Differenciálegyenletek

1. Döntse el, hogy az alábbi differenciálegyenleteknek megoldásai-e a megadott $f(x)$ ill. $g(x)$ függvények!

BKSS 9.1.2

(a) $y'' - y = 2 - x^2$ $\quad f(x) = x^2 + e^x \quad g(x) = 2x^2 + e^x$ **Mo.:** f igen, g nem.

(b) $y'' = y + x^2$ (HF) $\quad f(x) = 2x^2 \quad g(x) = -x^2 - 2 - e^x$ **Mo.:** f nem, g igen.

(c) $(y - x)y''' = (y' - 1)y''$ $\quad f(x) = x + \sin x \quad g(x) = x - \sin x$ **Mo.:** f igen, g igen.

2. Szétválasztható változójú: $\boxed{y' = f(x)g(y)}$

SP 10.2. 10.11. 10.18. 10.29.

(a) $y' = y^2$ **Mo.:** $y = -\frac{1}{x+C}$

(b) $y - 2 + (x + 3)y' = 0$ **Mo.:** $y = \frac{C}{x+3} + 2$

(c) $y^2 \mathrm{d}x - x^2 \mathrm{d}y = 0$ **Mo.:** $y = \frac{x}{1-Cx}$

(d) $xy' + y = y^2 \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$ **Mo.:** $y_p = \frac{1}{1+x}$

Elsőrendű egyenletek

1. Elsőrendű, lineáris, homogén: $\boxed{y' + g(x)y = 0}$

BKSS 9.2.2.

(a) $xy' - 3y = 0$ **Mo.:** $y = Cx^3$

(b) $y' + x^2 y = 0$ **Mo.:** $y = Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$

(c) $y' + \frac{1}{\sqrt{x}} y = 0$ **Mo.:** $y = Ce^{-2\sqrt{x}}$

2. Elsőrendű, lineáris, inhomogén: $\boxed{y' + g(x)y = h(x)}$

Állandó variálása módszerrel

BKSS 9.2.3.

(a) $y' - \frac{y}{x+1} = x^2 - 1$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C(x+1) + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)(x+1)$

(b) $xy' + y = \cos\frac{x}{2}$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C\frac{1}{x} + 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)\frac{1}{x}$

(c) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^4 + x^3 - 2x^2}$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$

(d) $xy' + \frac{y}{\ln x} = 1$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{2}\ln x$

(e) $x^2 y' + y = xe^{\frac{1}{x}}\ln x$ **Mo.:** $y = Y + y_p = Ce^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}\left(\ln^2 x\right)e^{\frac{1}{x}}$

BKSS 9.2.4.

(f) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = -2\cos^3 x \quad y(0) = 1$ **Mo.:** $y_p = \cos x + \left(-x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\cos x$

(g) $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \quad y(0) = -2$ **Mo.:** $y_p = -2\sqrt{1+x^2} + (x - \mathrm{arctg}\,x)\sqrt{1+x^2}$

(h) $y' + y\cos x = \cos x \quad y(0) = -e$ **Mo.:** $y_p = (-1 - e)e^{-\sin x} + 1$

Próbafüggvény módszerrel (csak $\boxed{y' + ay = h(x)}$ alakú egyenleteket!)

BKSS 9.2.5.

(a) $y' + y = \sin x$ **Mo.:** $y = Y + y_p = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$

(b) $y' + \frac{1}{2}y = 5e^{2x} + 5e^{-x}$ **Mo.:** $y = Y + y_p = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 2e^{2x} - 10e^{-x}$

(c) $y' - 2y = e^{2x} + x$ (rezonancia!) **Mo.:** $y = Y + y_p = Ce^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

(d) $y' - 4y = \mathrm{sh}\,4x$ (rezonancia!) **Mo.:** $y = Y + y_p = Ce^{4x} + \frac{1}{2}xe^{4x} + \frac{1}{16}e^{-4x}$

Másodrendű egyenletek

1. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatójú, homogén diffegyenletek: $\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$

BKSS 9.3.1.

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$ **Mo.:** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$
(b) $4y'' + y' = 0$ **Mo.:** $y = C_1 + C_2e^{-\frac{1}{4}x}$
(c) $y'' + 5y' = 0$ (HF) **Mo.:** $y = C_1 + C_2e^{-5x}$
(d) $y'' - 6y' + 9y = 0$ **Mo.:** $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$
(e) $y'' - 2y' + 10y = 0$ **Mo.:** $y = e^x\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$
(f) $y'' + 4y = 0$ (HF) **Mo.:** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

2. Másodrendű, lineáris, állandó együtthatójú, inhomogén diffegyenletek: $\boxed{ay'' + by' + cy = h(x)}$

BKSS 9.3.2.-9.3.3.

(a) $9y'' - y = 4$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1e^{\frac{1}{3}x} + C_2e^{-\frac{1}{3}x} - 4$
(b) $y'' + y' = 6e^{\frac{x}{2}}$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1 + C_2e^{-x} + 8e^{\frac{1}{2}x}$
(c) $5y'' + y' = 18e^x - 52\cos x$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1 + C_2e^{-\frac{1}{5}x} + 3e^x + 10\cos x - 2\sin x$
(d) $y'' + y = 3x^2$ (HF) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1\cos x + C_2\sin x + 3x^2 - 6$
(e) $4y'' + y = 85(e^{-x} - e^{2x}) = 85e^{-x} - 85e^{2x}$ (HF) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2} + 17e^{-x} - 5e^{2x}$
(f) $2y'' - 2y' + 5y = -(100x^2 + 24)$ **Mo.:** $y = Y + y_p = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{3x}{2} + C_2\sin\frac{3x}{2}\right) - 20x^2 - 16x + \frac{24}{5}$
(g) $y'' - 4y = 10\cos x + 8x$ (HF útm.) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2\cos x - 2x$
(h) $y'' + 2y' + y = -10\cos 2x - 5\sin 2x$ (HF útm.) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 2\cos 2x - \sin 2x$
(i) $y'' + 4y = -\operatorname{sh} 3x = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$ (HF útm.) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{26}e^{3x} + \frac{1}{26}e^{-3x}$
(j) $y'' + 7y' + 6y = -6\sin x - \cos x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ **Mo.:** $y_p = -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

3. Ugyanez rezonanciával

BKSS 9.3.5.-9.3.6.

(a) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x} - 5e^{3x} + 6$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - 3xe^{2x} - 5xe^{3x} + 1$
(b) $y'' - 2y' - 3y = 6e^{-x} - 6x$ (HF) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{3}{2}xe^{-x} + 2x - \frac{4}{3}$
(c) $3y'' - y' = 2x - 7$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}x} - x^2 + x$
(d) $y'' - 2y' = 10\cos x - 4x$ (HF) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1 + C_2e^{2x} - 2\cos x - 4\sin x + x^2 + x$
(e) $-y'' - 6y' + 7y = \operatorname{sh} x + 1 = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + 1$ **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1e^x + C_2e^{-7x} - \frac{1}{16}xe^x - \frac{1}{24}e^{-x} + \frac{1}{7}$
(f) $y'' + y' = 3x^2 + 6x + 1 - 2e^{-x}$ (HF útm.) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1 + C_2e^{-x} + x^3 + x + 2xe^{-x}$
(g) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 4x$ (kettős rezonancia!) **Mo.:** $y = Y + y_p = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + x + 1$
(h) $y'' - 6y' = 12 + 37\sin x \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 0$ **Mo.:** $y_p = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}e^{6x} - 2x - \sin x + 6\cos x$

Differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

Lineáris, állandó együtthatójú, spec. kezdeti feltételekkel adott diff. egyenletek

1. Elsőrendű diffegyenletek: $\boxed{y' + by = h(x) \qquad y(0) = ...}$

BKSS 10.2.1.

a) $y' - 5y = 25x \quad y(0) = 1$ **Mo.:** $y = 2e^{5x} - 1 - 5x$
b) $y' + 2y = 10\sin 4x \quad y(0) = 0$ **Mo.:** $y = 2e^{-2x} - 2\cos 4x + \sin 4x$
c) $y' - 2y = -4x + 12\operatorname{ch} x \quad y(0) = 0$ **Mo.:** $y = 1 + 2x - 6e^x - 2e^{-x} + 7e^{2x}$
d) $y' - 3y = e^{3x} - 2 \quad y(0) = -2$ *(HF)* **Mo.:** $y = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}e^{3x} + xe^{3x}$
e) $y' + 2y = 10\operatorname{sh} 3x \quad y(0) = 5$ *(HF)* **Mo.:** $y = e^{3x} + 5e^{-3x} - e^{-2x}$

2. Másodrendű diffegyenletek: $\boxed{y'' + ay' + by = h(x) \qquad y(0) = ... \qquad y'(0) = ...}$

BKSS 10.2.2.

a) $y'' + 4y = 13e^{3x} \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 5$ **Mo.:** $y = e^{3x} + \sin 2x$
b) $y'' - y' = 2 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ **Mo.:** $y = -2 - 2x + 2e^x$
c) $y'' - 6y' + 9y = 25e^{-2t} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ **Mo.:** $y = e^{-2t} - e^{3t} + 5te^{3t}$
d) $y'' + 4y' = 68\sin x \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ *(HF)* **Mo.:** $y = 17 - e^{-4x} - 16\cos x - 4\sin x$
e) $y'' + 5y' + 4y = 4t \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$ *(HF)* **Mo.:** $y = -\frac{5}{4} + t + \frac{8}{3}e^{-t} - \frac{5}{12}e^{-4t}$
f) $y'' + 2y = 6e^{2x} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ *(HF)* **Mo.:** $y = e^{2x} - \cos\left(\sqrt{2}x\right) - \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}x\right)$
g) $y'' - y' - 2y = 18e^{-4x} + 12 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ *(HF)* **Mo.:** $y = -6 + e^{-4x} + 3e^{2x} + 2e^{-x}$