

# Az integrálszámítás alkalmazásai I.

## Területszámítás

1. Számítsa ki a görbe és az  $x$ -tengely közé zárt területet a megadott intervallumban:

a)  $y = x^2 - 3x + 7$   $[-1, 2]$

b)  $y = \frac{1}{2} + \sin(x)$   $[0, \pi]$

c)  $y = e^x - 1$   $[-1, 1]$

d)  $y = \sin^2(x) - \frac{1}{4}$   $[0, \pi]$

2. Számítsa ki az alábbi paraméteres alakban megadott görbe és az  $x$ -tengely közötti területet a megadott intervallumban:

a)  $x = 2 \cos(t)$ ,  $y = \sin(t)$ ,  $[0, \pi]$

b)  $x = t - \sin(t)$ ,  $y = 1 - \cos(t)$ ,  $[0, 2\pi]$

c)  $x = t^2 - 3t$ ,  $y = e^t$ ,  $t \in [2, 4]$

d)  $x = t^2 - 1$ ,  $y = \sin(t)$ ,  $t \in [2, 4]$

3. Számítsa ki az adott görbék által határolt korlátos síkrész területét:

a)  $y = 6x - x^2 - 7$ ,  $y = x - 3$

b)  $y = 2x^2 e^x$ ,  $y = -x^3 e^x$

c)  $y = x^3$ ,  $y = 4x$

d)  $y = \sin(x)$ ,  $y = \frac{2x}{\pi}$

4. Számítsa ki a paraméteres alakban megadott görbe által határolt síkidom területét:

a)  $x = t^2 - 1$ ,  $y = \sin(t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$

b)  $x = \cos^2(t)$ ,  $y = \sin(2t)$ ,  $t \in [0, \pi]$

c)  $x = t^2$ ,  $y = t^3 - 4t$   $[-2, 2]$

## Testek térfogata

1. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle 2 m, magassága 4 m. A gúla térfogata az ismert  $V = \frac{a^2 m}{3}$  képlet alapján  $\frac{16}{3} \text{ m}^3$ . Számítsuk ki a gúla térfogatát integrálással, így ellenőrizve a fenti képlet helyességét!

2. Egy hengerből, melynek alaplappja 3 cm sugarú kör, egy éket vágunk le egy az alaplappal  $45^\circ$ -os szöget bezáró síkkal, ami átmegy az alaplapp középpontján. Mekkora az ék térfogata?

3. Számítsa ki az adott görbeívnek az  $x$ -tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát:

a)  $y = 4 - x^2$ ,  $[-2, 2]$

b)  $y = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$ ,  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

c)  $y = \sqrt{x} e^{-x}$ ,  $[0, 1]$

4. Forgassuk az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvényt az  $x = 4$  egyenes és az  $y = 1$  egyenes által határolt korlátos síkidomot az  $y = 1$  egyenes körül! Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

5. Forgassuk meg az  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  és az  $x = 1$  egyenletű görbék által határolt véges tartományt az  $x$ -tengely körül! Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?  
Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amelyet úgy nyerünk, hogy ugyanezen síkidomot az  $y$ -tengely körül forgatjuk meg?
6. Számítsa ki a következő paraméteresen megadott görbeív  $x$ -tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát:

a)  $x = \cos(t)$ ,  $y = \sin(2t)$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b)  $x = t^2 + t$ ,  $y = e^t$ ,  $t \in [0, 3]$

### Ívhossz számítása

1. Számítsa ki a görbeív hosszát a megadott intervallumban:

a)  $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ ,  $[0, 11]$

b)  $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $[0, 4]$

c)  $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}$ ,  $[-11, -3]$

d)  $y = \ln \sin(x)$ ,  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

e)  $y = \ln x - \frac{x^2}{8}$ ,  $[1, 2]$

f)  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. Számítsa ki az alábbi paraméteresen megadott görbeív hosszát a megadott intervallumban:

a)  $x = t^2$ ,  $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$ ,  $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$

b)  $x = e^t \sin(t)$ ,  $y = e^t \cos(t)$ ,  $t \in [0, \ln 2]$

### Felvízszámítás

1. Számítsa ki a görbe  $x$ -tengely körüli forgatásával nyert forgástest palástfelszínét:

a)  $y = \frac{1}{3}x^3$   $x \in [0, 1]$

b)  $y = \sqrt{9-x^2}$   $x \in [-3, 3]$

c)  $y = \sqrt{3-2x}$   $x \in [0, 1]$

d)  $y = \sqrt{2x-4}$   $x \in [2, 3]$

e)  $y = \frac{x^3}{9}$   $[0; 2]$

f)  $y = \operatorname{ch} x$   $[0; \ln 2]$

2. Forgassa meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel felírt görbék megadott darabját az  $x$  tengely körül, és számítsa ki a keletkező forgástestek palástjának felszínét:

a)  $x = t^2$ ,  $y = t$ ,  $t \in [0, 1]$

b)  $x = a \cos^2(t)$ ,  $y = a \sin^2(t)$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c)  $x = e^t \cos(t)$ ,  $y = e^t \sin(t)$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

d)  $x = \cos(t) + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ ,  $y = \sin(t)$ ,  $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$