Integrálszámítás I.

Az előadáshoz kapcsolódó feladatsor megoldókulcsa

Végezze el a következő integrálásokat:

1. $\boxed{\text{Alapintegrálok}}$

(a) $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$

pl.: $\int x^2 \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + C \qquad \int x \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + C \qquad \int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$

(c) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

(d) $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

(e) $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

(f) $\int a^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad$ pl.: $\int 2^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C$

2. (a) $\int\limits_1^2 x^5 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2^6}{6} - \frac{1^6}{6} = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = 10,5$

(b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \Big[\ln|x|\Big]_2^4 = \ln|4| - \ln|2| = \ln 4 - \ln 2 \approx 0,69$

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = (0) - (-1) = 1$

3. $\boxed{\displaystyle\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C}$ típus, ahol $a \neq 0$, $\int f(x) \, \mathrm{d}x$ alapintegrál és $\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + C$

(a) $\int (3x-1)^2 \, \mathrm{d}x = \dfrac{(3x-1)^3}{3 \cdot 3} + C = \dfrac{1}{9}(3x-1)^3 + C \qquad \big($itt: $f(x) = x^2 \quad F(x) = \frac{x^3}{3} \quad a = 3 \quad b = -1\big)$

(b) $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = \dfrac{-\cos 2x}{2} + C \qquad \big($itt: $f(x) = \sin x \quad F(x) = -\cos x \quad a = 2 \quad b = 0\big)$

(c) $\int \cos 3x \, \mathrm{d}x = \dfrac{\sin 3x}{3} + C$

(d) $\int e^{x+3} \, \mathrm{d}x = e^{x+3} + C$

(e) $\int 3^{-2x+1} \, \mathrm{d}x = \dfrac{3^{-2x+1}}{(-2) \cdot \ln 3} + C$

(f) $\displaystyle\int \frac{3}{2x-5}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{\ln|2x-5|}{2}+C$

(g) $\int \frac{-4}{3\sin^2(1+3x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}\cdot\frac{-\operatorname{ctg}(3x+1)}{3}+C = \frac{4}{9}\operatorname{ctg}(3x+1)+C$

(h) $\int \frac{1}{-2\cos^2(-x+12)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(-x+12)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}(-x+12)}{-1}+C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(-x+12)+C$

(i) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{2x-7}}\,\mathrm{d}x = 3\int (2x-7)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{(2x-7)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 2}+C = 3\sqrt{2x-7}+C$

4. (a) $\displaystyle\int_0^4 (2x+3)^6\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(2x+3)^7}{7\cdot 2}\right]_0^4 = \frac{11^7}{14}-\frac{3^7}{14}\approx 1391785$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{\sin 0}{2} = \frac{1}{2}-\frac{0}{2} = 0,5$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 5^{-2x+7}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{5^{-2x+7}}{(-2)\cdot\ln 5}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2\ln 5}\left(5^5-5^9\right)\approx 605802$

5. $\boxed{\displaystyle\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+C}$ típus, ahol $\alpha\neq -1$

(a) $\displaystyle\int x^2(2x^3-1)^{12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \underbrace{6x^2}_{f'}\underbrace{(2x^3-1)^{12}}_{f^{12}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\cdot\frac{(2x^3-1)^{13}}{13}+C$

(b) $\displaystyle\int -2\sin^6 x\cos x\,\mathrm{d}x = -2\cdot\frac{\sin^7 x}{7}+C$

(c) $\displaystyle\int 3\sin 2x\cos^5 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int \underbrace{(-2\sin 2x)}_{f'}\underbrace{\cos^5 2x}_{f^5}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos^6 2x}{6}+C$

msz.: $(\cos 2x)' = -2\sin 2x$

(d) $\displaystyle\int x^3\cdot\sqrt[5]{-x^4+11}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \underbrace{(-4x^3)}_{f'}\cdot\underbrace{(-x^4+11)^{\frac{1}{5}}}_{f^{\frac{1}{5}}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(-x^4+11)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C$

(e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\cos^2 2x}\cdot\operatorname{tg}^6 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^7 2x}{7}+C$

msz.: $(\operatorname{tg} 2x)' = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^{11} 2x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+4x^2}\cdot\operatorname{arctg}^{11} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arctg}^{12} 2x}{12}+C$

msz.: $(\operatorname{arctg} 2x)' = \dfrac{2}{1+(2x)^2} = \dfrac{2}{1+4x^2}$

6. (a) $\displaystyle\int_2^3 x\cdot(x^2+3)^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x^2+3)^5}{10}\right]_2^3 = \frac{12^5}{10}-\frac{7^5}{10} = 23202,5$

msz.: $\int x\cdot(x^2+3)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{f'}\cdot\underbrace{(x^2+3)^4}_{f^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^5}{5}+C$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 5\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\Big[\sin^3 x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{3}\left(\sin^3\frac{\pi}{3}-\sin^3\frac{\pi}{4}\right)\approx 0,49$

7. $\boxed{\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C}$ típus

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \big(-\ln|\cos\frac{\pi}{4}|\big)-\big(-\ln|\cos 0|\big) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,35$

msz.: $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \underbrace{\frac{-\sin x}{\cos x}}_{\frac{f'}{f}}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|+C$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|+C$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0,2$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int\frac{-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|2+\cos x|+C$

(e) $\displaystyle\int \frac{3}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x = 3\int\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x = 3\ln|\operatorname{arctg} x|+C$

(f) $\displaystyle\int -\frac{8}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -8\int\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\,\mathrm{d}x = -8\ln|\arcsin x|+C$

8. $\boxed{\displaystyle\int g'(x)\cdot f(g(x))\,\mathrm{d}x = F(g(x))+C}$ típus, ahol $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$

(a) $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x+2)}_{g'(x)}\cdot\underbrace{e^{x^2+2x}}_{f(g(x))}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,e^{x^2+2x}+C$

itt: $f(x)=e^x \quad g(x)=x^2+2x \quad g'(x)=2x+2 \quad F(x)=e^x$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\sin(\ln x)}_{f(g(x))}\,\mathrm{d}x = -\cos(\ln x)+C$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \Big[\operatorname{arctg}(e^x)\Big]_0^1 = \operatorname{arctg} e-\operatorname{arctg} 1\approx 0,43$

msz.: $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int e^x\cdot\frac{1}{1+(e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(e^x)+C$

(d) $\int x^2\cos(x^3-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2\cdot\cos(x^3-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(x^3-1)+C$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = 2\arcsin\sqrt{x}+C$

(f) $\displaystyle\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot 2^{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\ln 2}+C$

(g) $\int e^{\sin x^2}(x\cos x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{\sin x^2}(2x\cos x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,e^{\sin x^2}+C$

msz.: $(\sin x^2)' = 2x\cos x^2$

Integrálszámítás II.

Parciális integrálás

$$\boxed{\int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x}$$

1. (a) $\int xe^x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\underbrace{e^x}_{v} \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$

$u' = 1 \qquad v = e^x$

(b) $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

(c) $\int (3x^2 - 2x)e^{2x} \,\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right) e^{2x} + C$

(d) $\int (x+1)(e^{2x} - 2e^{-x}) \,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + (2x+4)e^{-x} + C$

(e) $\int x \sin x \,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$

(f) $\int x \cos x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C$

(g) $\int x^2 \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(h) $\int (1 - x^2)(\sin 2x - 2\cos 3x) \,\mathrm{d}x =$
$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{22}{27}\right)\sin 3x + \left(-\frac{1}{2}x\right)\sin 2x + \left(\frac{4}{9}x\right)\cos 3x + C$

(i) $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C$

(j) $\int e^{2x} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C$

(k) $\int e^{-x} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = e^{-x}\left(-\frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x\right) + C$

(l) $\int 2^x(\sin 2x - 3\cos x) \,\mathrm{d}x = \int 2^x \sin 2x \,\mathrm{d}x - 3\int 2^x \cos x \,\mathrm{d}x =$
$= -\frac{2}{4+(\ln 2)^2}2^x \cos 2x + \frac{\ln 2}{4+(\ln 2)^2}2^x \sin 2x - \frac{2(\ln 2)^2}{4+(\ln 2)^2} - \frac{3}{1+(\ln 2)^2}2^x \sin x - \frac{3\ln 2}{1+(\ln 2)^2}2^x \cos x + C$

(m) $\int x \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

(n) $\int (2x+1)\ln^2 x \,\mathrm{d}x = (x^2 + x)\ln^2 x - (x^2 + 2x)\ln x + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

(o) $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

(p) $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

2. (a) $\int\limits_0^1 xe^{3x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^1 \approx 4,6$

(b) $\int\limits_{-1}^{2} (x^2 - x + 1)\, e^x \,\mathrm{d}x = \left[(x^2 - 3x + 4)\, e^x\right]_{-1}^2 \approx 11,835$

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x \sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}$

(d) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (2x+3)\sin\frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \left[(2x+3)\left(-2\cos\frac{x}{2}\right) + 8\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \approx 5,49$

(e) $\int\limits_0^2 e^{-2x}\cos 3x \,\mathrm{d}x = \frac{9}{13}\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\cos 3x\right)\right]_0^2 \approx 0,15$

(f) $\int\limits_1^2 (x^2 + 1)\ln x \,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 - x\right]_1^2 \approx 1,457$

(g) $\int\limits_1^e (x^3-2)\ln x \,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x^4}{4}-2x\right)\ln x - \frac{x^4}{16}+2x\right]_1^e \approx 8,3$

(h) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 \approx 0,439$

(i) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^{\sqrt{3}} \approx 1,23$

Helyettesítéses integrálás

1. (a) $\int x\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x = \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int (2t^4-2t^2)\,\mathrm{d}t \overset{*}{=}$

$$t=\sqrt{x+1} \qquad x=t^2-1 \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t \qquad \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$$

$$\overset{*}{=} 2\cdot\frac{t^5}{5}-2\cdot\frac{t^3}{3}+C = 2\cdot\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-2\cdot\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}+C$$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$
$(t=\sqrt{x+1})$

(c) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x-2}}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}+C$
$(t=\sqrt[3]{x-2})$

(d) $\int \left(\sqrt{x-2}+\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\sqrt{(x-2)^3}+4\sqrt{x-2}+C$
$(t=\sqrt{x-2})$

(e) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}}\ \mathrm{d}x = \int \left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$
(Tagonkénti osztással hatványfüggvények összege, nincs szükség helyettesítésre!)

(f) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-1}\ \mathrm{d}x = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{x^4}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C$
$(t=\sqrt[4]{x})$

(g) $\int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[6]{x^7}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1+t^3+t^2+t}{t^6+t^7}6t^5\ \mathrm{d}t = 6\int\left(t+\frac{1}{t}\right)\ \mathrm{d}t = 3\sqrt[3]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right|+C$
$(t=\sqrt[6]{x})$

(h) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\ \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} e^x + C$
$(t=e^x)$

(i) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\ \mathrm{d}x = e^x-\ln(e^x+1)+C$
$(t=e^x)$

(j) $\int \cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$
$(t=\sqrt{x})$

(k) $\int \sin\sqrt[3]{x}\ \mathrm{d}x = -3\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x}+6\cos\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}+C$
$(t=\sqrt[3]{x})$

(l) $\int e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$
$(t=\sqrt{x})$

(m) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ \mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C$

$(t = \sqrt{x^2-1})$

(n) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}\ \mathrm{d}x = -3 \cdot \frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4} + 6 \cdot \frac{(1-x)^{\frac{7}{3}}}{7} - 3 \cdot \frac{(1-x)^{\frac{10}{3}}}{10} + C$

$(t = \sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{3}})$

(o) $\int x^3 \cdot (1-5x^2)^{10}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{50} \cdot \frac{(1-5x^2)^{12}}{12} - \frac{1}{50} \cdot \frac{(1-5x^2)^{11}}{11} + C$

$(t = (1-5x^2)^{10})$

2. (a) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{(x+1)\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t - \frac{2}{t}\right]_1^{\sqrt{2}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 4\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right]_0^1 \approx 0,148$

$(t = \sqrt{x+1})$

(b) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^x+2}\ \mathrm{d}x = [t - \ln(t+2)]_1^e = [e^x - \ln(e^x+2)]_0^1 \approx 1,265$

$(t = e^x)$

(c) $\int\limits_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 2\left[\sin t - t\cos t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right]_{\frac{\pi^2}{16}}^{\frac{\pi^2}{4}} \approx 1,7$

$(t = \sqrt{x})$

(d) $\int\limits_0^8 e^{\sqrt{2x}}\ \mathrm{d}x = [te^t - e^t]_0^4 = \left[\sqrt{2x}e^{\sqrt{2x}} - e^{\sqrt{2x}}\right]_0^8 \approx 164,8$

$(t = \sqrt{2x})$

Integrálszámítás III.

Racionális függvények integrálása

1. (a) $\int \frac{x^3-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\operatorname{arctg} x + C$

Nem valódi racionális törtfüggvény; polinomosztással elérjük, hogy a számláló alacsonyabb fokú legyen, mint a nevező.

$$(x^3-3):(x^2+1) = x$$
$$-x-3$$

Ez alapján: $\frac{x^3-3}{x^2+1} = x - \frac{x+3}{x^2+1}$

$$\int \frac{x^3-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x - \frac{x+3}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\operatorname{arctg} x + C$$

(b) $\int \frac{10}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{x-1} + \frac{-5}{x+1}\,\mathrm{d}x = 5\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

útm.: A nevező másodfokú, diszkriminánsa pozitív: két darab egyszeres valós gyöke van, ennek megfelelően bontjuk parciális törtek összegére a függvényt:

$\frac{10}{x^2-1} = \frac{10}{(x-1)(x+1)} \overset{*}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$10 = A(x+1) + B(x-1)$

I. módszer: x-hatványok együtthatóinak egyeztetésével

$10 = (A+B)x + (A-B)$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A+B \\ 10 &= A-B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 5 \\ B &= -5 \end{aligned}$$

II. módszer: A nevező gyökeinek behelyettesítésével

$$\begin{array}{cc} \underline{x=-1} & \underline{x=1} \\ 10 = 0 + B(-2) & 10 = A\cdot 2 + 0 \\ B = -5 & A = 5 \end{array}$$

Ebből: $\frac{10}{x^2-1} \overset{*}{=} \frac{5}{x-1} + \frac{-5}{x+1}$

2. (a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

(b) $\int \frac{7}{4x^2+12x+10}\,\mathrm{d}x = 7\int \frac{1}{(2x+3)^2+1}\,\mathrm{d}x = 7\cdot\frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{2} + C$

3. (a) $\int \frac{8}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = 8\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$

(b) $\int \frac{6x-20}{x^2-4x-12}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-6| + 4\ln|x+2| + C$

útm.: $\frac{6x-20}{x^2-4x-12} = \frac{6x-20}{(x-6)(x+2)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+2}$

$6x-20 = A(x+2) + B(x-6)$

II. módszerrel:

$$\begin{array}{cc} \underline{x=6} & \underline{x=-2} \\ 36-20 = 8A+0 & -12-20 = 0 + B\cdot(-8) \\ 16 = 8A & -32 = -8B \\ A = 2 & B = 4 \end{array}$$

Ebből: $\frac{6x-20}{x^2-4x-12} = \frac{2}{x-6} + \frac{4}{x+2}$

(c) $\int \frac{5x+31}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 9\ln|x-1| - 4\ln|x+3| + C$

(d) $\int \frac{13x-10}{14x^2-23x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + \frac{3}{7}\ln|7x-1| + C$

(e) $\int \frac{8x+38}{(x-4)(x+1)(x+3)}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-4| - 3\ln|x+1| + \ln|x+3| + C$

4. (a) $\int \frac{-5x^2+10x-13}{(x-3)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -7\ln|x-3| + 2\ln|x-1| - \frac{4}{(x-1)} + C$

útm.: A nevezőnek egy egyszeres és egy kétszeres valós gyöke van, ennek megfelelően bontjuk parciális törtek összegére a függvényt:

$\frac{-5x^2+10x-13}{(x-3)(x-1)^2} \stackrel{*}{=} \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

megj.: vigyázzunk, a törtek közös nevezője $(x-3)(x-1)^2$, nem pedig $(x-3)(x-1)(x-1)^2$!

$-5x^2 + 10x - 13 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x-3) + C(x-3)$

A II. módszerrel kezdünk:

$\underline{x=1}$

$$\begin{aligned} -5+10-13 &= 0+0+C(-2) \\ -8 &= -2C \\ C &= 4 \end{aligned}$$

$\underline{x=3}$

$$\begin{aligned} -45+30-13 &= A\cdot 4+0+0 \\ -28 &= 4A \\ A &= -7 \end{aligned}$$

Az I. módszer részleges alkalmazásával folytatjuk:

$$x^2 \text{ együtthatói} \;:\; \begin{aligned} -5 &= A+B \\ -5 &= -7+B \\ B &= 2 \end{aligned}$$

Kaptuk: $\frac{-5x^2+10x-13}{(x-3)(x-1)^2} \stackrel{*}{=} \frac{-7}{x-3} + \frac{2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$

(b) $\int \frac{2x^2-14x+12}{(x-2)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x = -\ln|x-2| + \frac{2}{x-2} + 3\ln|x+2| + C$

5. (a) $\int \frac{8x^2-28x+14}{(x^2+1)(x-9)}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-9| + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| - \operatorname{arctg} x + C$

útm.: $\frac{8x^2-28x+14}{(x^2+1)(x-9)} \stackrel{*}{=} \frac{A}{x-9} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$8x^2 - 28x + 14 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-9)$

A II. módszerrel kezdünk:

$\underline{x=9}$

$$\begin{aligned} 648-252+14 &= 82A+0 \\ 410 &= 82A \\ A &= 5 \end{aligned}$$

Az I. módszer részleges alkalmazásával folytatjuk:

$$x^2 \text{ együtthatói} \;:\; \begin{aligned} 8 &= A+B \\ 8 &= 5+B \\ B &= 3 \end{aligned} \qquad x \text{ együtthatói} \;:\; \begin{aligned} -28 &= -9B+C \\ -28 &= -27+C \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Kaptuk: $$\frac{8x^2-28x+14}{(x^2+1)(x-9)} \stackrel{*}{=} \frac{5}{x-9} + \frac{3x-1}{x^2+1}$$

(b) $\int \frac{2x^2+3x-10}{(x^2+4)(x-6)}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-6| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$

útm.: A nevezőben szereplő másodfokú tényező diszkriminánsa negatív: a nevezőnek nem csak valós gyökei vannak; ennek megfelelően bontjuk parciális törtek összegére a függvényt:

$\frac{2x^2+3x-10}{(x^2+4)(x-6)} \overset{*}{=} \frac{A}{x-6} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$2x^2+3x-10 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-6)$

A II. módszerrel kezdünk:

$$\begin{aligned} &\underline{x=6} \\ 72+18-10 &= A\cdot 40+0 \\ 80 &= 40A \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Az I. módszer részleges alkalmazásával folytatjuk:

$$\begin{array}{lll} x^2 \text{ együtthatói} : & 2=A+B & \quad x \text{ együtthatói} : \quad 3=-6B+C \\ & 2=2+B & \qquad\qquad\qquad\quad 3=0+C \\ & B=0 & \qquad\qquad\qquad\quad C=3 \end{array}$$

Kaptuk: $\frac{2x^2+3x-10}{(x^2+4)(x-6)} \overset{*}{=} \frac{2}{x-6} + \frac{0x+3}{x^2+4} = \frac{2}{x-6} + \frac{3}{x^2+4}$

(c) $\int \frac{5x^2+15x+37}{(x^2+6x+13)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2x+1}{x^2+6x+13} + \frac{3}{x-2}\right)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{(x+3)^2+4} + \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x =$

$= \ln(x^2+6x+13) - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + 3\ln|x-2| + C$

(d) $\int \frac{-8x^2+8x-4}{(9x^2-6x+5)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\ln(9x^2-6x+5) + \frac{2}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x-1}{2}\right) - \ln|x+1| + C$

6. (a) $\int \frac{3x^3-7x^2-39x-54}{x^2-3x-10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 7\ln|x-5| + 4\ln|x+2| + C$

útm.: A számláló nem alacsonyabb fokú, mint a nevező: polinomosztás.

$$\begin{array}{rcl} (3x^3-7x^2-39x-54) & : \quad (x^2-3x-10) \quad = & 3x+2 \\ 2x^2-9x-54 & & \\ -3x-34 & & \end{array}$$

Ebből: $\frac{3x^3-7x^2-39x-54}{x^2-3x-10} = 3x+2 - \frac{3x+34}{x^2-3x-10}$

Parciális törtekre bontás: $\frac{3x+34}{x^2-3x-10} = \frac{3x+34}{(x-5)(x+2)} \overset{*}{=} \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2}$

$3x+34 = A(x+2) + B(x-5)$

II. módszerrel:

$$\begin{array}{rcl} \underline{x=-2} & \qquad & \underline{x=5} \\ -6+34=0+B(-7) & & 15+34=A\cdot 7+0 \\ 28=-7B & & 49=7A \\ B=-4 & & A=7 \end{array}$$

Ebből: $$\frac{3x+34}{x^2-3x-10} \overset{*}{=} \frac{7}{x-5} - \frac{4}{x+2}$$

Összességében tehát: $\frac{3x^3-7x^2-39x-54}{x^2-3x-10} = 3x+2 - \frac{7}{x-5} + \frac{4}{x+2}$

(b) $\int\limits_0^2 \frac{4x^3+22x^2+40x+20}{(x+3)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg}x\right]_0^2 \approx 5$

(c) $\int \frac{x^5-5x^4-x^3+21x^2-25x+12}{x^3-5x^2+4x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 5x + 3\ln|x| - \ln|x-1| - 6\ln|x-4| + C$

útm.: A számláló nem alacsonyabb fokú, mint a nevező: polinomosztás.

$$\begin{array}{rcl} (x^5-5x^4-x^3+21x^2-25x+12) & : & (x^3-5x^2+4x) = x^2-5 \\ -5x^3+21x^2-25x+12 & & \\ -4x^2-5x+12 & & \end{array}$$

Ebből: $\frac{x^5-5x^4-x^3+21x^2-25x+12}{x^3-5x^2+4x} = x^2 - 5 + \frac{-4x^2-5x+12}{x^3-5x^2+4x}$

Parciális törtekre bontás: $\frac{-4x^2-5x+12}{x^3-5x^2+4x} = \frac{-4x^2-5x+12}{x(x-1)(x-4)} \overset{*}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$

$-4x^2 - 5x + 12 = A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)$

$$\begin{array}{ccc} \underline{x=0} & \underline{x=1} & \underline{x=4} \\ 0-0+12 = A(-1)(-4)+0+0 & -4-5+12 = 0+B\cdot 1\cdot(-3)+0 & -64-20+12 = 0+0+C\cdot 4\cdot 3 \\ 12 = 4A & 3 = -3B & -72 = 12C \\ A = 3 & B = -1 & C = -6 \end{array}$$

Ebből: $\frac{-4x^2-5x+12}{x^3-5x^2+4x} \overset{*}{=} \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-4}$

Összességében tehát: $\frac{x^5-5x^4-x^3+21x^2-25x+12}{x^3-5x^2+4x} = x^2 - 5 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{6}{x-4}$

(d) $\int \frac{x^3+2x^2+7x-1}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \operatorname{arctg} x + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Irracionális függvények integrálása

1. (a) $\int (2\sqrt{x^3} - 4\sqrt[3]{x-1})\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} - 3\sqrt[3]{(x-1)^4} + C$

(b) $\int (3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x = 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

(c) $\int \left(2\sqrt{(x+2)^5} + \sqrt[4]{2x+1} - 3\sqrt[7]{3x+11}\right)\mathrm{d}x =$
$= \frac{4}{7}\sqrt{(x+2)^7} + \frac{2}{5}\sqrt[4]{(2x+1)^5} - \frac{7}{8}\sqrt[7]{(3x+11)^8} + C$

(d) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$
$(x = \sin t)$

(e) $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + C$
$(\frac{x}{2} = \sin t)$

(f) $\int \sqrt{1-3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-3x^2} + C$
$(\sin t = \sqrt{3}x)$

(g) $\int \sqrt{-x^2-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{1-(x+1)^2} + C$
$(x+1 = \sin t)$

(h) $\int \sqrt{-x^2+6x-5}\,\mathrm{d}x = 2\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right) + (x-3)\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} + C$
$(\frac{x-3}{2} = \sin t)$

(i) $\int \sqrt{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\operatorname{arsh} 3x + \frac{1}{2}x\sqrt{1+9x^2} + C$
$(3x = \operatorname{sh} t)$

(j) $\int \sqrt{x^2-25}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-25} - \frac{25}{2}\operatorname{arch}\frac{x}{5} + C$
$(\frac{x}{5} = \operatorname{ch} t)$

2. (a) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+6}}\,\mathrm{d}x = \int 2x\cdot(x^2+6)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{(x^2+6)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x^2+6}+C$

$f^{\alpha}f'$ alakú integrandus

(b) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int (2x-4)(x^2-4x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2-4x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt{x^2-4x+1}+C$

$f^{\alpha}f'$ alakú integrandus

(c) $\int \frac{10}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{10}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\,\mathrm{d}x = 10\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$

$f(ax+b)$ alakú integrandus

(d) $\int \frac{6}{\sqrt{1+16x^2}}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{\sqrt{1+(4x)^2}}\,\mathrm{d}x = 6\cdot\frac{\operatorname{arsh}4x}{4}+C$

$f(ax+b)$ alakú integrandus

(e) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{9-4x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{9-4x^2} - \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

$(\frac{2x}{3} = \sin t)$

(f) $\int \frac{10-x}{\sqrt{-x^2-6x-5}}\,\mathrm{d}x = 13\arcsin\left(\frac{x+3}{2}\right) + 2\sqrt{1-\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}+C$

$(\frac{x+3}{2} = \sin t)$

Az integrálszámítás alkalmazásai I.

Területszámítás

1. Számítsa ki a görbe és az x-tengely közé zárt síkrész területét a megadott intervallumon!

(a) $y = x^2 - 3x + 7 \qquad [-1, 2\,]$

$y \geq 0 \ \forall x \in [-1, 2]$ esetén, ezért

$$T = \int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 7)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x\right]_{-1}^{2} = \frac{117}{6} \approx 19,5$$

(b) $y = \frac{1}{2} + \sin x \qquad [\,0, \pi]$

$y \geq 0 \ \forall x \in [0, \pi]$ esetén, ezért

$$T = \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sin x\right)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \cos x\right]_0^{\pi} = 2 + \frac{\pi}{2} \approx 3,57$$

(c) $y = e^x - 1 \qquad [-1, 1\,]$

$e^x - 1 = 0$, ha $x = 0$, továbbá $e^x - 1 < 0$, ha $x \in [-1, 0[$ ill. $e^x - 1 > 0$, ha $x \in]0, 1]$, ezért

$$T = \left|\int_{-1}^{0} (e^x - 1)\ \mathrm{d}x\right| + \int_{0}^{1} (e^x - 1)\ \mathrm{d}x = \left|[e^x - x]_{-1}^{0}\right| + [e^x - x]_0^1 =$$

$$= \left|(1 - 0) - (\tfrac{1}{e} + 1)\right| + (e - 1) - (1 - 0) = \frac{1}{e} + e - 2 \approx 1,086$$

(d) $y = \sin^2 x - \frac{1}{4} \qquad [0, \pi\,]$

$$\text{zérushelyek: } \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2} \overset{x\in[0,\pi]}{\Rightarrow} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

msz.: $\int \left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1}{4}\right)\ \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{4}(x - \sin 2x) + C$

$$T = \left|\left[\tfrac{1}{4}(x - \sin 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right| + \left[\tfrac{1}{4}(x - \sin 2x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left|\left[\tfrac{1}{4}(x - \sin 2x)\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\right| = \ldots \approx 1,1278$$

2. Számítsa ki az alábbi, paraméteres alakban megadott görbe és az x-tengely közötti síkrész területét a megadott intervallumon!

$$\text{képlet:}\quad T = \pm\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \begin{pmatrix} -\,,\ \text{ha}\,x\ \text{szig. mon. csökk.} \\ +\,,\ \text{ha}\,x\ \text{szig. mon. nő} \end{pmatrix}$$

$$\text{gyakorlatban:}\quad T = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

(a) $x = 2\cos t\ , \qquad y = \sin t \qquad [\,0, \pi]$

$$T = -\int_{0}^{\pi} \sin t(-2\sin t)\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\ \mathrm{d}t = \pi$$

Linearizáló formulával.

(b) $x = t - \sin t\ , \qquad y = 1 - \cos t \qquad [\,0, 2\pi]$

$$T = \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)\ \mathrm{d}t = \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi$$

Linearizáló formulával.

(c) $x = t^2 - 3t$, $\qquad y = e^t \qquad [2, 4]$

$$T = \int\limits_2^4 \underbrace{e^t \cdot (2t-3)}_{\text{parc. int.}} \,\mathrm{d}t = [e^t \cdot (2t-5)]_2^4 \approx 171,2$$

(d) $x = t^2 - 1$, $\qquad y = \sin t \qquad [0, \pi]$

(A példában egyébként adott $[2, 4]$ intervallum nem szerencsés, mert ott a sin fv.-nek zérushelye van.)

$$T = \int\limits_0^\pi \underbrace{2t \sin t}_{\text{parc. int.}} \,\mathrm{d}t = [-2t\cos t + 2\sin t]_0^\pi = 2\pi \approx 6,28$$

3. Számítsa ki az adott görbék által határolt korlátos síkrész területét!

(a) $y = 6x - x^2 - 7$, $\qquad y = x - 3$

$6x - x^2 - 7 = x - 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ v. $x = 4 \quad \Rightarrow$ Az $[1, 4]$ int.-on integrálunk.

$$T = \int\limits_1^4 \left((6x - x^2 - 7) - (x - 3)\right) \,\mathrm{d}x = \ldots = 4,5$$

(b) $y = 2x^2 e^x$, $\qquad y = -x^3 e^x$

$2x^2 e^x = -x^3 e^x \quad \Rightarrow \quad x = -2$ v. $x = 0 \quad \Rightarrow$ A $[-2, 0]$ int.-on integrálunk.

$$T = \int\limits_{-2}^0 \left((2x^2 e^x) - (-x^3 e^x)\right) \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^0 \underbrace{(2x^2 e^x + x^3 e^x)}_{\text{parc. int.}} \,\mathrm{d}x = [e^x(x^3 - x^2 + 2x - 2)]_{-2}^0 =$$

$$= \tfrac{18}{e^2} - 2 \approx 0,43$$

(c) $y = x^3$, $\qquad y = 4x$

$x^3 = 4x \quad \Rightarrow \quad x = -2$ v. $x = 0$ v. $x = 2 \quad \Rightarrow$ A $[-2, 0]$ ill. $[0, 2]$ int.-on integrálunk.

$$T = \int\limits_{-2}^0 (x^3 - 4x) \,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 (4x - x^3) \,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{4x^2}{2}\right]_{-2}^0 + \left[\tfrac{4x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8$$

Mindkét fv. páratlan, így a szimmetria miatt $T = 2\int\limits_0^2 (4x - x^3)\,\mathrm{d}x$

(d) $y = \sin x$, $\qquad y = \dfrac{2x}{\pi}$

$\sin x = \frac{2x}{\pi} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2}$ v. $x = 0$ v. $x = \frac{\pi}{2}$

Mivel mindkét fv. páratlan, így a szimmetria miatt elég a $[0, \frac{\pi}{2}]$ int.-on integrálnunk.

$$T = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \tfrac{2}{\pi}x\right) \,\mathrm{d}x = 2\left[-\cos x - \tfrac{2}{\pi} \cdot \tfrac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \approx 0,43$$

4. Számítsa ki a paraméteres alakban megadott görbe által határolt síkidom területét!

$$\text{képlet:} \quad T = \left| \int_\alpha^\beta y(t) \cdot \dot{x}(t) \,\mathrm{d}t \right|$$

(a) $x = t^2 - 1$, $\qquad y = \sin t$, $\qquad t \in [-\pi, \pi]$

$$T = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot 2t \,\mathrm{d}t \right| \overset{\text{parciális int.}}{=} \left| [-2t\cos t + 2\sin t]_{-\pi}^{\pi} \right| = |4\pi| = 4\pi \approx 12,57$$

(b) $x=\cos^2 t$, $\qquad y=\sin 2t$, $\qquad t\in[0,\pi]$

$$T=\left|\int_0^\pi \sin 2t\cdot 2\cos t(-\sin t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|-\int_0^\pi \sin^2 2t\,\mathrm{d}t\right| \overset{\text{linearizáló form.}}{=} \left|-\left[\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{8}\sin 4t\right]_0^\pi\right| =$$
$$=\left|-\tfrac{\pi}{2}\right| = \tfrac{\pi}{2}\approx 1,57$$

(c) $x=t^2$, $\qquad y=t^3-4t$, $\qquad t\in[-2,2]$

$$T=\left|\int_{-2}^{2}(t^3-4t)2t\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-2}^{2}(2t^4-8t^2\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left[\tfrac{2t^5}{5}-\tfrac{8t^3}{3}\right]_{-2}^{2}\right| = \left|-\tfrac{256}{15}\right|\approx 17,07$$

Forgástestek térfogata

1. Számítsa ki az adott görbeívnek az x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát!

$$\text{képlet:}\quad V=\pi\int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{képletgy.}}{=} \pi\int_a^b f^{\,2}(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) $y=4-x^2 \qquad [-2,2\,]$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(x^4-8x^2+16)\ \mathrm{d}x = \tfrac{512\pi}{15}\approx 107,23$$

(b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}} \qquad \left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tfrac{1}{\cos x}\ \mathrm{d}x = \pi\left[\ln\left|\tfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \tfrac{\pi}{2}\ln 3\approx 1,726$$

Az integrálás a képletgyűjteményben is szereplő $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel végezhető el.
Útm.:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\qquad x=2\operatorname{arctg} t\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{1+t^2}\qquad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(c) $y=\sqrt{x}e^{-x} \qquad [\,0,1]$

$$V=\pi\int_0^1 xe^{-2x}\ \mathrm{d}x = \pi\left[e^{-2x}\left(-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\right)\right]_0^1\approx 0,466$$

2. Forgassuk meg az $y=e^x$, $y=e^{-x}$ és az $x=1$ egyenletű görbék által határolt véges tartományt az x-tengely körül! Mekkora a keletkezett forgástest térfogata?

Mo.: $V=\pi\int_0^1 e^{2x}\ \mathrm{d}x-\pi\int_0^1 e^{-2x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x}+e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(e^2+\frac{1}{e^2}-2\right)\approx 8,67$

Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amelyet úgy nyerünk, hogy ugyanezen síkidomot az y-tengely körül forgatjuk meg?

Mo.: $V=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{e} 1\,\mathrm{d}y-\left(\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln y)^2\,\mathrm{d}y+\pi\int_1^e(\ln y)^2\,\mathrm{d}y\right) = \pi\int_{\frac{1}{e}}^{e} 1\,\mathrm{d}y-\pi\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln y)^2\,\mathrm{d}y =$

$=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1-\ln^2 y\right)\ \mathrm{d}y = \pi\left[-y-y\ln^2 y+2y\ln y\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{4\pi}{e}\approx 4,623$

($\int\ln^2 y\,\mathrm{d}y$ parciális integrálással)

3. Számítsa ki a következő, paraméteresen megadott görbeívek x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástestek térfogatát!

$$\text{képlet:} \quad V = \pm\,\pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \begin{pmatrix} -\,, \text{ ha}\, x \text{ szig. mon. csökk.} \\ +\,, \text{ ha}\, x \text{ szig. mon. nő} \end{pmatrix}$$

$$\text{gyakorlatban:} \quad V = \left|\pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\right| \overset{\text{képletgy.}}{=} \left|\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t) \cdot \dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

(a) $x = \cos t\ ,\ y = \sin 2t \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$V = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t(-\sin t)\ \mathrm{d}t = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^2 t\ \mathrm{d}t = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(1 - \cos^2 t) \cos^2 t\ \mathrm{d}t =$

$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos^2 t - \sin t \cos^4 t)\ \mathrm{d}t = 4\pi \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi}{15} \approx 1,67$

(b) $x = t^2 + t\ ,\ y = e^t \quad t \in [0, 3]$

$V = \pi \int_0^3 e^{2t}(2t + 1)\,\mathrm{d}t = \pi \left[te^{2t}\right]_0^3 = 3\pi e^6 \approx 3802$

Ívhossz számítása

1. Számítsa ki a görbeív hosszát a megadott intervallumban!

$$\text{képlet:} \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{képletgy.}}{=} \int_a^b \sqrt{1 + (f\,'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

(a) $y = 2x^{\frac{3}{2}} \qquad [\,0, 11]$

$s = \int_0^{11} \sqrt{1 + 9x}\ \mathrm{d}x = 74$

$f(ax + b)$ alakú integrandus.

(b) $y = \frac{x}{6}\sqrt{x + 12} \qquad [-11, -3]$

$s = \int_{-11}^{-3} \frac{x+16}{4\sqrt{x+12}}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\sqrt{(x + 12)^3} + 2\sqrt{x + 12}\right]_{-11}^{-3} = \frac{25}{3}$

Az integrálás a $t = \sqrt{x + 12}$ helyettesítéssel végezhető el.

(c) $y = \ln \sin x \qquad \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

$s = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\, x}\ \mathrm{d}x = \left[\ln\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \ln 3 \approx 1,1$

Útm.: $\int \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\, x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Az integrálás a képletgyűjteményben is szereplő $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ helyettesítéssel végezhető el.

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \qquad x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1 + t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

2. Számítsa ki az alábbi, paraméteresen megadott görbeív hosszát a megadott intervallumon!

$$\text{képlet:}\quad s=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^{\,2}(t)+\dot{y}^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{képletgy.}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{\varphi}^{\,2}(t)+\dot{\psi}^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) $x=t^2\ ,\qquad y=t\left(\frac{1}{3}-t^2\right)\qquad t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$

$$s=\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{(2t)^2+(\tfrac{1}{3}-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{9(t^2+\tfrac{1}{9})^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{1}{3}}3\left(t^2+\tfrac{1}{9}\right)\,\mathrm{d}t=\left[t^3+\tfrac{1}{3}t\right]_0^{\frac{1}{3}}=\tfrac{4}{27}$$

(b) $x=e^t\sin t\ ,\qquad y=e^t\cos t\qquad t\in[\,0,\ln 2]$

$$s=\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{2e^{2t}}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{2}e^t\,\mathrm{d}t=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^{\ln 2}=\sqrt{2}$$

$$\text{Útm.:}\quad \left.\begin{array}{l}\dot{x}(t)=e^t(\sin t+\cos t)\\ \dot{y}(t)=e^t(\cos t-\sin t)\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{l}\dot{x}^2(t)=e^{2t}(\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t)\\ \dot{y}^2(t)=e^{2t}(\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)=e^{2t}\left(2(\sin^2 t+\cos^2 t)\right)=2e^{2t}$$

Az integrálszámítás alkalmazásai II.

Felszínszámítás

1. Számítsa ki a görbe x-tengely körüli forgatásával nyert forgástest palástfelszínét!

$$\text{képlet:}\quad F = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{képletgy.}}{=} 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f\,'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

(a) $y = \frac{1}{3}x^3 \qquad x \in [0,1]$

$y'(x) = x^2 \;\Rightarrow\; (y'(x))^2 = x^4$

$F = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{12}\int_0^1 4x^3(1+x^4)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\left[\frac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$

$= \frac{2\pi}{18}\left[\sqrt{(1+x^4)^3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{8}-\sqrt{1}\right) \approx 0,64$

(b) $y = \sqrt{9-x^2} \qquad x \in [-3,3]$

$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) \;\Rightarrow\; (y'(x))^2 = \frac{4x^2}{4(9-x^2)} = \frac{x^2}{9-x^2} \;\Rightarrow$

$1+(y'(x))^2 = \frac{9-x^2}{9-x^2} + \frac{x^2}{9-x^2} = \frac{9}{9-x^2}$

$F = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} \cdot \sqrt{\frac{9}{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-3}^{3} 3\,\mathrm{d}x = 2\pi\,[3x]_{-3}^{3} =$
$2\pi(9-(-9)) = 36\pi \approx 113,1$

(megj.: origó középpontú, 3-sugarú gömb felszínéről van szó: $F = 4\pi r^2 = 36\pi$)

(c) $y = \sqrt{3-2x} \qquad x \in [0, \frac{3}{2}]$

$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3-2x}} \cdot (-2) \;\Rightarrow\; (y'(x))^2 = \frac{4}{4(3-2x)} = \frac{1}{3-2x} \;\Rightarrow$

$1+(y'(x))^2 = \frac{3-2x}{3-2x} + \frac{1}{3-2x} = \frac{4-2x}{3-2x}$

$F = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{3-2x} \cdot \sqrt{\frac{4-2x}{3-2x}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{3-2x} \cdot \frac{\sqrt{4-2x}}{\sqrt{3-2x}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{4-2x}\,\mathrm{d}x =$

$= 2\pi\left[\frac{(-2x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot(-2)}\right]_0^{\frac{3}{2}} = -\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{(-3+4)^3} - \sqrt{(0+4)^3}\right) = -\frac{2\pi}{3}(1-8) = \frac{14\pi}{3} \approx 14,66$

(megj.: a példában egyébként megadott $[0,2]$ tartomány nem korrekt, mert y nem értelmezett pl. az $x=2$ helyen.)

(d) $y = \sqrt{2x-4} \qquad x \in [2,3]$

$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-4}} \;\Rightarrow\; (y'(x))^2 = \frac{1}{2x-4} \;\Rightarrow$

$1+(y'(x))^2 = \frac{2x-4}{2x-4} + \frac{1}{2x-4} = \frac{2x-3}{2x-4}$

$F = 2\pi \int_2^3 \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{\frac{2x-3}{2x-4}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_2^3 \sqrt{2x-4} \cdot \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-4}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_2^3 \sqrt{2x-3}\,\mathrm{d}x =$

$= 2\pi\left[\frac{(2x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 2}\right]_2^3 = \frac{2\pi}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{27}-1) \approx 8,79$

2. Forgassa meg az alábbi, paraméteres egyenletrendszerrel felírt görbék megadott darabját az x-tengely körül, és számítsa ki a keletkező forgástestek palástjának felszínét!

$$\text{képlet:} \quad F = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{képletgy.}}{=} 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{\dot{\varphi}^2(t)+\dot{\psi}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) $x = t^2 \qquad y = t \qquad t \in [0,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = 2t \\ \dot{y}(t) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t) = 4t^2+1$$

$$F = 2\pi \int_0^1 t\sqrt{4t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{8}\int_0^1 \underbrace{8t(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}}_{f'\cdot f^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{12}\left[\sqrt{(4t^2+1)^3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{6}(\sqrt{125}-\sqrt{1}) \approx 5,33$$

(b) $x = a\cos^2 t \qquad y = a\sin^2 t \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = a\cdot 2\cos t(-\sin t) \\ \dot{y}(t) = a\cdot 2\sin t\cos t\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t) = 8a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

$$F = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^2 t\sqrt{8a^2\sin^2 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^2 t\cdot 2\sqrt{2}\cdot a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\sqrt{2}a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos t\sin^3 t}_{f'\cdot f^\alpha}\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}a^2\pi\left[\frac{\sin^4 t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{2}a^2\pi\left(\frac{1}{4}-0\right) = \sqrt{2}a^2\pi \approx 4,44$$

(megj.: Olyan forgáskúp palástfelszínéről van szó, amely kúp alapkörének sugara a, magassága a, alkotója $\sqrt{2}a$.)

(c) $x = e^t\cos t \qquad y = e^t\sin t \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t-\sin t) \\ \dot{y}(t) = e^t\cos t + e^t\sin t = e^t(\cos t+\sin t)\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t) =$$

$$= e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t\sin t+\sin^2 t)+e^{2t}(\cos^2 t+2\cos t\sin t+\sin^2 t) = e^{2t}\cdot 2(\cos^2 t+\sin^2 t) = 2e^{2t}$$

$$F = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin t\sqrt{2e^{2t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t(\sin t)e^t\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{e^{2t}\sin t}_{\text{parciális int.}}\,\mathrm{d}t = \ldots =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left[-\frac{1}{5}e^{2t}\cos t+\frac{2}{5}e^{2t}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\pi\left((0+\frac{2}{5}e^\pi)-(-\frac{1}{5}+0)\right) \approx 84,02$$

(d) $x = \cos t + \ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right) \qquad y = \sin t \qquad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$

$$\dot{x}(t) = -\sin t + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2} = -\sin t+\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = -\sin t+\frac{1}{\sin t}$$

$$\dot{y}(t) = \cos t$$

$$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t) = \sin^2 t - 2 + \frac{1}{\sin^2 t}+\cos^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}-1 = \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$$F = 2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t = 2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \big|\underbrace{\cos t}_{\leq 0}\big|\,\mathrm{d}t = 2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\cos t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \left[-\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \approx 1,84$$

Improprius integrálok

Integrálás végtelen intervallumon

1. (a) $\displaystyle\int\limits_{-\ln 2}^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{-\ln 2}^{\omega} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{-\ln 2}^{\omega} =$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{e^{-2\omega}}{-2} - \frac{e^{-2(-\ln 2)}}{-2}\right) = 0 + \frac{1}{2}e^{\ln 4} = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

megj.: a továbbiakban $\lim\limits_{\omega\to\infty}[F(x)]_a^\omega$ helyett röviden $[F(x)]_a^\infty$ jeleket írunk.

(b) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln|1+x^2|\right]_0^\infty =$

$= \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x^2) - \ln(1+0)\right) =$ „$\frac{1}{2}(\infty-0)$” $= \infty$

(Az improprius integrál divergens.)

(c) $\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty \underbrace{2x(x^2+1)^{-3}}_{f'\cdot f^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{-2}}{-2}\right]_{\sqrt{2}}^\infty =$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right]_{\sqrt{2}}^\infty = -\frac{1}{4}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{(2+1)^2}\right) = -\frac{1}{4}\left(0-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{36} \approx 0,0277$

(d) $\int\limits_e^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \int\limits_e^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_e^\infty \frac{1}{x}\cdot\ln^{-2}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^{-1}x}{-1}\right]_e^\infty = -\left[\frac{1}{\ln x}\right]_e^\infty =$

$= -\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln e}\right) = -(0-1) = 1$

(e) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = [\mathrm{arctg}(x+1)]_0^\infty = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arctg}(x+1) - \mathrm{arctg}(1) =$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$

(f) $\int\limits_1^\infty \underbrace{(2x+3)e^{1-x}}_{\text{parciális int.}}\,\mathrm{d}x = \ldots = [(-2x-5)e^{1-x}]_1^\infty = \left(\lim\limits_{x\to\infty}(-2x-5)e^{1-x}\right) - (-7) =$

$= \left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x-5}{e^{x-1}}\right) + 7 \overset{\text{L'H}}{=} \left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{e^{x-1}}\right) + 7 = 0 + 7 = 7$

(g) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x+\sqrt{e^x}} \overset{*}{=}$

msz.: $t = \sqrt{e^x}$ helyettesítéssel:

$$t = \sqrt{e^x} \quad\Rightarrow\quad t^2 = e^x \quad\Rightarrow\quad x = \ln t^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}\cdot 2t = \frac{2}{t} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{e^x+\sqrt{e^x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2+t}\cdot\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t^3+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t^2(t+1)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \underbrace{\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}\right)}_{\text{parc. törtekre bontás}} \mathrm{d}t \overset{\text{HF}}{=} \int \left(\frac{-2}{t}+\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t+1}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= -2\ln|t| - \frac{2}{t} + 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\frac{t+1}{t}\right| - \frac{2}{t} + C = 2\ln\left|\frac{\sqrt{e^x}+1}{\sqrt{e^x}}\right| - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + C$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to\infty}\left(2\ln\left|\frac{\sqrt{e^x}+1}{\sqrt{e^x}}\right| - \frac{2}{\sqrt{e^x}}\right) - \left(2\ln\left|\frac{\sqrt{e^0}+1}{\sqrt{e^0}}\right| - \frac{2}{\sqrt{e^0}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\ln\left|1+\frac{1}{\sqrt{e^x}}\right| - \frac{2}{\sqrt{e^x}}\right) - \left(2\ln\left|\frac{\sqrt{e^0}+1}{\sqrt{e^0}}\right| - \frac{2}{\sqrt{e^0}}\right) =$$

$$= (0-0) - (2\ln 2 - 2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0,61$$

(h) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[e^{x+1}\right]_{-\infty}^{0} = e^{0+1} - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = e - 0 = e \approx 2,72$

(i) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \underbrace{x^2e^{2x}}_{\text{parc. int.}}\,\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_{-\infty}^{-1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{e^2} - \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2x}}_{\infty\cdot 0} =$

$$= \frac{5}{4e^2} - \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}{e^{-2x}} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{5}{4e^2} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{-2e^{-2x}} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{5}{4e^2} - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4e^{-2x}} =$$

$$= \frac{5}{4e^2} - 0 = \frac{5}{4e^2} \approx 0,17$$

(j) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2} - \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{2} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

(k) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}}_{g'(x)\cdot f(g(x))}\,\mathrm{d}x = -\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = -\left(\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) =$

$$= -(0-0) = 0$$

megj.: Ez úgy lehetséges, hogy az $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ integrandus páratlan függvény.

Adott intervallumon nem korlátos függvény integrálása

1. (a) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \overset{*}{=} \left[\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot(-1)}\right]_{0}^{1} = -2\left[\sqrt{1-x}\right]_{0}^{1} = -2\left(\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x} - \sqrt{1-0}\right) = -2(0-1) = 2$

(*) Az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ függvény nincs értelmezve az $x = 1$ helyen, továbbá $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{0^+} = \infty$, ezért improprius integrálról van szó.

(b) $\int\limits_{0}^{1} \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}}_{\text{képletgy.}} \overset{*}{=} \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right| = \frac{1}{2}\cdot\infty - \frac{1}{2}\cdot 0 = \infty$

Az improprius integrál divergens.

(*) Az $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ függvény nincs értelmezve az $x = 1$ helyen, továbbá $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$, ezért improprius integrálról van szó.

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos x(\sin x)^{-\frac{1}{2}}}_{f'\cdot f^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - 2\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\sin x} = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2$

(∗) Az $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, továbbá $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{0^+} = \infty$, ezért improprius integrálról van szó.

(d) $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} \overset{*}{=} [2\ln|\sqrt{x}+1|]_0^4 = 2\ln 3 - \lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left|\sqrt{x}+1\right| = 2\ln 3 \approx 2,2$

$t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{t^2+t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$

(∗) Az $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, továbbá $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = \infty$, ezért improprius integrálról van szó.

(e) $\int\limits_0^1 \underbrace{\ln x}_{\text{parc. int.}}\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} [x\ln x - x]_0^1 = (0-1) - \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x - x) = (0-1) - 0 = -1$

felh.: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0^-$

(∗) Az $f(x) = \ln x$ függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, továbbá $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, ezért improprius integrálról van szó.

(f) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

A (b) feladat alapján $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \infty$, így ez az improprius integrál is divergens:

$\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \infty$

(g) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} \overset{*}{=} \int\limits_0^1 \underbrace{\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^{-2}}_{f'\cdot f^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_0^1 = \left(-\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln x}\right) - \left(-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\right) = \infty - 0 = \infty$

(∗) Az $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ függvény nincs értelmezve sem az $x = 0$, sem az $x = 1$ helyen, továbbá $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x\ln^2 x} = \infty$ ill. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x\ln^2 x} = \infty$, ezért improprius integrálról van szó.

(h) $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

(∗) Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen, az integrálási tartomány ($[0,\pi]$) egy belső pontjában nincs értelmezve.

Mivel $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln|\cos x|\right) - (-\ln|\cos 0|) = \infty + 0 = \infty$, ezért a $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ integrál is divergens.