Numerikus sorok

1. Vizsgálja meg az alábbi számsorok konvergenciáját! Ha konvergensek, akkor számítsa ki az összegüket!

eml.: a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots$ ***mértani sor*** pontosan akkor konvergens, ha $\boxed{-1 < q < 1}$,

és ekkor $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$.

köv.: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{q}{1-q} \quad (-1 < q < 1)}$

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k+5^k}{15^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{15}\right)^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{15}\right)^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{15}\right)^k = \frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{15}} + \frac{\frac{3}{15}}{1-\frac{3}{15}} + \frac{\frac{5}{15}}{1-\frac{5}{15}} = \frac{1}{14} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{23}{28}$

megj.: felhasználtuk, hogy ha $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ konvergens, akkor $\sum(a_n + b_n + c_n)$ is és $\sum(a_n + b_n + c_n) =$
$= \sum a_n + \sum b_n + \sum c_n$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^k} = 3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}} = 3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 12$

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{a^2+2}\right)^k \quad (a \neq 0)$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{a^2+2}\right)^k = 1 + \left(\frac{a^2}{a^2+2}\right) + \left(\frac{a^2}{a^2+2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{a^2+2}\right)^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-\frac{a^2}{a^2+2}} = \frac{a^2+2}{2}$

A sor csak olyan a esetén konvergens, amelyre $-1 < \frac{a^2}{a^2+2} < 1$ teljesül. Ez az egyenlőtlenségrendszer azonban tetszőleges valós a-ra igaz.

(e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2b}{b-10}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2b}{b-10}} = \frac{b-10}{-b-10} \quad (b \neq 0\ ,\ b \neq 10)$

A sor csak olyan b esetén konvergens, amelyre $-1 < \frac{2b}{b-10} < 1$ teljesül. Ekvivalens átalakítások után azt kapjuk, hogy $-10 < b < \frac{10}{3}$ esetben konvergens a sor.

(f) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0,1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \ldots$ divergens

megj.: az általános tag nem 0-hoz tart, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele

(g) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0,1^{k+1}$

I.mo.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0,1^{k+1} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \ldots\ldots = \left[\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \ldots\ldots\right] -$

$- \left[\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^6 + \ldots\ldots\right] = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{100}} - \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{9}{99} \approx 0,0909$

II.mo.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot 0,1^{k+1} = 0,1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot 0,1^k = 0,1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-0,1)^k = 0,1 \cdot \frac{1}{1-(-0,1)} = \frac{1}{11} \approx 0,0909$$

2. Határozza meg a következő sorok összegét résztörtekre bontással!

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Felhasználjuk, hogy $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14}\right) + \ldots = \frac{1}{4}$$

Gondoljuk meg ugyanis, hogy három egymást követő számhármast tekintve a kerettel jelzett elemek rendre 0-ra egészítik ki egymást:

$$(\mathrm{x}\ \mathrm{x}\ \boxed{\mathbf{x}}) + (\mathrm{x}\ \boxed{\mathbf{x}}\ \mathrm{x}) + (\boxed{\mathbf{x}}\ \mathrm{x}\ \mathrm{x})$$

(b) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{3}}$

A megoldásban felhasználjuk, hogy $\frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{3}} = \frac{k}{\frac{k!}{3!(k-3)!}} = \frac{6(k-3)!k}{k!} = \frac{6(k-3)!k}{(k-3)!(k-2)(k-1)k} = \frac{6}{(k-2)(k-1)} =$

$= \frac{6}{k-2} - \frac{6}{k-1} = 6\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right)$.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{3}} = \sum_{k=3}^{\infty} 6\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) = 6\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) = 6\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = 6$$

3. Számítsa ki a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor összegét, ha $a_1 = 20$, $a_{2n} = a_{2n-1}$, ha $n \geq 1$ egész, és $a_{2n+1} = \frac{a_{2n}}{4}$, ha $n \geq 1$ egész!

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 20 + 20 + 5 + 5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{16} + \ldots = 2 \cdot \left(20 + 5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \ldots\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(20 + 20 \cdot \frac{1}{4} + 20 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right) = 40 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= 40 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 40 \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{160}{3} \approx 53,3$$

4. A konvergencia szükséges feltételét felhasználva mutassa meg, hogy a következő sorok divergensek!

(A nevezett tétel azt mondja, hogy ha egy $\sum a_k$ sor konvergens, akkor az általános tagjából képezett $\{a_k\}$ sorozatra: $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Azaz: ha $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, akkor $\sum a_k$ divergens.)

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k+1}{5k+2}\right)^{5k}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{5k+1}{5k+2}\right)^{5k} = \left[\left(1 + \frac{-1}{5k+2}\right)^{5k+2}\right]^{\frac{5k}{5k+2}} = \left(e^{-1}\right)^1 = \frac{1}{e} \neq 0$ tehát a sor divergens.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ tehát a sor divergens.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{k}} = 1 \neq 0$ tehát a sor divergens.

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k\cdot 2^k}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{3^k}{k\cdot 2^k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(3/2)^k}{k} = \infty \neq 0$ tehát a sor divergens.

eml.: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a^k}{k^m} = \infty$ ha $a > 1$, $m \in \mathbb{N}^+$

5. Mutassa meg, hogy a következő (harmonikus sorra visszavezethető) sor divergens!

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{2}}$

Felhasználjuk, hogy $\frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{2}} = \frac{k}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{2}{k-1}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k-1} = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

6. A majoráns és a minoráns kritérium alkalmazásával döntsük el, hogy a következő sorok közül melyik konvergens és melyik divergens!

eml.: "Konvergens sorral majorálunk, divergens sorral minorálunk."

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}$

Felhasználjuk, hogy $\frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}} < \frac{1}{2^{2k-1}} = \frac{2}{2^{2k}} = 2\cdot(1/4)^k$ minden $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}} < \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\,(1/4)^k = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1/4)^k = 2\cdot\frac{1/4}{1-1/4} = \frac{2}{3} < \infty$ tehát a sor konvergens.

megj.: azt mondjuk, hogy a (konvergens) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\,(1/4)^k$ sor *majorálja* a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}$ sort.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+4)}$

Felhasználjuk, hogy $\frac{1}{(k+1)(k+4)} = \frac{1}{k^2+5k+4} < \frac{1}{k^2}$ minden $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+4)} < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ tehát a sor konvergens.

Nevezetes összefüggés: az $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ numerikus sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, $0 \le \alpha \le 1$ esetén divergens.

megj.: résztörtekre bontással a konkrét sorösszeg is meghatározható.

Ellenőrizhető, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+4)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1/3}{k+1} - \frac{1/3}{k+4}\right) = \frac{13}{36}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

Mivel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ ezért a sor konvergens.

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2-4k+5}$

A sor konvergenciáját ill. divergenciáját nem befolyásolja, ha véges sok tagot elhagyunk a sorból: hagyjuk el az első három elemét, és foglalkozzunk a maradék sorral:

$\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2-4k+5} < \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2-4k+4} = \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-2)^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2}$

Felhasználjuk, hogy $\frac{1+k}{1+k^2} > \frac{1+k}{1+2k+k^2} = \frac{1+k}{(1+k)^2} = \frac{1}{1+k}$ minden $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2} > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = -1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ tehát a sor divergens.

megj.: azt mondjuk, hogy a (divergens) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k}$ sor *minorálja* a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2}$ sort.

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+2)k}$

Felhasználjuk, hogy $\frac{k+1}{(k+2)k} = \frac{k+1}{k^2+2k} > \frac{k+1}{k^2+2k+1} = \frac{1}{k+1}$ minden $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+2)k} > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k} = \infty$ tehát a sor divergens.

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4k}$

Felhasználjuk, hogy $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

Mivel $0 < \frac{\pi}{4k} < \frac{\pi}{2}$ minden $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén, ezért $\frac{\pi}{4k} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4k}$ minden $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén. Ezzel tehát:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4k} > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{4k} = \frac{\pi}{4} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ tehát a sor divergens.

(h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-1} > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k} = \frac{1}{3} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ tehát a sor divergens.

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$

Belátható, hogy $x > \ln(x+1)$ minden pozitív valós x-re. Ebből következik, hogy speciálisan: $k > \ln(k+1)$ minden pozitív egész k esetén. Ebből pedig: $\frac{1}{\ln(k+1)} > \frac{1}{k}$ minden pozitív valós k-ra.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ tehát a sor divergens.

(j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+2k}} > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+2k+1}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$ tehát a sor divergens.

7. Döntse el a hányadoskritérium segítségével, hogy a következő sorok konvergensek-e!
eml.: egy pozitív tagú $\sum a_k$ sor esetén

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} A < 1 & \Rightarrow \text{ a sor konvergens} \\ A > 1 & \Rightarrow \text{ a sor divergens} \\ A = 1 & \Rightarrow \text{ ”még bármi lehet”} \end{cases}$$

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1$ tehát a sor konvergens.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k} = 2 \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{2}{k} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{2}{k} \cdot \left(1 + \frac{-1}{k+1}\right)^{k+1}$

Ebből: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left[\frac{2}{k} \cdot \left(1 + \frac{-1}{k+1}\right)^{k+1} \right] = 0 \cdot e^{-1} = 0 < 1$ tehát a sor konvergens.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^2}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{k!} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot (k+1) = \frac{k^2}{k+1}$

Ebből: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{k+1} = \infty > 1$ tehát a sor divergens.

megj.: vegyük észre, hogy nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k!}{k^2} \neq 0$, tehát a sor már e miatt is divergens!

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+3}{(k+1)^2} = \frac{k+3}{k^2+2k+1}$

Ebből: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+3}{k^2+2k+1} = 0 < 1$ tehát a sor konvergens.

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$

Ebből: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{k+1}\right)^k =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \left(1 + \frac{-1}{k+1}\right)^{-1} \right] = \frac{1}{e} < 1$

Tehát a sor konvergens.

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{2^k \cdot k!}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{(k+2)!}{2 \cdot 2^k (k+1)!} \cdot \frac{2^k \cdot k!}{(k+1)!} \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+2}{2(k+1)} = \frac{1}{2} < 1$ tehát a sor konvergens.

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)}{k\left(\frac{2}{3}\right)^k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{3}k + \frac{2}{3}}{k} = \frac{2}{3} < 1$ tehát a sor konvergens.

(h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k} \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} < 1$ tehát a sor konvergens.

8. A gyökkritérium alkalmazásával döntse el, hogy a következő sorok konvergensek-e!

eml.: egy pozitív tagú $\sum a_k$ sor esetén

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} A < 1 & \Rightarrow \quad \text{a sor konvergens} \\ A > 1 & \Rightarrow \quad \text{a sor divergens} \\ A = 1 & \Rightarrow \quad \text{”még bármi lehet”} \end{cases}$$

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 < 1 \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{k}\, p^k$, ahol $0 < p < 1$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt[k]{k}} \cdot p = 1 \cdot p = p < 1 \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0 < 1 \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^{2k} \frac{k}{2}}{k^k+2}$

$$0 \leq \sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{\sin^{2k} \frac{k}{2}}{k^k+2}} = \frac{\sin^2 \frac{k}{2}}{\sqrt[k]{k^k+2}} < \frac{\sin^2 \frac{k}{2}}{\sqrt[k]{k^k}} = \frac{\sin^2 \frac{k}{2}}{k} \leq \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 0 < 1 \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

megj.: a megoldásban a számsorozatok határértékére vonatkozó ún. ”rendőr-elv”-et alkalmaztuk.

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{10k+2}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{10k+2}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{10k+2} = \frac{1}{10} < 1 \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k^2}$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{k+2}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{k+2}\right)^{k+2}\right]^{\frac{k}{k+2}} =$$

$$= \left(e^{-1}\right)^1 = \frac{1}{e} < 1 \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} k)^k}{(k+2)2^{k-1}}$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{\sqrt[k]{k+2} \cdot \sqrt[k]{2^{k-1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{\sqrt[k]{k+2} \cdot 2^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 \cdot 2} = \frac{\pi}{4} < 1 \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

9. Az integrálkritérium alkalmazásával döntse el, hogy a következő sorok konvergensek-e!

(a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k \cdot \ln k^2}$

$$\int_2^{\infty} \frac{3}{x \ln x^2}\, dx = \int_2^{\infty} \frac{3}{2x \ln x}\, dx = \frac{3}{2} \int_2^{\infty} \frac{1/x}{\ln x}\, dx = \frac{3}{2} \left[\ln(\ln x)\right]_2^{\infty} = \frac{3}{2} \left(\lim_{x\to\infty} \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)\right) = \infty$$

Tehát a sor (is) divergens.

Az integrálkritérium azért alkalmazható, mert az $f(x) = \frac{3}{x \ln x^2}$ fv. értelmezve van a $[2, \infty[$ intrevallumon, továbbá az intervallumon $f(x) > 0$ és f monoton csökkenő.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right]_1^{\infty} =$$

$$= \text{"}\left(\infty + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right)\text{"} = \infty$$

Tehát a sor divergens. (megj.: a feladatot korábban a minoráns kritérium alkalmazásával is megoldottuk, ld.: **6**. (e) példa)

(c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^2 k}$

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \qquad \text{tehát a sor konvergens.}$$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, ahol $\alpha > 0$

Felhasználjuk, hogy $\int \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{ha} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln|x| & \text{ha} \quad \alpha = 1 \end{cases}$

i. $\alpha \neq 1$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \frac{1}{-\alpha+1}\left[x^{-\alpha+1}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{-\alpha+1}\left(\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} - 1\right) = \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}^+ & \text{ha} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

ii. $\alpha = 1$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = [\ln|x|]_1^{\infty} = [\ln x]_1^{\infty} = \infty$$

Kaptuk: A sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, $0 < \alpha \leq 1$ esetén divergens.

megj.: $\alpha = 0$ esetben a triviális $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ divergens sorról van szó, ahogyan $\alpha < 0$ esetben is: az általános tag ∞-hez tart, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, a sor divergens.

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = [2\sqrt{x}]_1^{\infty} = \infty \qquad \text{tehát a sor divergens.}$$

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}(k+1)}$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}(x+1)}\, dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^{3/2}}\, dx = \int\limits_1^{\infty} (x+1)^{-\frac{3}{2}}\, dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x+1}}\right]_1^{\infty} = \sqrt{2}$$

Tehát a sor konvergens.

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg} x]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ tehát a sor konvergens.

(h) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+2)}$

Az integrálkritériumot kombináljuk a majoráns kritériummal:

Egyrészt: $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+2)} = \sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln^2(k+1)} < \sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln^2(k)}$

Másrészt: a (c) részben már bizonyítottuk, hogy a $\sum \frac{1}{(k)\ln^2(k)}$ sor konvergens, így ez a sor is konvergens.

megj.: az első lépésben felhasználtuk, hogy a $k = 2, 3, \ldots$ számokra az $\ln(k+1) > \ln k$ és $\ln^2(k+1) > \ln^2 k$ egyenlőtlenségek fennállnak.

(i) $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln k}$

$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln|\ln x|]_2^\infty = [\ln\ln x]_2^\infty = \infty$ tehát a sor divergens.

(j) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k}{e^k}$

$\int\limits_1^\infty \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x = [e^{-x}(-x-1)]_1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x-1}{e^x} - \left(\frac{1}{e}\cdot(-2)\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{e^x} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$

Tehát a sor konvergens.

megj.: parciális integrálással.

10. Vizsgálja meg a következő, váltakozó előjelű sorokat konvergencia szempontjából!

eml.: egy váltakozó előjelű $\sum\limits_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}a_k$ sor (ahol $a_k > 0$) konvergenciájának elégséges feltétele, hogy az általános tagból származtatott $\{a_k\}$ pozitív-tagú számsorozat monoton csökkenő legyen és 0-hoz tartson.

Ekkor továbbá: $\left|\sum\limits_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}a_k\right| \leq |a_1|$.

(a) $\sum\limits_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}$

Mivel az $a_k = \frac{1}{2k-1}$ sorozat szig. mon. csökkenő, és $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k-1} = 0$, ezért a sor konvergens.

Továbbá $|\sum\limits_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}| \leq |a_1| = 1$

(b) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}$

Mivel az $a_k = \frac{1}{k^2}$ sorozat szig. mon. csökkenő, és $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$, ezért a sor konvergens.

Továbbá $|\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}| \leq |a_1| = 1$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{k^2+k}$

Mivel az $a_k = \frac{2k+1}{k^2+k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ sorozat szig. mon. csökkenő, és $\lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{k^2+k} = 0$, ezért a sor konvergens.

Továbbá $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = -1$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \sqrt[k+1]{0,01}$

Mivel $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{0,01} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{\frac{1}{100}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k+1]{100}} = 1 \neq 0$, ezért a sor divergens.