Analízis előadások

Vajda István

Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2015. október 24.

Az n-dimeziós tér

Definíció: Az $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ halmazt n-dimenziós térnek nevezzük. Ennek a térnek egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ valós szám n-essel megadott eleme a tér egy pontja.

Jelölés: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Megjegyzések:

- Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat a P pont koordinátáinak nevezzük.
- Az $O(0, 0, \ldots, 0)$ pontot az n-dimenziós térben is origónak nevezzük.

n-dimenziós vektorok

Definíció: Az n-dimenziós tér pontjaiból alkotott (P, Q) rendezett párokat n-dimenziós vektornak nevezzük.

Jelölés: $\overrightarrow{PQ}$, $\underline{a}$, $\underline{v}$, ...

Megjegyzés: Az $\overrightarrow{OP}$ vektort a P pont helyvektorának nevezzük. Az n-dimenziós tér pontjai és azok helyvektorai között bijektív leképezés létesíthető.

Definíció: Ha $\underline{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az $\underline{a}$ vektor α-szorosán az $\alpha\underline{a}(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$ vektort értjük.

Definíció: Az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges $\underline{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\underline{b}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektorának összegén az

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

vektort, skaláris szorzatán pedig az

$$\underline{a}\underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

n-dimenziós vektorok

Definíció: Az n-dimenziós tér pontjaiból alkotott (P, Q) rendezett párokat n-dimenziós vektornak nevezzük.

Jelölés: $\overrightarrow{PQ}$, $\underline{a}$, $\underline{v}$, $\ldots$

Megjegyzés: Az $\overrightarrow{OP}$ vektort a P pont helyvektorának nevezzük. Az n-dimenziós tér pontjai és azok helyvektorai között bijektív leképezés létesíthető.

Definíció: Ha $\underline{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az $\underline{a}$ vektor α-szorosán az $\alpha\underline{a}(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$ vektort értjük.

Definíció: Az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges $\underline{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\underline{b}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektorának összegén az

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

vektort, skaláris szorzatán pedig az

$$\underline{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Távolság az *n*-dimenziós térben

Definíció: Egy $\underline{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektor abszolút értékén az

$$\left|\underline{a}\right| = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

számot értjük.

Definíció: Az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ és $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ pontjának távolsága a

$$d(A, B) = \left|\underline{a} - \underline{b}\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}$$

valós szám.

Távolság az n-dimenziós térben

Definíció: Egy $\underline{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektor abszolút értékén az

$$\left|\underline{a}\right| = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

számot értjük.

Definíció: Az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ pontjának távolsága a

$$d(A, B) = \left|\underline{a} - \underline{b}\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}$$

valós szám.

Távolság az *n*-dimenziós térben

Az $\mathbb{R}^n$-térben értelmezett távolság rendelkezik a távolságfogalom szokásos tulajdonságaival azaz:

1. $\forall A \forall B: \quad d(A,B) \geq 0,$
2. $\forall A \forall B: \quad$ ha $d(A,B) = 0$, akkor $A = B$,
3. $\forall A \forall B: \quad d(A,B) = d(B,A),$
4. $\forall A \forall B \forall C: \quad d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C).$

Környezet, korlátos halmaz, nyílt és zárt halmazok

Definíció: Az $\mathbb{R}^n$-térben egy tetszőleges P_0 középpontú, r-sugarú nyílt gömbön (r>0) azon P pontok halmazát értjük, amelyekre $d(P, P_0) < r$ teljesül.

Megjegyzés: A P_0 középpontú, r-sugarú nyílt gömböt a P_0 pont r-sugarú környezetének is nevezzük.

Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $G \subseteq \mathbb{R}^n$ gömb, amelynek H részhalmaza.

Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz nyílt, ha minden $P \in H$ pontnak van olyan környezete, amely része a H halmaznak.

Definíció: A P pont a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz torlódási pontja, ha P minden környezete tartalmaz P-től különböző H-beli pontot.

Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz zárt, ha minden torlódási pontját tartalmazza.

Környezet, korlátos halmaz, nyílt és zárt halmazok

Definíció: Az $\mathbb{R}^n$-térben egy tetszőleges P_0 középpontú, r-sugarú nyílt gömbön (r>0) azon P pontok halmazát értjük, amelyekre $d(P, P_0) < r$ teljesül.

Megjegyzés: A P_0 középpontú, r-sugarú nyílt gömböt a P_0 pont r-sugarú környezetének is nevezzük.

Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $G \subseteq \mathbb{R}^n$ gömb, amelynek H részhalmaza.

Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz nyílt, ha minden $P \in H$ pontnak van olyan környezete, amely része a H halmaznak.

Definíció: A P pont a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz torlódási pontja, ha P minden környezete tartalmaz P-től különböző H-beli pontot.

Definíció: A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz zárt, ha minden torlódási pontját tartalmazza.

Többváltozós függvények

Definíció: Az $A \to \mathbb{R}$ függvényt, ahol $A \subseteq \mathbb{R}^n$ n-változós valós függvénynek nevezzük.

Megjegyzés: Az n-változós valós függvény értelmezési tartományának elemei tehát valós számokból álló rendezett szám n-esek, értékei valós számok.

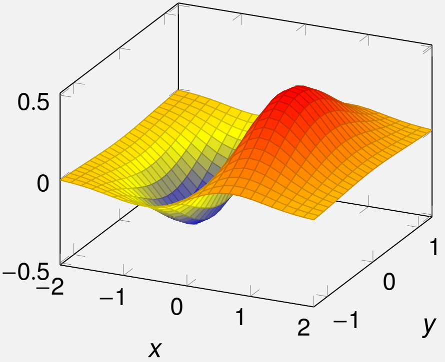
Jelölés: $f, g, h, \dots$

A többváltozós függvényeket gyakran képlettel adjuk meg:

- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 - y^2$
- $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \sin(x)\cos(y)$
- $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y,z) = 3x^3y - 2y^2z^2 + xyz$

Kétváltozós függvények ábrázolása

$$f(x) = xe^{-x^2-y^2}$$



A kétváltozós függvényeket – hasonlóan az egyváltozósakhoz – koordináta-rendszerben ábrázolhatjuk. Az értelmezési tartomány elemei az *xy* sík pontjai, a függvényértékeket a *z*-tengelyen olvashatjuk le.

Többváltozós függvények tulajdonságai

A többváltozós függvények egyes tulajdonságai, pl. a korlátosság, a szélsőértékek, folytonosság lényegében ugyanúgy értelmezhetők, mint az egyváltozós függvények esetében. míg más tulajdonságok, mint a monotonitás, periodicitás nem, vagy legalábbis nem egyszerűen általánosíthatók.

Példa:

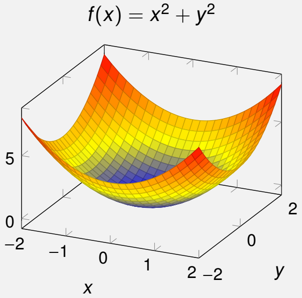
Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvény alulról korlátos, hiszen a 0 alsó korlátja, de nem korlátos felülről, azaz nem korlátos.

Minimumhelye a $(0; 0)$ pont, minimum értéke a 0.

Többváltozós függvények tulajdonságai

A többváltozós függvények egyes tulajdonságai, pl. a korlátosság, a szélsőértékek, folytonosság lényegében ugyanúgy értelmezhetők, mint az egyváltozós függvények esetében. míg más tulajdonságok, mint a monotonitás, periodicitás nem, vagy legalábbis nem egyszerűen általánosíthatók.

Példa:



Az $f(x;y) = x^2 + y^2$ függvény alulról korlátos, hiszen a 0 alsó korlátja, de nem korlátos felülről, azaz nem korlátos.

Minimumhelye a $(0;0)$ pont, minimum értéke a 0.

Kétváltozós függvények parciális deriváltja

Definíció: Legyen az $f(x, y)$ kétváltozós függvény értelmezve a $P_0(x_0, y_0)$ pont egy környezetében. Ha a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

határérték létezik és véges, akkor az f függvényt az x változó szerint parciálisan differenciálhatónak nevezzük az P_0 pontban.

Megjegyzés: A fenti határértéket az f függvény P_0-beli x szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés: $f'_x(x_0, y_0)$, illetve $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P=P_0}$.

Megjegyzés: Hasonlóan értelmezhető a kétváltozós függvény y változó szerinti parciális deriváltja, illetve az n változós függvény tetszőleges változója szerinti parciális deriváltja is.

Kétváltozós függvények parciális deriváltja

Példa: Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény $P_0(2, 1)$ pontbeli parciális deriváltjait!

Megoldás:

$$f'_x(2,1) = \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 + 1\right) - (4 + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

$$f'_y(2,1) = \lim_{y \to 1} \frac{\left(4 + y^2\right) - (4 + 1)}{y - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^2 - 1}{y - 1} = \lim_{y \to 1} (y + 1) = 2$$

Kétváltozós függvények parciális deriváltja

Példa: Számítsuk ki az $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ kétváltozós függvény $P_0(1,3)$ pontbeli x szerinti parciális deriváltját!

Megoldás:

$$f'_x(1,3) = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right) - \frac{1}{3}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Kétváltozós függvények parciális deriváltfüggvénye

Definíció: Jelentse G azt a halmazt, amelynek pontjaiban az

$$f\colon \mathbb{R}^2 \supseteq H \to \mathbb{R}$$

kétváltozós függvénynek létezik az x-szerinti parciális deriváltja. (Nyilván $G \subseteq H$.) Ekkor azt a $G \to \mathbb{R}$ függvényt, amely G minden pontjában az f függvény adott pontbeli x-szerinti parciális deriváltját veszi fel értékül, az f függvény x-szerinti parciális deriváltfüggvényének nevezzük.

Jelölés: $f'_x, \quad f'_x(x,y), \quad$ illetve $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Kétváltozós függvények parciális deriváltfüggvénye

Megjegyzések:

- Hasonlóan értelmezhető az y-szerinti parciális deriváltfüggvény is.
- A kétváltozós függvény parciális deriváltfüggvényei is kétváltozós függvények.
  $(G \subseteq \mathbb{R}^2)$
- A kétváltozós függvények parciális deriváltfüggvényeit hasonlóan határozhatjuk meg, mint az egyváltozós függvények deriváltfüggvényeit, mindössze arra kell ügyelni, hogy a másik változót (tehát amelyik szerint éppen nem deriválunk) konstansként kell kezelni.
- A parciális deriváltfüggvények 2-nél több változó esetén is ugyanígy értelmezhetők.

Kétváltozós függvények parciális deriváltfüggvénye

Példa: Ha $f(x, y) = x^2y^2 + 3xy + 2x + 4y - 6$, akkor

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 3y + 2,$$

mert x^2 deriváltja $2x$ és y^2 csak konstans szorzónak számít, ...

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 3x + 4.$$

Ebben az esetben az eredeti függvény is és a parciális deriváltfüggvények is minden valós (x, y) számpárra értelmezettek, azaz $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \mathbb{R}^2$.

Kétváltozós függvények parciális deriváltfüggvénye

Példa: Ha $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, akkor

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

és

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Itt $D_f\,(= H)$ az origó középpontú 3 egység sugarú zárt körlap, míg $D_{f'_x} = D_{f'_y}\,(= G)$ az origó középpontú 3 egység sugarú nyílt körlap. (Tehát az eredeti függvény értelmezett a körvonal pontjaiban, de ott parciálisan nem differenciálható egyik változó szerint sem.)

Magasabbrendű parciális deriváltfüggvények

Definíció: Ha az $f(x, y)$ kétváltozós függvény parciálisan differenciálható a $P_0(x_0, y_0)$ pont egy környezetében egyik vagy mindkét változója szerint és parciális deriváltfüggvénye(i) parciálisan differenciálható(k) P_0-ban, (az egyik vagy minkét változó szerint), akkor f kétszer differenciálható parciálisan a P_0 pontban és parciális deriváltfüggvényének parciális deriváltját másodrendű parciális deriváltnak nevezzük.

Megjegyzés: A másodrendű parciális deriváltak hasonlóan értelmezhetők akkor is, ha az f függvény n változós.

Magasabbrendű parciális deriváltfüggvények

Megjegyzések:

- Legyen az f n-változós valós függvény valamely k-edrendű parciális deriváltfüggvénye g, amely értelmezett a P_0 pont egy környezetében. Ha g parciálisan differenciálható a P_0 pontban valamely x_i változó szerint, akkor $g'_{x_i}(P_0)$ parciális deriváltját az f függvény P_0-beli $k+1$-edrendű parciális deriváltjának nevezzük.
- Egy n változós függvénynek a P_0 pontban összesen n^2-féle másodrendű parciális deriváltja lehetséges, mert először is, másodszor is n változó szerint deriválhatunk parciálisan. A k-adrendű parciális deriváltak száma maximálisan n^k.

Magasabbrendű parciális deriváltfüggvények

Jelölések:

- Ha egy n változós függvényt először is és másodszor is az x_k változó szerint deriválunk parciálisan, akkor az f függvény x_k-szerinti tiszta másodrendű parciális deriváltjához jutunk:

$$f''_{x_k x_k}(P_0) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\right|_{P=P_0}.$$

- Ha az egyik esetben az x_i, a másik esetben pedig az x_k változó szerint deriválunk parciálisan, akkor az f függvény egy vegyes másodrendű parciális deriváltjához jutunk, ami kétféle lehet aszerint, hogy melyik változó szerint deriváltunk először.
  Ha először deriválunk x_i, másodszor x_k szerint, akkor az

$$f''_{x_i x_k}(P_0) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\right|_{P=P_0}$$

vegyes másodrendű parciális derivált az eredmény.

Magasabbrendű parciális deriváltfüggvények

Példa: Ha $f(x,y) = x^3y + 2x^2y^2 - 3xy$, akkor

$$f'_x(x,y) = 3x^2y + 4xy^2 - 3y$$
$$f'_y(x,y) = x^3 + 4x^2y - 3x,$$
$$f''_{xx}(x,y) = 6xy + 4y^2,$$
$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 3x^2 + 8xy - 3$$
$$f''_{yy}(x,y) = 4x^2$$

Konkrét pontokban a deriváltakat a pontok behelyettesítésével nyerjük:

$$f''_{xx}(2,1) = 16,$$
$$f''_{xy}(1,3) = f''_{yx}(1,3) = 24$$
$$f''_{yy}(-1,0) = 4$$

Magasabbrendű parciális deriváltfüggvények

Tétel: Ha az f kétváltozós függvény vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvényei értelmezettek a P_0 pont egy környezetében és P_0-ban folytonosak, akkor $f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$.

Megjegyzés: A tétel általánosítható magasabbrendű deriváltakra és 2-nél több változós függvényekre is.

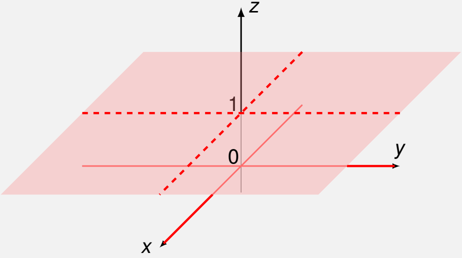
Magasabbrendű parciális deriváltfüggvények

Megjegyzés: A parciális differenciálhatóság nem tekinthető a differenciálhatóság többváltozós függvényekre vonatkozó általánosításának. Jól mutatja ezt pl. a folytonossággal való kapcsolat.

Ismert, hogy ha egy egyváltozós valós függvény differenciálható az x_0 helyen, akkor folytonos is x_0-ban. Ha azonban egy többváltozós valós függvény parciálisan differenciálható (akár minden változója szerint) a P_0 helyen, ebből még nem következik, hogy folytonos is P_0-ban.

Parciális differenciálhatóság és folytonosság

Példa: Legyen $f(x;y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } xy = 0, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$



Ez a függvény mindkét változója szerint parciálisan differenciálható $(0;0)$-ban, és $f'_x(0;0) = f'_y(0;0) = 0$. Ugyanakkor ebben a pontban nem folytonos, mert pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ választással a $(0;0)$ tetszőlegesen kicsi környezetében lesznek olyan (nem valamelyik tengelyre eső) pontok, ahol f értéke 1, ami nincs az $f(0;0) = 0$ ε-sugarú környezetében.

Totális differenciálhatóság

Definíció: Ha van a $P_0\left(x_0, y_0\right)$ pontnak olyan környezete, amelyben az $f\left(x, y\right)$ kétváltozós függvény értelmezett, és amelynek minden $P\left(x, y\right)$ pontjára

$$f\left(P\right) - f\left(P_0\right) = A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + a\left(P\right)\left(x - x_0\right) + b\left(P\right)\left(y - y_0\right),$$

ahol A és B valós számok, és az $a\left(P\right)$, $b\left(P\right)$ kétváltozós függvényekre teljesül, hogy $\lim\limits_{P \to P_0} a\left(P\right) = \lim\limits_{P \to P_0} b\left(P\right) = 0$, akkor f (totálisan) differenciálható a P_0 pontban.

Totális differenciálhatóság

Definíció: Ha van a $P_0\,(x_{1,0}; x_{2,0}; \ldots; x_{n,0})$ pontnak olyan környezete, amelyben az $f\colon A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R}^n)$ n változós függvény értelmezett, és amelynek minden $P\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ pontjára

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{k=1}^{n} A_k\,(x_k - x_{k,0}) + a_k\,(P)\,(x_k - x_{k,0})\,,$$

ahol $A_k \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{P \to P_0} a_k\,(P) = 0$ minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, akkor f (totálisan) differenciálható a P_0 pontban.

Totális differenciálhatóság, folytonosság, parciális differenciálhatóság

Tétel: Ha az $f: A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$) függvény (totálisan) differenciálható a P_0 pontban, akkor folytonos is P_0-ban.

Tétel: Ha az $f: A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$) függvény (totálisan) differenciálható a $P_0(x_{1,0}; x_{2,0}; \ldots; x_{n,0})$ pontban, akkor minden változója szerint parciálisan is differenciálható P_0-ban és $f'_{x_k}(P_0) = A_k$.

Megjegyzés: A tételben A_k ugyanazt jelenti, mint a totális differenciálhatóság definíciójában.

Teljes differenciál

Definíció: Ha az $f(x, y)$ n-változós függvény a $P_0(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, xn, 0)$ pontban totálisan differenciálható, akkor a

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)\,\mathrm{d}x_k$$

kifejezést az f függvény P_0-beli teljes (totális) differenciáljának nevezzük.

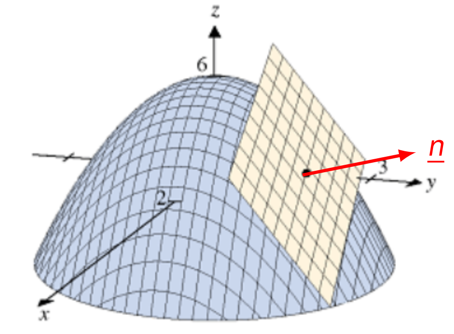
Példa: Az $f(x, y) = x^2y - 3xy$ kétváltozós függvény teljes differenciálja a $P_0(2, 3)$ pontban

$$\mathrm{d}f = 3\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y,$$

mert $f'_x(x_0, y_0) = 2xy - 3y\Big|_{\substack{x=2\\y=3}} = 3$ és $f'_y(x_0, y_0) = x^2 - 3x\Big|_{\substack{x=2\\y=3}} = -2.$

Felület érintősíkja

Tétel: Ha az $f(x,y)$ kétváltozós függvény a $P_0(x_0,y_0)$ pontban totálisan differenciálható, akkor a $z=f(x,y)$ felületnek az $E\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)$ pontban létezik érintősíkja és annak egy normálvektora $\underline{n}\big(f'_x(P_0), f'_y(P_0), -1\big)$.



Felület érintősíkja

Példa: Láttuk, hogy az $f(x,y) = x^2y - 3xy$ kétváltozós függvény totálisan differenciálható a $P_0(2,3)$ pontban.

Mivel $f(P_0) = -6$, ezért az $E(2,3,-6)$ pont rajta van a kétváltozós függvényt ábrázoló $z = x^2y - 3xy$ felületen.

Az E pontban a felülethez érintősík húzható, melynek normálvektora $\underline{n}(3,-2,-1)$, tehát a felület E ponthoz tartozó érintősíkjának egyenlete

$$3x - 2y - z = 6.$$

Hibaszámítás

Tétel: Ha az $f(x, y)$ kétváltozós függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban totálisan differenciálható, és az x_0, illetve y_0 számokat $|\Delta x|$ és $|\Delta y|$ abszolút hibával tudjuk meghatározni, akkor a függvényérték hibáját az

$$\left|f(P) - f(P_0)\right| = |\Delta f| \approx \left|f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y\right| \leqq$$
$$\leqq \left|f'_x(x_0, y_0)\right| |\Delta x| + \left|f'_y(x_0, y_0)\right| |\Delta y|$$

összefüggés alapján tudjuk becsülni.

Megjegyzés: A tétel könnyen általánosítható n változós függvényekre.

Hibaszámítás

Példa: Méréssel megállapítottuk, hogy egy egyenes körhenger alapkörének sugara $r = 3 \pm 0,01$(cm), magassága $m = 8 \pm 0,005$(cm). Határozzuk meg a henger térfogatát, valamint a számított térfogat abszolút és relatív hibáját!

Megoldás: $V = r^2 m\pi \approx 72\pi \approx 226,2$. A térfogatfüggvény parciális deriváltjai

$$V'_r\Big|_{\substack{r=3\\m=8}} = 2rm\pi|_{\substack{r=3\\m=8}} = 48\pi, \text{illetve } V'_m\Big|_{\substack{r=3\\m=8}} = r^2\pi\Big|_{\substack{r=3\\m=8}} = 9\pi.$$

A térfogat abszolút hibája

$$|\Delta V| = 48\pi \cdot 0,01 + 9\pi \cdot 0,005 = 0,525\pi \approx 1,649\left(\text{cm}^3\right),$$

relatív hibája pedig

$$\delta V = \frac{|\Delta V|}{|V|} = \frac{0,525\pi}{72\pi} \approx 0,0073.$$