Analízis előadások

Vajda István

Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2013. március 10.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: *Elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amely elsőrendű és elsőfokú is.

Megjegyzés: Az elsőrendű differenciálegyenlet mindig

$$y' + g(x)\,y = h(x)$$

alakra hozható, ahol g és h adott egyváltozós függvények, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény. Ezt az alakot az elsőrendű differenciálegyenlet *általános alakjának* szokás nevezni.

Definíció: Ha az elsőrendű lineáris differenciálegyenletben a h függvény (az ún. zavaró függvény) azonosan 0, akkor a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: *Elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amely elsőrendű és elsőfokú is.

Megjegyzés: Az elsőrendű differenciálegyenlet mindig

$$y' + g(x)\,y = h(x)$$

alakra hozható, ahol g és h adott egyváltozós függvények, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény. Ezt az alakot az elsőrendű differenciálegyenlet *általános alakjának* szokás nevezni.

Definíció: Ha az elsőrendű lineáris differenciálegyenletben a h függvény (az ún. zavaró függvény) azonosan 0, akkor a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: *Elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amely elsőrendű és elsőfokú is.

Megjegyzés: Az elsőrendű differenciálegyenlet mindig

$$y' + g(x)\,y = h(x)$$

alakra hozható, ahol g és h adott egyváltozós függvények, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény. Ezt az alakot az elsőrendű differenciálegyenlet *általános alakjának* szokás nevezni.

Definíció: Ha az elsőrendű lineáris differenciálegyenletben a h függvény (az ún. zavaró függvény) azonosan 0, akkor a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Példák:

- Az $y' + x^2 y = 3x - 2$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén.
- Az $y' + x^2 y = 0$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és homogén.
- Az $\left(x^2 + 1\right) y' - 2xy = 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén. Ha osztunk az $x^2 + 1$ együtthatóval az $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} \cdot y = \dfrac{1}{x^2+1}$ általános alakját kapjuk.
- Az $yy' = 2x + 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, inhomogén, de nem lineáris.
- Az $y'' + 2x^3 y' - \left(x^2 + 2\right) y = 0$ differenciálegyenlet lineáris, homogén, de nem elsőrendű.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Példák:

- Az $y' + x^2 y = 3x - 2$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén.
- Az $y' + x^2 y = 0$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és homogén.
- Az $\left(x^2 + 1\right) y' - 2xy = 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén. Ha osztunk az $x^2 + 1$ együtthatóval az $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} \cdot y = \dfrac{1}{x^2+1}$ általános alakját kapjuk.
- Az $yy' = 2x + 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, inhomogén, de nem lineáris.
- Az $y'' + 2x^3 y' - \left(x^2 + 2\right) y = 0$ differenciálegyenlet lineáris, homogén, de nem elsőrendű.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Példák:

- Az $y' + x^2 y = 3x - 2$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén.
- Az $y' + x^2 y = 0$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és homogén.
- Az $\left(x^2 + 1\right) y' - 2xy = 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén. Ha osztunk az $x^2 + 1$ együtthatóval az $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} \cdot y = \dfrac{1}{x^2+1}$ általános alakját kapjuk.
- Az $yy' = 2x + 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, inhomogén, de nem lineáris.
- Az $y'' + 2x^3 y' - \left(x^2 + 2\right) y = 0$ differenciálegyenlet lineáris, homogén, de nem elsőrendű.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Példák:

- Az $y' + x^2 y = 3x - 2$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén.
- Az $y' + x^2 y = 0$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és homogén.
- Az $\left(x^2 + 1\right) y' - 2xy = 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén. Ha osztunk az $x^2 + 1$ együtthatóval az $y' - \dfrac{2x}{x^2+1} \cdot y = \dfrac{1}{x^2+1}$ általános alakját kapjuk.
- Az $yy' = 2x + 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, inhomogén, de nem lineáris.
- Az $y'' + 2x^3 y' - \left(x^2 + 2\right) y = 0$ differenciálegyenlet lineáris, homogén, de nem elsőrendű.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Példák:

- Az $y' + x^2y = 3x - 2$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén.
- Az $y' + x^2y = 0$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és homogén.
- Az $\left(x^2 + 1\right)y' - 2xy = 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris és inhomogén. Ha osztunk az $x^2 + 1$ együtthatóval az $y' - \dfrac{2x}{x^2 + 1} \cdot y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ általános alakját kapjuk.
- Az $yy' = 2x + 1$ differenciálegyenlet elsőrendű, inhomogén, de nem lineáris.
- Az $y'' + 2x^3y' - \left(x^2 + 2\right)y = 0$ differenciálegyenlet lineáris, homogén, de nem elsőrendű.

Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek szétválasztható változójú differenciálegyenletek, így megoldásuk az ott megismert módszerrel történik.

Példa: Oldjuk meg az $y' + \frac{y}{x} = 0$ elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y = \frac{C}{x}$$

Ha utólag a $C = 0$ esetet is megengedjük, az általános megoldás az $y = 0$ konstans megoldást is tartalmazza.

Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek szétválasztható változójú differenciálegyenletek, így megoldásuk az ott megismert módszerrel történik.

Példa: Oldjuk meg az $y' + \frac{y}{x} = 0$ elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y = \frac{C}{x}$$

Ha utólag a $C = 0$ esetet is megengedjük, az általános megoldás az $y = 0$ konstans megoldást is tartalmazza.

Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek szétválasztható változójú differenciálegyenletek, így megoldásuk az ott megismert módszerrel történik.

Példa: Oldjuk meg az $y' + \frac{y}{x} = 0$ elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y = \frac{C}{x}$$

Ha utólag a $C = 0$ esetet is megengedjük, az általános megoldás az $y = 0$ konstans megoldást is tartalmazza.

Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

Az elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek szétválasztható változójú differenciálegyenletek, így megoldásuk az ott megismert módszerrel történik.

Példa: Oldjuk meg az $y' + \frac{y}{x} = 0$ elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y = \frac{C}{x}$$

Ha utólag a $C = 0$ esetet is megengedjük, az általános megoldás az $y = 0$ konstans megoldást is tartalmazza.

Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

Példa: Oldjuk meg az $y' + \mathrm{tg}(x)y = 0$ elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{tg}(x)y = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln\left|\cos(x)\right| + \ln|C| = \ln\left|C\cos(x)\right|$$

$$y = C\cos(x)$$

Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

Az elsőrendű, lineáris, homogén differenciálegyenletek megoldására általános képlet is adható:

$$y' + g(x)\,y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x)\,y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -g(x)\;\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int g(x)\;\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -G(x) + \ln|C| = \ln e^{-G(x)} + \ln|C| = \ln\left|C \cdot e^{-G(x)}\right|$$

$$y = C \cdot e^{-G(x)},$$

ahol G a g függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye.

Elsőrendű, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenletek

Definíció: Ha az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakjában a g függvény konstans, akkor *állandó együtthatósnak* nevezzük.

Az elsőrendű, állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenletek általános alakja:

$$y' + ay = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Az elsőrendű, állandó együtthatós, lineáris, homogén differenciálegyenletek megoldása:

$$y = Ce^{-ax},$$

hiszen $g(x) = a$ egy primitív függvénye $G(x) = ax$.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Tekintsük az

$$y' + g(x)\,y = h(x) \qquad (*)$$

elsőrendű differenciálegyenletet. Ha a $h(x)$ zavaró függvény helyébe 0-t írunk, az

$$y' + g(x)\,y = 0 \qquad (**)$$

homogén egyenletet kapjuk. A $(**)$-gal jelölt egyenletet a $(*)$-gal jelölt egyenlethez rendelt homogén egyenletnek nevezzük.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Az

$$y' + g(x)\, y = h(x)$$

elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldását megkapjuk, ha a hozzárendelt homogén egyenlet y_h megoldásához hozzáadjuk az eredeti egyenlet egy (tetszőleges) y_p partikuláris megoldását.
Tehát a megoldás:

$$y = y_h + y_p$$

Bizonyítás: A feltételek szerint

$$y_h' + g(x)\, y_h = 0$$

ahol y_h egy független paramétert tartalmaz. Másrészt:

$$y_p' + g(x)\, y_p = h(x)$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Az

$$y' + g(x)\,y = h(x)$$

elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldását megkapjuk, ha a hozzárendelt homogén egyenlet y_h megoldásához hozzáadjuk az eredeti egyenlet egy (tetszőleges) y_p partikuláris megoldását.
Tehát a megoldás:

$$y = y_h + y_p$$

Bizonyítás: A feltételek szerint

$$y_h' + g(x)\,y_h = 0$$

ahol y_h egy független paramétert tartalmaz. Másrészt:

$$y_p' + g(x)\,y_p = h(x)$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Összeadva a két előző egyenletet:

$$+\begin{cases} y_h' + g(x)\, y_h = 0 \\ y_p' + g(x)\, y_p = h(x) \end{cases}$$

$$y_h' + y_p' + g(x)\, y_h + g(x)\, y_p = h(x)$$

Figyelembe véve, hogy a deriváltak összege egyenlő az összeg deriváltjával és a 3-4. tagból $g(x)$-et kiemelve:

$$(y_h + y_p)' + g(x)(y_h + y_p) = h(x),$$

tehát $y_h + y_p$ kielégíti a differenciálegyenletet és mivel egy (az y_h-ból származó) paramétert tartalmaz, általános megoldása a differenciálegyenletnek.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x+1}{x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: A differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet $y' + \dfrac{y}{x} = 0$, amelynek megoldása – mint azt korábban láttuk – $y_h = \dfrac{C}{x}$.

Az eredeti differenciálegyenletnek az $y_p = x + 1$ függvény partikuláris megoldása, mert $y_p' = 1$ és behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\text{Balodal} = 1 + \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{2x+1}{x} = \text{Jobbodal}$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{x} + x + 1$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Hogyan határozhatjuk meg a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását? Használhatjuk pl. az *állandó variálás módszerét*:

- A differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet általános megoldásában a paraméter helyébe egy ismeretlen $k(x)$ függvényt írunk.
- Az így kapott függvényt és deriváltját behelyettesítve a differenciálegyenletbe meghatározzuk az ismeretlen függvényt.
- A (mostmár ismert) $k(x)$ függvényt a homogén egyenlet általános megoldásában a paraméter helyébe írva megkapjuk a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Példa: Határozzuk meg az $y' + \frac{y}{x} = \frac{2x+1}{x}$ differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálás módszerével!

Megoldás: Mint láttuk, a homogén egyenlet általános megoldása $y_h = \frac{C}{x}$.

Helyettesítsünk C helyére $k(x)$-et: $y_p = \frac{k(x)}{x}$.

Ezt deriválva $y_p' = \frac{k'(x)\,x - k(x)}{x^2}$. Helyettesítsük be a differenciálegyenletbe y_p-t és y_p'-t:

$$\frac{k'(x)\,x - k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x^2} = \frac{2x+1}{x}$$

$$k'(x)\,x - k(x) + k(x) = 2x^2 + x$$

$$k'(x) = 2x + 1$$

$$k(x) = x^2 + x$$

$$k(x) \quad x^2 + x$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

A partikuláris megoldás meghatározásának más módszerei is léteznek. Abban az esetben, ha a lineáris differenciálegyenlet állandó együtthatós, akkor használhatjuk az ún. *próbafüggvénymódszert*.

Ez azt jelenti, hogy a partikuláris megoldást olyan alakban keressük, ami „hasonló” a zavaró függvényhez.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y' + 2y = x - 1$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Mivel a $h(x) = x - 1$ zavaró függvény elsőfokú, a partikuláris megoldást $y_p = Ax + B$ alakban keressük, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Nyilván $y_p' = A$. Behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$A + 2(Ax + B) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad 2Ax + A + 2B = x - 1$$

Az azonos fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításával:

$$\begin{array}{cc} x: & \text{konstans:} \\ 2A = 1 & A + 2B = -1 \\ A = \frac{1}{2} & B = -\frac{3}{4} \end{array}$$

Tehát a partikuláris megoldás $y_p = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, a differenciálegyenlet megoldása

$$y = y_h + y_p = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Milyen zavaró függvény esetén milyen próbafüggvényt alkalmazhatunk?

- Ha a zavaró függvény n-edfokú polinom, akkor a próbafüggvény is n-edfokú polinom általános együtthatókkal.
  Pl. ha $h(x) = x^2 - 1$, akkor $y_p = Ax^2 + Bx + D$.
- Ha $h(x) = be^{ax}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $y_p = Ae^{ax}$.
  Pl. ha $h(x) = 2e^{3x}$, akkor $y_p = Ae^{3x}$.
- Ha a zavarófüggvény a $\sin(ax + b)$ és $\cos(ax + b)$ lineáris kombinációja, akkor $y_p = A\sin(ax + b) + B\cos(ax + b)$.
  Pl. ha $h(x) = 2\sin(2x) + 3\cos(2x)$, akkor
  $y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x)$,
  ha $h(x) = 4\cos(x)$, akkor $y_p = A\sin(x) + B\cos(x)$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

- Ha a zavaró függvény $h_1 + h_2$ vagy $h_1 - h_2$ alakú és a h_1-hez tartozó próbafüggvény y_{p1}, a h_2-höz tartozó pedig y_{p2}, akkor a zavarófüggvényhez az $y_{p1} + y_{p2}$ próbafüggvény tartozik.
  Pl. Ha a zavarófüggvény $h(x) = 2x + e^{3x}$, akkor az $y_p = Ax + B + De^{3x}$ próbafüggvényt alkalmazzuk.
- Ha a zavaró függvény $h_1 \cdot h_2$ alakú és a h_1-hez tartozó próbafüggvény y_{p1}, a h_2-höz tartozó pedig y_{p2}, akkor a zavarófüggvényhez az $y_{p1} \cdot y_{p2}$ próbafüggvény tartozik.
  Pl. Ha a zavarófüggvény $h(x) = x\sin(x)$, akkor a próbafüggvény $y_p = (x + D)(A\sin(x) + B\cos(x))$.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y' - 3y = e^{2x} - 6x + 5$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

- A homogén egyenlet megoldása: $y_h = Ce^{3x}$.
- A partikuláris megoldást keressük $y_p = Ae^{2x} + Bx + D$ alakban. Deriválva: $y_p' = 2Ae^{2x} + B$.

$$2Ae^{2x} + B - 3Ae^{2x} - 3Bx - 3D = e^{2x} - 6x + 5$$
$$-Ae^{2x} - 3Bx + B - 3D = e^{2x} - 6x + 5$$

$$\begin{array}{ccc} e^{2x}: & x: & \text{konstans}: \\ -A = 1 & -3B = -6 & B - 3D = 5 \\ A = -1 & B = 2 & D = -1 \end{array}$$

Tehát $y_p = -e^{2x} + 2x - 1$

- Az általános megoldás: $y = y_h + y_p = Ce^{3x} - e^{2x} + 2x - 1$