Háló, Boole-algebra

A György-féle feladatsor megoldókulcsa

Új fogalmak: háló (**1.**), félháló (**3.**), korlátos háló (**2.c**), részháló (**5.**), izomorf hálók (**8.**), disztributív háló (**8.**), komplemens elemek hálóban (**11.**), Boole-algebra (**12.**)

1. $A = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$. Vizsgáljuk az $(A;lnko,lkkt)$ algebrát. Igazoljuk, hogy háló. Adjunk meg a hálón parciális rendezést. Igazoljuk, hogy a háló korlátos.

Megjegyzések
lnko: legnagyobb közös osztó; *lkkt*: legkisebb közös többszörös
algebra = algebrai struktúra = struktúra = egy halmaz és ezen a halmazon értelmezett műveletek = egy halmaz, és olyan műveletek, amelyek nem vezetnek ki a halmazból, azaz amelyekre a halmaz zárt.

Átgondolható, hogy A zárt az *lnko* ill. *lkkt* műveletekre: bármely két A-beli elem *lnko*-ja és *lkkt*-je A-ban van. Pl. $lnko(3,7) = 1$, $lkkt(3,7) = 21$ stb. "Baj lenne", ha pl. $8 \in A$ lenne: ekkor pl. $lkkt(3,8) = 24 \notin A$ teljesülne, tehát a művelet kivezetne a halmazból, és ez esetben nem beszélhetnénk algebráról.

A hálónak két definícióját is használjuk.
1. definíció: A *háló* olyan $(A;\preccurlyeq)$ parciálisan rendezett halmaz, amelyben bármely két elemnek van infimuma és szuprémuma.
2. definíció: A *háló* olyan $(A;\wedge,\vee)$ kétműveletes algebrai struktúra, amelyben a két művelet mindegyike kétváltozós, továbbá mindegyik kommutatív, asszociatív, idempotens és teljesülnek rájuk az abszorpciós törvények.

Tétel: A két definíció egyenértékű.
Egyrészt: Ha az $(A;\preccurlyeq)$ parciálisan rendezett halmaz háló, akkor az $x \wedge y = \inf(x,y)$, $x \vee y = \sup(x,y)$ definíciókkal $(A;\wedge,\vee)$ algebrai értelemben is háló (x, $y \in A$).
Másrészt: ha az $(A;\wedge,\vee)$ algebra háló, akkor az $x \preccurlyeq y$, ha $x \wedge y = x$ definícióval $(A;\preccurlyeq)$ parciálisan rendezett halmaz és háló (x, $y \in A$).

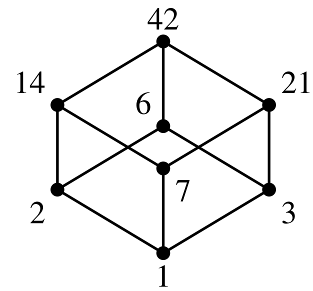
1. Mo.:

Először belátjuk, hogy a fenti algebra a 2. def. értelmében háló. Ehhez belátjuk, hogy az *lnko* és *lkkt* műveletek mindegyike kommutatív, asszociatív, idempotens, továbbá teljesülnek rájuk az abszorpciós törvények. Az áttekinthetőséget nehezíti, hogy a szereplő műveleti jeleket (*lnko* ill. *lkkt*) *elé*írással és nem *közé*írással használjuk (pl. $lnko(x,y)$-t írunk és nem $x\ lnko\ y$ -t). Ezért célszerű mindig az általános műveleti jelekkel is megfogalmazni, amit bizonyítani szeretnénk: ld. mindig keretezve!
lnko kommutatív, mert $\forall x,y \in A$ esetén $lnko(x,y) = lnko(y,x)$ (triviális) $\boxed{x \wedge y = y \wedge x}$
lnko asszociatív, mert $\forall x,y,z \in A$ esetén $lnko(x,lnko(y,z)) = lnko(lnko(x,y),z)$, ugyanis mindegyik egyenlő $lnko(x,y,z)$-vel. $\boxed{x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z}$
lnko idempotens, mert $\forall x \in A$ esetén $lnko(x,x) = x$ (triviális) $\boxed{x \wedge x = x}$
lkkt kommutatív, mert $\forall x,y \in A$ esetén $lkkt(x,y) = lkkt(y,x)$ (triviális) $\boxed{x \vee y = y \vee x}$
lkkt asszociatív, mert $\forall x,y,z \in A$ esetén $lkkt(x,lkkt(y,z)) = lkkt(lkkt(x,y),z)$, ugyanis mindegyik egyenlő $lkkt(x,y,z)$-vel. $\boxed{x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z}$
lkkt idempotens, mert $\forall x \in A$ esetén $lkkt(x,x) = x$ (triviális) $\boxed{x \vee x = x}$
abszorpció: $lnko(x,lkkt(x,y)) = x$, hiszen a "jobboldali" x osztója a "benti" x-nek és $lkkt(x,y)$-nak is, tehát közös osztó, és x-nek nincs x-nél nagyobb osztója; $\boxed{x \wedge (x \vee y) = x}$
$lkkt(x,lnko(x,y)) = x$, hiszen a "jobboldali" x többszöröse a "benti" x-nek és $lnko(x,y)$-nak is, tehát közös többszörös, és x-nek nincs x-nél kisebb többszöröse. $\boxed{x \vee (x \wedge y) = x}$
Ezzel beláttuk, hogy az algebra háló.

2. Mo.:

Gyakorlásképpen az 1. definíció szerint is belátjuk, hogy hálóról van szó!
A fenti tétel alapján: az $x \preccurlyeq y$, ha $x \wedge y = x$ definícióval $(A; \preccurlyeq)$ parciálisan rendezett halmaz és háló.
Most tehát $\boxed{x \preccurlyeq y} \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow lnko(x,y) = x \Leftrightarrow \boxed{x|y}$.

Tehát oszthatósági relációról van szó. $\mathbb{N}$ tetszőleges részhalmazán az oszthatóság parciális rendezési reláció, ezért a fenti A halmazon is.
Lássuk be, hogy bármely két elemnek van infimuma és szuprémuma! A gyors meghatározáshoz tekintsük a rendezés Hasse-diagramját:



Az egymással relációban lévő elempároknak triviálisan mindig van infimuma és szuprémuma, így elég az egymással relációban nem lévő elempárokat vizsgálni:
Tételesen:

$$\begin{array}{ll}
\inf(2,3) = 1 & \sup(2,3) = 6 \\
\inf(2,7) = 1 & \sup(2,7) = 14 \\
\inf(2,21) = 1 & \sup(2,21) = 42 \\
\inf(3,7) = 1 & \sup(3,7) = 21 \\
\inf(3,14) = 1 & \sup(3,14) = 42 \\
\inf(6,7) = 1 & \sup(6,7) = 42 \\
\inf(6,14) = 2 & \sup(6,14) = 42 \\
\inf(6,21) = 3 & \sup(6,21) = 42 \\
\inf(14,21) = 7 & \sup(14,21) = 42
\end{array}$$

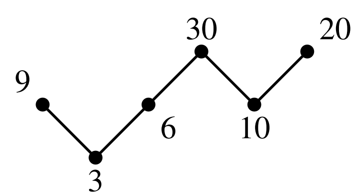
Beláttuk, hogy az 1. definíció szerint is hálóról van szó.

Másképp: a Hasse-diagram alapján az $(A; lnko, lkkt)$ algebra Boole-algebra, tehát háló. (ld.: **12.**)

2. Döntse el, hogy az alábbi, parciálisan rendezett halmazok hálót alkotnak-e az inf és sup műveletekkel:

(a) $A_1 = \{3,6,9,10,20,30\}$, $a \preccurlyeq b$, ha b osztható a-val, a,$b \in A_1$

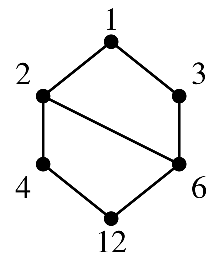
Mo.: Hasse-diagram:



Nem háló, pl. $\nexists$ inf(6,10), $\nexists$ sup(3,20)

(b) $A_2 = \{1,2,3,4,6,12\}$, $b \preccurlyeq a$, ha b osztható a-val, a,$b \in A_2$

Mo.: Hasse-diagram:



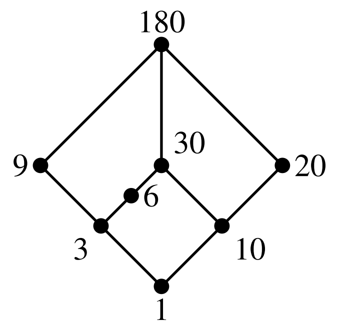
Háló. Bármely két elemnek van infimuma és szuprémuma:

$\inf(a,b) = lkkt(a,b),\ \sup(a,b) = lnko(a,b)$

(c) Az előző két példa közül az egyik nem háló. Egészítse ki a megfelelő halmazt olyan, minimális számú elemmel, hogy az így megadott halmaz az adott rendezéssel már háló legyen. Melyek ezek az elemek? Korlátos-e a háló?

Mo.: Az (a)-beli rendezésről van szó. Elég két elemmel bővítenünk az A_1 halmazt: vegyük hozzá az $\inf\{3,6,9,10,20,30\} = lnko\,(3,6,9,10,20,30) = 1$ ill. $\sup\{3,6,9,10,20,30\} = lkkt\,(3,6,9,10,20,30) = 180$ elemeket a halmazhoz. Az $A_3 = \{1,3,6,9,10,20,30,180\}$ halmaz már háló az adott parciális rendezési relációval.

Hasse-diagram:



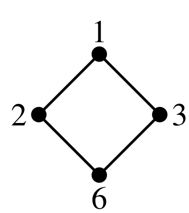
<u>def.</u>: *legkisebb elem*. Egy háló legkisebb eleme, ha létezik, egy olyan elem, amely a háló minden elemével relációban áll, és mindegyiknél kisebb vagy egyenlő. (ált. jel: $\mathbb{O}$)
<u>def.</u>: *legnagyobb elem*. Egy háló legnagyobb eleme, ha létezik, egy olyan elem, amely a háló minden elemével relációban áll, és mindegyiknél nagyobb vagy egyenlő. (ált. jel: $\mathbb{I}$)
<u>def.</u>: *korlátos háló*. Egy háló korlátos (más néven: egységelemes), ha van legkisebb és legnagyobb eleme.

A kiegészítéssel kapott háló korlátos: legkisebb eleme 1, legnagyobb eleme 180.
(Azaz: $\mathbb{O} = 1$ és $\mathbb{I} = 180$)

megj.: Vigyázat, a "kisebb vagy egyenlő", "nagyobb vagy egyenlő" kifejezés tartalma parciális rendezési relációk esetében (és így hálók esetében is) a megszokottól eltérő is lehet. Tekintsük ugyanis pl. az alábbi hálót:

$A = \{1,2,3,6\}$ halmazon $a \preccurlyeq b$, ha $b\,|\,a$.

Hasse-diagram:

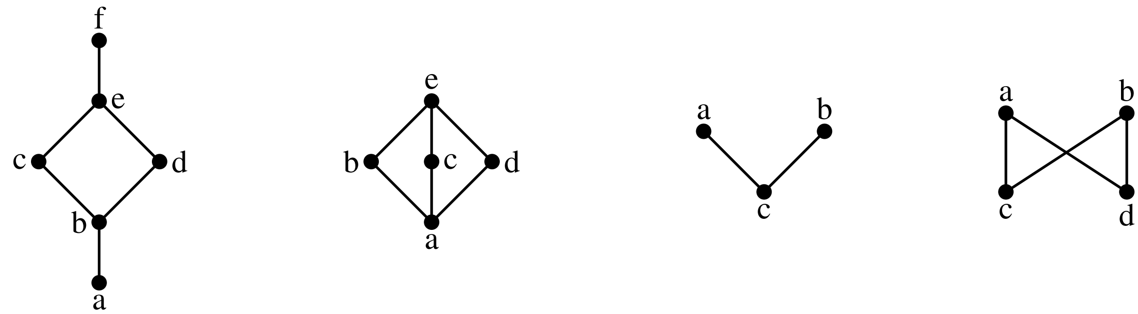


Ebben a rendezésben pl. $6 \preccurlyeq 2$ teljesül, tehát itt "6 kisebb vagy egyenlő, mint 2".

Továbbá $\mathbb{O} = 6$ és $\mathbb{I} = 1$. (Vö.: **2.b**)

3. Az alábbi ábrák egy-egy parciális rendezés Hasse-féle diagramjai. Melyek alkotnak hálót, illetve félhálót a *sup* és *inf* műveletekkel?

a) b) c) d)



Mo.: mindig elég az egymással relációban nem lévő elempárokat vizsgálni (ld. **1.**)

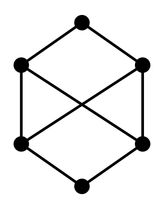
a) Háló. $\inf(c,d) = b$, $\sup(c,d) = e$

b) Háló. $\inf(b,c) = \inf(b,d) = \inf(c,d) = a$, $\sup(b,c) = \sup(b,d) = \sup(c,d) = e$

c) Félháló az inf műveletre, de nem háló. $\inf(a,b) = c$, de $\nexists \sup(a,b)$

d) Nem háló, nem félháló. $\nexists \sup(a,b)$, $\nexists \inf(c,d)$, sőt $\nexists \inf(a,b)$ (!), $\nexists \sup(c,d)$ (!)

megj.: Vigyázat! A (d)-beli példa is jelzi, hogy óvatosan kell eljárnunk elempárok infimuma és szuprémuma vizsgálatakor. Attól, hogy egy parciális rendezési relációnak "szép" a Hasse-diagramja, még nem biztos, hogy hálóról van szó. Lásd az alábbi példát:



NEM HÁLÓ!

4. Igazoljuk, hogy egy $(L;\wedge,\vee)$ véges elemszámú háló mindig korlátos. Írjuk fel a korlátos háló $\mathbb{I}$ és $\mathbb{O}$ elemeit a háló többi elemének segítségével. (Elméleti kérdés)

5. $L = \{0,a,c,b,e,d,\mathrm{I}\}$. Az $(L;\preccurlyeq)$ parciálisan rendezett halmazban a legkisebb ill. legnagyobb elemek: 0 ill. I. A rákövetkező elemek: $0 \ll a$, $0 \ll b$, $a \ll c$, $b \ll c$, $a \ll d$, $b \ll e$, $d \ll \mathrm{I}$, $c \ll \mathrm{I}$ és $e \ll \mathrm{I}$.

Igazolja, hogy az $(L;inf,sup)$ struktúra háló.

Az alábbiak közül melyek részhálói L-nek?

(a) $L_1 = \{0,a,b,\mathrm{I}\}$

(b) $L_2 = \{0,a,e,\mathrm{I}\}$

(c) $L_3 = \{a,c,d,\mathrm{I}\}$

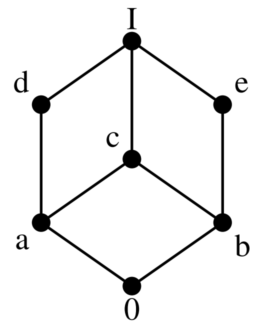
(d) $L_4 = \{0,c,d,\mathrm{I}\}$

(e) $L_5 = \{0,a,d,e,\mathrm{I}\}$

megj.: most tehát: $\mathbb{O} = 0$ és $\mathbb{I} = \mathrm{I}$

megj.: Rákövetkező elem: $x \ll y$, ha $x \preccurlyeq y$, $x \neq y$ és nincs köztük "közvetítő tag" (azaz nincs olyan, tőlük különböző z, amelyre $x \preccurlyeq z$ és $z \preccurlyeq y$). Az egymással rákövetkező viszonyban lévő elempárok tkp. a Hasse-diagram éleit fogalmazzák meg.

Ez alapján $(L;\preccurlyeq)$ Hasse-diagramja:



L

<u>def.</u>: *részháló*. Egy L háló egy S részhálója egy olyan $S \subseteq L$ halmaz, amelyre igaz, hogy tetszőleges két $a, b \in S$ elemre az L-beli (!) $\inf(a,b)$ és $\sup(a,b)$ is S-ben van. Átfogalmazva: egy olyan S részhalmaz, amelyben bármely két elem "magával hozta" S-be az eredeti, L-beli infimumát és szuprémumát.

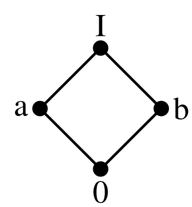
Mo.: Belátjuk, hogy L bármely két elemének van infimuma és szuprémuma.

Az egymással relációban lévő elempároknak triviálisan mindig van infimuma és szuprémuma, így elég az egymással relációban nem lévő elempárokat vizsgálni:
Tételesen:

$$\begin{array}{ll} \inf(a,b) = 0 & \sup(a,b) = c \\ \inf(a,e) = 0 & \sup(a,e) = \mathrm{I} \\ \inf(d,e) = 0 & \sup(d,e) = \mathrm{I} \\ \inf(d,c) = a & \sup(d,c) = \mathrm{I} \end{array}$$

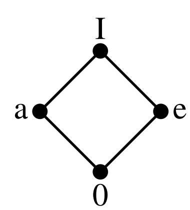
Szimmetria okok miatt elég ezeket a párokat megvizsgálni. Kaptuk: L háló.

(a) NEM. L_1 nem részhálója L-nek, mert $\sup(a,b) = c \notin L_1$



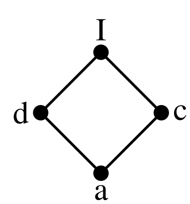
L_1

(b) IGEN. L_2 részhálója L-nek, $\inf(a,e) = 0 \in L_2$, $\sup(a,e) = \mathrm{I} \in L_2$



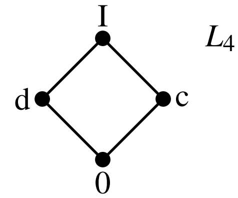
L_2

(c) IGEN. L_3 részhálója L-nek, $\inf(c,d) = a \in L_3$, $\sup(c,d) = \mathrm{I} \in L_3$

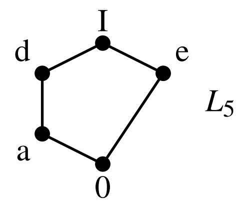


L_3

(d) NEM. L_4 nem részhálója L-nek, mert $\inf(d,c) = a \notin L_4$



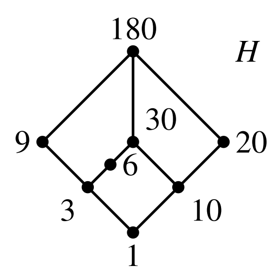
(e) IGEN. L_5 részhálója L-nek, mert $\inf(a,e) = \inf(d,e) = 0 \in L_5$, $\sup(a,e) = \sup(d,e) = \mathrm{I} \in L_5$

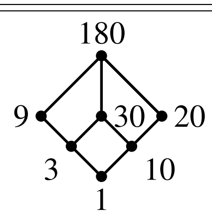
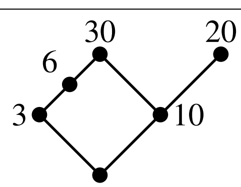


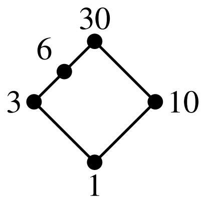
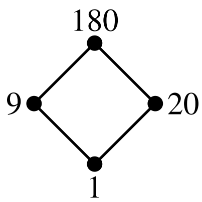
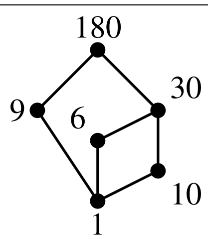
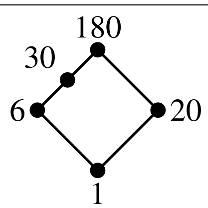
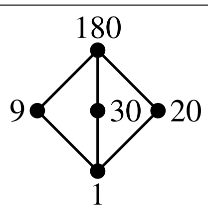
6. A $H = \{1,3,6,9,10,20,30,180\}$ halmaz elemein $a \preccurlyeq b$, ha b osztható a-val. Válassza ki az alábbi halmazok közül azokat, amelyek a fenti rendezés szerinti inf és sup műveletekkel hálót alkotnak, és azokat, amelyek az eredeti $(H; inf, sup)$ háló részhálói:

$$H_1 = \{1,3,9,10,20,30,180\}$$
$$H_2 = \{1,3,6,10,20,30\}$$
$$H_3 = \{1,3,6,10,30\}$$
$$H_4 = \{1,9,20,180\}$$
$$H_5 = \{1,6,9,10,30,180\}$$
$$H_6 = \{1,6,20,30,180\}$$
$$H_7 = \{1,9,20,30,180\}$$

Mo.: H Hasse-diagramja (ld. még **2.c**):

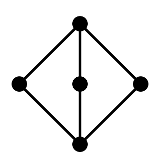


A halmaz	Hasse-diagram	Háló-e?	Részhálója-e H-nak?
H_1		IGEN	IGEN
H_2		NEM $\nexists \sup(20,30)$	NEM mert nem is háló

A halmaz	Hasse-diagram	Háló-e?	Részhálója-e H-nak?
H_3		IGEN	IGEN
H_4		IGEN	IGEN
H_5		IGEN	NEM pl. $\inf(6,9) = 3 \notin H_5$
H_6		IGEN	NEM $\inf(20,30) = 10 \notin H_6$ Vö.: H_3 !
H_7		IGEN	NEM $\inf(9,30) = 3 \notin H_7$

7. Írja le, hogy mik a kritériumai annak, hogy egy L hálónak részhálója legyen egy L_1 háló! (Elméleti kérdés)

8. Igazolja, hogy az alábbi háló nem disztributív:



megj.: egy $(H;\wedge,\vee)$ háló disztributív, ha tetszőleges x, y, $z \in H$-ra

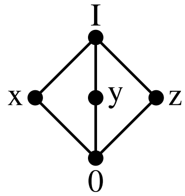
i) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

és

ii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

megj.: az **1.** feladatbeli tétel alapján: $x \wedge y = \inf(x,y)$, $x \vee y = \sup(x,y)$

1. mo.: Az



jelöléseket alkalmazva, pl. próbálgatással vizsgálhatjuk az i) egyenlőséget.

Próbálgatás:

I,y,z elemekkel: $\left[\begin{array}{l} \mathrm{I}\vee(y\wedge z)\overset{?}{=}(\mathrm{I}\vee y)\wedge(\mathrm{I}\vee z) \\ \text{b.o.: } \mathrm{I}\vee(y\wedge z)=\mathrm{I}\vee 0=\mathrm{I} \\ \text{j.o.: } (\mathrm{I}\vee y)\wedge(\mathrm{I}\vee z)=\mathrm{I}\wedge\mathrm{I}=\mathrm{I} \end{array}\right.$ TELJESÜL

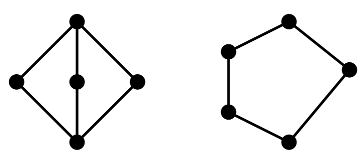
I,y,0 elemekkel: $\left[\begin{array}{l} \mathrm{I}\vee(y\wedge 0)\overset{?}{=}(\mathrm{I}\vee y)\wedge(\mathrm{I}\vee 0) \\ \text{b.o.: } \mathrm{I}\vee(y\wedge 0)=\mathrm{I}\vee 0=\mathrm{I} \\ \text{j.o.: } (\mathrm{I}\vee y)\wedge(\mathrm{I}\vee 0)=\mathrm{I}\wedge\mathrm{I}=\mathrm{I} \end{array}\right.$ TELJESÜL

x,y,z elemekkel: $\left[\begin{array}{l} x\vee(y\wedge z)\overset{?}{=}(x\vee y)\wedge(x\vee z) \\ \text{b.o.: } x\vee(y\wedge z)=x\vee 0=x \\ \text{j.o.: } (x\vee y)\wedge(x\vee z)=\mathrm{I}\wedge\mathrm{I}=\mathrm{I} \end{array}\right.$ NEM TELJESÜL!

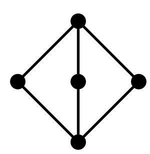
Kaptuk: a háló nem disztributív.

2. mo.:

Birkhoff tétele szerint (ld.: **9.**) egy háló pontosan akkor disztributív, ha a köv. két háló egyikével sincs izomorf részhálója:



Egy háló önmagával triviálisan izomorf, ezért



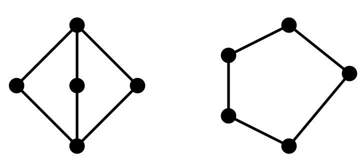
nem disztributív.

3. mo.: Nem disztributív, mert van olyan elem, amelynek több komplementuma is van:
pl. $x' = y$ és $x' = z$

9. Ismertesse Birkhoff tételét! (Elméleti kérdés)

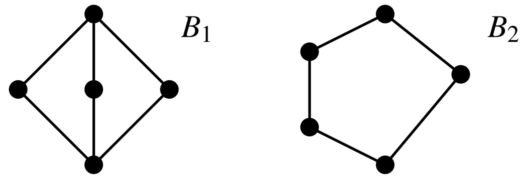
Tétel (Birkhoff)

Egy háló pontosan akkor disztributív, ha a köv. két háló egyikével sincs izomorf részhálója:



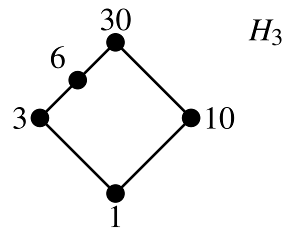
10. Válassza ki Birkhoff tétele alapján a **6.** feladat hálói közül azokat, amelyek nem disztributívak!

Jelölje B_1 ill. B_2 a tételben szereplő két hálót:

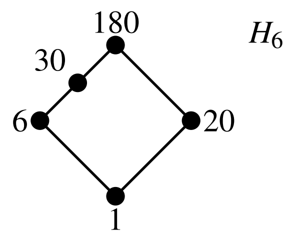


Az egyszerűbb esetekkel kezdve:

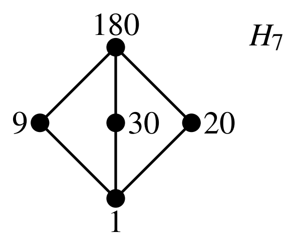
H_3 nem disztributív, mert $H_3 \cong B_2$.



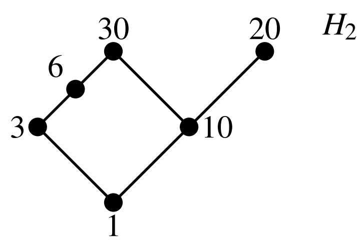
H_6 nem disztributív, mert $H_6 \cong B_2$.



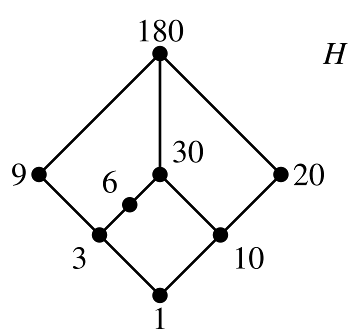
H_7 nem disztributív, mert $H_7 \cong B_1$.



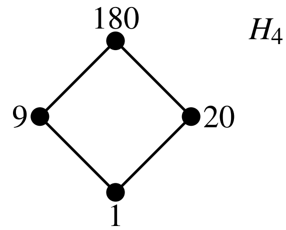
H_2 nem disztributív, mert nem is háló.



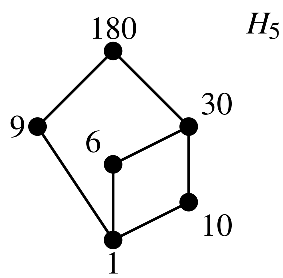
Maga a H háló sem disztributív, mert neki H_3 részhálója, és $H_3 \cong B_2$.

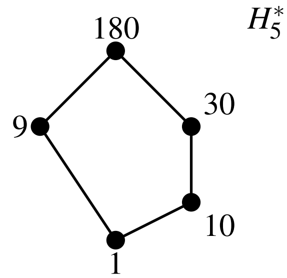


H_4 disztributív, mert Hasse-diagramja alapján Boole-algebra.

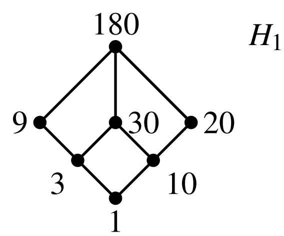


H_5 nem disztributív, mert belőle a 6 elemet elhagyva H_5 egy olyan H_5^* részhálóját kapjuk, amelyik izomorf a B_2 hálóval.



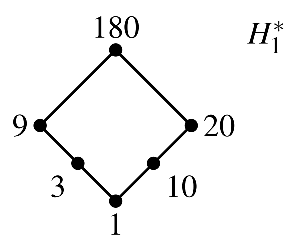


H_1 nem disztributív. Ennek bizonyítását lássuk négyféleképpen:

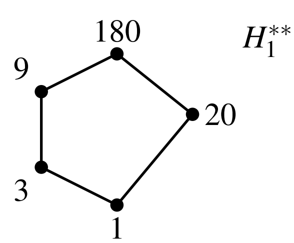


- Nem disztributív, mert van olyan eleme, amelynek több komplementuma is van.
  Pl. $20' = 9$, $20' = 3$
- Nem disztributív, mert a komplementumos elemek H_1^* halmaza nem részháló.

  $H_1^* = \{1, 3, 9, 10, 20, 180\}$, és pl. $\sup(3, 10) = 30 \notin H_1^*$



- Nem disztributív, mert a 10 ill. 30 elemek elhagyásával kapott H_1^{**} háló H_1-nek részhálója, és $H_1^{**} \cong B_2$.



- Nem disztributív, mert $10 \vee (20 \wedge 9) \neq (10 \vee 20) \wedge (10 \vee 9)$

Kaptuk: a felsoroltak közül kizárólag H_4 disztributív.

megj.: Disztributív háló minden részhálója is disztributív.

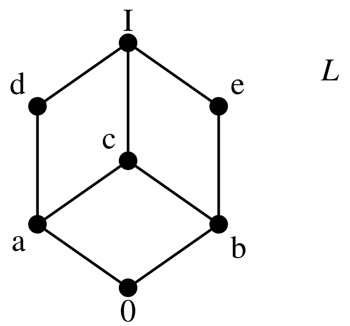
11. Határozzon meg az **5.** feladat L hálója és a **6.** feladat H hálója elememeinek komplemensei közül néhányat. Állapítsa meg e hálókról, hogy komplementumosak-e vagy sem!

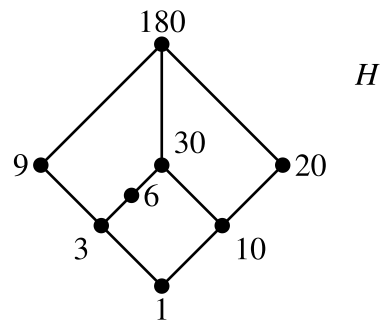
<u>def.</u>: *elem komplementuma*. Korlátos háló x elemének egy komplementuma (vagy komplemense) a hálónak egy olyan, szokás szerint x'-vel jelölt eleme, amellyel $x \wedge x' = \mathbb{O}$ és $x \vee x' = \mathbb{I}$.

megj.: Egy elemnek lehet több komplementuma is, de az is lehet, hogy egy elemnek nincs komplementuma.

<u>def.</u>: *komplementumos háló*. Egy háló komplementumos, ha minden elemének van (legalább egy) komplementuma.

Mo.:





Az L hálóban:

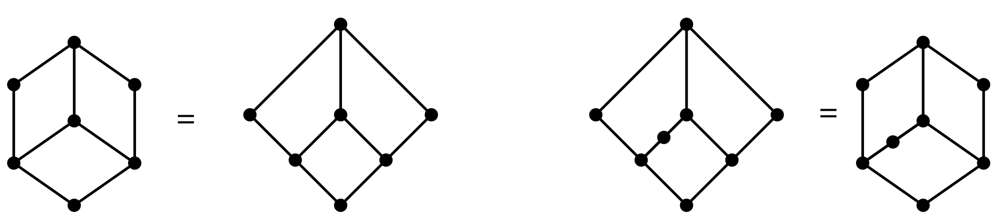
$0' = \mathrm{I}$
$a' = e$
$b' = d$
$\nexists\, c'$
$d' = b$ és $d' = e$
$e' = a$ és $e' = d$
$\mathrm{I}' = 0$

A H hálóban:

$1' = 180$
$3' = 20$
$6' = 20$
$9' = 10$ és $9' = 20$
$10' = 9$
$20' = 3$ és $20' = 6$ és $20' = 9$
$\nexists\, 30'$
$180' = 1$

Egyik háló sem komplementumos: L-ben $\nexists\, c'$, H-ban $\nexists\, 30'$.

megj.: két háló összehasonlítását segíti, ha Hasse-diagramjaikat egységes elvek szerint rajzoljuk fel. Ehhez lásd pl.:



12. Példatár: 4.4.6., 4.4.7., 4.4.8. feladatok

<u>def.</u>: *Boole-algebra*. Egy $(B; \wedge, \vee, ')$ háromműveletes algebra Boole-algebra, ha $(B; \wedge, \vee)$ disztributív, komplementumos háló ($\mathbb{O}$ ill. $\mathbb{I}$ korlátelemekkel) és x' az x elem komplementumát jelöli.
(Boole-algebrában tehát $'$ egy egyváltozós művelet.)

4.4.6. Igazolja, hogy az alábbi struktúrák Boole-algebrák:

a) egy $A \neq \emptyset$ halmaz hatványhalmaza az unió, metszet és komplementer műveletekkel;

b) az n-változós ($n \neq 0$) kétértékű logikai függvények halmaza a konjunkció, diszjunkció és a negáció műveletekkel.

Mo.: Nem bizonyítjuk. Ld. az előadás anyagát!

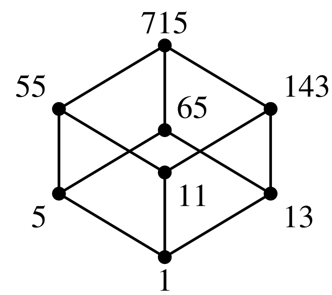
4.4.7. Legyenek az A halmaz elemei 715 pozitív osztói; $(A;\vee,\wedge)$ műveletei pedig legyenek a következők: $a \vee b = lkkt(a,b)$ és $a \wedge b = lnko(a,b)$.

a) Legyen az A halmazon egy egyváltozós művelet $(')$ értelmezve, amelyre $a' = \frac{715}{a}$. Igazolja, hogy az $(A;\vee,\wedge,')$ struktúra Boole-algebra.

Mo.: Nem bizonyítjuk.

Útmutatás: $A = \{1,5,11,13,55,65,143,715\}$ $\quad a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a|b$

Hasse-diagram:



b) Határozza meg a fent definiált Boole-algebrában az $(5') \wedge (13 \vee 143)$ kifejezés eredményét.

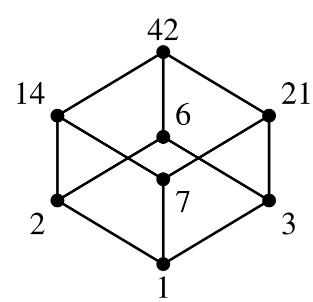
Mo.: $(5') \wedge (13 \vee 143) = 143 \wedge (13 \vee 143) = 143 \wedge 143 = 143$

4.4.8. Boole-algebrát alkot-e $(A;\vee,\wedge,')$, ha $A = \{42 \text{ pozitív osztói}\}$, $\vee$ a legkisebb közös többszörös, $\wedge$ a legnagyobb közös osztó és $a' = \frac{42}{a}$?

Mo.: Igen. (Nem bizonyítjuk.)

Útmutatás: $A = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$ $\quad a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a|b$

Hasse-diagram:



(ld.: **1.**)

megj.: Véges Boole-algebrák elemszáma mindig 2^n valamilyen $n \in \mathbb{N}$-nel.

megj.: Kis elemszámú Boole-algebrák Hasse-diagramjai: