Analízis előadások

Vajda István

Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2014. március 23.

A numerikus sor fogalma

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ formális összeget, ahol $a_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges k pozitív egész esetén, numerikus sornak nevezzük.

Példák:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots$

A numerikus sor fogalma

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ formális összeget, ahol $a_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges k pozitív egész esetén, numerikus sornak nevezzük.

Példák:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots$

A numerikus sor fogalma

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ formális összeget, ahol $a_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges k pozitív egész esetén, numerikus sornak nevezzük.

Példák:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots$

A numerikus sor fogalma

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ formális összeget, ahol $a_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges k pozitív egész esetén, numerikus sornak nevezzük.

Példák:

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots$

A numerikus sor fogalma

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ formális összeget, ahol $a_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges k pozitív egész esetén, numerikus sornak nevezzük.

Példák:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots$

A numerikus sor részletösszegei

Definíció: Az $\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$ azaz az $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összeget a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor n-edik részletösszegének nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ numerikus sor harmadik részletösszege $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor n-edik részletösszege 1, ha n páratlan és 0, ha n páros.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ sor n-edik részletösszege

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

A numerikus sor részletösszegei

Definíció: Az $\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$ azaz az $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összeget a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor n-edik részletösszegének nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ numerikus sor harmadik részletösszege $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor n-edik részletösszege 1, ha n páratlan és 0, ha n páros.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ sor n-edik részletösszege

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

A numerikus sor részletösszegei

Definíció: Az $\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$ azaz az $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összeget a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor n-edik részletösszegének nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ numerikus sor harmadik részletösszege $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor n-edik részletösszege 1, ha n páratlan és 0, ha n páros.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ sor n-edik részletösszege

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

A numerikus sor részletösszegei

Definíció: Az $\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$ azaz az $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összeget a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor n-edik részletösszegének nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ numerikus sor harmadik részletösszege $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor n-edik részletösszege 1, ha n páratlan és 0, ha n páros.
- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ sor n-edik részletösszege

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

A numerikus sor konvergenciája

Definíció: Egy numerikus sort konvergensnek nevezünk, ha a részletösszegeiből alkotott sorozat konvergens, és ekkor a sor összegén a részletösszegsorozat határértékét értjük.

Definíció: Ha egy numerikus sor nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ numerikus sor konvergens és öszege 1, mert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$
- A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor divergens, mert részletösszegeinek sorozata, az $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ sorozat divergens.

A numerikus sor konvergenciája

Definíció: Egy numerikus sort konvergensnek nevezünk, ha a részletösszegeiből alkotott sorozat konvergens, és ekkor a sor összegén a részletösszegsorozat határértékét értjük.

Definíció: Ha egy numerikus sor nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ numerikus sor konvergens és öszege 1, mert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$
- A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor divergens, mert részletösszegeinek sorozata, az $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ sorozat divergens.

A numerikus sor konvergenciája

Definíció: Egy numerikus sort konvergensnek nevezünk, ha a részletösszegeiből alkotott sorozat konvergens, és ekkor a sor összegén a részletösszegsorozat határértékét értjük.

Definíció: Ha egy numerikus sor nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ numerikus sor konvergens és öszege 1, mert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor divergens, mert részletösszegeinek sorozata, az $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ sorozat divergens.

A numerikus sor konvergenciája

Definíció: Egy numerikus sort konvergensnek nevezünk, ha a részletösszegeiből alkotott sorozat konvergens, és ekkor a sor összegén a részletösszegsorozat határértékét értjük.

Definíció: Ha egy numerikus sor nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ numerikus sor konvergens és öszege 1, mert
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$
- A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ sor divergens, mert részletösszegeinek sorozata, az $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ sorozat divergens.

A mértani sor konvergenciája

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} aq^k}$ numerikus sort, ahol a és q valós számok, mértani sornak nevezünk.

Megjegyzés: Tehát a mértani sor tagjai egy mértani sorozat elemei.

Az n-edik részletösszeg:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ellenőrizhető, hogy az (s_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $a = 0$ vagy $|q| < 1$, ekkor $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} s_n = a \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}$$

Ha $a \neq 0$ és $q \geq 1$, akkor a mértani sor divergens.

A mértani sor konvergenciája

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} aq^k}$ numerikus sort, ahol a és q valós számok, mértani sornak nevezünk.

Megjegyzés: Tehát a mértani sor tagjai egy mértani sorozat elemei.

Az n-edik részletösszeg:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ellenőrizhető, hogy az (s_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $a = 0$ vagy $|q| < 1$, ekkor $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} s_n = a \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}$$

Ha $a \neq 0$ és $q \geq 1$, akkor a mértani sor divergens.

A mértani sor konvergenciája

Definíció: A $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k}$ numerikus sort, ahol a és q valós számok, mértani sornak nevezünk.

Megjegyzés: Tehát a mértani sor tagjai egy mértani sorozat elemei.

Az n-edik részletösszeg:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ellenőrizhető, hogy az (s_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $a = 0$ vagy $|q| < 1$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} s_n = a \cdot \frac{0-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}$$

Ha $a \neq 0$ és $q \geq 1$, akkor a mértani sor divergens.

A mértani sor konvergenciája

Definíció: A $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} aq^k}$ numerikus sort, ahol a és q valós számok, mértani sornak nevezünk.

Megjegyzés: Tehát a mértani sor tagjai egy mértani sorozat elemei.

Az n-edik részletösszeg:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ellenőrizhető, hogy az (s_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $a = 0$ vagy $|q| < 1$, ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \lim_{n\to\infty} s_n = a \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}$$

Ha $a \neq 0$ és $q \geq 1$, akkor a mértani sor divergens.

Példa numerikus sor konvergenciájára

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ sor konvergens és összege 1.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

A sor n-edik részletösszege:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, a sor konvergens és összege 1.

Példa numerikus sor konvergenciájára

Példa: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ sor konvergens és összege 1.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

A sor n-edik részletösszege:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, a sor konvergens és összege 1.

A harmonikus sor divergens

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor (harmonikus sor) divergens.

Bizonyítás: Igazoljuk (teljes indukciót alkalmazva), hogy $s_{2^n} > \frac{n}{2}$

I. $n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen $s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

II. Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy n pozitív egész számra. Ekkor

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > s_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} =$$
$$= s_{2^n} + \frac{1}{2} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2},$$

azaz az állítás igaz $n+1$-re is.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, a fentiek alapján $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty$. A részletösszegek (s_n) sorozata szigorúan monoton növekedő, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ is teljesül.

Tehát a részletösszegek sorozata divergens, így a sor is divergens.

A harmonikus sor divergens

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor (harmonikus sor) divergens.

Bizonyítás: Igazoljuk (teljes indukciót alkalmazva), hogy $s_{2^n} > \frac{n}{2}$

I. $n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen $s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

II. Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy n pozitív egész számra. Ekkor

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > s_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} =$$
$$= s_{2^n} + \frac{1}{2} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2},$$

azaz az állítás igaz $n+1$-re is.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, a fentiek alapján $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty$. A részletösszegek (s_n) sorozata szigorúan monoton növekedő, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ is teljesül.

Tehát a részletösszegek sorozata divergens, így a sor is divergens.

Egy konvergens numerikus sor

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás: A sor részletösszegeiből alkotott sorozat monoton növekedő, hiszen a sor minden tagja pozitív.
A sor részletösszegeiből alkotott sorozat felülről korlátos:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Az s_n sorozat tehát konvergens, így a sor is konvergens. A sor összegét nem kaptuk meg a fenti gondolatmenet alapján, de tudjuk, hogy 1 és 2 közé esik.

Egy konvergens numerikus sor

Példa: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ sor konvergens.

Bizonyítás: A sor részletösszegeiből alkotott sorozat monoton növekedő, hiszen a sor minden tagja pozitív.

A sor részletösszegeiből alkotott sorozat felülről korlátos:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Az s_n sorozat tehát konvergens, így a sor is konvergens. A sor összegét nem kaptuk meg a fenti gondolatmenet alapján, de tudjuk, hogy 1 és 2 közé esik.

A numerikus sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Definíció: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sort korlátosnak nevezzük, ha a részletösszegeiből alkotott sorozat korlátos.

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, akkor korlátos is.

Bizonyítás: Ha a sor konvergens, akkor a részletösszegeiből alkotott (s_n) sorozat is konvergens. Ismert tétel szerint ekkor (s_n) korlátos is, tehát a fenti definíció szerint a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor is korlátos.

A numerikus sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sort korlátosnak nevezzük, ha a részletösszegeiből alkotott sorozat korlátos.

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, akkor korlátos is.

Bizonyítás: Ha a sor konvergens, akkor a részletösszegeiből alkotott (s_n) sorozat is konvergens. Ismert tétel szerint ekkor (s_n) korlátos is, tehát a fenti definíció szerint a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor is korlátos.

A numerikus sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sort korlátosnak nevezzük, ha a részletösszegeiből alkotott sorozat korlátos.

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, akkor korlátos is.

Bizonyítás: Ha a sor konvergens, akkor a részletösszegeiből alkotott (s_n) sorozat is konvergens. Ismert tétel szerint ekkor (s_n) korlátos is, tehát a fenti definíció szerint a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor is korlátos.

A numerikus sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, akkor általános tagjának határértéke 0, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bizonyítás: Ha a sor konvergens, akkor a részletösszegeiből alkotott sorozat is konvergens: $\lim_{n\to\infty} s_n = A$, ahol $A \in \mathbb{R}$.

Az (s_{n-1}) sorozat elemei $n \geq 2$-től kezdve ugyanezt a sorozatot alkotják, ezért $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A$.

Innen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A - A = 0$$

A numerikus sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, akkor általános tagjának határértéke 0, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bizonyítás: Ha a sor konvergens, akkor a részletösszegeiből alkotott sorozat is konvergens: $\lim_{n\to\infty} s_n = A$, ahol $A \in \mathbb{R}$.

Az (s_{n-1}) sorozat elemei $n \geq 2$-től kezdve ugyanezt a sorozatot alkotják, ezért $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A$.

Innen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A - A = 0$$

A numerikus sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$ sor divergens, mert általános tagja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$$

Megjegyzés: A tétel megfordítása nem igaz, pl. a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor általános tagja 0-hoz tart, a sor mégsem konvergens.

A numerikus sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k$ sor divergens, mert általános tagja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$$

Megjegyzés: A tétel megfordítása nem igaz, pl. a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ harmonikus sor általános tagja 0-hoz tart, a sor mégsem konvergens.

A Cauchy-féle konvergencia-kritérium

Tétel: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan ν küszöbszám, hogy $n > m > \nu$ esetén

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Bizonyítás: A sor (s_n) részletösszegsorozata a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergencia-kritérium szerint pontosan akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan ν, hogy $n > m > \nu$ esetén

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Mivel a sor – definíció szerint – akkor konvergens, ha a részletösszeg sorozata konvergens, az állítást beláttuk.

A Cauchy-féle konvergencia-kritérium

Tétel: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan ν küszöbszám, hogy $n > m > \nu$ esetén

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Bizonyítás: A sor (s_n) részletösszegsorozata a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergencia-kritérium szerint pontosan akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan ν, hogy $n > m > \nu$ esetén

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Mivel a sor – definíció szerint – akkor konvergens, ha a részletösszeg sorozata konvergens, az állítást beláttuk.

A Cauchy-féle konvergencia-kritérium

Példa: Tekintsük a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ mértani sort. Tudjuk, hogy ez a sor konvergens, tehát a tételben szereplő állításnak teljesülnie kell. Valóban:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m+2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}\right)$$

A második tényező 1-nél kisebb pozitív szám, így csak az első tényezőnek kell ε-nál kisebbnek lennie, ami teljesül, ha $m > \nu$, ahol ν alkalmas küszöbszám, hiszen $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 0$.

A Cauchy-féle konvergencia-kritérium

Példa: Tekintsük a $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ sort!

Ha $n>m$ természetes szám, akkor

$$|a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_n|=$$

$$=\left|(-1)^{m+2}\cdot\frac{1}{m+1}+(-1)^{m+3}\cdot\frac{1}{m+2}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\ldots+(-1)^{n-m-1}\cdot\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\ldots+(-1)^{n-m-1}\cdot\frac{1}{n}$$

Az abszolút érték azért hagyható el, mert $\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\ldots+(-1)^{n-m-1}\cdot\frac{1}{n}>0$, hiszen előállítható csupa pozitív szám összegeként:

$$\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\ldots+(-1)^{n-m-1}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\left(\frac{1}{m+3}-\frac{1}{m+4}\right)+\ldots$$

A Cauchy-féle konvergencia-kritérium

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\nu \in \mathbb{Z}^+$, amelyre $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$. Ekkor $n > m > \nu$ esetén:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \ldots + (-1)^{n-m-1} \cdot \frac{1}{n} =$$
$$= \frac{1}{m+1} - \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) - \ldots < \varepsilon$$

A vizsgált sor tehát konvergens.

Megjegyzés: A Cauchy-féle kritériummal csak a konvergencia tényét igazoltuk, nem kaptuk meg a sor összegét.

Tagok elhagyása, hozzávétele

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens numerikus sor tagjai közül véges sokat elhagyunk, vagy a sorhoz véges sok új tagot hozzáveszünk akkor a kapott sor szintén konvergens.

Jeltartó és alternáló sorok

Definíció: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor jeltartó, ha minden tagja nemnegatív, vagy ha minden tagja nempozitív.

Tétel: Egy jeltartó sor konvergens, vagy tágabb értelemben vett összege ($-\infty$ vagy $+\infty$) van.

Bizonyítás: Ha pl. a sor tagjai nemnegatívak, akkor a részletösszegeiből alkotott (s_n) sorozat monoton növekedő. Ha (s_n) korlátos, akkor konvergens (ezért a sor is konvergens), ha (s_n) nem korlátos, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, tehát a sorösszeg is $+\infty$.

Hasonlóan okoskodhatunk nempozitív tagokat tartalmazó jeltartó sor esetén is.

Jeltartó és alternáló sorok

Definíció: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor jeltartó, ha minden tagja nemnegatív, vagy ha minden tagja nempozitív.

Tétel: Egy jeltartó sor konvergens, vagy tágabb értelemben vett összege ($-\infty$ vagy $+\infty$) van.

Bizonyítás: Ha pl. a sor tagjai nemnegatívak, akkor a részletösszegeiből alkotott (s_n) sorozat monoton növekedő. Ha (s_n) korlátos, akkor konvergens (ezért a sor is konvergens), ha (s_n) nem korlátos, akkor $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, tehát a sorösszeg is $+\infty$.

Hasonlóan okoskodhatunk nempozitív tagokat tartalmazó jeltartó sor esetén is.

Jeltartó és alternáló sorok

Definíció: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor jeltartó, ha minden tagja nemnegatív, vagy ha minden tagja nempozitív.

Tétel: Egy jeltartó sor konvergens, vagy tágabb értelemben vett összege ($-\infty$ vagy $+\infty$) van.

Bizonyítás: Ha pl. a sor tagjai nemnegatívak, akkor a részletösszegeiből alkotott (s_n) sorozat monoton növekedő. Ha (s_n) korlátos, akkor konvergens (ezért a sor is konvergens), ha (s_n) nem korlátos, akkor $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, tehát a sorösszeg is $+\infty$.

Hasonlóan okoskodhatunk nempozitív tagokat tartalmazó jeltartó sor esetén is.

Jeltartó sorok

Tétel: Egy jeltartó sor akkor és csak akkor konvergens, ha korlátos.

Bizonyítás: Korábban láttuk, hogy ha egy numerikus sor konvergens, akkor korlátos is, tehát elég belátni, hogy ha egy jeltartó numerikus sor korlátos, akkor konvergens is.

A jeltartó numerikus sor részletösszegeinek sorozata monoton. Ha a sor korlátos, akkor a részletösszegek sorozata is korlátos, tehát a sorozatok konvergenciájára vonatkozó elégséges feltétel szerint a részletösszegek sorozata konvergens.
Tehát a numerikus sor is konvergens.

Jeltartó sorok

Tétel: Egy jeltartó sor akkor és csak akkor konvergens, ha korlátos.

Bizonyítás: Korábban láttuk, hogy ha egy numerikus sor konvergens, akkor korlátos is, tehát elég belátni, hogy ha egy jeltartó numerikus sor korlátos, akkor konvergens is.

A jeltartó numerikus sor részletösszegeinek sorozata monoton. Ha a sor korlátos, akkor a részletösszegek sorozata is korlátos, tehát a sorozatok konvergenciájára vonatkozó elégséges feltétel szerint a részletösszegek sorozata konvergens.
Tehát a numerikus sor is konvergens.

Leibniz-féle sorok

Definíció: Egy váltakozó előjelű (alternáló) sort Leibniz-féle sornak nevezünk, ha a tagjainak abszolút értéke monoton csökken.

Tétel: Egy Leibniz-féle sor akkor és csak akkor konvergens, ha általános tagja 0-hoz tart.

Bizonyítás: Korábban láttuk, hogy ha a sor konvergens, akkor az általános tag a 0-hoz konvergál, tehát elég belátni, hogy Leibniz-féle sorok esetén a fordított irányú állítás is teljesül.

Ha pl. a páratlan indexű tagok pozitív előjelűek, akkor a részletösszegsorozat páratlan indexű elemeiből alkotott részsorozat monoton csökkenő:

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} = s_{2n+1} - |a_{2n+2}| + |a_{2n+3}| \leq s_{2n+1},$$

mivel $|a_{2n+2}| \geq |a_{2n+3}|$.

Leibniz-féle sorok

Definíció: Egy váltakozó előjelű (alternáló) sort Leibniz-féle sornak nevezünk, ha a tagjainak abszolút értéke monoton csökken.

Tétel: Egy Leibniz-féle sor akkor és csak akkor konvergens, ha általános tagja 0-hoz tart.

Bizonyítás: Korábban láttuk, hogy ha a sor konvergens, akkor az általános tag a 0-hoz konvergál, tehát elég belátni, hogy Leibniz-féle sorok esetén a fordított irányú állítás is teljesül.

Ha pl. a páratlan indexű tagok pozitív előjelűek, akkor a részletösszegsorozat páratlan indexű elemeiből alkotott részsorozat monoton csökkenő:

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} = s_{2n+1} - |a_{2n+2}| + |a_{2n+3}| \leq s_{2n+1},$$

mivel $|a_{2n+2}| \geq |a_{2n+3}|$.

Leibniz-féle sorok

Definíció: Egy váltakozó előjelű (alternáló) sort Leibniz-féle sornak nevezünk, ha a tagjainak abszolút értéke monoton csökken.

Tétel: Egy Leibniz-féle sor akkor és csak akkor konvergens, ha általános tagja 0-hoz tart.

Bizonyítás: Korábban láttuk, hogy ha a sor konvergens, akkor az általános tag a 0-hoz konvergál, tehát elég belátni, hogy Leibniz-féle sorok esetén a fordított irányú állítás is teljesül.

Ha pl. a páratlan indexű tagok pozitív előjelűek, akkor a részletösszegsorozat páratlan indexű elemeiből alkotott részsorozat monoton csökkenő:

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} = s_{2n+1} - |a_{2n+2}| + |a_{2n+3}| \leq s_{2n+1},$$

mivel $|a_{2n+2}| \geq |a_{2n+3}|$.

Leibniz-féle sorok

Ez a részsorozat alulról korlátos, hiszen minden tagja nemnegatív, mert előállítható nemnegatív számok összegeként:

$$s_{2n+1} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + a_{2n+1}$$

Felülről is korlátos, hiszen s_1 a monoton csökkenés miatt felső korlát. Tehát a részletösszegsorozat páratlan indexű elemekből álló részsorozata konvergens, hiszen teljesül rá a konvergencia elégséges feltétele.

A részletösszeg sorozat páros indexű elemekből álló részsorozata ugyancsak konvergens és határértéke megegyezik a páratlan elemekből álló részsorozat határértékével:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - 0 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

Tehát a részletösszegsorozat konvergens, így a sor is kovergens.

Leibniz-féle sorok

Ez a részsorozat alulról korlátos, hiszen minden tagja nemnegatív, mert előállítható nemnegatív számok összegeként:

$$s_{2n+1} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + a_{2n+1}$$

Felülről is korlátos, hiszen s_1 a monoton csökkenés miatt felső korlát. Tehát a részletösszegsorozat páratlan indexű elemekből álló részsorozata konvergens, hiszen teljesül rá a konvergencia elégséges feltétele.

A részletösszeg sorozat páros indexű elemekből álló részsorozata ugyancsak konvergens és határértéke megegyezik a páratlan elemekből álló részsorozat határértékével:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - 0 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

Tehát a részletösszegsorozat konvergens, így a sor is kovergens.

Leibniz-féle sorok

Ez a részsorozat alulról korlátos, hiszen minden tagja nemnegatív, mert előállítható nemnegatív számok összegeként:

$$s_{2n+1} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + a_{2n+1}$$

Felülről is korlátos, hiszen s_1 a monoton csökkenés miatt felső korlát. Tehát a részletösszegsorozat páratlan indexű elemekből álló részsorozata konvergens, hiszen teljesül rá a konvergencia elégséges feltétele.

A részletösszeg sorozat páros indexű elemekből álló részsorozata ugyancsak konvergens és határértéke megegyezik a páratlan elemekből álló részsorozat határértékével:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - 0 = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

Tehát a részletösszegsorozat konvergens, így a sor is kovergens.

Abszolút konvergens sorok

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a tagok abszolút értékeiből alkotott sor (azaz a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor) konvergens.

Definíció: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor feltételesen konvergensnek nevezzük.

Példa: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ numerikus sor konvergens, de nem abszolút konvergens, hiszen a tagok abszolút értékeiből alkotott sor a harmonikus sor, ami divergens. A sor tehát feltételesen konvergens.

Abszolút konvergens sorok

Definíció: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a tagok abszolút értékeiből alkotott sor (azaz a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor) konvergens.

Definíció: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor feltételesen konvergensnek nevezzük.

Példa: A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ numerikus sor konvergens, de nem abszolút konvergens, hiszen a tagok abszolút értékeiből alkotott sor a harmonikus sor, ami divergens. A sor tehát feltételesen konvergens.

Abszolút konvergens sorok

Definíció: A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a tagok abszolút értékeiből alkotott sor (azaz a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor) konvergens.

Definíció: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor feltételesen konvergensnek nevezzük.

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ numerikus sor konvergens, de nem abszolút konvergens, hiszen a tagok abszolút értékeiből alkotott sor a harmonikus sor, ami divergens. A sor tehát feltételesen konvergens.

Leibniz-féle sorok

Tétel: A konvergens Leibniz-féle sorok összegének abszolút értéke nem nagyobb az első tag abszolút értékénél.

Bizonyítás: Az állítást arra az esetre bizonyítjuk, amikor az első tag pozitív. A másik eset bizonyítása hasonlóan történhet.

A részletösszegek sorozatának egyetlen tagja sem nagyobb a_1-nél, ugyanis páratlan számú tag esetén:

$$s_{2n+1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots + (a_{2n} + a_{2n+1}),$$

és a zárójeles összegek mindegyike nempozitív, mivel a páros indexű tagok negatívak és abszolút értékük nagyobb vagy egyenlő, mint a következő tag abszolút értéke. Tehát $s_{2n+1} \leq a_1$.

Leibniz-féle sorok

Tétel: A konvergens Leibniz-féle sorok összegének abszolút értéke nem nagyobb az első tag abszolút értékénél.

Bizonyítás: Az állítást arra az esetre bizonyítjuk, amikor az első tag pozitív. A másik eset bizonyítása hasonlóan történhet.

A részletösszegek sorozatának egyetlen tagja sem nagyobb a_1-nél, ugyanis páratlan számú tag esetén:

$$s_{2n+1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots + (a_{2n} + a_{2n+1}),$$

és a zárójeles összegek mindegyike nempozitív, mivel a páros indexű tagok negatívak és abszolút értékük nagyobb vagy egyenlő, mint a következő tag abszolút értéke. Tehát $s_{2n+1} \leq a_1$.

Leibniz-féle sorok

Páros számú tag esetén:

$$s_{2n} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots + (a_{2n-2} + a_{2n-1}) + a_{2n}$$

Itt hasonlóan okoskodva és figyelembe véve, hogy $a_{2n} < 0$, kapjuk, hogy $s_{2n} < a_1$

Korábban beláttuk, hogy ha a Leibniz-féle sor első tagja pozitív, akkor a részletösszegei nemnegatívak, tehát

$$0 \leq s_n \leq a_1$$

Így

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} s_n \leq a_1,$$

azaz

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq a_1,$$

Leibniz-féle sorok

Páros számú tag esetén:

$$s_{2n} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \ldots + (a_{2n-2} + a_{2n-1}) + a_{2n}$$

Itt hasonlóan okoskodva és figyelembe véve, hogy $a_{2n} < 0$, kapjuk, hogy $s_{2n} < a_1$

Korábban beláttuk, hogy ha a Leibniz-féle sor első tagja pozitív, akkor a részletösszegei nemnegatívak, tehát

$$0 \leq s_n \leq a_1$$

Így

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} s_n \leq a_1,$$

azaz

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq a_1,$$

Műveletek numerikus sorokkal

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és $c \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k)$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ sorok is konvergensek és

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Műveletek numerikus sorokkal

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és $c \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k)$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ sorok is konvergensek és

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Műveletek numerikus sorokkal

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és $c \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k)$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ sorok is konvergensek és

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Műveletek numerikus sorokkal

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és $c \in \mathbb{R}$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(ca_k)$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty}(ca_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$ sorok is konvergensek és

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Majoráns és minoráns sorok

Definíció: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok között olyan kapcsolat van, hogy az egyik sor tagjai (esetleg véges sok kivételével) nem nagyobbak a másik sor megfelelő tagjainál, azaz $a_k \leq b_k$, akkor

a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sort a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor *majoráns sorának*,

a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sort a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor *minoráns sorának* nevezzük.

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ majoráns sora a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+2}\right)^k$ sornak.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$ minoráns sora a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$ sornak.

Majoráns és minoráns sorok

Definíció: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok között olyan kapcsolat van, hogy az egyik sor tagjai (esetleg véges sok kivételével) nem nagyobbak a másik sor megfelelő tagjainál, azaz $a_k \leq b_k$, akkor

a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sort a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor *majoráns sorának*,

a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sort a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sor *minoráns sorának* nevezzük.

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ majoráns sora a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+2}\right)^k$ sornak.
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$ minoráns sora a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$ sornak.

A majoráns kritérium

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sornak a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ pozitív tagú sor majoráns sora és $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+2}\right)^k$ sor konvergens, mert pozitív tagú és a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ sor konvergens majoráns sora.

A majoráns kritérium

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sornak a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ pozitív tagú sor majoráns sora és $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+2}\right)^k$ sor konvergens, mert pozitív tagú és a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ sor konvergens majoráns sora.

A minoráns kritérium

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor egy $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ pozitív tagú minoráns sora divergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is divergens.

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+5}$ sor divergens, mert $k \geq 5$ esetén $\frac{1}{k} \leq \frac{k+1}{k^2+5}$, tehát a sornak a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor pozitív tagú, divergens minoráns sora.

A minoráns kritérium

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor egy $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ pozitív tagú minoráns sora divergens, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is divergens.

Példa: A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+5}$ sor divergens, mert $k \geq 5$ esetén $\frac{1}{k} \leq \frac{k+1}{k^2+5}$, tehát a sornak a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor pozitív tagú, divergens minoráns sora.

A hányadoskritérium

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sorhoz megadható olyan $q \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy véges sok pozitív egész n kivételével $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens.

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor szomszédos tagjai hányadosának létezik (véges vagy végtelen) határértéke, azaz $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$, akkor

$A < 1$ esetén a sor konvergens,
$A = 1$ esetén a sor lehet konvergens is, divergens is,
$A > 1$ esetén a sor divergens.

A hányadoskritérium

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sorhoz megadható olyan $q \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy véges sok pozitív egész n kivételével $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens.

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor szomszédos tagjai hányadosának létezik (véges vagy végtelen) határértéke, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$, akkor

$A < 1$ esetén a sor konvergens,
$A = 1$ esetén a sor lehet konvergens is, divergens is,
$A > 1$ esetén a sor divergens.

A hányadoskritérium

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+5}{3^k}$ sor konvergens, mert
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2+2n+6}{n^2+5} = \frac{1}{3} < 1.$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^k}$ sor divergens, mert
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e} = +\infty.$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens, de ez a hányadoskritérium használatával nem állapítható meg, mert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

A hányadoskritérium

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+5}{3^k}$ sor konvergens, mert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2+2n+6}{n^2+5} = \frac{1}{3} < 1.$$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^k}$ sor divergens, mert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e} = +\infty.$$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens, de ez a hányadoskritérium használatával nem állapítható meg, mert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

A hányadoskritérium

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+5}{3^k}$ sor konvergens, mert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2+2n+6}{n^2+5} = \frac{1}{3} < 1.$$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^k}$ sor divergens, mert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e} = +\infty.$$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens, de ez a hányadoskritérium használatával nem állapítható meg, mert $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

A gyökkritérium

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sorhoz megadható olyan $q \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy véges sok pozitív egész n kivételével $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens.

Tétel: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor általános tagjával felírt $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ (véges vagy végtelen) határérték létezik, akkor

$A < 1$ esetén a sor konvergens,
$A = 1$ esetén a sor lehet konvergens is, divergens is,
$A > 1$ esetén a sor divergens.

A gyökkritérium

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sorhoz megadható olyan $q \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy véges sok pozitív egész n kivételével $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens.

Tétel: Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor általános tagjával felírt $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$ (véges vagy végtelen) határérték létezik, akkor

$A < 1$ esetén a sor konvergens,
$A = 1$ esetén a sor lehet konvergens is, divergens is,
$A > 1$ esetén a sor divergens.

A gyökkritérium

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+4}{2k}\right)^k$ sor konvergens, mert $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+4}{2n}=\frac{1}{2}<1.$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^k$ sor divergens, mert $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{2n+1}=\frac{3}{2}>1.$
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$ sor konvergenciájáról a gyökkritérium alapján nem lehet dönteni, mert $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2n}}}=1.$

A gyökkritérium

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+4}{2k}\right)^k$ sor konvergens, mert $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+4}{2n} = \frac{1}{2} < 1$.
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^k$ sor divergens, mert $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1$.
- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ sor konvergenciájáról a gyökkritérium alapján nem lehet dönteni, mert $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2n}}} = 1$.

A gyökkritérium

Példák:

- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+4}{2k}\right)^k$ sor konvergens, mert $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$
- A $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^k$ sor divergens, mert $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$
- A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ sor konvergenciájáról a gyökkritérium alapján nem lehet dönteni, mert $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2n}}} = 1.$

Az integrálkritérium

Tétel: Legyen az f függvény az $[1;+\infty[$ intervallumban értelmezett és monoton csökkenő, továbbá $\forall x \in [1;+\infty[$ esetén $f(x) > 0$.

A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ numerikus sor akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int\limits_{1}^{\infty} f$ improprius integrál konvergens.

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ sor konvergens, mert
  $$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} = \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{+\infty} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} = 2$$
- A $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$ sor divergens, mert $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^{+\infty} = +\infty$, tehát az improprius integrál divergens.

Az integrálkritérium

Tétel: Legyen az f függvény az $[1; +\infty[$ intervallumban értelmezett és monoton csökkenő, továbbá $\forall x \in [1; +\infty[$ esetén $f(x) > 0$.

A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ numerikus sor akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int\limits_{1}^{\infty} f$ improprius integrál konvergens.

Példák:

- A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ sor konvergens, mert
  $$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} = \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{+\infty} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^{+\infty} = 2$$
- A $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$ sor divergens, mert $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^{+\infty} = +\infty$, tehát az improprius integrál divergens.