Numerikus sorozatok

Határérték-számítás

- **Polinomok**[1]

  (fokszám: legmagasabb kitevőjű n-hatvány kitevője; spec.: konstans polinom fokszáma: 0)
  (főegyüttható: a legmagasabb kitevőjű n-hatvány együtthatója)

  $$\lim_{n\to\infty}\left(3n^8+2n^5-7n+1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3n^8\right)=\boldsymbol{\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\left(-5n^3-2n^2+n-3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-5n^3\right)=\boldsymbol{-\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{4}n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2\right)=\boldsymbol{\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}n^3+5n^2-3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}n^3\right)=\boldsymbol{-\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}n^2=\boldsymbol{\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\left(-n^6\right)=\boldsymbol{-\infty}\qquad\qquad\left(-n^6\neq(-n)^6\right)$$

  Legalább elsőfokú polinom határértéke $+\infty$ vagy $-\infty$ aszerint, hogy a főegyüttható pozitív vagy negatív.
  Konstans polinom ($a_n=c$) határértéke a konstans.

- **Polinomok hányadosa** ($\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típus)

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{5n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{5n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}n=\boldsymbol{\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{-5n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{-5n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{5}n\right)=\boldsymbol{-\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^4+3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n^2}=\mathbf{0}^{(+)}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2+n+1}{2n^4+3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2}{2n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{2n^2}=\mathbf{0}^{(-)}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n}{2n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{2n^2}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3-2n+1}{-n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3}{-n^2}=\lim_{n\to\infty}2n=\boldsymbol{\infty}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}}{-6n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n}{-6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}}{-6}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$$

  Polinomok hányadosának határértéke:

  $$\begin{cases}+\infty & \text{, ha a számláló magasabb fokú, mint a nevező, és a főegyütthatók előjele megegyezik}\\ -\infty & \text{, ha a számláló magasabb fokú, mint a nevező, és a főegyütthatók előjele különbözik}\\ 0 & \text{, ha a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező}\\ \text{a főegyütthatók hányadosa} & \text{, ha a számláló és a nevező azonos fokszámú}\end{cases}$$

- **Gyökös kifejezések hányadosa**

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{9n^2+2n}-1}{\sqrt[4]{n^4+3n+1}+2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{9n^2+2n}{n^2}}-\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{\frac{n^4+3n+1}{n^4}}+2+\frac{5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{9+\frac{2}{n}}-\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+2+\frac{5}{n}}=\frac{1+3-0}{1+2+0}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sqrt{n}}{5\sqrt{n}+\sqrt{n^2+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{\sqrt{n}}{n}}{\frac{5\sqrt{n}}{n}+\sqrt{\frac{n^2+8}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{5}{\sqrt{n}}+\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}}=\frac{3+0}{0+1}=\mathbf{3}$$

  Megfelelő n-hatvánnyal egyszerűsítünk.

- $\infty-\infty$ **típus**

  $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\infty}=\mathbf{0}$$

[1] A polinom szó itt rövidítés: olyan számsorozatot jelent, amelyeknek képlete n polinomja

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n+1\right)-\left(n^2-n+1\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=$$
$$=\frac{2}{1+1}=\mathbf{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+3-\sqrt{n^2+2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n+3-\sqrt{n^2+2n-1}\right)\cdot\frac{n+3+\sqrt{n^2+2n-1}}{n+3+\sqrt{n^2+2n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+6n+9\right)-\left(n^2+2n-1\right)}{n+3+\sqrt{n^2+2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+10}{n+3+\sqrt{n^2+2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{10}{n}}{1+\frac{3}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{4}{2}=\mathbf{2}$$

- 1^∞ **típus**

Felh.: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{a_n}\right)^{a_n}=e^c$, ha $a_n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n=\mathbf{e^{-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4+2}{n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n-4}\right)^{n-4}\right]^{\frac{n}{n-4}}=\left(e^2\right)^1=\mathbf{e^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{4n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3+2}{n+3}\right)^{4n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{4n+3}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{4n+3}{n+3}}=\left(e^2\right)^4=\mathbf{e^8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-2}\right)^{n-5}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2+5}{2n-2}\right)^{n-5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2n-2}\right)^{n-5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{2n-2}\right)^{2n-2}\right]^{\frac{n-5}{2n-2}}=$$
$$=\left(e^5\right)^{\frac{1}{2}}=\mathbf{e^{\frac{5}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{2n^2-n+1}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1+\frac{1}{n}}\right)^{3n+1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1+\frac{1}{n}}\right)^{2n-1+\frac{1}{n}}\right]^{\frac{3n+1}{2n-1+\frac{1}{n}}}=\left(e^2\right)^{\frac{3}{2}}=\mathbf{e^3}$$

- **Mértani sorozat**

Felh.: $\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}\infty & \text{ha} \quad q>1\\ 1 & \text{ha} \quad q=1\\ 0 & \text{ha} \quad -1<q<1\\ \text{nem létezik} & \text{ha} \quad q\le -1\end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} 2^n=\boldsymbol{\infty}$

$\lim_{n\to\infty} (-2)^n$ nem létezik

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\mathbf{0}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=\mathbf{0}$

$\lim_{n\to\infty}(-0,54)^n=\mathbf{0}$

$\lim_{n\to\infty}(1,0001)^n=\boldsymbol{\infty}$

Gyakorló példák

Határozza meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{n^2-1} = 3$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2n^2+4n+1}{3n^2+n+1} = -\dfrac{2}{3}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{-3n^3+9n-5}{3n-7n^2+4n^4}\right) = 0^{(-)}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^4-2n^3+1}{2n^5-3n^2+0,5}\right) = 0^{(+)}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n^6+5n^5-4n^4}{n+2n^2-3n^3}\right) = -\infty$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n^6+5n^5-4n^4}{n+2n^2+3n^3}\right) = +\infty$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{-4n^4+9n^3-5}{n+2n^2+3n^3+4n^4}\right) = -1$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{5n^2-n+1}+n-3}{3n+\sqrt[4]{16n^4+n-1}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{5} \approx 0,647$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) = 0$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \dfrac{1}{2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2-3n+5}-2n\right) = -\dfrac{3}{4}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n-\sqrt{4n^2-5n}\right) = \dfrac{5}{4}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-5n+3}-n\right) = -\dfrac{5}{2}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2-3n+5}\right) = \dfrac{3}{2}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-5n+3}-\sqrt{n^2+5n-3}\right) = -5$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{-5n+2} = e^{-15}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+4}\right)^{-2n-3} = e^{2}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n-3}{5n+2}\right)^{3n-1} = e^{-3}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n+5}{6n+9}\right)^{2n+5} = e^{-\frac{4}{3}}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2-3}\right)^{3n^2+5n-1} = e^{9}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{\frac{1}{2}n^2+3n+1} = e$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n} = 0$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} (-3)^{n}$ nem létezik

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n} = 0$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^{n} = \infty$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} (-3,012)^{n}$ nem létezik

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{n} = \infty$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} (\pi)^{n} = \infty$