggvény integrálja.

  A tétel feltételei közül nem hagyható ki a határfüggvény integrálhatóságára vonatkozó előírás, ugyanis az alábbi függvénysorozat minden eleme integrálható (mindegyik csak véges sok pontban különbözik a konstans 0 függvénytől), de a határfüggvény nem integrálható. Tekintsük a $[0;1]$ intervallumbeli racionális számok egy felsorolását: $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Tudjuk, hogy ilyen felsorolás létezik, mert a racionális számok megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. Legyen
$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = r_1, r_2, \ldots, r_k, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
  A függvénysorozat határfüggvénye a Dirichlet-függvény (minden racionális pontban 1-et, máshol 0-t felvevő függvény), amely nem integrálható a $[0;1]$ intervallumon.

6.2.4. Egyenletes konvergencia és differenciálhatóság

A függvénysor(ozat)ok integrálhatósági feltételeinek ismeretében már lehetőségünk lesz a differenciálhatóságukra is feltételeket megfogalmazni.

6.2.20. Tétel. *Legyen az $\{f_k\}$ függvénysorozat minden eleme folytonosan differenciálható az $[a;b]$ intervallum minden pontjában. Ha a deriváltfüggvények $\{f'_k\}$ sorozata egyenletesen konvergens az $[a;b]$ intervallumon, és az $\{f_k\}$ függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez, akkor f differenciálható az $[a;b]$ intervallumon, és*

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} f'_k(x)$$

minden $x \in [a;b]$ esetén.

Bizonyítás: Legyen $g = \lim_{k\to\infty} f'_k$. Mivel f'_k mindegyike folytonos, sorozatuk egyenletesen konvergens, g függvény szintén folytonos. A 6.2.15. tétel értelmében ekkor

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty} \int_a^x f'_k(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{minden } x \in [a;b] \text{ esetén.}$$

A jobb oldalon álló integrálást egyszerűen elvégezhetjük:

$$\int_a^x f'_k(t)\,\mathrm{d}t = [f_k(t)]_a^x = f_k(x) - f_k(a)\,.$$

Ha még a $k \to \infty$ határátmenetet is elvégezzük, kapjuk, hogy

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)\,,$$

azaz g integrálfüggvénye az f függvény. Mivel g folytonos, belátható, hogy az integrálfüggvényét deriválva a g függvényt kapjuk:

$$g(x) = f'(x)\,,$$

ami éppen a bizonyítandó összefüggés. □

Fogalmazzuk meg a tételt függvénysorokra is, amelynek állítása rögtön következik, ha a 6.2.20. tételt az $\{s_n\}$ részletösszeg-sorozatra alkalmazzuk.

6.2.21. Tétel. *Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ függvénysor f_k tagjai folytonosan differenciálhatók az $[a;b]$ intervallumon, és a $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ függvénysor egyenletesen konvergens ugyanezen intervallumon, akkor a függvénysor összegfüggvénye differenciálható az $[a;b]$ intervallumon, és*

$$s' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k.$$

A tétel azt állítja, hogy folytonosan differenciálható függvények egyenletesen konvergens függvénysora tagonként deriválható; azaz a deriválás és a végtelen tagú összegzés művelete felcserélhető.

6.2.22. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor egyenletesen konvergens az $[a;b]$ intervallumon bármely $0 < a < b < 1$ esetén. Ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^k\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Vegyük észre, hogy ezzel nagyon egyszerűen meghatároztuk az $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ függvénysor összegfüggvényét a $]-1;1[$ intervallumon. E lehetőség nélkül sokkal bonyolultabb lett volna.

6.2.23. Megjegyzések. Az integrálhatósághoz hasonlóan itt is lazíthatunk a tétel feltételein. Ezek bizonyítása nehezebb, ezért csak megemlítjük.

- Legyen az $\{f_k\}$ függvénysorozat minden tagja differenciálható az $[a;b]$ intervallumon, és a deriváltak $\{f'_k\}$ sorozata egyenletesen konvergens ugyanitt. Ha létezik egy $x_0 \in [a;b]$ pont úgy, hogy az $\{f_k(x_0)\}$ (numerikus) sorozat konvergens, akkor az $\{f_k\}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez az $[a;b]$ intervallumon, f differenciálható, és
$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} f'_k(x)$$
minden $x \in [a;b]$ esetén.

  Figyeljük meg, hogy csak egyetlen pontbeli konvergenciát követelünk meg a függvénysorozattól.

- Legyen az $\{f_k\}$ függvénysorozat minden tagja differenciálható az $[a;b]$ intervallumon, és a deriváltak $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ sora egyenletesen konvergens ugyanitt. Ha létezik egy $x_0 \in [a;b]$ pont úgy, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ (numerikus) sor konvergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ függvénysor egyenletesen konvergál az s függvényhez az $[a;b]$ intervallumon, s differenciálható, és
$$s' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k.$$
minden $x \in [a;b]$ esetén.

6.2.5. Feladatok

1. Melyik numerikus sort kapjuk, ha a $\sum_{k=0}^{\infty} \cos kx$ függvénysorba behelyettesítjük az alábbi értékeket:

   (a) $x_0 = 0$

   (b) $x_0 = \pi$

   Konvergensek vagy divergensek a kapott numerikus sorok?

2. A mértani sorra visszavezetve állapítsa meg a $\sum_{k=0}^{\infty} (1+x)^{-k}$ függvénysor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

3. A mértani sorra visszavezetve állapítsa meg a $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$ függvénysor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

4. Az előző feladat eredménye alapján állapítsa meg a $\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-kx}$ függvénysor konvergenciatartományát és összegfüggvényét.

6.3. Hatványsorok

Ebben az alfejezetben olyan függvénysorokkal foglalkozunk, amelyek tagjai hatványfüggvények.

6.3.1. Definíció (Hatványsor). A

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(x - x_0\right)^k$$

képlettel megadott függvénysort, ahol c_k és x_0 tetszőleges valós számok, x_0 *körüli hatványsornak* nevezzük.

6.3.2. Megjegyzések.

- Mivel az $x \mapsto x - x_0$ helyettesítés csak egy x tengely menti eltolást jelent, a továbbiakban elegendő csak a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, 0 körüli hatványsorokkal foglalkozni.
- A hatványsorok esetén is élünk azzal a konvencióval, hogy az összegzés nulladik tagja esetén az $x=0$ helyettesítésből adódó 0^0 (egyébként nem értelmezett) kifejezés értékét 1-nek vesszük.

A hatványsorok speciális függvénysorok, a korábbiakban tárgyalt tételek alkalmazhatók rájuk. A specialitásukat kihasználva azonban egyszerűbb módszerekkel vizsgálhatjuk őket. Azt is vegyük észre, hogy a 6. fejezetben példaként legtöbbször látott $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ függvénysor is hatványsor volt, konkrétan a $c_k = 1$ együtthatókkal, $x_0 = 0$ körüli hatványsor.
A hatványsorok legalább egy pontban konvergensek, nevezetesen az $x = 0$ pontban (x_0 körüli hatványsor esetén az $x = x_0$ pontban), hiszen ekkor $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0$.

6.3.3. Tétel. *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor valamely nem-nulla pontban is konvergens, akkor létezik olyan, a 0-ra szimmetrikus intervallum, amelynek belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens, a külső pontjaiban (korlátos intervallum esetén léteznek ilyenek) pedig divergens. (A határpontjaiban konvergens vagy divergens is lehet.)*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a hatványsor valamely $x_0 \neq 0$ pontban konvergens, azaz a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ numerikus sor konvergens. Ennek szükséges feltétele, hogy általános tagja 0-hoz tartson, illetve emiatt korlátos is legyen. Tehát létezik egy K korlát, hogy bármely k esetén $\left|c_k x_0^k\right| \leqslant K$. Ezzel a c_k együtthatókra kapunk egy (k-tól függő) korlátot:

$$|c_k| \leqslant \frac{K}{\left|x_0^k\right|}.$$

Ha ezt alkalmazzuk az $|x| \leqslant |x_0|$ esetre:

$$|c_n x^n| \leqslant \frac{K}{\left|x_0^k\right|} \left|x^k\right| = K \left|\frac{x}{x_0}\right|^k.$$

Az $|x| \leqslant |x_0|$ feltételnek megfelelő bármely x esetén a

$$\sum_{k=0}^{\infty} K \left|\frac{x}{x_0}\right|^k = K \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$$

függvénysor egyrészt $\left|\frac{x}{x_0}\right|$ hányadosú mértani sor, ezért konvergens, másrészt majorálja a $\sum_{k=0}^{\infty} \left|c_k x^k\right|$ sort. Ebből következik, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ sor abszolút konvergens.
Ha létezik a függvénysor x_0 konvergenciapontjainak r-rel jelölt szuprémuma, akkor a fentiek értelmében a függvénysor a $]-r; r[$ intervallumon konvergens, az $|x|>r$ helyeken pedig a szuprémum értelmezése miatt divergens. Ha a szuprémum nem létezik (azaz ∞), akkor a függvénysor a teljes $\mathbb{R}$ halmazon konvergens. $\square$

A tétel állítása szerint a hatványsorok konvergencia-tartománya vagy csak az egyetlen elemet tartalmazó $\{0\}$ halmaz (ebben az esetben $r=0$), vagy a $-r$, r végpontú nyílt vagy zárt intervallum (tehát a $]-r;r[$, $]-r;r]$, $[-r;r[$, $[-r;r]$ valamelyike), vagy a $]-\infty;\infty[$ intervallum.

6.3.4. Definíció (Konvergenciasugár). A 6.3.3. tétel által meghatározott r értéket, amely valamilyen nem-negatív valós szám vagy végtelen, a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

A konvergenciasugár meghatározása

A következőkben módszert adunk a konvergenciasugár meghatározására. Először használjuk a hányados-kritériumot. E szerint bármely x behelyettesítésével adódó numerikus sor abszolút konvergens, ha a $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ határérték létezik és 1-nél kisebb; divergens, ha a határérték 1-nél nagyobb. Hatványsorok esetén $a_k = c_k x^k$, így

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}x^{k+1}}{c_k x^k}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| < 1.$$

Átrendezve, a sor az

$$|x| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = r$$

értékekre abszolút konvergens. Hasonlóan, az $|x|>r$ értékekre pedig divergens.
Ugyanakkor hivatkozhatunk a gyökkritériumra is. E szerint bármely x behelyettesítésével adódó numerikus sor abszolút konvergens, ha a $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$ határérték létezik és 1-nél kisebb; divergens, ha a határérték 1-nél nagyobb. Hatványsorok esetén $a_k = c_k x^k$, így

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k x^k|} = |x|\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|} < 1.$$

Átrendezve, a sor az

$$|x| < \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}} = r$$

értékekre abszolút konvergens. Hasonlóan, az $|x|>r$ értékekre pedig divergens.
(A határértékre vonatkozó relációk átrendezésekor figyelembe vettük, hogy csak nem-negatív értéket kaphatunk eredményül, illetve hogy ekkor egy 0-hoz – jobbról – tartó sorozat reciprokának határértéke ∞, és fordítva.)
Amint az a jelölésből is látszik, egyúttal megkaptuk az r konvergenciasugár meghatározására szolgáló képleteket:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| \qquad \text{és} \qquad r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}},$$

amennyiben a benne szereplő határértékek léteznek. (Itt is élünk az $\frac{1}{0+}=\infty$ konvencióval.)
Megjegyezzük, hogy a határérték létezésére vonatkozó feltétel miatt a módszer nem általános, de az általunk tekintett hatványsorok többségénél alkalmazható. Azt, hogy melyik kritérium alapján tudjuk meghatározni a konvergenciasugarat, a gyakorlat dönti el. Erre láthatunk példákat az alábbiakban. Az intervallum végpontjaiban minden esetben egyedileg kell a konvergenciát megvizsgálni.

6.3.5. Példák.

1. Mi a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ hatványsor konvergencia-tartománya?

   A sort már ismerjük korábbról; most alkalmazzuk rá az imént tanult képletet. Most $c_k = 1$, így
$$r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$
   A hatványsor $x = 1$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} 1$ sor lesz, amely divergens; míg $x = -1$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ sor lesz, amely szintén divergens. Így a függvénysor konvergencia-tartománya a $]-1;1[$ intervallum.

2. Mi az $1+2x+3x^2+4x^3+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,x^k$ hatványsor konvergencia-tartománya?

   A függvénysor szerepelt a 6.2. alfejezetben; a mostani jelölésünkkel: $c_k = k+1$.
$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k+1}{k+2}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}} = 1.$$
   A hatványsor $x=1$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)$ sor lesz, amely divergens; $x=-1$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(k+1)$ sor lesz, amely szintén divergens. Így a függvénysor konvergencia-tartománya a $]-1;1[$ intervallum.

3. Mi a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k} x^k$ hatványsor konvergencia-tartománya?

   Használjuk a hányados-kritériumot, $c_k = \frac{1}{k^k}$:
$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{k^k}}{\frac{1}{(k+1)^{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k (k+1) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k (k+1) = e \cdot \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty,$$
   tehát a hatványsor a teljes $\mathbb{R} =]-\infty;\infty[$ halmazon konvergens.

   Némileg egyszerűbben jutottunk volna eredményre a gyökkritérium alkalmazásával:
$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^k}\right|}} = \lim_{k\to\infty} k = \infty.$$

4. Mi a $\sum_{k=0}^{\infty} (3x-1)^k$ hatványsor konvergencia-tartománya?

   Az alábbi átalakítással láthatjuk, hogy a megadott hatványsor $\frac{1}{3}$ körüli hatványsor:
$$\sum_{k=0}^{\infty} (3x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(x-\frac{1}{3}\right)^k,$$
   ahol $c_k = 3^k$.
$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$
   A hatványsor tehát az $\frac{1}{3}$ körüli, $\frac{1}{3}$ sugarú (nyílt) környezetben, a $\left]0;\frac{2}{3}\right[$ intervallumban biztosan konvergens; a végpontokban külön meg kell vizsgálni. A hatványsor $x=0$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ sor lesz, amely divergens; míg $x=\frac{2}{3}$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ sor lesz, amely szintén divergens. Így a függvénysor konvergencia-tartománya a $\left]0;\frac{2}{3}\right[$ intervallum.

5. Mi a $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(x-\pi)^k$ hatványsor konvergencia-tartománya?

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0,$$

vagyis a hatványsor csak a középpontjában konvergens, azaz a konvergencia-tartománya az egyelemű $\{\pi\}$ halmaz.

6.3.1. Feladatok

Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergencia-tartományát.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{k!}x^k$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{10^k}x^k$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k^k}x^k$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{2k+1}$

6.4. Taylor-sor

Műszaki alkalmazások során gyakran ütközünk olyan problémába, hogy célszerű volna valamely függvény értékét kiszámítani (esetleg magát a függvényt előállítani) „egyszerűbb”, könnyebben kezelhető függvények segítségével.

Legyen az f függvény végtelen sokszor differenciálható az x_0 hely egy környezetében. Próbáljuk meg előállítani az f függvényt (x_0 körüli) hatványsorként, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k = c_0 + c_1\,(x-x_0) + c_2\,(x-x_0)^2 + c_3\,(x-x_0)^3 + \ldots$$

alakban.

Vegyük észre, hogy $x = x_0$ esetén a hatványsorból csak a nulladrendű tag marad, ezért $f(x_0) = c_0$. Ha egyszer deriváljuk a sort (Emlékeztető: hatványsor tagonként deriválható.), abból a konstans c_0 eltűnik:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2\,(x-x_0) + 3c_3\,(x-x_0)^2 + \ldots.$$

Az $x = x_0$ helyen a jobb oldalon csak c_1 marad, így $f'(x_0) = c_1$.

Hasonlóan egyszerű összefüggést kapunk a többi együtthatóra is, ha az előbbi eljárást tovább folytatjuk. Gondoljuk meg, hogy ha a hatványsort n-szer deriváljuk, akkor

- az n-nél alacsonyabb rendű tagok az n-szeri deriválás során eltűnnek;

- az n-nél magasabb rendű tagokban az n-szeri deriválás után is marad $(x-x_0)^{k-n}$ tényező ($k>n$), így az $x=x_0$ helyen értékük 0 lesz.

A k-adik derivált $f^{(k)}$ esetén a sorból csak a k-rendű tag, $c_k\,(x-x_0)^k$ deriváltjának értéke lesz nem-nulla az $x=x_0$ helyen. Általánosan:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= c_0, \\ f'(x_0) &= c_1, \\ f''(x_0) &= 2c_2, \\ f'''(x_0) &= 3\cdot 2c_3, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x_0) &= k!\cdot c_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

vagyis az együtthatókat egyértelműen meghatározzák az f függvény deriváltjainak x_0 helyen felvett értékei:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

6.4.1. Definíció (Taylor-sor). Legyen az f függvény végtelen sokszor differenciálható az x_0 hely valamely környezetében. Ekkor a

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 *körüli Taylor-sorának* nevezzük.
Az $x_0=0$ körüli Taylor-sort szokás *Maclaurin-sornak* is nevezni.

6.4.2. Megjegyzések.

- Az együtthatók meghatározásának módjából következik, hogy ha egy függvényt elő lehet állítani x_0 körüli hatványsorként (úgy mondjuk: hatványsorba fejthető), akkor az csak a függvény x_0 körüli Taylor-sora lehet.
- A függvény Taylor-sora nem feltétlenül állítja elő magát a függvényt. Általában minden függvénynél külön meg kell vizsgálnunk, hogy mi a Taylor-sorának konvergenciatartománya, és összegfüggvénye mely pontokban egyenlő magával a függvénnyel.

6.4.3. Példa. Állítsuk elő az $f(x)=e^x$ függvény 0 körüli Taylor-sorát (Maclaurin-sorát). Mivel az e^x függvény minden deriváltja e^x, ezért $f^{(k)}(x_0)=e^0=1$, tehát az e^x függvény Maclaurin-sora:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots.$$

Állapítsuk meg a sor konvergencia-tartományát. A korábbiakban tanultaknak megfelelően a hatványsor konvergencia-sugara:

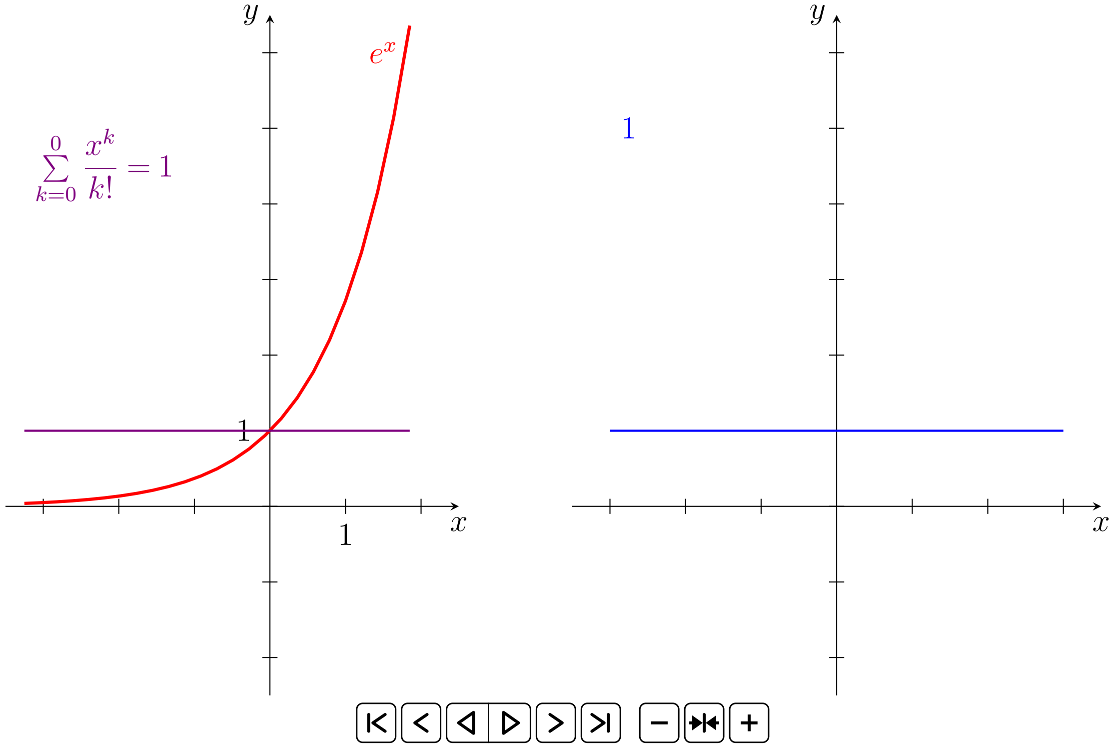
$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{c_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty,$$

vagyis a hatványsor a $(-\infty;\infty)$ intervallumon konvergens.

Az $f(x)=e^x$ függvény Taylor-sora $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén konvergens, és a 6.5. alfejezetben látni fogjuk, hogy előállítja a függvényt:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\dots \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

A 6.4. animáción a sor első néhány tagján szemléltetve végigkövetheti, hogyan állítja elő az e^x függvényt a Taylor-sora. A jobb oldali ábrán a Taylor-sor következő tagja látható, míg a bal oldalon a függvény, valamint a Taylor-sor n-edik részletösszege.



6.4. ábra. Az $f(x)=e^x$ függvény 0 körüli Taylor-sora.

A függvények k-adik deriváltját nem minden esetben olyan egyszerű meghatározni k függvényében, mint az e^x függvény esetében. Nézzünk még néhány példát, ahol ez megtehető, illetve olyanokat, amelyek ismert Taylor-sorokra visszavezethetők.

6.4.4. Példa. A $\cos x$ és a $\sin x$ függvények deriváltjai is ismétlődnek, ezért remélhetjük, hogy a Taylor-soruk egyszerűen felírható.
A $\cos x$ függvény deriváltfüggvényei rendre: $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x$, ...
A $\sin x$ függvény deriváltfüggvényei rendre: $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, ...
Az $x_0=0$ körüli Taylor-sor felírásához a deriváltfüggvények értékét kell használnunk a 0 helyen. Mivel $\sin 0=0$, illetve $\cos 0=1$, ezért a $\cos x$ függvény esetén

$$c_k=\begin{cases}\frac{1}{k!}, & \text{ha } k=4\ell \qquad (\ell\in\mathbb{N});\\ -\frac{1}{k!}, & \text{ha } k=4\ell+2 \quad (\ell\in\mathbb{N});\\ 0, & \text{egyébként;}\end{cases}$$

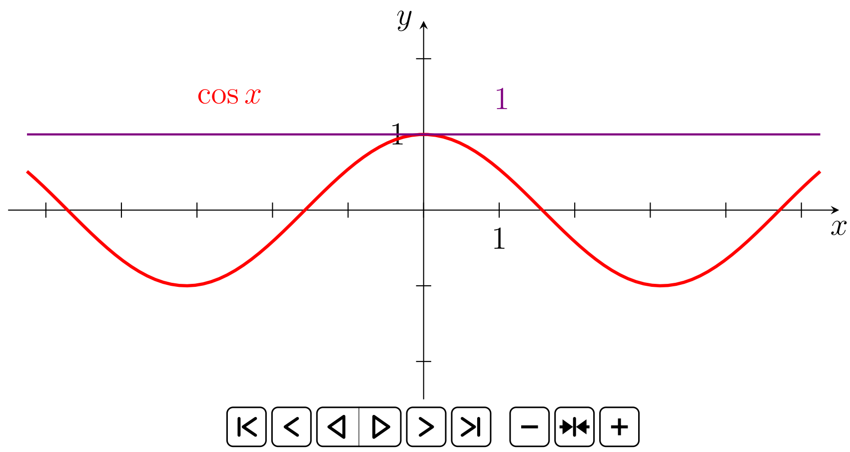
a $\sin x$ függvény esetén pedig

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{ha } k = 4\ell+1 \quad (\ell \in \mathbb{N})\,; \\ -\frac{1}{k!}, & \text{ha } k = 4\ell+3 \quad (\ell \in \mathbb{N})\,; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

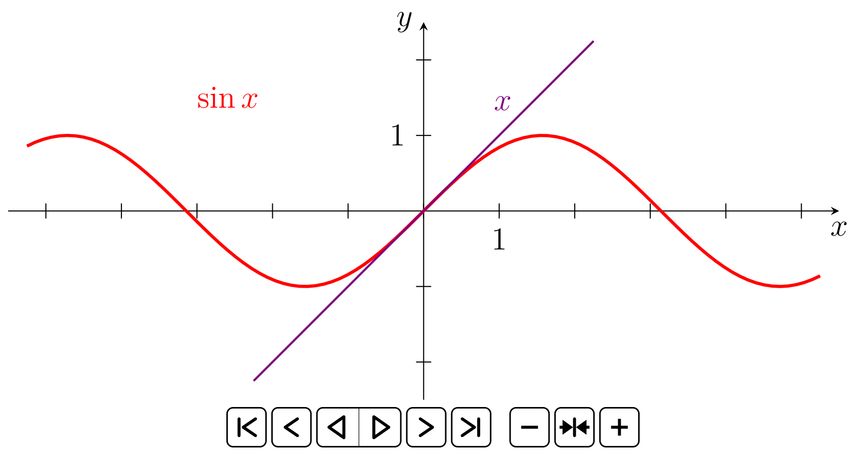
Ezek alapján a 0 körüli Taylor-sorok:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!};$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

A sorok konvergencia-tartományát az exponenciális függvényhez hasonlóan állapíthatjuk meg, amely alapján itt is azt kapjuk, hogy a teljes $\mathbb{R}$ halmazon konvergensek. Belátható, hogy a sorok összege a megfelelő függvény lesz.



6.5. ábra. Az $f(x) = \cos x$ függvény 0 körüli Taylor-sora



6.6. ábra. Az $f(x) = \sin x$ függvény 0 körüli Taylor-sora

A $\cos x$ és $\sin x$ függvények Taylor-sorát szemlélve feltűnik (6.6. animáció), hogy a páros $\cos x$ függvény Taylor-sorában csak a páros kitevőjű tagok, míg a páratlan $\sin x$ függvény Taylor-sorában csak a páratlan kitevőjű tagok szerepelnek. Ez általánosan is igaz, amelyet a következő tétel fogalmaz meg.

6.4.5. Tétel. *Páros függvény Maclaurin-sora csak páros kitevőjű tagokat, páratlan függvény Maclaurin-sora csak páratlan kitevőjű tagokat tartalmaz.*

Bizonyítás: Az állítás belátásához írjuk fel a függvény Maclaurin-sorát az x és a $-x$ helyen:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots;$$
$$f(-x) = f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots.$$

Páros f függvény esetén adjuk össze a két egyenlőséget; vegyük figyelembe, hogy $f(x) = f(-x)$ (ekkor a bal oldalon $2f(x)$-et kapunk); végül osszunk 2-vel:

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots,$$

azaz tényleg csak a páros kitevőjű tagok maradnak a sorban.
Páratlan f függvény esetén vonjuk ki a két egyenlőséget; vegyük figyelembe, hogy $f(x) = -f(-x)$ (ekkor a bal oldalon $2f(x)$-et kapunk); végül osszunk 2-vel:

$$f(x) = \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \dots,$$

azaz tényleg csak a páratlan kitevőjű tagok maradnak a sorban. □

További függvények Maclaurin-sorát kaphatjuk meg, ha visszavezetjük a fentebb megismert Maclaurin-sorokra.

6.4.6. Példák.

1. Állítsuk elő az $f(x) = \sqrt{e^x}$ függvény Maclaurin-sorát.

$$\sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k!}.$$

Az $x \mapsto \frac{x}{2}$ helyettesítés is hatványsort eredményezett, ezzel megkaptuk a keresett Maclaurin-sort. Mivel az e^x függvény Maclaurin-sora minden valós számra konvergens, így $\frac{x}{2}$ is tetszőleges valós szám lehet; a $\sqrt{e^x}$ függvény Maclaurin-sora is minden valós számra konvergens.

2. Állítsuk elő az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 1, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$$

függvény Maclaurin-sorát.

A függvény a 0 helyen folytonos, sőt végtelen sokszor differenciálható, így Maclaurin-sorának meghatározása visszavezethető a $\sin x$ függvény Maclaurin-sorára:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

A módszer hatványsort eredményezett, ezzel megkaptuk a keresett Maclaurin-sort. Mivel a $\sin x$ függvény Maclaurin-sora minden valós számra konvergens, így a $\frac{\sin x}{x}$ függvény Maclaurin-sora is minden valós számra konvergens.

3. Állítsuk elő az $f(x) = \cos^2 x$ függvény Maclaurin-sorát.

   Használjuk a korábban megismert linearizáló formulát: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots;\\
\cos 2x &= 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \dots;\\
1+\cos 2x &= 2 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \dots;\\
\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} &= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \dots.
\end{aligned}$$

   A módszer hatványsort eredményezett, ezzel megkaptuk a keresett Maclaurin-sort. Mivel a $\cos x$ függvény Maclaurin-sora minden valós számra konvergens, így a $\cos 2x$ és végeredményben a $\cos^2 x$ függvény Maclaurin-sora is minden valós számra konvergens.

4. Állítsuk elő az $f(x) = \frac{1}{1+x}$ függvény Maclaurin-sorát.

   Vegyük észre, hogy kis átalakítással a függvény egy olyan mértani sor összege, amelynek hányadosa $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots.$$

   A mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha a hányadosának abszolút értéke kisebb mint 1; így a Maclaurin-sor is csak $|-x| < 1$ esetén konvergens, azaz a konvergencia-tartománya a $]-1;1[$ intervallum.

5. Állítsuk elő az $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ függvény Maclaurin-sorát.

   Vegyük észre, hogy a függvény a 4. feladatbeli függvény (negatív) deriváltja:

$$-\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -(-1)(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

   Mivel a hatványsor tagonként differenciálható, használjuk ki ezt a Maclaurin-sor meghatározásakor:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} k x^{k-1}.$$

   A deriváláskor az eredeti sor konstans tagja eltűnik a sorból, ezért az összegzés a $k=1$ indextől indul. Természetesen, újraindexelhetjük az összegzést, hogy $k=0$-tól kezdődjön, ha úgy tetszik:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (k+1) x^k = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots.$$

   Mivel a derivált sor ugyanazon értékekre konvergens, mint az eredeti, ezért az $\frac{1}{(1+x)^2}$ függvény Maclaurin-sora is a $]-1;1[$ intervallumon állítja elő a függvényt.

6. Állítsuk elő az $f(x)=\ln(1+x)$ függvény Maclaurin-sorát.

   Most azt vegyük észre, hogy az f függvény deriváltja a 4. példában szereplő függvény $x>-1$ esetén:

$$f'(x)=(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+\dots.$$

   Használjuk ki, hogy a hatványsor tagonként integrálható:

$$\ln(1+x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}\int(-1)^k x^k\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+C.$$

   A C konstansról ne feledkezzünk meg az integráláskor, hiszen az $\ln(1+x)$ függvény csak az egyik primitív függvénye $\frac{1}{1+x}$-nek, a sor integrálásakor viszont az összeset megkapjuk. A C konstans megfelelő illesztésével tudjuk kiválasztani az $\ln(1+x)$ függvény Maclaurin-sorát. A C konstans lesz a Maclaurin-sor nulladfokú tagja, azaz a $c_0=f(0)$ konstans tag; ebben az esetben $C=\ln(1+0)=0$. (Ebben a példában nem feltétlenül szükséges, de általában az integrált sort célszerű k-t eggyel csökkentve újraindexelni, hogy az imént meghatározott C konstans is belefoglalható legyen.)

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots.$$

   Mivel az integrált sor ugyanazon értékekre konvergens, mint az eredeti, ezért az $\ln(1+x)$ függvény Maclaurin-sora is legalább a $]-1;1[$ intervallumon konvergens és előállítja a függvényt. Ebben az esetben azonban még $x=1$ esetén is konvergens a sor, mert Leibniz-típusú. Alkalmazzuk erre az értékre az egyenlőséget:

$$\ln 2=\ln(1+1)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots,$$

   így megkapjuk az alternáló harmonikus sor összegét.

6.4.7. Megjegyzés. A Taylor-sorok témakörében tudjuk megmutatni, hogy a komplex számok exponenciális alakja helytálló jelölés, mert a Taylor-sorok ugyanígy vannak definiálva a komplex függvénytanban is. Írjuk fel az $e^{j\varphi}$ komplex számot hatványsor alakban az e^x függvény Maclaurin-sorának segítségével.

$$e^{j\varphi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j\varphi)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{j^k\varphi^k}{k!}=1+\frac{j\varphi}{1!}+\frac{j^2\varphi^2}{2!}+\frac{j^3\varphi^3}{3!}+\frac{j^4\varphi^4}{4!}+\frac{j^5\varphi^5}{5!}+\dots.$$

Vegyük figyelembe, hogy a j képzetes egység hatványai négyes periódusokban ismétlődnek:

$$j^0=1,\quad j^1=j,\quad j^2=-1,\quad j^3=-j,\quad j^4=1,\quad j^5=j,\quad \dots,$$

és válasszuk külön a valós és képzetes részt:

$$\begin{aligned}e^{j\varphi}&=1+\frac{j\varphi}{1!}-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{j\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{j\varphi^5}{5!}+\dots\\&=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\dots\right)+j\left(\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\dots\right).\end{aligned}$$

Végül vegyük észre, hogy a valós rész helyén pontosan a $\cos\varphi$, a képzetes rész helyén a $\sin\varphi$ áll hatványsor alakban. Mivel ezen Maclaurin-sorok bármely valós számra konvergensek, így bármely φ esetén

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi,$$

amely épp az exponenciális és trigonometrikus alak egyezőségét fejezi ki.

6.4.1. Feladatok

Határozza meg az alábbi függvények x_0 pont körüli Taylor-sorát.

1. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$
2. $f(x) = \frac{2}{3x}$, $x_0 = 1$
3. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$

Ismert függvények Maclaurin-sorának felhasználásával határozza meg az alábbi függvények Maclaurin-sorát.

1. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ (a mértani sor segítségével)
2. $f(x) = x^2 \cos\frac{x}{2}$
3. $f(x) = \ln(1+x^2)$ (a derivált függvény sorának segítségével)
4. $f(x) = \arctan x$ (a derivált függvény sorának segítségével)

6.5. Taylor-polinom Lagrange-féle maradéktaggal

A 6.4. alfejezetben azzal a motivációval vezettük be a függvények Taylor-sorát, hogy a függvényeket egyszerűbben kezelhető függvényekkel fejezzük ki. Ez bizonyos esetekben sikerült is, de egy hátránya adódott a módszernek: végtelen összeget kell kiszámítani. Például, ha $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ értékét szeretnénk kiszámítani, akkor ahhoz a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}$ végtelen (numerikus) sor összegét kell meghatároznunk. A műszaki alkalmazások során azonban nem feltétlenül van szükségünk a pontos értékre, csak a közelítő értékre adott pontosság mellett. Mivel a sor konvergens, az általános tagja 0-hoz tart, ezért kellően pontos közelítő értéket kaphatunk, ha csak véges sok tagot összegzünk. Ekkor nem a Taylor-sorával, hanem csak a hatványsor véges sok tagjának összegével, egy polinommal közelítjük.

6.5.1. Definíció (Taylor-polinom). Az x_0 hely környezetében (legalább) n-szer differenciálható f függvény x_0 körüli *n-edrendű Taylor-polinomja* a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

n-edfokú polinom.

6.5.2. Példa. Az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadrendű Taylor-polinomja:

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Mivel a sor konvergens az $x = \frac{1}{2}$ helyen, ezért írhatjuk, hogy

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{79}{48} \approx 1{,}6458.$$

Vajon mekkora pontossággal kaptuk meg így $\sqrt{e}$ értékét?

A közelítés csak abban az esetben szolgáltat használható eredményt, ha egyúttal azt is ismerjük, hogy mekkora pontossággal adja meg a keresett értéket. A hiba megbecsüléséhez nyújt segítséget a Taylor-formula.

6.5.3. Tétel. *Ha az f függvény az x_0 hely valamely környezetében legalább $(n+1)$-szer differenciálható, akkor minden ebbe a környezetbe eső x helyen érvényes a következő összefüggés:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ahol ξ az x és x_0 közötti hely (tehát $\xi \in [x; x_0]$ vagy $\xi \in [x_0; x]$, attól függően, hogy x vagy x_0 a kisebb).
Az f függvény ilyen előállítását x_0 körüli Taylor-formulának *($x_0 = 0$ esetén* Maclaurin-formulának *is) nevezzük, az*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

kifejezés neve pedig $(n+1)$-edik Lagrange-féle maradéktag.

Mivel az egyenlőségi relációt biztosító maradéktagban szereplő ξ pontos értékét nem ismerjük, a maradéktag elhagyásával származtatott közelítés hibáját a maradéktag abszolút értékének maximumával becsülhetjük felülről.

6.5.4. Példa. Az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadrendű Maclaurin-formulája (a negyedrendű maradéktaggal):

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^{\xi}}{24}x^4,$$

ahol ξ valamely 0 és x közötti érték. Ha a formulát az $x = \frac{1}{2}$ értékre alkalmazzuk:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{e^{\xi}}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{79}{48} + \frac{e^{\xi}}{384},$$

ahol $\xi \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Mivel az e^{ξ} kifejezés ebben az intervallumban $\xi = \frac{1}{2}$ esetén maximális, a közelítés hibája legfeljebb $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{384}$. Természetesen a becsléshez nem tudjuk felhasználni $\sqrt{e}$ értékét, mert nem ismerjük (hiszen erre használjuk a Maclaurin-formulát), ezért további felső becsléseket kell végeznünk.

$$\left|R_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{\sqrt{e}}{384} < \frac{\sqrt{3}}{384} < \frac{1{,}8}{384} < 0{,}005.$$

Tehát

$$\sqrt{e} \approx 1{,}646 \pm 0{,}005.$$

6.5.5. Megjegyzés. Fontos, hogy a Taylor-formula nem teszi szükségessé a Taylor-sor konvergenciáját, az bármely $x \in D_f$ értékre igaz; viszont természetesen, olyan x értékekre tudjuk használni, amelyek esetén a sor konvergens, hiszen így biztosított, hogy egyre magasabb rendű Taylor-polinom felhasználásával egyre pontosabb értéket kapunk. Ezt a tulajdonságot fejezi ki a következő tétel.

6.5.6. Tétel. *Az x_0 pont környezetében végtelen sokszor differenciálható függvény Taylor-sora pontosan azokban a pontokban állítja elő a függvényt, amelyekben a függvény n-edik Lagrange-féle maradéktagja $n \to \infty$ esetén 0-hoz tart.*

Bizonyítás: Az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(T_{n-1}(x) + R_n(x)\Big) = T(x) + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

összefüggésből látható, hogy a $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ feltétel szükséges és elégséges az állításhoz. □

6.5.7. Példa. Az e^x függvény 0 körüli Taylor-sora előállítja a függvényt.
A függvény minden deriváltja e^x, így az n-edrendű Lagrange-féle maradéktagja:

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{n!} x^n.$$

Bármely x esetén az $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ sorozat határértéke 0, ezt akár onnan is láthatjuk, hogy korábban meghatároztuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ függvénysor bármely x esetén konvergens. Mivel e^ξ konstans, ezért $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, így az exponenciális függvény Taylor-sorának határfüggvénye maga az exponenciális függvény. Ezért most már jogosan írhatjuk, amit a 6.4. alfejezetben megelőlegeztünk:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{minden } x \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Valamelyest könnyebb dolgunk van a hiba becslésekor a váltakozó előjelű sorok esetén.

6.5.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az x_0 pont környezetében végtelen sokszor differenciálható f függvény Taylor-sora az x konvergencia-tartománybeli helyen váltakozó előjelű numerikus sor. Ekkor az alkalmazott $f(x) \approx T_n(x)$ közelítés hibája felülről becsülhető az első elhagyott tag abszolút értékével.*

6.5.9. Példa. Számítsuk ki $\cos 0{,}2$ értékét legalább 5 tizedesjegy pontossággal.
A cos függvény Taylor-sora konvergens a 0,2 helyen, ezért

$$\cos 0{,}2 = 1 - \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^4}{24} - \frac{0{,}2^6}{720} + \dots$$

A Taylor-sor a 0,2 helyen váltakozó előjelű numerikus sor, így a közelítés hibáját az első elhagyott tag abszolút értékével becsülhetjük felülről. Ha csak az első két tagot vesszük figyelembe, akkor a hiba legfeljebb $\frac{0{,}2^4}{24} \lessapprox 6{,}7 \cdot 10^{-5}$, vagyis még nem érjük el a kívánt pontosságot, szükség van a harmadik tagra is. Ezen közelítés hibája legfeljebb $\frac{0{,}2^6}{720} \lessapprox 8{,}9 \cdot 10^{-8}$ lesz, vagyis ekkor már csak a hetedik tizedesjegyben lesz legfeljebb 1 eltérés:

$$\cos 0{,}2 \approx 0{,}9800666 \pm 10^{-7}.$$

A Taylor-polinomos közelítéseket nem csak függvényértékek kiszámítására használhatjuk.

6.5.10. Példa. Számítsuk ki az alábbi integrál közelítő értékét a függvény ötödrendű Taylor-polinomjának segítségével:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Az integrandus primitív függvényét nem ismerjük analitikus alakban, ezért a Taylor-polinomjával közelítjük (amelyet a 6.4. alfejezetben meghatároztunk):

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 \left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)\mathrm{d}x = \left[x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600} \approx 0{,}94611.$$

Mivel a felső határ behelyettesítése váltakozó előjelű numerikus sort eredményezett, a számítás hibája az első elhagyott tag abszolút értékével felülről becsülhető, azaz legfeljebb

$$\int \frac{x^6}{5040}\,\mathrm{d}x = \frac{x^7}{35\,280}+C \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1^7}{35\,280} \lessapprox 3\cdot 10^{-5}.$$

6.5.1. Feladatok

1. Határozza meg $\ln\frac{1}{2}$ közelítő értékét az $f(x)=\ln(1+x)$ függvény Maclaurin-polinomjának segítségével. Becsülje meg a közelítés hibáját a Lagrange-féle maradéktaggal.

2. Határozza meg $\sin 0{,}25$ közelítő értékét az $f(x)=\sin x$ függvény Maclaurin-polinomjának segítségével. Becsülje meg a közelítés hibáját.

3. Határozza meg az alábbi integrál közelítő értékét az $f(x)=e^{x^2}$ függvény negyedrendű Taylor-polinomjának segítségével:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

6.6. Fourier-sor

Ha adott egy 2π szerint periodikus függvény, felvetődik a kérdés, hogy vajon előállítható-e cos és sin függvények segítségével. A $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots$ függvények 2π szerint periodikusak, ezért keressük a függvényt

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_k \cos kx + b_k \sin kx + \cdots$$

alakban. (Emlékeztető: a $\cos kx$ és $\sin kx$ függvények legkisebb periódusa $\frac{2\pi}{k}$, de 2π szerint is periodikusak.) Keressük tehát azt az egyenletesen konvergens trigonometrikus sort, amely az f függvényt előállítja a fenti alakban, vagy rövidebb jelöléssel:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

A feladat tehát meghatározni a trigonometrikus sor tagjainak a_0, a_1, a_2, … és b_1, b_2, … együtthatóit. Ehhez az alábbi módszert választjuk.

Integráljuk a fenti egyenlőség mindkét oldalát egy tetszőleg 2π hosszúságú intervallumon, legyen ez $[c;c+2\pi]$. Mivel a trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, valamint tagjai folytonosak, ezért az integrálás és a szummázás felcserélhető (tagonként integrálhatunk végtelen sok tag esetén is):

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^{c+2\pi} a_0\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_c^{c+2\pi} \cos kx\,\mathrm{d}x + b_k \int_c^{c+2\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x\right).$$

Mivel a 2π hosszúságú intervallumon a $\cos kx$ és $\sin kx$ függvényeknek egész számú (k db) periódusa „fér el”, bármilyen ilyen intervallumon vett integráljuk értéke 0, mert ugyanakkora területet zárnak közre az x tengellyel az alatt és felett. Emiatt azt kapjuk, hogy

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = [a_0 x]_c^{c+2\pi} = a_0\cdot 2\pi,$$

ahonnan $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.
A további együtthatók meghatározásához kihasználjuk, hogy ha egy egyenletesen konvergens függvénysort egy korlátos függvénnyel szorzunk, akkor a szorzat is egyenletesen konvergens lesz. Szorozzuk meg az

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)$$

egyenlőség mindkét oldalát $\cos nx$-szel, és integráljuk a $[c;c+2\pi]$ intervallumon. Az egyenlőség jobb oldalán az alábbi típusú integrálokat kapjuk:

$$a_0\int_c^{c+2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad a_k\int_c^{c+2\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad b_k\int_c^{c+2\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Ezek közül az első értéke 0; a másik két integrálban pedig az integrandust összeggé alakíthatjuk az alábbi trigonometrikus összefüggések segítségével:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big),$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big).$$

Alkalmazzuk őket az $\alpha = kx$ és $\beta = nx$ helyettesítéssel, ekkor az integrálok alábbi alakot öltik:

$$\frac{a_k}{2}\int_c^{c+2\pi}\Big(\cos(k+n)\,x+\cos(k-n)\,x\Big)\,\mathrm{d}x,\quad \frac{b_k}{2}\int_c^{c+2\pi}\Big(\sin(k+n)\,x+\sin(k-n)\,x\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Mivel k, n pozitív egész számok, ezért mindegyik tag szintén 2π szerint periodikus cos és sin függvény, amelyek határozott integrálja a 2π hosszúságú intervallumon 0, két kivétellel. Ha $k=n$, akkor $\sin(k-n)\,x$ konstans 0 függvény, ennek határozott integrálja is 0, így a második integrál 0. Ugyanebben az esetben $\cos(k-n)\,x = \cos 0$ konstans 1 függvény, ennek integrálja nem 0, ezt az egyetlen esetet kell figyelembe vennünk, és a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_k}{2}\int_c^{c+2\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{a_k}{2}\,[x]_c^{c+2\pi} = \frac{a_k}{2}\cdot 2\pi = a_k\pi,$$

ahonnan $a_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx \,\mathrm{d}x$.
Teljesen analóg módon ($\sin nx$-szel szorozva és integrálva) kaphatjuk meg a Fourier-sorban szereplő b_k együtthatókat is: $b_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x$.

6.6.1. Definíció (Fourier-sor). Ha a 2π szerint periodikus f függvény integrálható valamely 2π hosszúságú intervallumon, akkor a *Fourier-során* az

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus sort értjük, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,$$

tetszőleges c szám esetén. Az a_0, a_k, b_k $(k=1;2;\dots)$ együtthatók az f függvény *Fourier-együtthatói.*

Az együtthatók meghatározásának módjából következik, hogy ha egy periodikus függvényt elő lehet állítani egyenletesen konvergens trigonometrikus sorként, akkor az csak a függvény Fourier-sora lehet. Az együtthatókat meghatározó integrálban szereplő integrandusok 2π szerint periodikusak, ezért lehet c értékét tetszőlegesen megválasztani. Ezt sok esetben ki is használjuk, hogy az integrálás könnyebben elvégezhető legyen. Ha például az f függvény valamilyen szimmetriatulajdonsággal rendelkezik (páros vagy páratlan), akkor célszerű a $[-\pi;\pi]$ intervallumot választani; ennek alkalmazását láthatjuk a következő tételben.

6.6.2. Tétel. *Páros periodikus függvény Fourier-sora csak* cos *függvényeket (és az a_0 konstanst), páratlan periodikus függvény Fourier-sora pedig csak* sin *függvényeket tartalmaz.*

Bizonyítás: A tétel igazolása azon a két tényen alapul, hogy a páratlan függvény origóra szimmetrikus intervallumon vett határozott integrálja 0; illetve hogy két, szimmetriatulajdonsággal rendelkező függvény szorzata is rendelkezik valamilyen szimmetriatulajdonsággal.

- Ha f páros függvény, akkor páratlan függvénnyel, azaz sin-szal szorozva páratlan függvényt kapunk integrandusként, amelynek a $[-\pi;\pi]$ intervallumon vett integrálja 0, tehát $b_k = 0$.

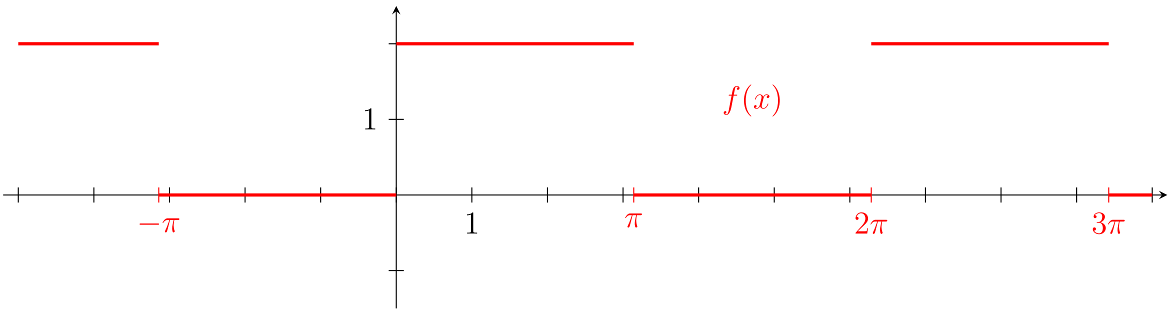
- Ha f páratlan függvény, akkor páros függvénnyel, azaz cos-szal (vagy 1-gyel) szorozva páratlan függvényt kapunk integrandusként, amelynek a $[-\pi;\pi]$ intervallumon vett integrálja 0, tehát $a_k = 0$, (beleértve $a_0 = 0$-t is). □

Bizonyos esetekben további egyszerűsítést jelenthet, hogy a páros függvények $[-\pi;\pi]$ intervallumon vett integrálja kétszerese a $[0;\pi]$ intervallumon vett integrál értékének.

- Ha f páros függvény, akkor $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$; és f-et páros függvénnyel, azaz cos-szal szorozva is páros függvényt kapunk, így $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$.
- Ha f páratlan függvény, akkor páratlan függvénnyel, azaz sin-szal szorozva páros függvényt kapunk, tehát $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$.

6.6.3. Példa. Állítsuk elő az alábbi (négyszögjel típusú) periodikus függvény (6.7. ábra) Fourier-sorát.

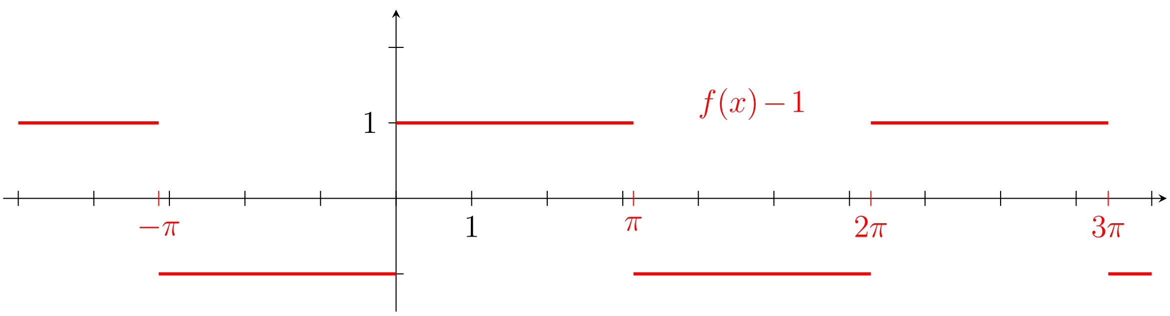
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 \leqslant x < \pi; \\ 0, & \text{ha } \pi \leqslant x < 2\pi; \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként.} \end{cases}$$



6.7. ábra. Négyszögjel-függvény

A függvény nem rendelkezik semmilyen szimmetriatulajdonsággal, de vegyük észre, hogy ha a grafikont 1 egységgel lefelé eltoljuk, azaz képezzük az $f^*(x) = f(x) - 1$ függvényt, akkor egy páratlan függvényt kapunk eredményül (6.8. ábra). Ha ennek előállítjuk a Fourier-sorát, ez csak egy konstans összeadandóban különbözik $f(x)$-től, így a két függvény Fourier-együtthatói megegyeznek, csak az a_0 konstansban van különbség.

$$f(x) - 1 = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leqslant x < \pi; \\ -1, & \text{ha } \pi \leqslant x < 2\pi; \\ f(x+2\pi) - 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



6.8. ábra. Módosított négyszögjel függvény

Mivel $f(x) - 1$ függvény páratlan, ezért a Fourier-sorában $a_0 = a_k = 0$ minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén, emiatt $a_0 = 1$ és $a_k = 0$ az f függvény Fourier-sorában.

Határozzuk meg a b_k együtthatókat:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^*(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi}\left(-\cos k\pi + \cos 0\right) = \frac{2}{k\pi}\left(1-\cos k\pi\right).$$

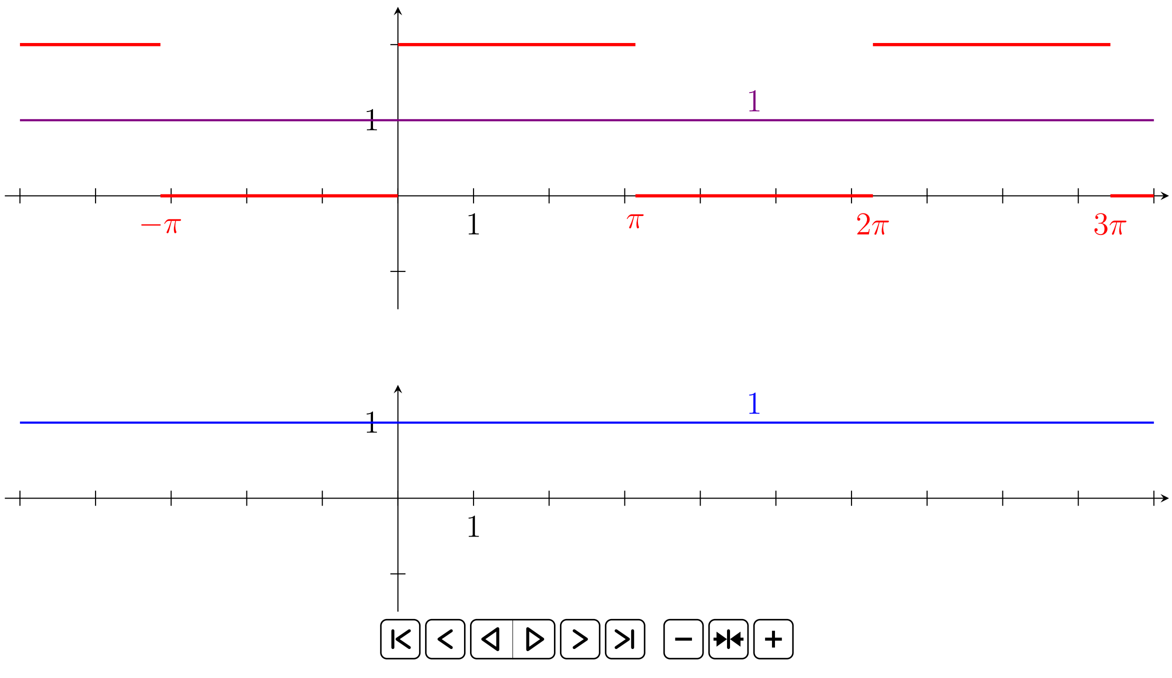
A képletben szereplő $\cos k\pi$ értéke függ k-tól. Ha k páros, akkor $\cos k\pi = 1$, míg ha k páratlan, akkor $\cos k\pi = -1$; ezt a legegyszerűbben így jelölhetjük: $\cos k\pi = (-1)^k$.

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros;} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Felírhatjuk a Fourier-sort, ügyelve a felírásnál, hogy csak a páratlanadik sin-os tagok szerepeljenek benne:

$$f(x) - 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\,x}{2k-1},$$
$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\,x}{2k-1},$$
$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right).$$

A 6.9. animáción megfigyelhetjük, hogy hogyan közelíti a trigonometrikus sor az f függvényt, ha minél több tagját vesszük figyelembe. Az alsó grafikonon szerepel az éppen hozzáadott tag, a felső ábrán pedig az eredmény.



6.9. ábra. A négyszögjel függvény Fourier-sorának első néhány részletösszege

Természetesen nem csak 2π szerint periodikus függvények lehetséges a Fourier-sorát meghatározni.

Legyen az f függvény (legkisebb) periódusa T. Ekkor T szerint periodikus cos és sin függvényekre van szükség a Fourier-sor előállításához. Ha az x változó a $[0;T]$ intervallum értékeit veszi fel, akkor a $\frac{2\pi}{T}x$ mennyiség pontosan a $[0;2\pi]$ intervallum értékeit veszi fel, így a $\cos\frac{2\pi}{T}x, \sin\frac{2\pi}{T}x, \cos 2\frac{2\pi}{T}x, \sin 2\frac{2\pi}{T}x, \dots$ függvények lesznek alkalmasak a Fourier-sor előállítására. Érdemes ekkor új jelölést bevezetni: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, amelyet szokás *körfrekvenciának* nevezni a fizikai alkalmazások miatt. Tehát a T szerint periodikus függvény Fourier-sora

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

alakban keresendő. Az együtthatók meghatározása tulajdonképpen semmiben nem különbözik a korábbi módszertől:

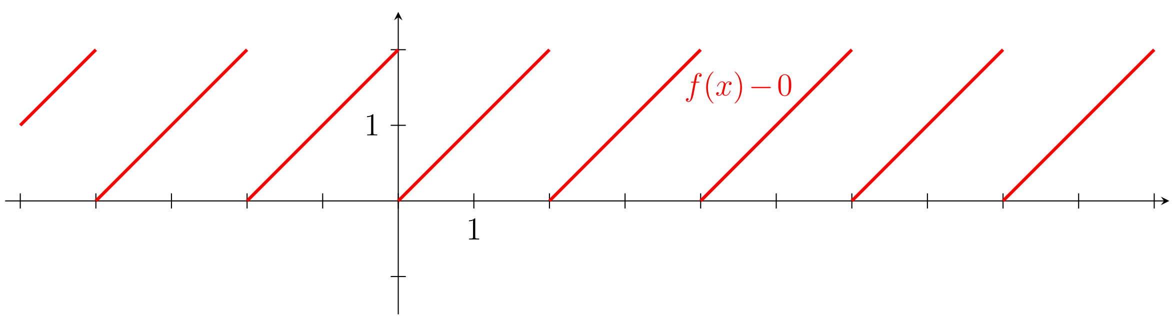
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)\cos k\omega x\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x.$$

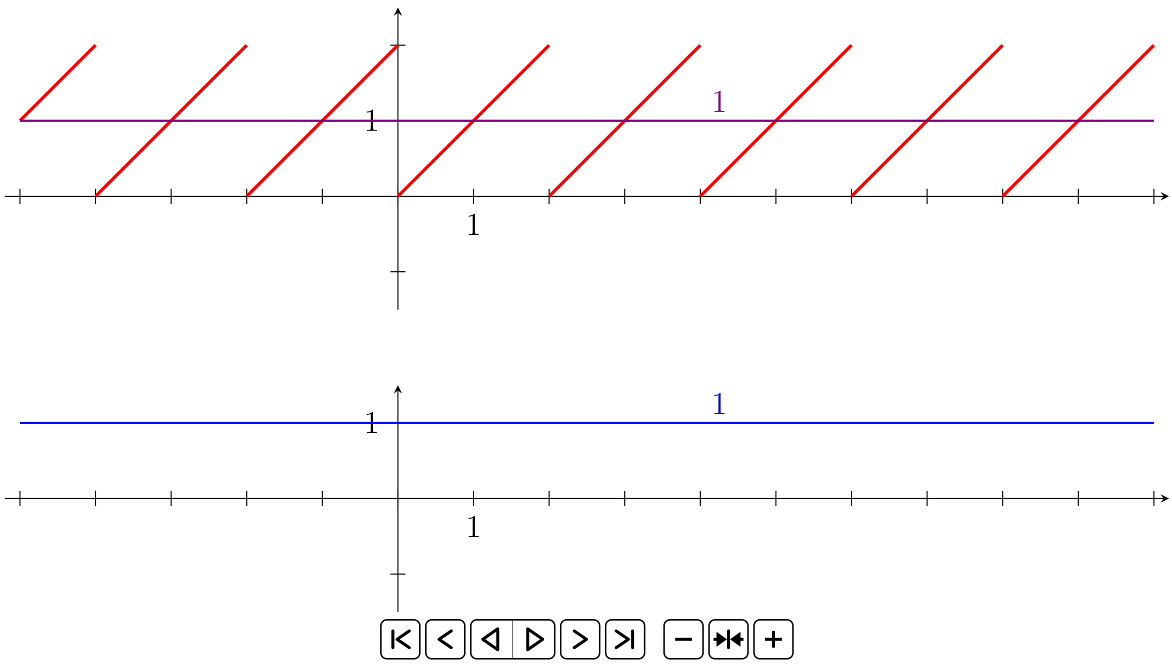
6.6.4. Példa. Fejtsük Fourier-sorba a 6.10. ábrán látható, 2 periódusú ($T=2$, $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$) függvényt (ún. *fűrészfogrezgés*):

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \leqslant x < 2; \\ f(x+2)\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



6.10. ábra. Fűrészfogrezgés (kattintson az ábrára)

Vegyük észre itt is, hogy a függvény grafikonját y tengely mentén -1-gyel eltolva páratlan függvényt kapunk (a 6.10. ábrára kattintva megjelenik), így könnyebb az együtthatókat meghatározni: $a_0 = a_k = 0$.



6.11. ábra. A fűrészfogrezgés Fourier-sorának első néhány részletösszege

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\int\limits_0^2 f^*(x)\sin k\omega x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 (x-1)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[-(x-1)\,\frac{\cos k\omega x}{k\omega}\right]_0^2 + \int\limits_0^2 \frac{\cos k\omega x}{k\omega}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{\cos 2k\pi}{k\pi} - \frac{\cos 0}{k\pi} + \left[\frac{\sin k\omega x}{k^2\omega^2}\right]_0^2 = -\frac{2}{k\pi} + \frac{\sin 2k\pi}{k^2\pi^2} - \frac{\sin 0}{k^2\pi^2} = -\frac{2}{k\pi}.
\end{aligned}
$$

Így a Fourier-sor:

$$
\begin{aligned}
f(x) - 1 &= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k}, \\
f(x) &= 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k}, \\
f(x) &= 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \pi x}{1} + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 4\pi x}{4} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

A fűrészfogrezgés Fourier-sorát a 6.11. ábra szemlélteti.

6.6.1. Feladatok

Határozza meg az alábbi periodikus f függvények Fourier-sorát.

1. $f(x) = |\sin x|$
2. $f(x) = \begin{cases} \pi - |x|, & \text{ha } -\pi < x \leqslant \pi; \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként.} \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 < x \leqslant 0; \\ 2x, & \text{ha } 0 < x \leqslant 1; \\ f(x+2)\,, & \text{egyébként.} \end{cases}$

7. fejezet

Differenciálegyenletek

7.1. Differenciálegyenletek és megoldásaik

7.1.1. A differenciálegyenlet fogalma

Korábbi tanulmányaink során gyakran találkoztunk olyan problémákkal, amelyekben a keresett mennyiséget egy alkalmas egyenlet megoldásaként sikerült meghatározni. Ezeknek az egyenleteknek a megoldásai többnyire valós vagy komplex számok voltak.

7.1.1. Definíció (Függvényegyenlet). Az olyan egyenletet, amelyben az ismeretlen függvény, *függvényegyenletnek* nevezzük. A függvényegyenlet *megoldásai* tehát olyan függvények, amelyeket behelyettesítve az ismeretlen helyére, azonosságot kapunk.

7.1.2. Példa. A

$$2f(x)-x+2=5x-2$$

egyenletben az ismeretlen függvény f. Egyszerű egyenletrendezéssel kapjuk, hogy egy megoldás van, mégpedig $f(x)=3x-2$. Fontos, hogy ebben az egyenletben x nem ismeretlen, hanem a függvény változója!

7.1.3. Megjegyzés. A függvényegyenleteknek sok érdekes típusa van, amelyek többnyire sokkal bonyolultabbak, mint a fenti példában bemutatott egyenlet, de ezekkel itt általánosan nem foglalkozunk.

7.1.4. Definíció (Differenciálegyenlet). Az olyan függvényegyenletet, amelynek felírásában az ismeretlen függvény valamely deriváltfüggvénye is szerepel, *differenciálegyenletnek* nevezzük.

7.1.5. Jelölés. Ebben a jegyzetben az ismeretlen függvényt többnyire y-nal, a függvény változóját pedig x-szel fogjuk jelölni. Gyakran jelölik a függvény változóját t-vel is, ilyenkor az ismeretlen függvény jelölésére néha az x, néha az y jelölés használatos.

7.1.6. Példák.

1. Az

   $$y'+3y=4e^x$$

   egyenletben y jelöli az ismeretlen függvényt és y' az ismeretlen függvény deriváltját.

2. Az
$$y'' - xy = 6x - x^4$$
differenciálegyenletben y első deriváltja nem szerepel, de benne van az ismeretlen függvény y''-vel jelölt második deriváltja.

3. Az
$$x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (x+1)y = \left(x^3 - x\right) e^x$$
differenciálegyenletben az y függvény $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ deriváltja differenciálok segítségével van kifejezve. Ugyanez az egyenlet felírható
$$x^2\,\mathrm{d}y - y(x+1)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 - x\right) e^x\,\mathrm{d}x$$
alakban is, amelyben a derivált explicit módon nem szerepel, de kifejezhető a differenciálok segítségével.

4. Az
$$\ddot{x} - t\dot{x} + 2x = \sin t$$
differenciálegyenletben x-szel jelöltük az ismeretlen függvényt, $\dot{x}$-tal, illetve $\ddot{x}$-tal annak első, illetve második deriváltfüggvényét, és t-vel a függvény változóját.

7.1.2. A differenciálegyenletek osztályozása

Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor a differenciálegyenlet *közönséges*, ha többváltozós, akkor *parciális* differenciálegyenletről beszélünk. Ebben a jegyzetben csak közönséges differenciálegyenletekről lesz szó.

7.1.7. Definíció (A differenciálegyenlet rendje). A *differenciálegyenlet rendje* alatt az ismeretlen függvény azon deriváltjának rendjét értjük, amely az egyenletben előforduló deriváltak közül a legmagasabb rendű.

7.1.8. Példák.

1. Az
$$y' + 3y = 4e^x$$
differenciálegyenlet elsőrendű.

2. Az
$$y'' - xy = 6x - x^4$$
differenciálegyenlet másodrendű.

3. Az
$$x^2 y^{(4)} - y''' \sin x = x \cos x$$
differenciálegyenlet negyedrendű. ($y^{(4)}$ az ismeretlen függvény negyedik, y''' az ismeretlen függvény harmadik deriváltját jelenti.)

7.1.9. Definíció (Algebrai és transzcendens differenciálegyenlet). A differenciálegyenlet *transzcendens*, ha benne az ismeretlen függvénynek, vagy valamely deriváltjának transzcendens függvénye is előfordul. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a differenciálegyenlet *algebrai*.

7.1.10. Példák.

1. Az
$$y' + 3y = 4e^x$$
differenciálegyenlet algebrai.

2. Az
$$y' - \sin y = \cos^2 x$$
differenciálegyenlet transzcendens, mert $\sin y$ az y transzcendens függvénye.

3. Az
$$\ln y'' + xy = x(e^x + 1)$$
differenciálegyenlet transzcendens, mert $\ln y''$ az y'' transzcendens függvénye.

7.1.11. Definíció (Lineáris differenciálegyenlet). Ha egy algebrai differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és a deriváltjai mind első fokon szerepelnek, továbbá nem fordul elő ezek szorzata sem, akkor a differenciálegyenlet *lineáris*.

7.1.12. Példák.

1. Az
$$xy'' + (\sin x)y' + (x^2 + x - 3)y = (x^2 + 1)\cos x$$
differenciálegyenlet lineáris.

2. Az
$$y' = y^2$$
differenciálegyenlet nem lineáris, mert benne y a második hatványon szerepel.

3. Az
$$yy'' - x^4 y' = 0$$
differenciálegyenlet nem lineáris, mert előfordul benne az y és az y'' szorzata.

7.1.13. Definíció (Homogén és inhomogén lineáris differenciálegyenlet). Egy lineáris differenciálegyenlet *homogén*, ha minden tagjában szerepel az ismeretlen függvény, vagy annak valamely deriváltja. Ellenkező esetben a lineáris differenciálegyenlet *inhomogén*.

7.1.14. Példák.

1. Az
$$xy'' + (\sin x)y' + (x^2 + x - 3)y = 0$$
differenciálegyenlet homogén.

2. Az
$$y'' - xy' = x^2$$
differenciálegyenlet nem homogén, mert a jobb oldalon álló x^2 tagban sem y, sem annak deriváltja nem fordul elő.

7.1.15. Definíció (Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet). Egy lineáris differenciálegyenlet *állandó együtthatós*, ha az ismeretlen függvény és deriváltjai csak konstans (a függvény változóját nem tartalmazó) kifejezéssel vannak megszorozva.

7.1.16. Példák.

1. Az
$$y'' + xy' - 3y = 5$$
differenciálegyenlet nem állandó együtthatós, mert y' együtthatója nem állandó.

2. Az
$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$
differenciálegyenlet állandó együtthatós.

7.1.3. A differenciálegyenlet megoldásai

7.1.17. Példa. Oldjuk meg az $y'' = 2\sin x$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Ez a differenciálegyenlet megoldható úgy, hogy mindkét oldalát kétszer integráljuk.

$$\begin{aligned} y' &= -2\cos x + C_1 \\ y &= -2\sin x + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

A C_1 és C_2 integrálási konstansok értéke tetszőleges valós szám lehet, így végtelen sok megoldást kaptunk. A C_1, C_2 konstansokat *szabad paraméternek* is szokás nevezni.

7.1.18. Megjegyzések.

- Az $y^{(n)} = f(x)$ alakú differenciálegyenleteket *közvetlen integrálással megoldható differenciálegyenleteknek* nevezzük, mivel mindkét oldalt n-szer integrálva megkapjuk a differenciálegyenlet megoldását. Ilyen a 7.1.17. példában szereplő differenciálegyenletet is.

- A 7.1.17. példában szereplő differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása van, hiszen a C_1 és C_2 paraméterek mindegyikének helyére tetszőleges valós számot írva a differenciálegyenlet egy megoldását kapjuk. A C_1 és C_2 helyébe írt számok nem függnek egymástól, ezért *független szabad paraméternek* nevezzük őket.

7.1.19. Definíció (Általános megoldás). Egy függvényhalmazt a differenciálegyenlet *általános megoldásának* nevezünk, ha minden eleme deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet, és pontosan annyi egymástól független szabad paraméterrel írható le, amennyi a differenciálegyenlet rendje.

7.1.20. Definíció (Partikuláris megoldás). Ha egy függvényhalmaz minden eleme deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet, de a leírásához szükséges szabad paraméterek száma kisebb a differenciálegyenlet rendjénél, akkor őt a differenciálegyenlet *partikuláris megoldásának* nevezzük.
Ugyancsak partikuláris megoldásnak nevezik az olyan (paramétert egyáltalán nem tartalmazó) függvényeket, amelyek deriváltjaikkal együtt kielégítik a differenciálegyenletet.

7.1.21. Példák.

1. Az $y=-2\sin x+C_1x+C_2$ kifejezéssel leírt függvényhalmaz a 7.1.17. példában szereplő differenciálegyenlet általános megoldása. Valóban, kétszer differenciálva a C_1 és C_2 paraméterek értékétől függetlenül $y''=2\sin x$ adódik, azaz a függvényhalmazban szereplő függvények mindegyike kielégíti a differenciálegyenletet. Mivel az y kifejezés két egymástól független szabad paramétert tartalmaz, és a differenciálegyenlet rendje 2, ezért általános megoldás is.

2. Az $y_1 = -2\sin x + 3x - 7$ függvény, illetve $y_2 = -2\sin x + 5x + C_2$ függvényhalmaz mindegyike partikuláris megoldása a 7.1.17. példában szereplő differenciálegyenletnek. Nyilvánvaló, hogy megoldások, hiszen az általános megoldás megszorításával adódnak, és 2-nél kevesebb, 0, illetve 1 szabad paramétert tartalmaznak.

7.1.22. Megjegyzés. Az általános megoldás sok esetben tartalmazza a differenciálegyenlet összes megoldását. Vannak azonban olyan esetek is, amikor ez nem teljesül. Pl. az $y' = y^2$ differenciálegyenlet általános megoldása az $y = -\frac{1}{x+C}$ függvényhalmaz. Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy elemei valóban megoldások. Az, hogy általános megoldás is, következik abból, hogy a differenciálegyenlet rendje 1, és y kifejezése pontosan 1 szabad paramétert tartalmaz. A differenciálegyenletnek azonban megoldása a konstans 0 függvény is, és ez nem kapható meg úgy, hogy C helyébe egy valós számot helyettesítünk.

7.2. A differenciálegyenletek alkalmazásai

A műszaki és természettudományokban gyakran fordulnak elő olyan jelenségek, amelyek differenciálegyenletekkel modellezhetők. Ezek sokszínűségét a következőkben néhány példával szeretnénk illusztrálni. Ezek között több olyant is láthatunk, ahol olyan mennyiség időbeli változását írjuk le, amely változásának sebessége arányos a mennyiség pillanatnyi értékével. (pl. 7.2.1. példák)

7.2.1. Példák.

1. Populáció növekedése.

   Tegyük fel, hogy egy populáció egyedszáma az idő $N(t)$-vel jelölt függvénye, a születések és halálozások száma az egyedek számával arányos, és az előbbi meghaladja az utóbbit. Ekkor a populáció növekedni fog, és változásának mértéke arányos az egyedszámmal, azaz
   $$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kN,$$
   ahol $k>0$ konstans. Látható, hogy a jelenséget egy elsőrendű differenciálegyenlet írja le, amelynek egy partikuláris megoldása a populáció egyedszámát megadó függvény.

2. Radioaktív bomlás.

   A radioaktív atommagok számát egy adott anyagmintában az $N(t)$ függvénnyel írjuk le. Az aktivitás, azaz az időegység alatt elbomló atommagok száma egyenesen arányos N-nel, így a függvény változásának sebessége
   $$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -kN,$$

ahol $k > 0$ konstans. A kapott összefüggés it is egy elsőrendű differenciálegyenlet, amelynek egy partikuláris megoldása adja meg a radioaktív atommagok számát az idő függvényében.

7.2.2. Megjegyzések.

- A populáció egyedszáma, illetve a radioaktív atommagok száma egész, míg az ezeket leíró $N(t)$ függvények folytonosak, tehát a kapott megoldások csak közelítő értéket adnak. Ez a közelítés azonban nagy N esetén jól írja le a jelenségeket.

- Míg a második esetben a modell jól működik, az elsőre ez nem minden esetben igaz. Ha a populáció túlságosan megnő, akkor elfogyhat az élelem, ezért megnövekszik a halálozási ráta. Ugyancsak megzavarhatja a növekedést egy váratlan betegség fellépése a populációban. Ilyen esetekben módosítani kell a matematikai modellt, amivel a jelenséget leírjuk. Megfelelő körülmények között azonban a fent leírt növekedési modell egy ideig jól működhet.

7.2.3. Példák.

1. Oldódás.

   Tegyük fel, hogy az oldószerben kezdetben m_0 tömegű oldandó anyag van. A t idő alatt feloldott anyag mennyiségét jelölje az $y(t)$ függvény. Az oldódás $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével arányos, azaz

   $$y' = k(m_0 - y),$$

   ahol $k > 0$ konstans.
   Leírható a probléma úgy is, ha az ismeretlen függvény a még fel nem oldott anyag mennyisége azaz $x(t) = m_0 - y(t)$. Ekkor x változásának sebessége magával x-szel arányos, azaz

   $$\dot{x} = -kx,$$

   ahol $k > 0$ konstans. Az egyenletben a negatív előjelre azért van szükség, mert a fel nem oldott anyag mennyisége csökken.
   Bár a jelölés más, könnyen felismerhető, hogy a probléma ugyanarra a differenciálegyenletre vezetett, mint a 7.2.1. példák közül a 2.

2. Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás.

   Egy egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző pontszerű test helyzetét az $x(t)$ függvény írja le. Fizikai tanulmányainkból ismert, hogy a sebességfüggvény az x függvény idő szerinti deriváltfüggvénye, azaz $v(t) = \dot{x}(t)$, gyorsulásfüggvény pedig a sebességfüggvény idő szerinti deriváltfüggvénye, tehát $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$.
   Az egyenesvonalú, egyenletesen változó mozgás gyorsulása konstans, azaz a nem függ az időtől. A test helyzetét leíró x függvény az

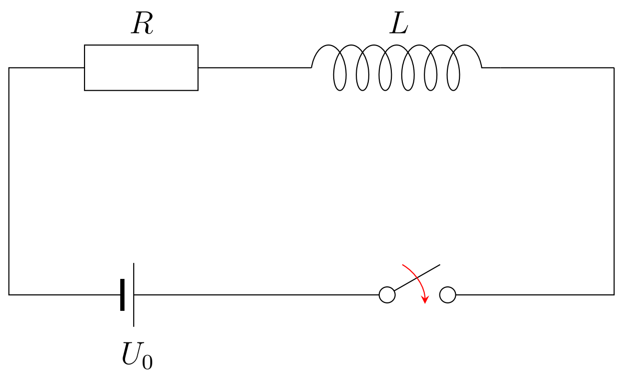
   $$\ddot{x} = a$$

   másodrendű differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

3. Harmonikus rezgés.

   Jelöljük a harmonikus rezgőmozgást végző pontszerű test kitérés-idő függvényét $x(t)$-vel. Fizikai tanulmányaink szerint a harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele, hogy a testre a kitéréssel egyenesen arányos visszatérítő erő hasson, azaz $F = -Dx$, ahol $D > 0$ konstans. Newton második törvénye szerint $F = ma = m\ddot{x}$, azaz a kitérés-idő függvény az
   $$m\ddot{x} = -Dx$$
   másodrendű differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

4. Soros RL kör egyenfeszültségre kapcsolása.



7.1. ábra. Soros RL kör egyenfeszültségre kapcsolása

Az egyenáramú kör elemei egy R ohmos ellenállás, egy L önindukciós tényezőjű tekercs, egy U_0 feszültséget biztosító telep és egy kapcsoló. (7.1. ábra) Feladatunk az áramerősség-idő függvény meghatározása a kapcsoló zárása után. A huroktörvény alapján minden időpillanatban
$$u_R(t) + u_L(t) = U_0,$$
ahol $u_R(t)$ az ohmos ellenállásra, $u_L(t)$ pedig a tekercsre eső feszültség a t időpillanatban. Mivel $u_R = Ri$ és $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ezért a jelenséget az
$$Ri + L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_0$$
elsőrendű differenciálegyenlet írja le, amelynek egy partikuláris megoldása az áramerősség-idő függvény.

7.2.4. Megjegyzés. Amint a fenti példákból is látható, az alkalmazásokban általában a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását keressük. Ennek a partikuláris megoldásnak a kiválasztása a lehetséges végtelen sok megoldásból valamilyen feltétel alapján történik. Ha ez a feltétel az ismeretlen függvénynek vagy az ismeretlen függvény valamely deriváltfüggvényének a 0 helyen vett helyettesítési értékét adja meg, akkor *kezdeti feltételnek* nevezzük.
A 7.2.3. példák közül a 1-ben $y(0) = 0$ a kezdeti feltétel, hiszen még nincs feloldott anyag. Hasonlóan 4-ben a kezdeti feltétel $i(0) = 0$, hiszen a kapcsoló zárásakor még 0 az áramerősség.
Ha egy differenciálegyenlet adott kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását keressük, akkor úgynevezett *kezdeti érték problémáról* beszélünk.

7.2.1. Feladatok

1. Mi jelöli az ismeretlen függvényt a következő közönséges differenciálegyenletekben, és mi a függvény változóját? Kategorizálja az egyenleteket a tanult szempontok szerint!

   (*a*) $2y' - 3y = 6\sin x - 2\cos x$,

   (*b*) $\dot{x} + 4x = t^2 e^t$,

   (*c*) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x^2 y = \dfrac{1}{x} - x^2 \ln x$,

   (*d*) $\ddot{x} - t\dot{x} + t^2 x = t^4 - 3t^3 - t^2 + 3t + 2$,

   (*e*) $y' = y^3$,

   (*f*) $\ddot{x} = t + \ln x$,

   (*g*) $y^{(5)} - x^2 y^{(3)} + y = 4 - x^2$.

2. Bizonyos élőlények populációja úgynevezett logisztikus növekedést követ. Ilyenkor az y egyedszámnak létezik egy L felső korlátja, és az egyedszám növekedésének sebessége egyenesen arányos az egyedszám, és az egyedszám felső korláttól való $L - y$ eltérésének szorzatával. Írja fel a logisztikus növekedésre vonatkozó differenciálegyenletet!

3. Egy edényben 100 l sóoldat található, amely kezdetben 10 kg sót tartalmaz. Az edényből percenként 10 l oldat folyik ki, helyette percenként 10 l tiszta vizet engedünk az edénybe. Gondoskodunk a folyamatos keverésről, azaz az oldat adott időpillanatban az edény minden részében ugyanolyan töménységű. Írjon fel egy differenciálegyenletet, amelynek egy partikuláris megoldása megadja az edényben levő só mennyiségének időfüggését! Adja meg a partikuláris megoldás megtalálásához szükséges kezdeti feltételt is!

7.3. Elsőrendű differenciálegyenletek

7.3.1. Megoldások és iránymezők

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja

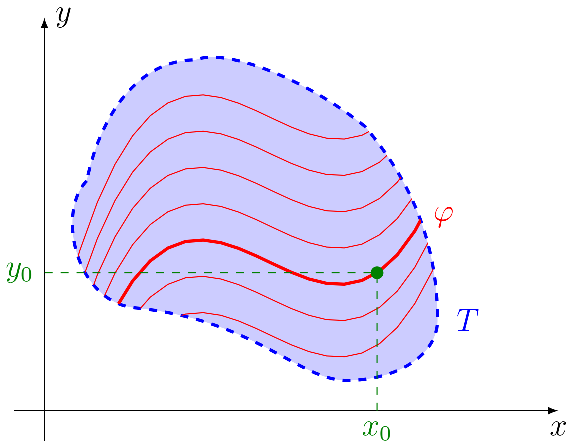
$$F(x; y; y') = 0,$$

ahol y az ismeretlen függvény, x a függvény változója és F egy háromváltozós függvény. Ha y' kifejezhető az összefüggésből, akkor a differenciálegyenlet *explicit alakban* is felírható:

$$y' = f(x; y),$$

ahol f kétváltozós függvény.
Bizonyítás nélkül közöljük az utóbbi alakban megadott differenciálegyenletek megoldásaira vonatkozó tételt:

7.3.1. Tétel (Egzisztencia és unicitás tétel). *Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ kétváltozós függvény értelmezett a $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nyílt halmazon, és ott folytonos $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltjával együtt. Ekkor minden $(x_0; y_0) \in T$ ponthoz található az $y' = f(x; y)$ differenciálegyenletnek pontosan egy olyan φ megoldása, amely kielégíti a $\varphi(x_0) = y_0$ feltételt.*



7.2. ábra. Az $y' = f(x;y)$ differenciálegyenlet megoldásai

7.3.2. Megjegyzések.

- A differenciálegyenlet egy megoldásának grafikonját *integrálgörbének* nevezzük. A 7.2. ábrán több integrálgörbét is ábrázoltunk.

- Az $y' = f(x;y)$ differenciálegyenlet egy integrálgörbéjének $(x_0;y_0)$ pontjában a görbéhez húzott érintő meredeksége az y' deriváltfüggvény $(x_0;y_0)$ pontban felvett értéke, azaz $f(x_0;y_0)$. Az érintőnek így az $(1;f(x_0;y_0))$ vektor irányvektora.

7.3.3. Definíció (Az iránymező). Ha az $y' = f(x;y)$ differenciálegyenlet integrálgörbéinek minden $(x_0;y_0)$ pontjához hozzárendeljük az $(1;f(x_0;y_0))$ vektort, akkor megkapjuk a differenciálegyenlethez tartozó *iránymezőt.*

7.3.4. Példa. A 7.3. ábrán az $y' = x - y$ differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt láthatjuk. (Az áttekinthetőség kedvéért a vektorok hosszát arányosan csökkentettük.)

A differenciálegyenlet megoldása lényegében az iránymezőhöz tartozó integrálgörbék, illetve az azokhoz tartozó függvények meghatározását jelenti. (7.4. ábra)

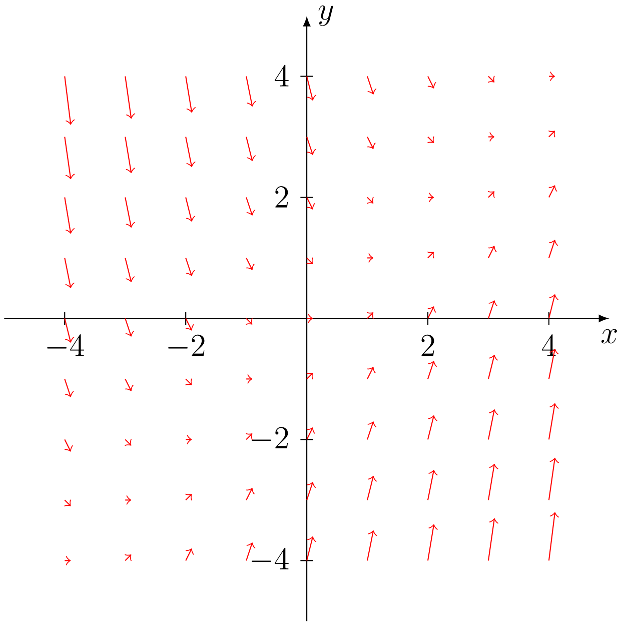
7.3.2. Közvetlen integrálással megoldható elsőrendű differenciálegyenletek

Az elsőrendű differenciálegyenletek egyik legegyszerűbb típusa az $y' = f(x)$ alakú egyenlet, vagyis amikor az egyenlet jobb oldalán álló függvény nem függ y-tól. Ezt a típust közvetlen integrálással megoldható elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük, hiszen mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye, és $C \in \mathbb{R}$.

7.3.5. Példa. Az $y' = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldása $y = \frac{x^3}{3} + C$.



7.3. ábra. Az $y' = x - y$ differenciálegyenlethez tartozó iránymező

7.3.3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

7.3.6. Definíció (Szétválasztható változójú differenciálegyenlet). Egy elsőrendű differenciálegyenletet *szétválasztható változójúnak* nevezünk, ha ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozható:

$$y' = f(x)g(y).$$

7.3.7. Megjegyzések.

- Úgy is fogalmazhatunk, hogy a differenciálegyenlet akkor szétválasztható változójú, ha az ismeretlen függvény y' deriváltfüggvénye olyan szorzatként áll elő, amelyben az egyik tényező csak x-től, a másik tényező csak y-tól függ.
- Az $y' = f(x)g(y)$ összefüggést a *szétválasztható változójú differenciálegyenlet általános alakjának* nevezzük.

A szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldását két részre bontjuk:

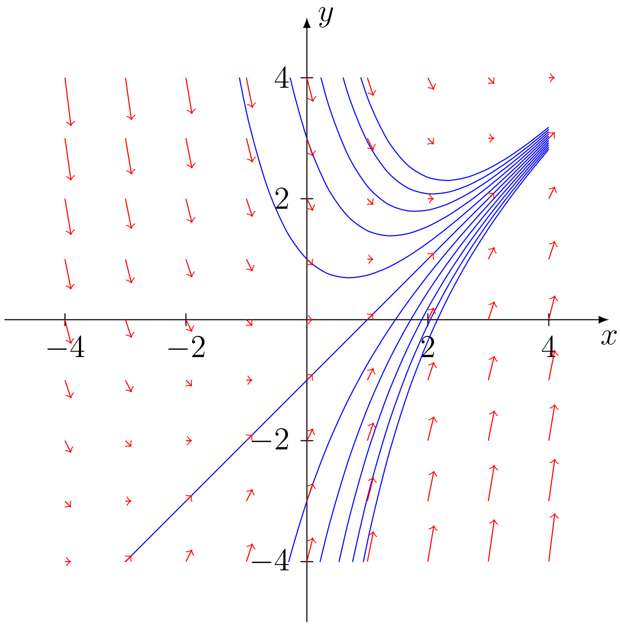
Abban a speciális esetben, ha $g(y)$ a konstans 0 függvény, akkor y' is azonosan 0, azaz y konstans függvény. A $g(y) = 0$ egyenletből y-t kifejezve (ha ez lehetséges) kapjuk a differenciálegyenlet konstans megoldásait.

Ha $g(y)$ nem a konstans 0 függvény, akkor az egyenlet mindkét oldalát elosztva $g(y)$-nal, az

$$\frac{1}{g(y)} \cdot y' = f(x)$$

egyenlethez jutunk. Ezt a lépést nevezzük a változók szétválasztásának, mert sikerült az egyenletet úgy átalakítani, hogy az egyik oldalon csak y jelenik meg explicit módon, a másik oldal pedig csak x-től függ. Integráljuk mindkét oldalt az x változó szerint (a bal oldalon a helyettesítés elvét alkalmazva)! Ekkor a

$$\tilde{G}(y) + C_1 = F(x) + C_2$$



7.4. ábra. Az $y' = x - y$ differenciálegyenlet néhány integrálgörbéje

összefüggéshez jutunk, ahol F a f, $\tilde{G}$ pedig az $\frac{1}{g}$ függvény primitív függvénye, továbbá $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ integrálási konstansok. A $C = C_2 - C_1$ jelölés bevezetésével ez átrendezhető

$$\tilde{G}(y) = F(x) + C$$

alakba. Mivel ez mindig megtehető, az integrálási konstanst a továbbiakban mindig csak a jobb oldalon jelenítjük meg.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az y' függvény először differenciálokkal fejezzük ki:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

A változók szétválasztásával az

$$\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

egyenlethez jutunk, majd a bal oldalt az y, a jobb oldalt pedig az x változó szerint integráljuk.

7.3.8. Példák.

1. Oldjuk meg az $y' = xy$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: Az $y = 0$, akkor $y' = 0$, így a konstans 0 függvény kielégíti a differenciálegyenletet, azaz megoldás. A további megoldásokat a változók szétválasztásával kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= xy \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int x\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= \frac{x^2}{2} + D,
\end{aligned}$$

ahol $D \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Innen

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+D} = e^D \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Az összefüggés jobb oldala minden valós x-re pozitív értéket vesz fel, azaz $|y|$-nek nincs zérushelye. Ekkor azonban y sem vehet fel 0-t, és mivel y mindenütt folytonos (sőt differenciálható is), ezért a Bolzano-tétel következménye alapján nem vált előjelet, azaz vagy csak pozitív, vagy csak negatív értékeket vesz fel. Ennek alapján a megoldások $y = e^D \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ vagy $y = -e^D \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ alakúak.
Mivel minden pozitív valós szám előáll e^D alakban, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, ahol $C = \pm e^D$, sőt a $C = 0$ esetet is megengedhetjük, hiszen akkor a megoldás első részében meghatározott konstans 0 megoldást kapjuk vissza.

Ezt az alakot egyszerűbben is megkaphattuk volna, ha a D integrálási konstanst eleve $\ln|C|$ alakban adtuk volna meg. (Ez ajánlott minden esetben, amikor a bal oldalon az integrálás eredménye y valamely kifejezésének logaritmusa.)

$$\begin{aligned}
\ln|y| &= \frac{x^2}{2} + \ln|C| \\
\ln|y| &= \ln e^{\frac{x^2}{2}} + \ln|C| \\
\ln|y| &= \ln|C|e^{\frac{x^2}{2}} \\
|y| &= |C|e^{\frac{x^2}{2}} \\
y &= Ce^{\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az $y' = xy^2$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely kielégíti az $y(2) = 1$ feltételt!

Megoldás: Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a konstans 0 függvény partikuláris megoldása a differenciálegyenletnek, ez azonban nem teljesíti a megadott feltételt.

Határozzuk meg az általános megoldást a változók szétválasztásával!

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= xy^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= x\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2}+C \\
y &= -\frac{1}{\frac{x^2}{2}+C}
\end{aligned}
$$

A feltétel szerint

$$1 = y(2) = -\frac{1}{\frac{2^2}{2}+C} = -\frac{1}{2+C}.$$

Az összefüggésből C-t kifejezve $C=-3$ adódik, tehát a feltételnek megfelelő partikuláris megoldás

$$y_p = -\frac{1}{\frac{x^2}{2}-3} = \frac{2}{6-x^2}.$$

3. Oldjuk meg az $y' = \dfrac{2x-1}{1+\cos y}$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: Az egyenlet $y' = (2x-1)\cdot\frac{1}{1+\cos y}$ alakba írható, tehát szétválasztható változójú.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x-1}{1+\cos y} \\
(1+\cos y)\,\mathrm{d}y &= (2x-1)\,\mathrm{d}x \\
y+\sin y &= x^2-x+C
\end{aligned}
$$

   Az összefüggésből nem tudjuk kifejezni y-t explicit alakban, ezért azt mondjuk, hogy a kapott összefüggés a differenciálegyenlet implicit alakban megadott megoldása.

7.3.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

7.3.9. Definíció (Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja). Egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet ekvivalens átalakításokkal mindig

$$y' + g(x)y = h(x)$$

alakra hozható, ahol g és h adott egyváltozós valós függvények.

A fenti egyenletet az *elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakjának* nevezzük.

A homogén elsőrendű lineáris egyenlet megoldása

Az általános alak jobb oldalán szereplő h függvényt a differenciálegyenlet *zavaró függvényének* nevezzük. A 7.1.13. definíció szerint az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet pontosan akkor homogén, ha h a konstans 0 függvény. Az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ami azonnal látszik, ha átrendezzük

$$y' = -g(x)y$$

alakba. Megoldása a szokott módon, a változók szétválasztásával történik:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -g(x)y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -g(x)\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -G(x)+\ln|C| \\
\ln|y| &= \ln e^{-G(x)}+\ln|C| \\
\ln|y| &= \ln|C|e^{-G(x)} \\
y &= Ce^{-G(x)},
\end{aligned}$$

ahol G a g függvény egy primitív függvénye.

7.3.10. Példák.

1. Az $y'+xy=0$ homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása $y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, hiszen ebben az esetben $g(x)=x$ és $G(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

2. Az $y'+y\sin x=0$ homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása $y=Ce^{\cos x}$, hiszen ebben az esetben $g(x)=\sin x$ és $G(x)=-\cos x$.

3. Az $y'-y\ln x=0$ homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása az $y=Ce^{x\ln x-x}$ függvény, hiszen ebben az esetben $g(x)=-\ln x$, és parciális integrálás módszerével kapjuk, hogy $G(x)=x-x\ln x$.

4. Az $y'+ky=0$ $(k\in\mathbb{R})$ homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása $y=Ce^{-kx}$, hiszen $g(x)=k$ konstans függvény és $G(x)=kx$.

7.3.11. Megjegyzés. Az utolsó példában a homogén elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet megoldását láthattuk. Ez a fajta differenciálegyenlet gyakran előfordul az alkalmazásoknál. (7.2.1. példák)

Az inhomogén elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása

Ha az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet inhomogén, akkor többnyire nem szétválasztható változójú, ezért megoldása összetettebb, mint a homogén egyenleté.

7.3.12. Tétel (A szuperpozíció elve). *Ha y_1 megoldása az $y'+g(x)y=h_1(x)$ differenciálegyenletnek és y_2 megoldása az $y'+g(x)y=h_2(x)$-nek, akkor tetszőleges $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ együtthatók esetén $y_k=c_1y_1+c_2y_2$ lineáris kombinációjuk megoldása az*

$$y'+g(x)y=c_1h_1(x)+c_2h_2(x)$$

differenciálegyenletnek.

Bizonyítás: A feltételek szerint teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned} y_1' + g(x)y_1 &= h_1(x), \\ y_2' + g(x)y_2 &= h_2(x). \end{aligned}$$

Ha az első egyenletet c_1-gyel, a másodikat c_2-vel szorozzuk, majd az így kapott összefüggéseket összeadjuk, akkor figyelembe véve, hogy $c_1y_1' + c_2y_2' = (c_1y_1)' + (c_2y_2)' = (c_1y_1 + c_2y_2)'$ és $c_1g(x)y_1 + c_2g(x)y_2 = g(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$, a

$$(c_1y_1 + c_2y_2)' + g(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1h_1(x) + c_2h_2(x)$$

összefüggést kapjuk, azaz az állítás igaz. □

7.3.13. Következmény. *Ha y_p az $y' + g(x)y = h(x)$ differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, y_h pedig az $y' + g(x)y = 0$ homogén differenciálegyenlet megoldása, akkor a 7.3.12. tétel alapján $y_h + y_p$ is megoldása az $y' + g(x)y = h(x)$ differenciálegyenletnek.*
Ha y_h a homogén egyenlet általános megoldása, akkor $y_h + y_p$ az inhomogén egyenlet általános megoldása, mert benne pontosan egy (az y_h-ból származó) független paraméter van.

A fentiek alapján az inhomogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása a következő lépésekből áll:

- A változók szétválasztásával meghatározzuk a differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet általános megoldását.
- Meghatározzuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, és azt hozzáadjuk a homogén egyenlet általános megoldásához. Így megkapjuk az inhomogén egyenlet általános megoldását.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának meghatározására több módszer ismeretes. A továbbiakban ezek közül kettőt fogunk használni, mégpedig az *állandó variálásának módszerét* és a *próbafüggvény módszert.*

Az állandó variálásának módszere Ha az állandó variálásának módszerét alkalmazzuk, akkor a partikuláris megoldást $y_p = y_h|_{C=k(x)} = k(x)e^{-G(x)}$ alakban keressük, vagyis y_p-t úgy kapjuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldásában szereplő konstans paramétert egy $k(x)$ függvénnyel helyettesítjük, azaz variáljuk. Az y_p függvény deriváltja $y_p' = k'(x)e^{-G(x)} - g(x)k(x)e^{-G(x)}$. Helyettesítsük y_p-t és y_p'-t a differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-G(x)} - g(x)k(x)e^{-G(x)} + g(x)k(x)e^{-G(x)} &= h(x) \\ k'(x)e^{-G(x)} &= h(x) \\ k'(x) &= h(x)e^{G(x)} \end{aligned}$$

Látható, hogy egy közvetlen integrálással megoldható differenciálegyenletet kaptunk. A $k'(x)$ bármelyik primitív függvénye megfelel $k(x)$-nek, amit y_p-be helyettesítve megkapjuk a partikuláris megoldást.

7.3.14. Példák.

1. Oldjuk meg az $y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: A $g(x) = -\frac{1}{x}$ függvény egyik primitív függvénye $G(x) = -\ln x$, így az $y' - \frac{y}{x} = 0$ homogén egyenletet általános megoldása $y_h = Ce^{\ln x} = Cx$.
A partikuláris megoldást az $y_p = k(x) \cdot x$ alakban keressük. $k'(x) = -\frac{5}{x} \cdot e^{-\ln x} = -\frac{5}{x^2}$, amelynek egy primitív függvénye $k(x) = \frac{5}{x}$, azaz $y_p = \frac{5}{x} \cdot x = 5$.
A differenciálegyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p = Cx + 5$.

Bár a megoldás során feltettük, hogy $x > 0$, hiszen a $G(x) = -\ln x$ függvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza, az eredmény ellenőrzésénél kitűnik, hogy az $y = Cx + 5$ függvény tetszőleges 0-t nem tartalmazó intervallumon megoldása a differenciálegyenletnek.

2. Oldjuk meg az $xy' + y = -\sin x$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: Osszuk el az egyenlet minkét oldalát x-szel! A kapott $y' + \frac{y}{x} = \frac{-\sin x}{x}$ egyenletből leolvasható, hogy $g(x) = \frac{1}{x}$, és $h(x) = \frac{-\sin x}{x}$. A $g(x)$ egy primitív függvénye $G(x) = \ln x$, így a homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{-G(x)} = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x}$.
   A partikuláris megoldást $y_p = \frac{k(x)}{x}$ alakban keressük. $k'(x) = -\frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} = -\sin x$, tehát $k(x) = \cos x$, így $y_p = \frac{\cos x}{x}$.
   A differenciálegyenlet általános megoldása $y = \frac{C}{x} + \frac{\cos x}{x}$.

3. Oldjuk meg az $y' = e^{-x^2} - 2xy$ differenciálegyenletet! Írjuk fel az $y(2) = 0$ feltételt kielégítő partikuláris megoldását!

   Megoldás: Adjunk az egyenlet minkét oldalához $2xy$-t! A kapott $y' + 2xy = e^{-x^2}$ egyenletből leolvasható, hogy $g(x) = 2x$, és $h(x) = e^{-x^2}$. A $g(x)$ egy primitív függvénye $G(x) = x^2$, így a homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{-G(x)} = Ce^{-x^2}$.
   A partikuláris megoldást $y_p = k(x)e^{-x^2}$ alakban keressük. $k'(x) = e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = 1$, tehát $k(x) = x$, így $y_p = xe^{-x^2}$.
   A differenciálegyenlet általános megoldása $y = Ce^{-x^2} + xe^{-x^2}$.
   A feltételt az általános megoldásba helyettesítve $0 = Ce^{-4} + 2e^{-4}$, amelyből $C = -2$ következik. A feltételt kielégítő partikuláris megoldás tehát $y_2 = (x-2)e^{-x^2}$.

A próbafüggvény módszer Ha a lineáris differenciálegyenlet állandó együtthatós, és zavaró függvénye a 7.1. táblázatban szereplő három függvénytípus valamelyikének speciális esete, akkor partikuláris megoldását próbafüggvény módszerrel is meghatározhatjuk. Ahogy a táblázatból is kitűnik, a próbafüggvény a zavaró függvényhez hasonló, de határozatlan együtthatókkal. A próbafüggvényt és deriváltját visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe az együtthatók értéke kiszámítható, így eljutunk a partikuláris megoldáshoz. (A határozatlan együtthatókat nagybetűvel jelöltük.)

7.3.15. Példák.

1. Oldjuk meg az $y' - 3y = -6x + 5$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{3x}$.

   Mivel az egyenlet állandó együtthatós, alkalmazható a próbafüggvény módszer a partikuláris megoldás meghatározására. A zavarófüggvény $h(x) = -6x + 5$, ezért a próbafüggvény ugyancsak elsőfokú polinom, de általános együtthatókkal:

$$y_p = Ax + B.$$

Zavaró függvény	**Próbafüggvény**
n-edfokú polinom	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$
ae^{cx}	Ae^{cx}
$a \sin cx + b \cos cx$	$A \sin cx + B \cos cx$

7.1. táblázat. Próbafüggvény választása

Ennek deriváltja $y_p' = A$. Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe az

$$A - 3Ax - 3B = -6x + 5$$

egyenlethez jutunk. A két oldalnak azonosan meg kell egyezni, azaz mind az x együtthatója, mind a konstans tag ugyanaz a két oldalon. Tehát $-3A = -6 \Rightarrow A = 2$, és $A - 3B = 2 - 3B = 5 \Rightarrow B = -1$. A keresett partikuláris megoldás tehát $y_p = 2x - 1$.

A differenciálegyenlet általános megoldása $y = y_h + y_p = Ce^{3x} + 2x - 1$.

2. Oldjuk meg az $y' - y = -x^2 - 3$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^x$.

   A zavarófüggvény $h(x) = -x^2 - 3$, ezért a próbafüggvény az általános másodfokú polinom:

   $$y_p = Ax^2 + Bx + D.$$

   Ennek deriváltja $y_p' = 2Ax + B$. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe a

   $$2Ax + B - Ax^2 - Bx - D = -x^2 - 3$$

   egyenlethez jutunk. Hasonlítsuk össze a megfelelő tagok együtthatóit a két oldalon:

   x^2 együtthatója: $-A = -1 \Rightarrow A = 1$,

   x együtthatója: $2A - B = 0 \Rightarrow B = 2A = 2$,

   a konstansok: $B - D = -3 \Rightarrow D = B + 3 = 5$.

   A keresett partikuláris megoldás tehát $y_p = x^2 + 2x + 5$.

   A differenciálegyenlet általános megoldása $y = Ce^x + x^2 + 2x + 5$.

3. Oldjuk meg az $y' + y = 3e^{2x}$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{-x}$.

   A zavarófüggvény $h(x) = 3e^{2x}$, ezért a próbafüggvény

   $$y_p = Ae^{2x},$$

   deriváltja $y_p' = 2Ae^{2x}$. Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe a

   $$2Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

   egyenlethez jutunk. Könnyen látható, hogy $A = 1$, így a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = e^{2x}$.

   A differenciálegyenlet általános megoldása $y = Ce^{-x} + e^{2x}$.

4. Oldjuk meg az $y' + 2y = 5\sin x$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{-2x}$.

   A zavarófüggvény $h(x) = 5\sin x$, ezért a próbafüggvény
$$y_p = A\sin x + B\cos x,$$
   deriváltja $y_p' = A\cos x - B\sin x$. Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe az
$$A\cos x - B\sin x + 2A\sin x + 2B\cos x = 5\sin x$$
   egyenlethez jutunk. Rendezve:
$$(2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x = 5\sin x.$$
   Az együtthatók összehasonlításával a $2A-B=5$, $A+2B=0$ egyenletrendszer adódik, amelynek megoldása $A=2$, $B=-1$, tehát a partikuláris megoldás $y_p=2\sin x-\cos x$.

   A differenciálegyenlet általános megoldása $y = Ce^{-2x} + 2\sin x - \cos x$.

A próbafüggvény akkor is alkalmazható, ha a zavarófüggvény a 7.1. táblázat első oszlopában található függvények összege vagy különbsége. Ilyenkor a próbafüggvény a szuperpozíció elve (7.3.12. tétel) alapján a megfelelő próbafüggvények összegeként áll elő.
Ha a zavarófüggvény a 7.1. táblázat első oszlopában található függvények szorzata, akkor a megfelelő próbafüggvények szorzatát választjuk próbafüggvénynek.

7.3.16. Példák.

1. Oldjuk meg az $y' - 2y = e^{3x} + 10x - 7$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{2x}$. Mivel a zavarófüggvény egy exponenciális függvény és egy lineáris függvény összege, a próbafüggvény a nekik megfelelő próbafüggvények összege, azaz $y_p = Ae^{3x} + Bx + D$. Ha ezt deriváltjával együtt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, akkor a
$$3Ae^{3x} + B - 2Ae^{3x} - 2Bx - 2D = e^{3x} + 10x - 7$$
   egyenletet kapjuk.

   Az e^{3x} együtthatója $3A - 2A = 1 \Rightarrow A = 1$, az x együtthatója $-2B = 10 \Rightarrow B = -5$, a konstans tag $B - 2D = -7 \Rightarrow D = 1$,

   tehát a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = e^{3x} - 5x + 1$, általános megoldása pedig $y = Ce^{2x} + e^{3x} - 5x + 1$.

2. Oldjuk meg az $y' + 2y = 72xe^{4x}$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A homogén egyenlet általános megoldása $y_h=Ce^{-2x}$. Mivel a zavarófüggvény egy exponenciális függvény és egy lineáris függvény szorzata a próbafüggvény $y_p = (Ax + B)e^{4x}$. (Az exponenciális függvényhez nem kell külön együttható, mert azt bevihetnénk a lineáris kifejezésbe.) Ha behelyettesítjük y_p-t és $y_p'=Ae^{4x}+4(Ax+$ $+B)e^{4x}$-et a differenciálegyenletbe, akkor az
$$Ae^{4x} + 4(Ax + B)e^{4x} + 2(Ax + B)e^{4x} = 72xe^{4x}$$
   összefüggést kapjuk. Beszorzás és rendezés után kapjuk, hogy
$$6Axe^{4x} + (A + 6B)e^{4x} = 72xe^{4x},$$
   így $6A = 72 \Rightarrow A = 12$, és $A + 6B = 0 \Rightarrow B = -2$, tehát a partikuláris megoldás $y_p = (12x - 2)e^{4x}$. Az általános megoldás $y = Ce^{-2x} + (12x - 2)e^{4x}$.

A rezonancia Ha a zavarófüggvény és a homogén egyenlet általános megoldása csak konstans szorzóban különbözik egymástól, akkor a próbafüggvény módszer az eddig tanult módon nem vezet eredményre. Tekintsük ugyanis az

$$y' - ay = be^{ax}$$

differenciálegyenletet, ahol $b \neq 0$ valós szám. A homogén egyenlet általános megoldása Ce^{ax}, és a táblázat szerint a próbafüggvény $y_p = Ae^{ax}$ lenne. Azonban akármilyen valós számot is írnánk A helyébe, a kapott függvény a homogén egyenlet megoldása lenne, így az eredeti egyenletet nem elégítené ki.
A szuperpozíció elvéből (7.3.12. tétel) következik, hogy ez a probléma akkor is fennáll, ha a zavarófüggvény több tagból áll, de egyik tagja be^{ax}. Ezt a jelenséget *rezonanciának hívjuk*. Rezonancia esetén a próbafüggvény módszert úgy módosítjuk, hogy a rezonáló tagot a próbafüggvényben x-szel megszorozzuk.

7.3.17. Példák.

1. Oldjuk meg az $y' - 2y = 4e^{2x} + 12x - 14$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{2x}$. Mivel a zavarófüggvény első tagja rezonanciában van y_h-val, ezért a próbafüggvényben a megfelelő tagot x-szel szorozzuk, azaz a módosított próbafüggvény $y_p = Axe^{2x} + Bx + D$, deriváltja pedig $y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + B$. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe az

   $$Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + B - 2Axe^{2x} - 2Bx - 2D = 4e^{2x} + 12x - 14$$

   egyenlethely jutunk. Rendezés után:

   $$Ae^{2x} - 2Bx + B - 2D = 4e^{2x} + 12x - 14.$$

   A megfelelő együtthatókat összehasonlítva: $A = 4$, $-2B = 12 \Rightarrow B = -6$ és $B - 2D = = -14 \Rightarrow D = 4$. A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = 4xe^{2x} - 6x + 4$, általános megoldása $y = Ce^{2x} + 4xe^{2x} - 6x + 4$.

2. Oldjuk meg az $y' - 3y = \operatorname{sh} 3x$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: Ha a zavarófüggvény, vagy annak valamelyik tagja hiperbolikus függvény, azt érdemes átírni exponenciális alakba, hogy az esetleges rejtett rezonanciát észrevegyük. A differenciálegyenlet tehát $y' - 3y = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$. A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = Ce^{3x}$, ami rezonanciában van a zavaró függvény első tagjával. A próbafüggvény $y_p = Axe^{3x} + Be^{-3x}$, deriváltja $y_p' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} - 3Be^{-3x}$. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe és a megfelelő együtthatókat összehasonlítva $A = \frac{1}{2}$ és $B = \frac{1}{4}$ adódik, azaz a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, $y_p = \frac{1}{2}xe^{3x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$.
   A differenciálegyenlet általános megoldása: $y = Ce^{3x} + \frac{1}{2}xe^{3x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$.

7.3.5. Feladatok

1. Rajzolja fel a következő differenciálegyenletekhez tartozó iránymezőt! (Célszerű az y' értékét rögzíteni és meghatározni azon pontok halmazát, amelyekhez ez az érték tartozik. Néhány kiválasztott pontban megrajzoljuk a vektort, majd újabb y' értéket választva az eljárást megismételjük. A módszer kézi ábrázolás esetén hatékony, géppel történő ábrázolás esetén egymásba ágyazott ciklusokkal érdemes dolgozni.)

(a) $y' = x$,
(b) $y' = y$,
(c) $y' = 2x - y$,
(d) $y' = x + y$,
(e) $y' = xy$,
(f) $y' = x^2 - y$.

2. Határozza meg a következő, közvetlen integrálással megoldható differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y' = 2x^2 - 6x$,
(b) $y' = \cos x$,
(c) $y' = e^{3x+1} - e^{2x+3}$,
(d) $y' = x + \ln x$,
(e) $y'' = 1 - x$,
(f) $y'' = \sin \dfrac{x}{2}$,
(g) $y'' = \sqrt{2x-1}$,
(h) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
(i) $y''' = 2$.

3. Határozza meg a differenciálegyenletek azon partikuláris megoldását, amely kielégíti a megadott feltételt!

(a) $y' = 2x - 3, \quad y(1) = -3$,
(b) $y' = \dfrac{3}{e^{2x}}, \quad y(0) = -1$,
(c) $y' = \sin 2x - 2\cos 2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$,
(d) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \quad y(2) = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Határozza meg a differenciálegyenletek azon partikuláris megoldását, amely kielégíti a megadott feltételeket!

(a) $y'' = -\dfrac{2x^2+1}{x^2}, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 1$,
(b) $y'' = \cos^2 x, \quad y(0) = \dfrac{7}{8}, \quad y'(0) = -2$,
(c) $y'' = e^x + \dfrac{3}{x^2+4}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$.

5. Oldja meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenleteket!

(a) $y' = y$,
(b) $y' = y^2$,
(c) $y' = \dfrac{y}{x}$,
(d) $y' = \dfrac{x}{y}$,
(e) $y' = x^2 y$,
(f) $y' = \dfrac{y}{x^2+1}$,
(g) $y' = (y+2)(x-1)$,
(h) $xy' = y^2 - 4$,
(i) $yy' = e^{x-3}$.

6. Oldja meg a következő kezdeti érték problémákat!

(a) $y' = y^2(x+2), \quad y(0) = 1$,
(b) $y' = \dfrac{xy}{x^2+2}, \quad y(0) = \sqrt{2}$,
(c) $y' = y \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 2$.

7. Határozza meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y' + \dfrac{y}{x} = 0,$

(b) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{4x+1}{x},$

(c) $xy' + 2y = 0,$

(d) $xy' + 2y = 3x\cos x + 6\sin x,$

(e) $y' - \dfrac{3y}{x^2} = \dfrac{1}{x^2},$

(f) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$

(g) $xy' + y = e^x \sin 2x$

(h) $y' - \dfrac{2xy}{x^2+9} = 4x(x^2+9)$

8. Határozza meg a következő elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek általános megoldását! A partikuláris megoldások előállításához használjon próbafüggvény módszert! Figyeljen az esetleges rezonanciára!

(a) $y' - 3y = -3x^2 - 4x + 5,$

(b) $y' - 3y = -3x^2 - 7x,$

(c) $2y' + y = 5e^{2x},$

(d) $2y' + y = -17\sin 2x,$

(e) $y' + 2y = 2x + \cos x + 2\sin x + 1,$

(f) $y' + 2y = 3e^{-2x}$

(g) $y' - y = xe^{2x}$

(h) $y' - y = 4xe^x$

9. Oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat!

(a) $y'\cos x + y\sin x = 2, \quad y(0) = 3,$

(b) $y' - 4xy = -8x^2 - 24x + 2, \quad y(0) = 8,$

(c) $y' - \dfrac{y}{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}, \quad y(0) = -1,$

(d) $y'\sqrt{1-x^2} - y = x + \sqrt{1-x^2}, \quad y(0) = 0,$

(e) $y' + y = x^2, \quad y(0) = 3,$

(f) $y' - 4y = 2e^{4x}, \quad y(0) = 6,$

(g) $3y' - y = -82\sin 3x, \quad y(0) = 8,$

(h) $y' - 3y = 4e^{3x} + 6x - 5, \quad y(0) = 3.$

10. Egy populáció egyedszámának növekedése egyenesen arányos az egyedszám pillanatnyi értékével, mégpedig az időt években kifejezve $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0{,}008 \cdot N$. Hány év alatt duplázódik meg a populáció egyedszáma?

7.4. Másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenletek általános alakja

$$F(x; y; y'; y'') = 0,$$

ahol F adott négyváltozós függvény, y az ismeretlen függvény és x a függvény változója. Általános megoldás a másodrendű differenciálegyenletekre nem ismeretes, de sok speciális esetre létezik egzakt megoldási módszer. Ebben a jegyzetben a továbbiakban az alkalmazások szempontjából fontos lineáris másodrendű differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

7.4.1. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

7.4.1. Definíció (Másodrendű lineáris differenciálegyenlet).
Egy differenciálegyenlet másodrendű lineáris, ha ekvivalens átalakításokkal az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

alakra hozható, ahol p, q és h adott egyváltozós valós függvények.

A fenti egyenletet az *másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakjának* nevezzük.

7.4.2. Tétel (A szuperpozíció elve). *Ha y_1 megoldása az $y''+p(x)y'+q(x)y=h_1(x)$ differenciálegyenletnek, és y_2 megoldása az $y''+p(x)y'+q(x)y=h_2(x)$-nek, akkor tetszőleges $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ együtthatók esetén $y_k=c_1y_1+c_2y_2$ lineáris kombinációjuk megoldása az*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=c_1h_1(x)+c_2h_2(x)$$

differenciálegyenletnek.

A bizonyítás hasonló, mint a 7.3.12. tétel esetén, sőt az is megmutatható, hogy a szuperpozíció elve bármilyen rendű lineáris differenciálegyenletre érvényes.

7.4.3. Következmény. *A 7.4.2. tétel következménye, hogy ha a másodrendű lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldáshoz hozzáadjuk az eredeti differenciálegyenlet egy paramétert nem tartalmazó partikuláris megoldását, akkor megkapjuk annak általános megoldását.*

A homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása

7.4.4. Tétel. *Ha az y_1 és y_2 függvények megoldásai az $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ differenciálegyenletnek, akkor tetszőleges $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ esetén $c_1y_1+c_2y_2$ lineáris kombinációjuk is megoldása ugyanennek a differenciálegyenletnek.*

Bizonyítás: A feltételek szerint teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{aligned} y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1 &= 0\\ y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletet c_1-gyel, a másodikat c_2-vel megszorozva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1y_1''+p(x)c_1y_1'+q(x)c_1y_1 &= 0\\ c_2y_2''+p(x)c_2y_2'+q(x)c_2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva, és figyelembe véve, hogy

$$c_1y_1''+c_2y_2''=(c_1y_1)''+(c_2y_2)''=(c_1y_1+c_2y_2)''$$

és

$$c_1y_1'+c_2y_2'=(c_1y_1)'+(c_2y_2)'=(c_1y_1+c_2y_2)',$$

a

$$(c_1y_1+c_2y_2)''+p(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+q(x)(c_1y_1+c_2y_2)=0$$

összefüggéshez jutunk, amiből az állítás következik. □

7.4.5. Példa. Az $x^2y''+xy'-y=0$ homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet két partikuláris megoldása $y_1=x$ és $y_2=\frac{1}{x}$.
Valóban y_1-et az $y_1'=1$ és $y_1''=0$ deriváltjaival együtt behelyettesítve a differenciálegyenletbe a bal oldal

$$x^2\cdot 0+x\cdot 1-x=0+x-x=0,$$

ami megegyezik a jobb oldallal.
Hasonlóan, ha y_2-t, az $y_2'=-\frac{1}{x^2}$ és $y_2''=\frac{2}{x^3}$ deriváltjaival együtt behelyettesítjük, akkor az egyenlet bal oldala

$$x^2\cdot\frac{2}{x^3}+x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0.$$

A 7.4.4. tétel szerint tehát a differenciálegyenletnek a $c_1x+\frac{c_2}{x}$ alakú függvények megoldásai. Észrevehetjük, hogy $c_1x+\frac{c_2}{x}$ a differenciálegyenlet általános megoldása, hiszen két független paramétert tartalmaz.

7.4.6. Megjegyzés. Két parciális megoldás lineáris kombinációiból nem mindig kapjuk meg az $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldását. A 7.4.5. példában szereplő differenciálegyenlet $y_1=x$ és $y_3=2x$ megoldásainak lineáris kombinációja $y_k=c_1x+2c_2x=(c_1+2c_2)x$. Ha bevezetjük a $c=c_1+2c_2$ jelölést, akkor a lineáris kombináció $y_k=cx$, amely csak egy független paramétert tartalmaz, tehát nem általános megoldása a differenciálegyenletnek. Mint az könnyen megsejthető, ennek oka az, hogy $y_1=x$ és $y_3=2x$ megkaphatók egymásból konstanssal valós szorzással, azaz „nem lényegesen különböznek" egymástól. Természetesen az $y_k=cx$-ből nem áll elő a differenciálegyenlet összes megoldása, pl. $y_2=\frac{1}{x}$ sem, bármilyen valós számot is írjunk a c együttható helyére.

7.4.7. Definíció (Lineárisan független függvények). Az I intervallumon értelmezett y_1 és y_2 függvények *lineárisan függetlenek* egymástól, ha $c_1y_1+c_2y_2$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$ lineáris kombinációjuk csak abban az esetben a konstans 0 függvény, ha $c_1=c_2=0$.
Ha y_1 és y_2 nem lineárisan függetlenek, akkor *lineárisan összefüggők.*

7.4.8. Tétel. *Ha az I intervallumon értelmezett y_1 és y_2 függvények egy homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásai, akkor a*

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}$$

determináns vagy megegyezik a konstans 0 függvénnyel I-n, vagy az intervallum egyetlen pontjában sem vesz fel 0-t.

A W determinánst *Wronski-determinánsnak* nevezzük.

Bizonyítás: A determináns értéke $W=y_1y_2'-y_2y_1'$, deriváltja pedig

$$W'=(y_1y_2'-y_2y_1')'=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_2'y_1'-y_2y_1''=y_1y_2''-y_2y_1''.$$

Szorozzuk meg az

$$\begin{aligned} y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1 &= 0\\ y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2 &= 0\end{aligned}$$

egyenletek közül az elsőt y_2-vel, a másodikat y_1-gyel, majd az így kapott

$$\begin{aligned} y_2y_1''+p(x)y_2y_1'+q(x)y_2y_1 &= 0 \\ y_1y_2''+p(x)y_1y_2'+q(x)y_1y_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletek közül vonjuk ki a felsőt az alsóból. Így az

$$y_1y_2''-y_2y_1''+p(x)\,(y_1y_2'-y_2y_2')=0,$$

azaz

$$W'+p(x)W=0$$

homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletet kapjuk. Ennek megoldása $W=Ce^{-P(x)}$, ahol a P függvény p egy primitív függvénye. Mivel tetszőleges x valós számra $e^{-P(x)}>0$, W csak úgy vehet fel 0 értéket az I intervallumon, ha $C=0$, de akkor W a konstans 0 függvény. □

7.4.9. Tétel. *Ha az I intervallumon értelmezett y_1 és y_2 függvények egy homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásai, akkor lineáris függetlenségük szükséges és elégséges feltétele, hogy a Wronski-determinánsnak ne legyen zérushelye az intervallumon, azaz tetszőleges $x\in I$ esetén $W(x)\neq 0$ teljesüljön.*

Bizonyítás: Tegyük fel, először, hogy a Wronski-determináns nem tűnik el az intervallumon. Keressük az y_1 és y_2 függvényekhez azokat a $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ együtthatókat, amelyekre $c_1y_1+c_2y_2=0$ teljesül. Mivel két ismeretlenünk van, ezért szükségünk van még egy egyenletre, amit az összefüggés mindkét oldalának deriválásával nyerünk. Így a

$$\begin{aligned} c_1y_1+c_2y_2 &= 0 \\ c_1y_1'+c_2y_2' &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelynek elődeterminánsa éppen a Wronski-determináns. Egy tetszőleges $x\in I$ számot rögzítve az egyenletrendszer együtthatói az $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_1'(x)$ és $y_2'(x)$ valós számok, és c_1,c_2 a két ismeretlen. A lineáris algebrából ismeretes, hogy ha egy ilyen egyenletrendszer elődeterminánsa nem 0, akkor egyetlen megoldása a triviális megoldás, azaz $c_1=c_2=0$. Ebből következik, hogy az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek.
Most tegyük fel, hogy az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek, akkor egyikük sem lehet a konstans 0 függvény, így képezhető az $\frac{y_2}{y_1}$ hányados. Ennek deriváltja

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}$$

nem lehet konstans 0, mert akkor $\frac{y_2}{y_1}=c$ lenne, ahol $c\in\mathbb{R}$ konstans. Átrendezve $cy_1-y_2=0$ adódna, ami nem lehetséges y_1 és y_2 lineáris függetlensége miatt. Ez azt jelenti, hogy van olyan $x\in I$, amelyre $W=y_1y_2'-y_2y_1'\neq 0$, de ekkor a 7.4.8. tétel szerint W-nek nincs zérushelye az I intervallumon. □

7.4.10. Tétel. *Ha y_1 és y_2 két lineárisan független partikuláris megoldása az*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek, akkor a differenciálegyenlet minden y megoldása előáll $y=c_1y_1+c_2y_2$ alakban alkalmas $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ együtthatók segítségével.

Bizonyítás: Tekintsük a

$$\begin{aligned} g_1y_1+g_2y_2 &= y \\ g_1y_1'+g_2y_2' &= y' \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol g_1 és g_2 ismeretlen egyváltozós függvények. Mivel az egyenletrendszer ődeterminánsa, a Wronski-determináns a 7.4.9. tétel szerint nem 0, az egyenletrendszer megoldása egyértelmű. Ez azt jelenti, hogy létezik pontosan egy g_1, g_2 függvénypár, amelyre $g_1y_+g_2y_2$ éppen y-nal egyenlő. Azt kell megmutatnunk, hogy g_1 és g_2 konstans függvények.
Az egyenletek mindkét oldalát deriválva x szerint a

$$\begin{aligned} g_1'y_1+g_1y_1'+g_2'y_2+g_2y_2' &= y' \\ g_1'y_1'+g_1y_1''+g_2'y_2'+g_2y_2'' &= y'' \end{aligned}$$

egyenletekhez jutunk. Az első egyenletből a $g_1y_1'+g_2y_2' = y'$ egyenletet kivonva kapjuk, hogy

$$\boxed{g_1'y_1+g_2'y_2 = 0.}$$

Mivel y megoldása az $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ differenciálegyenletnek, ezért

$$g_1'y_1'+g_1y_1''+g_2'y_2'+g_2y_2''+p(x)\left(g_1y_1'+g_2y_2'\right)+q(x)\left(g_1y_1+g_2y_2\right) = 0.$$

Átrendezve:

$$g_1'y_1'+g_2'y_2'+g_1\left(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right)+g_2\left(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right) = 0.$$

Mivel y_1 és y_2 is megoldásai a differenciálegyenletnek, az egyenlet utolsó két tagja 0, tehát

$$\boxed{g_1'y_1'+g_2'y_2' = 0.}$$

A két bekeretezett egyenlet egy egyenletrendszert alkot, amelynek ődeterminánsa, a Wronski-determináns nem 0. Az egyenletrendszer megoldása tehát egyértelmű, és az éppen a triviális megoldás, azaz g_1' és g_2' mindegyike konstans 0. Ekkor azonban $g_1 = c_1$ és $g_2 = c_2$ konstans függvények, tehát y valóban előáll $c_1y_1+c_2y_2$ alakban, ami azt jelenti, hogy az általános megoldás ebben az esetben valóban tartalmazza az összes megoldást.□

A homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának meghatározásához tehát elég két független partikuláris megoldás ismerete.

Módszer a második partikuláris megoldás meghatározására. Ha az

$$y''+p(x)y'+q(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek y_1 olyan megoldása, ami a vizsgált I intervallumban sehol sem nulla, akkor további független megoldást kaphatunk, ha azt $y_2 = uy_1$ alakban keressük, ahol u egyváltozós függvénye x-nek.

Bizonyítás: Nyilván $y_2' = u'y_1 + uy_1'$, és $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe az

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(x)\left(u'y_1 + uy_1'\right) + q(x)uy_1 = 0$$

összefüggést kapjuk. Átrendezés után ez az

$$u''y_1 + u'\left(2y_1' + p(x)y_1\right) + u\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) = 0$$

alakot ölti. Az utolsó tag 0, mivel y_1 megoldása a differenciálegyenletnek, így

$$u''y_1 + u'\left(2y_1' + p(x)y_1\right) = 0.$$

A $z = u'$ jelölés bevezetésével ebből a

$$z' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right)z = 0$$

homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenlet adódik, amelynek általános megoldása

$$z = u' = Ce^{-2\ln y_1 - P(x)} = \frac{Ce^{-P(x)}}{y_1^2}.$$

A kapott kifejezésben a C értékét helyettesíthetjük bármilyen nem 0 konstanssal, pl. $C =$ $= 1$-gyel, hiszen csak egyetlen megfelelő u függvényt kell meghatároznunk. Amennyiben az $u' = \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2}$ függvény egy u primitív függvényét elő tudjuk állítani, akkor y_2 innen már egyszerűen meghatározható.

Megmutatjuk még, hogy y_1 és a fent kiszámított y_2 megoldások lineárisan függetlenek. Ehhez elég bizonyítani, hogy a Wronski-determináns nem zérus. Valóban:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & uy_1 \\ y_1' & u'y_1 + uy_1' \end{vmatrix} = u'y_1^2 = \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2} \cdot y_1^2 = e^{-P(x)} \neq 0. \qquad \square$$

7.4.11. Példa. Határozzuk meg az $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását! A megoldáshoz vegyük figyelembe, hogy az $y_1 = x$ függvény partikuláris megoldása a differenciálegyenletnek, ami behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető.

Megoldás: Az egyenlet egy másik, az előzőtől lineárisan független partikuláris megoldását $y_2 = ux$ alakban kereshetjük. Behelyettesítve ezt a differenciálegyenletbe a

$$x^2(2u' + u''x) - 3x(u + u'x) + 3ux = 0$$

összefüggést kapjuk. Rendezéssel adódik, hogy:

$$u''x - u' = 0.$$

Bevezetve a $z = u'$ jelölést kapjuk, hogy

$$z' - \frac{1}{x} \cdot z = 0,$$

melynek általános megoldása $z = C_1e^{\ln x} = C_1x$. Innen $u = \frac{C_1x^2}{2} + C_2$ alakú függvény lehet. $C_1 = 2$ és $C_2 = 0$ választással $u = x^2$, azaz $y_2 = x^3$. A differenciálegyenlet általános megoldása $y = c_1x + c_2x^3$.

A másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet megoldásához tehát általában elég annak egy partikuláris megoldását ismerni. Sajnos azonban nincs olyan általános módszer, amelynek segítségével az első partikuláris megoldást előállíthatnánk. Abban a speciális esetben azonban, amikor az egyenlet állandó együtthatós is, mindig meg tudjuk határozni a megoldást.

Állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek Az állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakja

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$.

7.4.12. Definíció (Karakterisztikus egyenlet). Az $ay'' + by' + cy = 0$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletén* az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

másodfokú egyenletet értjük.

7.4.13. Tétel. *Ha a $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ szám a karakterisztikus egyenlet gyöke, akkor az $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ függvény partikuláris megoldása az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletnek.*

Bizonyítás: Helyettesítsük az y_1 függvényt annak $y_1' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$ és $y_1'' = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$ deriváltjaival együtt a differenciálegyenletbe.

$$\begin{aligned} a\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + b\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + ce^{\lambda_1 x} &= 0 \\ e^{\lambda_1 x}\left(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right) &= 0 \end{aligned}$$

A zárójelben levő kifejezés értéke 0, hiszen λ_1 megoldása a karakterisztikus egyenletnek, így az egyenlőség azonosan teljesül, ami állításunkat igazolja. □

7.4.14. Tétel. *Ha λ_1 és λ_2 a karakterisztikus egyenletnek két egymástól különböző valós gyöke, akkor az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ és $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ partikuláris megoldásai lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás: A Wronski-determináns

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0,$$

ami igazolja az állítás helyességét. □

7.4.15. Következmény. *Ha az állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének két különböző valós gyöke van (λ_1 és λ_2), akkor általános megoldása $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ független paraméterek.*

7.4.16. Példa. Határozzuk meg az $y'' + y' - 6y = 0$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Először oldjuk meg a $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ karakterisztikus egyenletet.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}.$$

Innen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. A differenciálegyenlet általános megoldása tehát $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$.

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa $b^2-4ac=0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek csak egy valós megoldása van, illetve szokás azt is mondani, hogy a két valós gyök egybeesik: $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{b}{2a}$. A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_1=e^{\lambda_1 x}$. A differenciálegyenlet megoldásához szükség van egy másik, az előzőtől független partikuláris megoldásra.

7.4.17. Tétel. *Ha az $ay''+by'+cy=0$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének csak egy valós λ_1 gyöke van, akkor az $y_2=xe^{\lambda_1 x}$ függvény a differenciálegyenletnek olyan partikuláris megoldása, amely lineárisan független az $y_1=e^{\lambda_1 x}$ partikuláris megoldástól.*

Bizonyítás: Helyettesítsük be az y_2-t annak $y_2'=e^{\lambda_1 x}+\lambda_1 xe^{\lambda_1 x}$ és $y_2''=2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+\lambda_1^2 xe^{\lambda_1 x}$ deriváltjaival együtt a differenciálegyenletbe:

$$a\left(2\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+\lambda_1^2 xe^{\lambda_1 x}\right)+b\left(e^{\lambda_1 x}+\lambda_1 xe^{\lambda_1 x}\right)+cxe^{\lambda_1 x}=0.$$

Átrendezve:

$$xe^{\lambda_1 x}\left(a\lambda_1^2+b\lambda_1+c\right)+e^{\lambda_1 x}\left(2a\lambda_1+b\right)=0.$$

Az első tag 0, hiszen λ_1 gyöke a karakterisztikus egyenletnek, így a zárójeles tényező 0. A második tag ugyancsak 0, hiszen $2a\lambda_1+b=2a\cdot\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+b=-b+b=0$, így a két oldal azonosan egyenlő, tehát y_2 megoldása a differenciálegyenletnek.
Az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek, hiszen a Wronski-determináns nem zérus:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x}+\lambda_1 xe^{\lambda_1 x} \end{vmatrix}=e^{2\lambda_1 x}\neq 0.$$ □

7.4.18. Megjegyzések.

- A bizonyítás során kihasználtuk, hogy a karakterisztikus egyenletnek csak egy valós gyöke van, azaz annak diszkriminánsa 0. Ha λ_1 és λ_2 a karakterisztikus egyenlet két különböző gyöke, akkor $xe^{\lambda_1 x}$ nem megoldása a differenciálegyenletnek, mert $\lambda_1\neq-\frac{b}{2a}$, így behelyettesítéssel a kapott

  $$xe^{\lambda_1 x}\left(a\lambda_1^2+b\lambda_1+c\right)+e^{\lambda_1 x}\left(2a\lambda_1+b\right)=0$$

  egyenlet bal oldalán csak az első tag 0, a második nem, tehát a két oldal nem egyezik meg.

- A 7.4.17. tételben egyszerűen közöltük, hogy az $y_2=xe^{\lambda_1}$ függvény választható második partikuláris megoldásnak. Ez a választás nem magától értetődő, de a korábban ismertetett módszer szerint, a második partikuláris megoldást $y_2=uy_1$ alakban keresve is ezt kapjuk.

7.4.19. Példa. Oldjuk meg az $y''-10y'+25y=0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-10\lambda+25=0$. A bal oldal teljes négyzet, az egyenlet a $(\lambda-5)^2=0$ alakra hozható. Innen már világos, hogy $\lambda_1=\lambda_2=5$. A differenciálegyenlet általános megoldása $y=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$.

A 7.4.21. tétel kimondása előtt emlékeztetünk arra, hogy ha a $z \in \mathbb{C}$ szám gyöke egy valós együtthatós algebrai egyenletnek, akkor annak $\bar{z}$ (a z konjugáltja) is gyöke. Itt a továbbiakban csak a másodfokú egyenletekre vonatkozó speciális esetre lesz szükségünk. Az $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós gyöke, ha $b^2-4ac<0$. Ekkor létezik olyan $d \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $b^2-4ac=-d^2$, azaz

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-d^2}}{2a}=\frac{-b\pm dj}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{d}{2a}\cdot j.$$

Ha bevezetjük az $\alpha=-\frac{b}{2a}$ és a $\beta=\frac{d}{2a}$ jelöléseket, akkor a másodfokú egyenlet két gyöke $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta j$ alakban is felírható. Nyilvánvaló, hogy a két gyök egymás komplex konjugáltja.

7.4.20. Lemma. *Ha az $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ másodfokú egyenlet gyökei a $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta j$ komplex számok, akkor*

$$a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c=0,$$

és

$$2a\alpha\beta+b\beta=0.$$

Bizonyítás: Helyettesítsük be a λ_1 gyököt az egyenletbe!

$$\begin{aligned} a(\alpha+\beta j)^2+b(\alpha+\beta j)+c &= 0 \\ a(\alpha^2+2\alpha\beta j-\beta^2)+b(\alpha+\beta j)+c &= 0 \\ \left(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c\right)+(2a\alpha\beta+b\beta)\,j &= 0 \end{aligned}$$

Mivel a két oldal megegyezik, a bal oldal is 0. Ez azt jelenti, hogy a bal oldalon álló komplex szám valós része is és a képzetes része is 0, ami a igazolja az állítást. □

7.4.21. Tétel. *Ha az $ay''+by'+cy=0$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei a $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta j$ komplex számok, ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ és $\beta\neq 0$, akkor az $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ és $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ függvények lineárisan független partikuláris megoldásai a differenciálegyenletnek.*

Bizonyítás: Behelyettesítéssel igazoljuk, hogy y_1 partikuláris megoldása a differenciálegyenletnek:

$$\begin{aligned} ay_1''+by_1'+cy_1 &= 0 \\ a\left(\alpha^2e^{\alpha x}\cos\beta x-2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x-\beta^2e^{\alpha x}\cos\beta x\right)+ & \\ +b\left(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x\right)+ce^{\alpha x}\cos\beta x &= 0 \\ e^{\alpha x}\cos\beta x\left(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c\right)-e^{\alpha x}\sin\beta x\,(2a\alpha\beta+b\beta) &= 0 \end{aligned}$$

A 7.4.20. lemma alapján a bal oldalon a zárójeles kifejezés mindkét tagban 0, így y_1 kielégíti az egyenletet.
Helyettesítsük be most az y_2 függvényt.

$$\begin{aligned} ay_2''+by_2'+cy_2 &= 0 \\ a\left(\alpha^2e^{\alpha x}\sin\beta x+2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta^2e^{\alpha x}\sin\beta x\right)+ & \\ +b\left(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x\right)+ce^{\alpha x}\sin\beta x &= 0 \\ e^{\alpha x}\sin\beta x\left(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c\right)+e^{\alpha x}\cos\beta x\,(2a\alpha\beta+b\beta) &= 0 \end{aligned}$$

Megint, a 7.4.20. lemma alapján a bal oldalon a zárójeles kifejezés mindkét tagban 0, így y_2 partikuláris megoldása a differenciálegyenletnek.
Igazolnunk kell még, hogy y_1 és y_2 lineárisan függetlenek. Ehhez azt kell megmutatni, hogy a Wronski-determináns nem 0.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x + \beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

7.4.22. Következmény. *Ha az $ay''+by'+cy=0$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei a $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta j$ $(\beta\neq 0)$ nem valós komplex számok, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása*

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right).$$

7.4.23. Megjegyzés. Ha a karakterisztikus egyenlet megoldása $\lambda_{1,2} = \pm\beta j$ alakú, ahol $\beta\neq 0$, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása az $y=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$ függvény, amely csak trigonometrikus tagokat tartalmaz.

7.4.24. Példák.

1. Oldjuk meg az $y''+4y=0$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+4=0$, amelynek megoldásai az $\lambda_{1,2}=\pm 2j$ tiszta képzetes számok.

   A differenciálegyenlet általános megoldása $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$.

2. Oldjuk meg az $y''-4y'+13y=0$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-4\lambda+13=0$. Ennek gyökei:

   $$\lambda_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 13}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{-36}}{2} = \frac{4\pm 6j}{2} = 2\pm 3j.$$

   A differenciálegyenlet általános megoldása $y = e^{2x}\left(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x\right)$.

3. A pontszerű test harmonikus rezgőmozgását olyan erő hozza létre, amely a test kitérésével egyenesen arányos és ellentétes irányú. Képlettel $F=-Dx$, ahol F az erő, x a kitérés, $D>0$ pedig az úgynevezett rugóállandó vagy direkciós állandó. Newton II. törvénye szerint $F=ma$, ahol a a gyorsulás. A gyorsulás-idő függvény megegyezik a kitérés-idő függvény második deriváltjával, azaz $a=\ddot{x}$. Ebből az $m\ddot{x}=-Dx$ állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletet kapjuk. Átrendezéssel adódik, hogy

   $$\ddot{x} + \frac{D}{m}\cdot x = 0,$$

   amit az $\omega^2 = \frac{D}{m}$ jelöléssel így is írhatunk:

   $$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

   Határozzuk meg a harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvényét, ha a $t=0$ időpillanatban a kitérés $x(0)=0$, a test sebessége pedig $v(0)=\dot{x}(0)=v_0$!

Megoldás: A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2+\omega^2=0$, amelynek gyökei $\lambda_{1,2}=\pm\omega j$, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$$

Az első feltétel szerint

$$0=x(0)=c_1\cos 0+c_2\sin 0=c_1\cdot 1+c_2\cdot 0=c_1,$$

tehát $x=c_2\sin\omega t$. Ezt differenciálva t szerint $\dot{x}=c_2\omega\cos\omega t$. A második feltétel szerint

$$v_0=v(0)=\dot{x}(0)=c_2\omega\cos 0=c_2\omega,$$

így $c_2=\frac{v_0}{\omega}$. Tehát a mozgás kitérés-idő függvénye $x=\frac{v_0}{\omega}\cdot\sin\omega t$, vagy az $A=\frac{v_0}{\omega}$ jelölés bevezetésével a fizikai tanulmányokból ismert $x=A\sin\omega t$.

4. Tegyük fel, hogy egy pontszerű testre a kitéréssel egyenesen arányos, de ellentétes irányú $F_1=-Dx$ $(D>0)$ erő mellett egy közegellenállásból származó erő is hat, amely egyenesen arányos a test sebességével, és azzal ellentétes irányú, azaz $F_2=-k\dot{x}$ $(k>0)$. Mit mondhatunk a kitérés-idő függvényről?

   Megoldás: Newton II. törvénye alapján

$$m\ddot{x}=F_1+F_2=-Dx-k\dot{x}.$$

   Rendezés után az

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+Dx=0$$

   állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlethez jutunk, amelynek karakterisztikus egyenlete $m\lambda^2+k\lambda+D=0$. A differenciálegyenlet megoldása függ a karakterisztikus egyenlet k^2-4mD diszkriminánsának előjelétől.

   Ha $k^2-4mD>0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4mD}}{2m}.$$

   Mivel $\sqrt{k^2-4mD}<\sqrt{k^2}=k$, ezért mindkét gyök negatív, tehát a kitérés-idő függvény két szigorúan monoton csökkenő exponenciális függvény szuperpozíciója:

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}.$$

   Egy lehetséges partikuláris megoldás grafikonja a 7.5. ábrán látható.

   Ha $k^2-4mD=0$, akkor a karakterisztikus egyenlet egyetlen valós gyöke $\lambda_1=-\frac{k}{2m}<0$. A differenciálegyenlet általános megoldása ebben az esetben

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2te^{\lambda_1 t}.$$

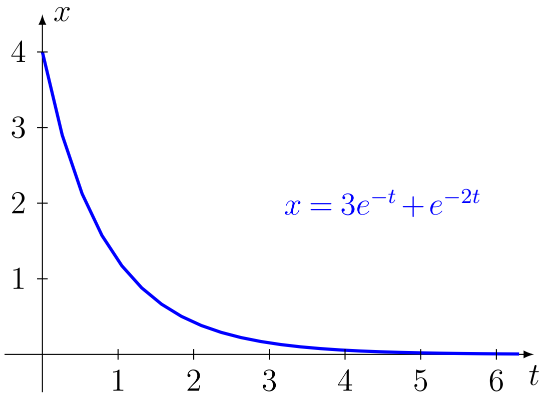
   Egy lehetséges eset grafikonja a 7.6. ábrán látható.

   Ha $k^2-4mD<0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke, $\lambda_{1,2}=\alpha\pm$ $\pm\beta j$ komplex gyökeinek valós része $\alpha=-\frac{k}{2m}<0$. A differenciálegyenlet általános megoldása ilyenkor

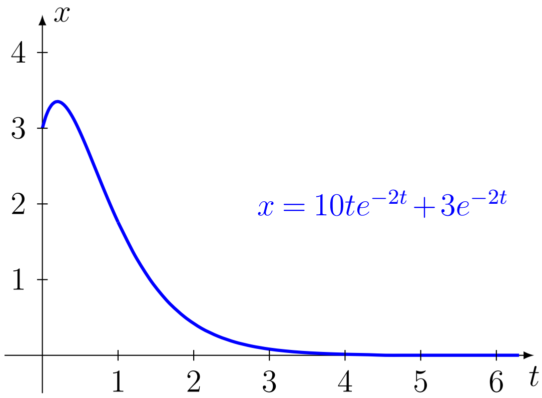
$$x=e^{\alpha t}\left(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t\right).$$

   Egy speciális eset grafikonját a 7.7. ábrán láthatjuk.

   Szokás azt mondani, hogy a második típusú csillapítás mértéke kritikus, az első típus csillapítása a kritikusnál nagyobb, míg a harmadik típus esetén a csillapítás a kritikusnál kisebb.



7.5. ábra. Csillapodó rezgés 1. típus



7.6. ábra. Csillapodó rezgés 2. típus

Állandó együtthatós inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek
Az állandó együtthatós inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek megoldásához a 7.4.3. következmény szerint szükségünk van a megfelelő homogén egyenlet általános megoldására, és az eredeti inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldására. Az utóbbit, hasonlóan, mint az elsőrendű differenciálegyenleteknél, megkaphatjuk az állandók variálásának módszerével, vagy alkalmas zavarófüggvény esetén próbafüggvény módszerrel. Mivel csak állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletekkel foglalkozunk, ezért ebben a jegyzetben a továbbiakban mindig a próbafüggvény módszert alkalmazzuk.

7.4.25. Példák.

1. Oldjuk meg az $y'' - 2y' - 3y = -12x^2 - 13x - 14$ differenciálegyenletet!

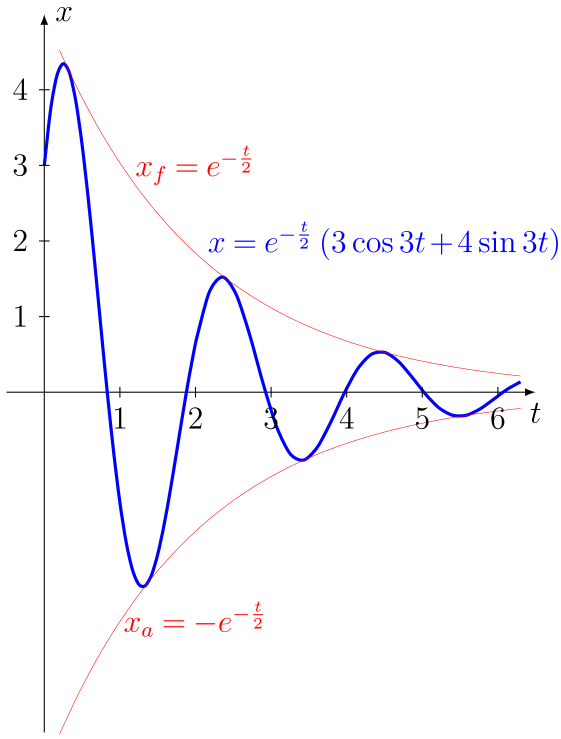
   Megoldás: Az $y'' - 2y' - 3y = 0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

   $$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

   amelynek gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$. A homogén egyenlet általános megoldása tehát $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$.

   Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az $y_p = Ax^2 + Bx + C$ alakban keressük. Ha ezt $y_p' = 2Ax + B$ és $y_p'' = 2A$ deriváltjaival együtt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, akkor a

   $$2A - 2(2Ax + B) - 3\left(Ax^2 + Bx + C\right) = -12x^2 - 13x - 14$$



7.7. ábra. Csillapodó rezgés 3. típus

összefüggést kapjuk. Az ismeretlen együtthatók értéke meghatározható a megfelelő tagok összehasonlításával:

Az x^2 együtthatója $-3A = -12 \Rightarrow A = 4$,
az x együtthatója $-4A - 3B = -13 \Rightarrow -3B = 3 \Rightarrow B = -1$,
a konstansok $2A - 2B - 3C = -14 \Rightarrow -3C = -24 \Rightarrow B = 8$.

A differenciálegyenlet partikuláris megoldása tehát $y_p = 4x^2 - x + 8$, általános megoldása pedig $y = y_h + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + 4x^2 - x + 8$.

2. Oldjuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 50\sin x$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Az $y'' - 6y' + 9y = 0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

amelynek egyetlen valós megoldása $\lambda_1 = 3$. A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = A\cos x + B\sin x$ alakban kereshető. Ezt $y_p' = -A\sin x + B\cos x$ és $y_p'' = -A\cos x - B\sin x$ deriváltjaival együtt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe:

$$-A\cos x - B\sin x - 6\,(-A\sin x + B\cos x) + 9\,(A\cos x + B\sin x) = 50\sin x.$$

A $\cos x$ együtthatója $8A - 6B = 0$, a $\sin x$ együtthatója $6A + 8B = 50$. A kapott egyenletrendszer megoldása $A = 3$, $B = 4$, így a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = 3\cos x + 4\sin x$.

A differenciálegyenlet általános megoldása $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + 3\cos x + 4\sin x$.

3. Oldjuk meg az $y'' - 10y' + 29y = 8e^{3x} + 174x - 379$ differenciálegyenletet! Határozzuk meg a differenciálegyenlet $y(0) = -8$, $y'(0) = 19$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását!

   Megoldás: Az $y'' - 10y' + 29y = 0$ homogén egyenlet $\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai $\lambda_{1,2} = 5 \pm 2j$. A homogén egyenlet általános megoldása $y_h = e^{5x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

   Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = Ae^{3x} + Bx + C$ alakban kereshető. Helyettesítsük be y_p-t és $y_p' = 3Ae^{3x} + B$, $y_p'' = 9Ae^{3x}$ deriváltjait a differenciálegyenletbe.

$$9Ae^{3x} - 10\left(3Ae^{3x} + B\right) + 29\left(Ae^{3x} + Bx + C\right) = 8e^{3x} + 174x - 379$$

   Az e^{3x} együtthatója $8A = 8 \Rightarrow A = 1$,
   az x együtthatója $29B = 174 \Rightarrow B = 6$,
   a konstansok, $-10B + 29C = -379 \Rightarrow 29C = -319 \Rightarrow C = -11$,
   tehát a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = e^{3x} + 6x - 11$.

   A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = e^{5x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{3x} + 6x - 11.$$

   Mindkét oldalt differenciálva kapjuk, hogy

$$y' = 5e^{5x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{5x}(-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x) + 3e^{3x} + 6.$$

   A kezdeti feltételek behelyettesítésével a

$$\begin{aligned} c_1 + 0 + 1 + 0 - 11 &= -8 \\ 5c_1 + 0 + 0 + 2c_2 + 3 + 6 &= 19 \end{aligned}$$

   egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $c_1 = 2$ adódik, amit a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy $c_2 = 0$. A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldása tehát, $y_0 = 2e^{5x} \cos 2x + e^{3x} + 6x - 11$.

Hasonlóan, mint az elsőrendű differenciálegyenletek esetében, a partikuláris megoldás előállítása során ügyelnünk kell a rezonancia lehetőségére.

7.4.26. Példák.

1. Oldjuk meg az $y'' + 4y' - 12y = 16e^{2x} - 36x^2 + 2$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: Az $y'' + 4y' - 12y = 0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0,$$

   amelynek megoldásai $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -6$. Ennek alapján a homogén egyenlet általános megoldása $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-6x}$.

   Ennek első tagja rezonanciában van a zavarófüggvény első tagjával, mivel csak konstans szorzóban különböznek, így a próbafüggvény $y_p = Axe^{2x} + Bx^2 + Cx + D$. A próbafüggvényt és deriváltjait a differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 2B + 4\left(Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 2Bx + C\right) - \\ - 12\left(Axe^{2x} + Bx^2 + Cx + D\right) = 16e^{2x} - 36x^2 + 2.$$

Rendezés után:

$$8Ae^{2x}-12Bx^2+(8B-12C)x+2B+4C-12D=16e^{2x}-36x^2+2.$$

Az e^{2x} együtthatója $8A=16\Rightarrow A=2$,
az x^2 együtthatója $-12B=-36\Rightarrow B=3$,
az x együtthatója $8B-12C=0\Rightarrow C=2$,
a konstans tag $2B+4C-12D=2\Rightarrow\Rightarrow D=1$.

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p=2xe^{2x}+3x^2+2x+1$, általános megoldása $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-6x}+2xe^{2x}+3x^2+2x+1$.

2. Oldjuk meg az $y''+4y=8\cos 2x-4\sin 2x$ differenciálegyenletet!

   Megoldás: Az $y''+4y=0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

   $$\lambda^2+4=0,$$

   amelynek megoldásai $\lambda_{1,2}=\pm 2j$, így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

   A partikuláris megoldás meghatározásához a rezonanciák miatt az $y_p=Ax\cos 2x+$ $+Bx\sin 2x$ próbafüggvényből indulunk ki, amelyet deriváltjaival együtt behelyettesítve a differenciálegyenletbe, a

   $$-4A\sin 2x-4Ax\cos 2x+4B\cos 2x-4Bx\sin 2x+4\left(Ax\cos 2x+Bx\sin 2x\right)=$$
   $$=8\cos 2x-4\sin 2x$$

   összefüggéshez jutunk. A beszorzás és összevonások után a

   $$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=8\cos 2x-4\sin 2x$$

   ekvivalens egyenlethez jutunk.
   Az együtthatók összehasonlításával adódik, hogy $A=1$ és $B=2$, azaz a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p=x\cos 2x+2x\sin 2x$.

   A differenciálegyenlet általános megoldása:

   $$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+x\cos 2x+2x\sin 2x.$$

3. Oldjuk meg az $y''-2y'+y=10e^x-4\cos x$ differenciálegyenletet! Határozzuk meg a differenciálegyenlet $y(0)=4$ és $y'(0)=3$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását!

   Megoldás: Az $y''-2y'+y=0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

   $$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

   amelynek egyetlen valós megoldása $\lambda_1=1$, ezért a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $y_h=c_1e^x+c_2xe^x$.

   A partikuláris megoldás meghatározásához próbafüggvény módszert alkalmazunk. A zavarófüggvény alapján a próbafüggvény $y_p{=}Ae^x{+}B\cos x{+}C\sin x$ lenne, azonban

Ae^x rezonanciában van y_h első tagjával. Ha a próbafüggvényt módosítjuk $y_p = Axe^x + B\cos x + C\sin x$-re, akkor az első tag már nincs rezonanciában c_1e^x-szel, viszont rezonanciában van a homogén egyenlet általános megoldásának második tagjával, c_2xe^x-szel. Emiatt a próbafüggvényt ismét módosítanunk kell, ezúttal $y_p = Ax^2e^x + B\cos x + C\sin x$-re ami már rezonanciamentes. Helyettesítsük be a próbafüggvényt deriváltjaival együtt a differenciálegyenletbe.

$$\begin{aligned}2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - B\cos x - C\sin x -&\\ -2\left(2Axe^x + Ax^2e^x - B\sin x + C\cos x\right) +&\\ + Ax^2e^x + B\cos x + C\sin x = 10e^x - 4\cos x&\end{aligned}$$

Beszorzás és összevonás után kapjuk a

$$2Ae^x - 2C\cos x + 2B\sin x = 10e^x - 4\cos x$$

ekvivalens egyenletet. Hasonlítsuk össze a megfelelő tagok együtthatóit!

Az e^x együtthatója $2A = 10 \Rightarrow A = 5$, a $\cos x$ együtthatója $-2C = -4 \Rightarrow C = 2$, a $\sin x$ együtthatója $2B = 0 \Rightarrow B = 0$. A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása tehát $y_p = 5x^2e^x + 2\sin x$.

A differenciálegyenlet általános megoldása $y = c_1e^x + c_2xe^x + 5x^2e^x + 2\sin x$, ennek deriváltja pedig $y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x + 10xe^x + 5x^2e^x + 2\cos x$. A kezdeti feltételek felhasználásával a $c_1 = 4$ és $c_1 + c_2 + 2 = 3$ összefüggésekhez jutunk, amelyekből $c_2 = -3$ következik. A kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás

$$y = 4e^x - 3xe^x + 5x^2e^x + 2\sin x.$$

4. Oldjuk meg az $y'' - 3y' = -18x$ differenciálegyenletet! Határozzuk meg a differenciálegyenlet $y(0) = 0$ és $y'(0) = 5$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását!

   Megoldás: Az $y'' - 3y' = 0$ homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

   $$\lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

   amelynek gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 0$, így homogén differenciálegyenlet általános megoldása $y_h = c_1e^{3x} + c_2$.

   A zavarófüggvény alapján az $y_p = Ax + B$ próbafüggvénnyel próbálkozunk, de a B konstans rezonanciában van a homogén egyenlet általános megoldásának c_2 tagjával. Ha B-t x-szel szorozzuk, akkor Ax és Bx csak konstans szorzóban különbözik, ezért Ax-et is megszorozzuk x-szel. A módosított próbafüggvény tehát $y_p = Ax^2 + Bx$. Ezt deriváltjaival együtt behelyettesítve a differenciálegyenletbe, a

   $$2A - 3(2Ax + B) = -18x$$

   egyenletet kapjuk. Az x együtthatója $-6A = -18 \Rightarrow A = 3$, a konstans tag $2A - 3B = 0 \Rightarrow B = 2$. A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_p = 3x^2 + 2x$, általános megoldása $y = c_1e^{3x} + 3x^2 + 2x + c_2$. Az általános megoldás deriváltja $y' = 3c_1e^{3x} + 6x + 2$. A feltételeket felhasználva kapjuk a $c_1 + c_2 = 0$ és $3c_1 + 2 = 5$ egyenletrendszert, amelyet megoldva kapjuk, hogy $c_1 = 1$ és $c_2 = -1$. A kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás $y_0 = e^{3x} + +3x^2 + 2x - 1$.

5. Egy m tömegű pontszerű testre a kitérésével arányos, azzal ellentétes irányú $F_1 = -Dx$ erő mellett egy $F_2 = F_0 \sin \omega_0 t$ ($F_0 > 0$ konstans) gerjesztő erő is hat, amelynek iránya párhuzamos a kitérés irányával. A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható. Tegyük fel, hogy fennállnak az $x_0 = 0$ és $\dot{x}(0) = v_0$ kezdeti feltételek. Adjuk meg a test kitérés-idő függvényét! Milyen esetben lép fel rezonancia?

Megoldás: Vezessük be az $\omega^2 = \frac{D}{m}$ jelölést! Newton II. törvénye alapján a mozgást leíró differenciálegyenlet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t.$$

A homogén egyenlet általános megoldása $x_h = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, amint azt a 7.4.24. példák 3. példájában láttuk.

Ha $\omega_0 \neq \omega$, akkor a differenciálegyenlet partikuláris megoldását $x_p = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ alakban kereshetjük. Ezt második deriváltjával együtt behelyettesítve a differenciálegyenletbe a

$$-A\omega_0^2 \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 \sin \omega_0 t + \omega^2 \left(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t\right) = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t$$

összefüggéshez jutunk. Az együtthatók összehasonlításával $A(\omega^2 - \omega_0^2) = 0 \Rightarrow A = 0$ és $B(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \Rightarrow B = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$ adódik, ezért a differenciálegyenlet partikuláris megoldása $x_p = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \sin \omega_0 t$.

Az általános megoldás $x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \sin \omega_0 t$, amelynek deriváltja $\dot{x} = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t + \frac{F_0 \omega_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \cos \omega_0 t$. A kezdeti feltételek behelyettesítésével kapjuk, hogy $0 = x(0) = c_1$, és $v_0 = \dot{x}(0) = c_2 \omega + \frac{F_0 \omega_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$, azaz $c_1 = 0$ és $c_2 = -\frac{F_0 \omega_0}{m\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}$. A kitérés-idő függvény tehát

$$x = -\frac{F_0 \omega_0}{m\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \sin \omega t + \frac{F_0 \omega_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \cos \omega_0 t.$$

Megfigyelhető, hogy mindkét tag, így a kitérés-idő függvény is, korlátos.

Ha $\omega_0 = \omega$, akkor rezonancia lép fel, hiszen a homogén egyenlet általános megoldásának tagjai csak konstans szorzóban különböznek a próbafüggvény egy-egy tagjától. Fizikai tanulmányainkból ismert, hogy $\omega = 2\pi f$, illetve $\omega_0 = 2\pi f_0$, ahol f az úgynevezett sajátfrekvencia, amellyel a test gerjesztés nélkül rezegne, f_0 pedig a gerjesztés frekvenciája. Rezonancia tehát akkor következik be, ha $2\pi f = 2\pi f_0 \Rightarrow f = f_0$, azaz a gerjesztés frekvenciája megegyezik a rezgő rendszer sajátfrekvenciájával. Ebben az esetben a próbafüggvény $x_p = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t$. Ezt második deriváltjával együtt behelyettesítve a differenciálegyenletbe a

$$\begin{aligned}-2A\omega \sin \omega t - A\omega^2 t \cos \omega t + 2B\omega \cos \omega t - B\omega^2 t \sin \omega t + \\ + \omega^2 \left(At \cos \omega t + Bt \sin \omega t\right) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t\end{aligned}$$

összefüggést kapjuk. Beszorzás és összevonás után a

$$-2A\omega \sin \omega t + 2B\omega \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

egyenlethez jutunk. Az együtthatók összehasonlításával $A = -\frac{F_0}{2m\omega}$ és $B = 0$ adódik. A partikuláris megoldás $x_p = -\frac{F_0}{2m\omega} \cdot t\cos\omega t$, a differenciálegyenlet általános megoldása $x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t - \frac{F_0}{2m\omega} \cdot t\cos\omega t$. Ha ebbe és

$$\dot{x} = -c_1\omega\sin\omega t + c_2\omega\cos\omega t - \frac{F_0}{2m\omega} \cdot \cos\omega t + \frac{F_0}{2m} \cdot t\sin\omega t$$

deriváltfüggvényébe behelyettesítjük a kezdeti feltételeket, akkor a $c_1 = 0$ és $v_0 = = c_2\omega - \frac{F_0}{2m\omega}$ összefüggéseket kapjuk. Az utóbbiból $c_2 = \frac{v_0}{\omega} + \frac{F_0}{2m\omega^2}$, így a kitérés-idő függvény

$$x = \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{F_0}{2m\omega^2}\right)\sin\omega t - \frac{F_0}{2m\omega} \cdot t\cos\omega t.$$

Megfigyelhető, hogy az x függvény nem korlátos, azaz a rezgés amplitúdója elméletileg minden határon túl növekszik. A gyakorlatban persze az amplitúdó növekedése bizonyos határ felett a rendszer széteséséhez vezet, a modellben feltételezett dinamikai összefüggések nem lehetnek érvényesek minden határon túl.

7.4.27. Megjegyzés. Amikor a rezgő rendszer a rezonancia hatására szétesik, rezonancia katasztrófáról beszélünk. Ennek egy látványos példája volt 1940. november 7-én a Tacoma-híd összeomlása. Bár itt nem egy pontszerű test rezgéséről volt szó, a jelenség mégis hasonló. A széllökések frekvenciája közel esett a híd sajátfrekvenciájához, így a hidat olyan mértékű lengésbe hozta, amelytől az leszakadt.

7.4.2. Feladatok

1. Ellenőrizze, hogy az y_1 függvény megoldása a homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek! Határozza meg a differenciálegyenlet egy y_1-től lineárisan független partikuláris megoldását és általános megoldását!

   (a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_1 = x,$
   (b) $x^2y'' - 2y = 0, \qquad y_1 = x^2,$

2. Határozza meg a következő állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 0,$
   (b) $y'' - 6y' - 16y = 0,$
   (c) $y'' - 4y' + 4y = 0,$
   (d) $y'' + 12y' + 36y = 0,$
   (e) $y'' + 25y = 0,$
   (f) $y'' + 121y = 0,$
   (g) $y'' + 8y' + 25y = 0,$
   (h) $y'' - 6y' + 58y = 0,$

3. Határozza meg a következő állandó együtthatós inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a) $y'' - 7y' + 10y = 20x^2 - 8x,$
   (b) $y'' + 3y' - 4y = 18\cos 2x + 26\sin 2x,$
   (c) $y'' + 2y' + y = 45e^{2x},$
   (d) $y'' - 6y' + 9y = 111 - 126x,$
   (e) $y'' + 9y = 36e^{3x},$
   (f) $y'' + y = 3\sin 2x - 3\cos 2x,$
   (g) $y'' - 8y' + 32y = 96x - 536,$
   (h) $y'' - 12y' + 40y = 84\sin 2x - 108\cos 2x,$

(i) $y'' + 8y' - 33y = 28e^{3x} - 264x + 64,$ (k) $y'' + 4y = 48\cos 2x,$

(j) $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x},$ (l) $y'' - 6y' + 13y = -4e^{3x}\sin 2x.$

4. Oldja meg a következő kezdeti érték problémákat!

   (a) $y'' + 3y' + 10y = -40x^3 + 36x^2 + 24x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 9,$

   (b) $y'' - 11y' + 24y = -10e^{3x}, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 30,$

   (c) $y'' - 14y' + 49y = 150\,\mathrm{sh}\,x - 42\,\mathrm{ch}\,x + 245x + 28, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 16,$

   (d) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -14,$

   (e) $y'' + y = 4(x+1)e^{x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3,$

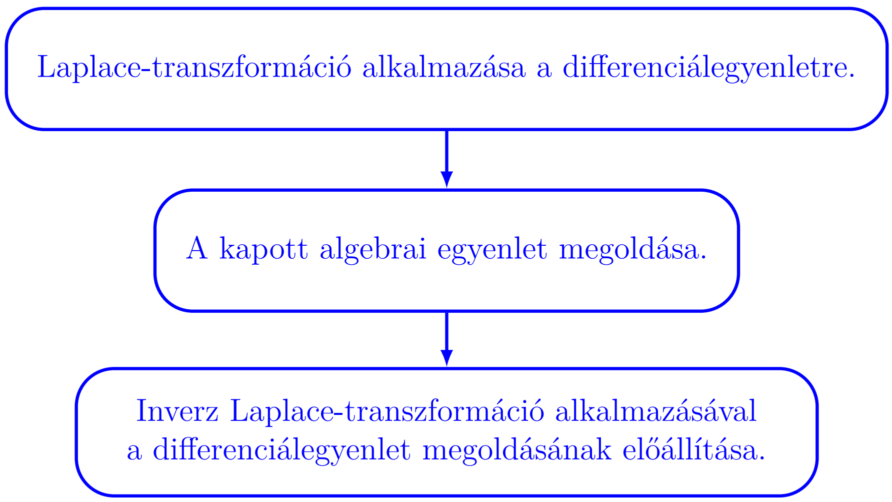
   (f) $y'' + 4y = -36\sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 11,$

   (g) $y'' - 12y' + 40y = 52xe^{3x} - 24e^{3x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 18,$

   (h) $y'' - 4y' + 5y = -12e^{2x}\sin x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13.$

7.5. Differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

A lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek (és differenciálegyenlet-rendszerek) egy lehetséges megoldási módszere a Laplace-transzformáció alkalmazása. A transzformáció segítségével differenciálegyenletből egy algebrai egyenletet kapunk, amelynek megoldásából következtethetünk a differenciálegyenlet megoldására. Ezt a módszert gyakran használják a műszaki gyakorlatban, elsősorban kezdeti érték problémák megoldására. Az algoritmus fő lépéseit a 7.8. ábrán láthatjuk.



7.8. ábra. A Laplace-transzformációs megoldás algoritmusa

7.5.1. Példák.

1. Oldjuk meg az $y' - 8y = -16x + 42$, $y(0) = -2$ kezdeti érték problémát!

Megoldás: Jelölje $\bar{y}$ az ismeretlen y függvény Laplace-transzformáltját. Az egyenletet tagonként Laplace-transzformálva az

$$s\bar{y}-y(0)-8\bar{y}=-\frac{16}{s^2}+\frac{42}{s}$$

algebrai egyenletet kapjuk. Behelyettesítve $y(0)=-2$-t, majd rendezve kapjuk, hogy

$$(s-8)\bar{y}=-\frac{16}{s^2}+\frac{42}{s}-2=\frac{-2s^2+42s-16}{s^2}.$$

Ebből $(s-8)$-cal történő osztással $\bar{y}$ kifejezhető:

$$\bar{y}=\frac{-2s^2+42s-16}{(s-8)s^2}.$$

Innen egy inverz Laplace-transzformációval adódik az eredmény, de ehhez a jobb oldalon álló kifejezést résztörtekre kell bontanunk.

$$\begin{aligned}\frac{-2s^2+42s-16}{(s-8)s^2} &= \frac{A}{s-8}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s^2}\\ -2s^2+42s-16 &= As^2+B(s-8)s+C(s-8)\end{aligned}$$

A nevező zérushelyei $s_1=8$ és $s_2=0$. Helyettesítsük ezeket az egyenletbe, és hasonlítsuk össze a másodfokú tagok együtthatóit!

$s=8$:	$s=0$:	s^2:
$192=64A$ $A=3$	$-16=-8C$ $C=2$	$-2=A+B$ $B=-5$

Tehát $\bar{y}=\frac{3}{s-8}+\frac{2}{s^2}-\frac{5}{s}$. Inverz Laplace-transzformációt alkalmazva kapjuk a kezdeti érték probléma megoldását:

$$y=3e^{8x}+2x-5.$$

A kapott megoldást és annak $y'=24e^{8x}+2$ deriváltját behelyettesítve a differenciálegyenletbe a

$$24e^{8x}+2-8\left(3e^{8x}+2x-5\right)=-16x+42$$

összefüggéshez jutunk. Némi számolással igazolható, hogy ez azonosság, tehát a kapott függvény valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

Ez a megoldás a kezdeti feltételt is kielégíti, hiszen $y(0)=3e^0+0-5=-2$. (A további példákban az ellenőrzés az olvasóra bízzuk.)

2. Oldjuk meg az $y''-7y'+12y=-42\cos 2x+24\sin 2x$, $y(0)=6$, $y'(0)=24$ kezdeti érték problémát!

Megoldás: A differenciálegyenletet Laplace-transzformálva kapjuk az

$$s^2\bar{y}-sy(0)-y'(0)-7\left(s\bar{y}-y(0)\right)+12\bar{y}=-\frac{42s}{s^2+4}+\frac{48}{s^2+4}$$

algebrai egyenletet. Behelyettesítve az $y(0)=6$ és $y'(0)=24$ értékeket majd rendezve

$$\bar{y} = \frac{6s^3-18s^2-18s-24}{(s-3)(s-4)(s^2+4)}$$

adódik. Az inverz Laplace-transzformációhoz a jobb oldalt résztörtekre bontjuk:

$$\frac{6s^3-18s^2-18s-24}{(s-3)(s-4)(s^2+4)} = \frac{A}{s-3}+\frac{B}{s-4}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$\begin{aligned} 6s^3-18s^2-18s-24 = {} & A(s-4)(s^2+4)+B(s-3)(s^2+4)+ \\ & +Cs(s-3)(s-4)+D(s-3)(s-4) \end{aligned}$$

Helyettesítsük be az egyenletbe a 3, 4 és 0 számokat (az első kettő a nevező két valós gyöke), továbbá hasonlítsuk össze a harmadfokú tagok együtthatóit.

$s=3$:	$s=4$:	$s=0$:	s^3:
$-78=-13A$ $A=6$	$0=20B$ $B=0$	$-24=-16A-12B+12D$ $D=6$	$6=A+B+C$ $C=0$

Tehát $\bar{y} = \frac{6}{s-3}+\frac{6}{s^2+4}$. Inverz Laplace-transzformációt alkalmazva kapjuk a kezdeti érték probléma megoldását:

$$y = 6e^{3x}+3\sin 2x.$$

3. Oldjuk meg az $y''-4y'+4y=-20\cos 3x+48\sin 3x$, $y(0)=4$, $y'(0)=2$ kezdeti érték problémát!

   Megoldás: Laplace-transzformálva az egyenletet kapjuk az

$$s^2\bar{y}-sy(0)-y'(0)-4\left(s\bar{y}-y(0)\right)+4\bar{y} = -\frac{20s}{s^2+9}+\frac{144}{s^2+9}$$

   egyenletet. A kezdeti feltételeket behelyettesítve és rendezve kapjuk, hogy

$$\bar{y} = \frac{4s^3-14s^2+16s+18}{(s^2+9)(s-2)^2}.$$

   A jobb oldalt résztörtekre bontjuk:

$$\frac{4s^3-14s^2+16s+18}{(s^2+9)(s-2)^2} = \frac{As+B}{s^2+9}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{(s-2)^2}$$

$$\begin{aligned} 4s^3-14s^2+16s+18 = {} & As(s-2)^2+B(s-2)^2+ \\ & +C(s-2)(s^2+9)+D(s^2+9) \end{aligned}$$

   A nevező egyetlen valós gyöke 2, amit behelyettesítve az egyenletbe kapjuk, hogy $D=2$. A másik három paraméter meghatározásához hasonlítsuk össze az s^3, s és s^0 együtthatóit az egyenlet bal és jobb oldalán. Így az

$$\begin{aligned} A+C &= 4 \\ 4A-4B+9C &= 16 \\ 4B-18C &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldása $A=4$, $B=C=0$, tehát

$$\bar{y}=\frac{4s}{s^2+9}+\frac{2}{(s-2)^2}.$$

A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás

$$y=4\cos 3x+2xe^{2x}.$$

4. Határozzuk meg a soros RL kör (7.2.3. példák 4. példa) zárása után kialakuló áramerősség függvényt!

   Megoldás: Korábban láttuk, hogy a soros RL kör viselkedését az

$$Ri+L\cdot\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=U_0$$

   differenciálegyenlettel írhatjuk le. Keressük ennek megoldását Laplace-transzformáció segítségével! Az $i(t)$ függvény Laplace-transzformáltját $I(s)$-sel jelölve, és figyelembe véve, hogy a bekapcsolás pillanatában az áramerősség értéke $i(0)=0$:

$$\begin{aligned} RI+LsI-Li(0) &= \frac{U_0}{s} \\ I\,(R+Ls) &= \frac{U_0}{s} \\ I &= \frac{U_0}{s\,(R+Ls)} \end{aligned}$$

   Résztörtekre bontást alkalmazva:

$$I=\frac{U_0}{R}\cdot\frac{1}{s}-\frac{U_0}{R}\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}},$$

   így inverz Laplace-transzformáció után kapjuk, hogy

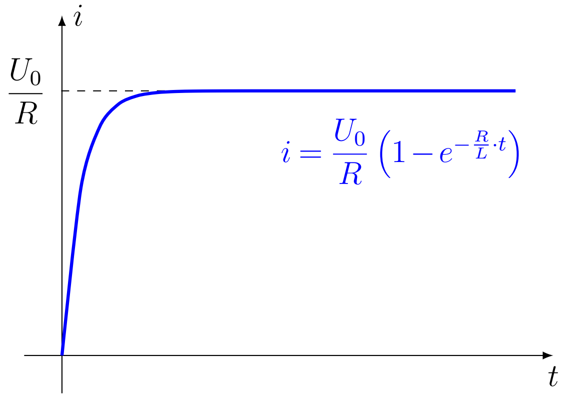
$$i=\frac{U_0}{R}-\frac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right).$$

   Az áramerősség-idő függvény grafikonja a ábrán látható.

   Mivel $\lim\limits_{t\to\infty} i=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)=\frac{U_0}{R}$, elegendő (nagyon rövid) idő elteltével az áramerősség értéke $\frac{U_0}{R}$-nek tekinthető.

A 7.5.1. példák mindegyike egy-egy kezdeti érték probléma megoldását mutatja be a Laplace-transzformáció segítségével, így az eredmény minden esetben egy partikuláris megoldás volt. A Laplace-transzformáció segítségével a lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet általános megoldása is megkapható.

7.5.2. Példa. Határozzuk meg az $y'+2y=4\sin x$ differenciálegyenlet általános megoldását!



7.9. ábra. Az áramerősség a soros RL kör bekapcsolása után

Megoldás: Laplace-transzformációt alkalmazva a következő egyenlethez jutunk:

$$s\bar{y}-y(0)+2\bar{y}=\frac{4}{s^2+1}.$$

$\bar{y}$-t kifejezve:

$$\bar{y}=\frac{4}{(s+2)(s^2+1)}+\frac{y(0)}{s+2}.$$

Résztörtekre bontást alkalmazva:

$$\frac{4}{(s+2)(s^2+1)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+D}{s^2+1},$$

ahonnan

$$4=A(s^2+1)+Bs(s+2)+D(s+2).$$

Ha $s=-2$-t helyettesítünk, akkor $A=\frac{4}{5}$ adódik.
Az $s=0$ helyettesítéssel a $4=A+2D$ egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy A értékét már ismerjük, $D=\frac{8}{5}$.
Végül az s^2 együtthatóit összehasonlítva a két oldalon $0=A+B$, tehát $B=-\frac{4}{5}$. Visszahelyettesítve az $\bar{y}$ kifejezésébe:

$$\bar{y}=\frac{\frac{4}{5}+y(0)}{s+2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

Mivel a feladathoz nem tartozik kezdeti feltétel, $y(0)$ tetszőleges valós szám lehet. Vezessük be a $C=\frac{4}{5}+y(0)$ jelölést. Nyilván $C\in\mathbb{R}$ is tetszőleges. Inverz Laplace-transzformációt alkalmazva az $\bar{y}$ függvényre

$$y=Ce^{-2x}-\frac{4}{5}\cos x+\frac{8}{5}\sin x$$

adódik. Az y függvényt és y' deriváltját behelyettesítve a differenciálegyenletbe láthatjuk, hogy y annak valóban megoldása. Mivel y tartalmaz egy C paramétert is, ezért ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

A Laplace-transzformáció differenciálegyenlet-rendszerek megoldására is alkalmazható, feltéve, hogy minden egyenlet lineáris és állandó együtthatós. A gyakorlatban előforduló problémák esetén rendszerint adott kezdeti értékekhez tartozó partikuláris megoldásokat keresünk.

7.5.3. Példák.

1. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} 3\dot{x}+3x-2y &= 3t^2 \\ \dot{y}+x+y &= t^2+3t+3 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer $x(0)=0$, $y(0)=0$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását, ha x és y a t változó ismeretlen függvényei, $\dot{x}$ és $\dot{y}$ pedig a deriváltjaik!

Megoldás: Alkalmazzuk a Laplace-transzformációt mindkét egyenletre! Ekkor a

$$\begin{aligned} 3s\bar{x}-3x(0)+3\bar{x}-2\bar{y} &= \frac{6}{s^3} \\ s\bar{y}-y(0)+\bar{x}+\bar{y} &= \frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{3}{s} \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszerhez jutunk. Felhasználva a kezdeti feltételeket és a baloldalon összevonva:

$$\begin{aligned} (3s+3)\bar{x}-2\bar{y} &= \frac{6}{s^3} \\ \bar{x}+(s+1)\bar{y} &= \frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{3}{s}. \end{aligned}$$

Az első egyenletet $(s+1)$-gyel, a másodikat 2-vel szorozva:

$$\begin{aligned} (3s^2+6s+3)\bar{x}-2(s+1)\bar{y} &= \frac{6(s+1)}{s^3} \\ 2\bar{x}+2(s+1)\bar{y} &= \frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{6}{s}. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva

$$(3s^2+6s+5)\bar{x}=\frac{6s^2+12s+10}{s^3}$$

adódik, ahonnan $\bar{x}=\frac{2}{s^3}$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$\frac{6s+6}{s^3}-2\bar{y}=\frac{6}{s^3},$$

amelyből $\bar{y}=\frac{3}{s^2}$. Inverz Laplace-transzformációt alkalmazva eljutunk a kezdeti feltételeket kielégítő megoldáshoz, ami $x=t^2$, $y=3t$.

2. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} \dot{x}+2x-2y &= 3\sin t-2\cos t \\ \dot{y}+x+y &= 2\sin t+\cos t \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer $x(0)=-1$, $y(0)=1$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldását!

Megoldás: Laplace-transzformáció alkalmazásával a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} s\bar{x}+1+2\bar{x}-2\bar{y} &= \frac{3-2s}{s^2+1} \\ s\bar{y}-1+\bar{x}+\bar{y} &= \frac{s+2}{s^2+1} \end{aligned}$$

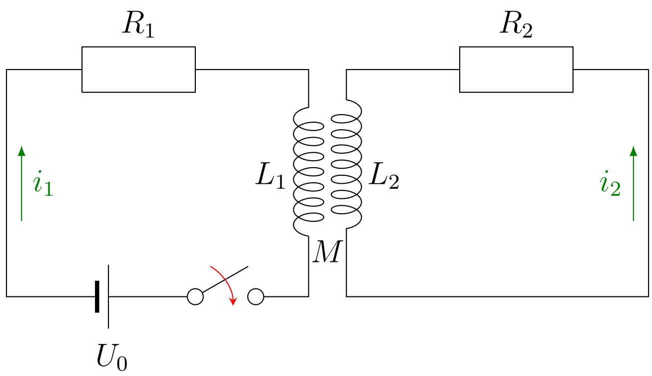
Az egyenletrendszer megoldásával kapjuk, hogy

$$\bar{x}=\frac{2-s}{s^2+1} \quad \text{és} \quad \bar{y}=\frac{s+1}{s^2+1}.$$

A differenciálegyenletnek a megadott kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldásait inverz Laplace-transzformáció alkalmazásával kapjuk meg:

$$x=2\sin t-\cos t, \quad y=\sin t+\cos t.$$

3. A 7.10. ábrán egy csatolt rezgőkör kapcsolási rajzát láthatjuk. (M a rendszer kölcsönös indukciós együtthatója.) Határozzuk meg az áramerősség-idő függvényeket a kapcsoló zárása után, ha az adatok $U_0=10$, $R_1=2$, $R_2=3$, $L_1=2$, $L_2=8$ és $M=2$ alkalmas mértékegységekben!



7.10. ábra. Csatolt RL körök

Megoldás: A keresett i_1, i_2 áramerősség-idő függvénypár az

$$\begin{aligned} R_1 i_1+L_1\cdot\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+M\cdot\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= U_0 \\ R_2 i_2+L_2\cdot\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+M\cdot\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$

lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszer partikuláris megoldása az $i_1(0)=i_2(0)=0$ kezdeti feltételek mellett. Az adatokat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2i_1+2\cdot\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+2\cdot\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= 10 \\ 3i_2+8\cdot\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+2\cdot\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= 0. \end{aligned}$$

Laplace-transzformációt alkalmazva és figyelembe véve a kezdeti feltételeket, az

$$\begin{aligned} 2I_1+2sI_1+2sI_2 &= \frac{10}{s} \\ 3I_2+8sI_2+2sI_1 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, ahol $i_1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, I_1$ és $i_2 \circ\!\!-\!\!\bullet\, I_2$.
Ennek megoldása:

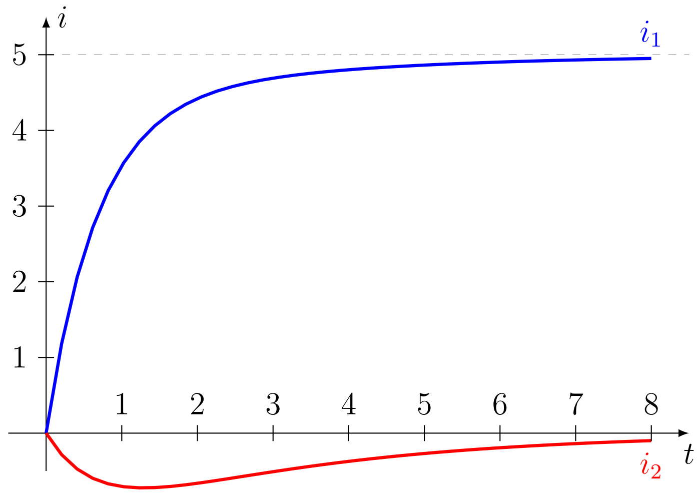
$$I_1 = \frac{5(8s+3)}{6s^3+11s^2+3s} = \frac{5}{s} - \frac{60}{7(2s+3)} - \frac{15}{7(3s+1)},$$

$$I_2 = -\frac{10}{5s^2+11s+3} = \frac{20}{7(2s+3)} - \frac{30}{7(3s+1)}.$$

Inverz Laplace-transzformációt alkalmazva kapjuk, hogy

$$i_1 = 5 - \frac{30}{7}\cdot e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{5}{7}\cdot e^{-\frac{1}{3}t}, \quad i_2 = \frac{10}{7}\cdot e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{10}{7}\cdot e^{-\frac{1}{3}t}.$$

A kapott áramerősség-idő függvények grafikonja a 7.11. ábrán látható.

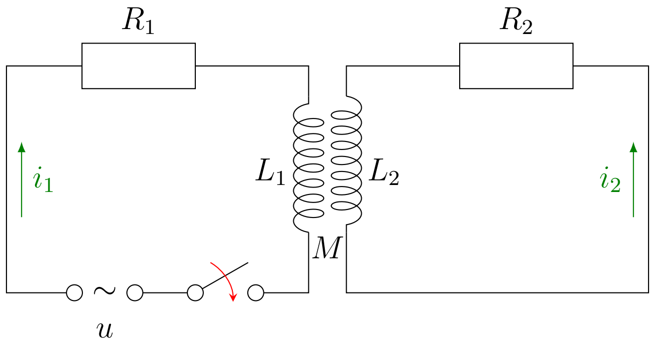


7.11. ábra. A 3. fel feladatban kapott megoldások grafikonja.

4. A 7.12. ábrán egy csatolt rezgőkör kapcsolási rajzát láthatjuk. (M a rendszer kölcsönös indukciós együtthatója.) Határozzuk meg az áramerősség-idő függvényeket a kapcsoló zárása után, ha az adatok alkalmas mértékegységekben $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $L_1 = 2$, $L_2 = 8$ és $M = 2$ és az első kör $u = 5\sin 10t$ váltakozó feszültségre van kapcsolva!

Megoldás: A keresett i_1, i_2 áramerősség-idő függvénypár az

$$\begin{aligned} 2i_1+2\cdot\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+2\cdot\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= 20\sin 5t \\ 3i_2+8\cdot\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+2\cdot\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$



7.12. ábra. Csatolt RL körök

differenciálegyenlet-rendszer megoldása az $i_1(0)=0$ és $i_2(0)=0$ kezdeti feltételek mellett. Laplace-transzformációt alkalmazva az $i_1 \circ\!\!-\!\!\bullet I_1$ és $i_2 \circ\!\!-\!\!\bullet I_2$ jelölésekkel az

$$\begin{aligned} 2I_1+2sI_1+2sI_2 &= \frac{100}{s^2+25} \\ 3I_2+8sI_2+2sI_1 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszer megoldása után résztörtekre bontást alkalmazunk. Az így kapott

$$I_1 = \frac{43975}{12317\,(s^2+25)} - \frac{30225s}{12317\,(s^2+25)} + \frac{75}{791\left(s+\frac{1}{3}\right)} + \frac{1800}{763\left(s+\frac{3}{2}\right)}$$

és

$$I_2 = \frac{7350s}{12317(s^2+25)} - \frac{13750}{12317(s^2+25)} + \frac{150}{791\left(s+\frac{1}{3}\right)} - \frac{600}{763\left(s+\frac{3}{2}\right)}$$

függvényekre inverz Laplace-transzformációt alkalmazunk, így megkapjuk a keresett áramerősség-idő függvényeket:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{8795}{12317}\sin 5t - \frac{30225}{12317}\cos 5t + \frac{75}{791}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{1800}{763}e^{-\frac{3t}{2}} \approx \\ &\approx 0{,}714\sin 5t - 2{,}454\cos 5t + 0{,}095e^{-\frac{t}{3}} + 2{,}359e^{-\frac{3t}{2}}, \end{aligned}$$

és

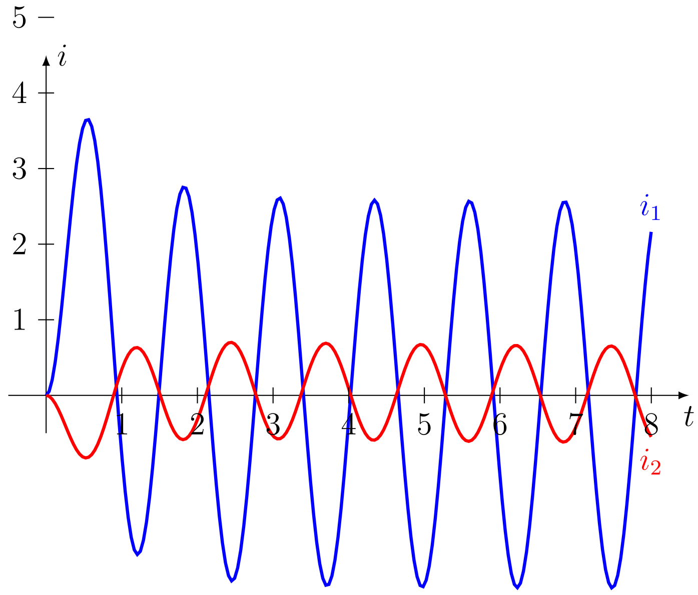
$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{7350}{12317}\cos 5t - \frac{2750}{12317}\sin 5t + \frac{150}{791}e^{-\frac{t}{3}} - \frac{600}{763}e^{-\frac{3t}{2}} \approx \\ &\approx 0{,}597\cos 5t - 0{,}223\sin 5t + 0{,}19e^{-\frac{t}{3}} - 0{,}786e^{-\frac{3t}{2}}. \end{aligned}$$

A kapott áramerősség-idő függvények grafikonjait a 7.13. ábrán láthatjuk.

7.5.1. Feladatok

1. Oldja meg a következő kezdeti érték problémákat Laplace-transzformáció alkalmazásával!

   (a) $y'+3y=x+2, \quad y(0)=2,$



7.13. ábra. A 4. fel feladatban kapott megoldások grafikonja.

(b) $y' - 5y = 2\sin x, \quad y(0) = -1,$

(c) $y' - y = 5 - 8x, \quad y(0) = 5,$

(d) $y' - 2y = e^{3x} + 5x, \quad y(0) = -\dfrac{1}{4},$

(e) $y'' + y' - 6y = 2, \quad y(0) = \dfrac{8}{5}, \quad y'(0) = \dfrac{21}{5},$

(f) $y'' - 3y' - 4y = 12e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7,$

(g) $y'' - 6y' + 8y = 3\sin 2x - 2\cos 2x, \quad y(0) = \dfrac{1}{10}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{10},$

(h) $y'' - 4y' + 4y = 4x - 8, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2,$

(i) $y'' + 8y' + 16y = 10\sin 2x - 20\cos 2x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1,$

(j) $y'' + 9y = 18x - 9, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 8.$

2. Határozza meg a következő differenciálegyenlet-rendszereknek a megadott kezdeti értékekhez tartozó partikuláris megoldását!

(a)
$$\begin{aligned} \dot{x} + 3x - 2y &= -4e^t, \\ \dot{y} - 2x + 5y &= 22e^t, \end{aligned} \qquad \text{ahol } x(0) = 1,\ y(0) = 4.$$

(b)
$$\begin{aligned} \dot{x} + x - 2y &= 3\sin 2t, \\ \dot{y} + 2x + y &= -\sin 2t - \cos 2t, \end{aligned} \qquad \text{ahol } x(0) = 0,\ y(0) = 1,$$

(c)
$$\begin{aligned} \dot{x} + 3x - 2y &= 5t - 13, \\ \dot{y} + x + 2y &= 7t + 10, \end{aligned} \qquad \text{ahol } x(0) = -2,\ y(0) = 5.$$

Tárgymutató