

Differenciálegyenletek I.

1. Döntse al, hogy az alábbi differenciálegyenletek hányadrendűek, illetve azt is, hogy lineárisak-e:

a) $y'' \cdot \operatorname{tg}(x) - \frac{y'}{4x^2} + y \cdot \frac{e^x}{\sin(x)} = x \arccos(x)$

b) $y'' = 5y' - 4$

c) $y^{(4)} \cdot \ln(y) + \sin(y'') = 0$

2. Döntse el, hogy az $y'' = y + x^2$ differenciálegyenletnek megoldásai-e az

$$f(x) = 2x^2, \text{ illetve } g(x) = -x^2 - 2 - e^x$$

függvények!

3. Határozza meg integrálással az $y''' = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását, majd az $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását!

4. Rajzolja fel a következő differenciálegyenletekhez tartozó iránymezőt az xy -koordináta-rendszerben! Rajzoljon meg néhány integrálgörbét is az iránymező alapján! Mi lehet a differenciálegyenletek megoldása? Sejtését számítással is ellenőrizze!

a) $y' = \frac{y}{x}$

b) $y' = -\frac{x}{y}$

5. Adja meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását! Ha adott valamilyen feltétel, akkor írja fel az ezt kielégítő partikuláris megoldást is!

a) $y' = 2xy^2, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$

b) $x^3 dy = y^3 dx, \quad y(0) = 1$

c) $y' \sin(x) = y \ln(y)$

6. Írja fel az alábbi elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $y' \sin(x) - y \cos(x) = 0$

b) $y' + \frac{1}{x^2 - 1} y = 0$

7. Oldja meg az állandó variálásának módszerével az alábbi elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenleteket:

a) $y' - \frac{y}{x+1} = x^2 - 1$

b) $xy' + y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $x^2 y' + y = x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln(x)$

$$\text{d) } xy' + \frac{y}{\ln(x)} = 1$$

- 8.** Határozza meg az állandó variálásának módszerével az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenletek adott feltételt kielégítő partikuláris megoldását:

$$\text{a) } y' + y \operatorname{tg}(x) = -2 \cos^3(x), \quad y(0) = 1$$

$$\text{b) } y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0) = -2$$

$$\text{c) } y' - \frac{3}{x^2+x-2}y = 1, \quad y(0) = 3$$

- 9.** Oldja meg próbafüggvény módszerrel az alábbi állandó együtthatójú elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket:

$$\text{a) } y' + y = \sin(x)$$

$$\text{b) } y' - 2y = 4x$$

$$\text{c) } 2y' + y = 10(e^{2x} + e^{-x})$$

$$\text{d) } y' - 4y = \frac{25}{4} \cos(3x) + 2$$

- 10.** Oldja meg próbafüggvény módszerrel az alábbi állandó együtthatójú elsőrendű differenciálegyenletet, figyelve a rezonanciára: $y' - 2y = e^{2x} + x$