Függvénysorok

1. Határozza meg a következő függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^k \quad x \neq 1$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$ **c)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \operatorname{tg}^k x$ d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{k^2-1}$

2. Igazoljuk, hogy a

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^k}$

függvénysor nem egyenletesen konvergens a konvergencia-tartományán! Igaz-e, hogy abszolút konvergens?

3. Határozza meg a következő függvénysorok összegfüggvényét!

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^k$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$ **d)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^{2k}$

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot kx^{k-1}$ g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2kx^{2k-1}$ h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

Hatványsorok

1. Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!x^k$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{2k-1}x^k$ **c)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}x^k$ **d)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{5^k k!}x^k$

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k}x^k$ f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}(x-1)^k$

2. Írja fel az alábbi függvények x_0-körüli harmadrendű Taylor-polinomját:

a) $f(x) = 2^x \quad x_0 = 1$ **b)** $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad x_0 = e$

c) $f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$ **d)** $f(x) = x^7 - x^2 \quad x_0 = 1$

3. Írja fel az alábbi függvények Maclaurin-sorát és határozza meg, hogy az melyik tartományban állítja elő a függvényt:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x$ **b)** $f(x) = \frac{2}{e^x}$ **c)** $f(x) = x^3 e^{2x}$ **d)** $f(x) = \ln(2-x)$

4. Az $x_0 = 0$ körüli harmadrendű Taylor-polinom alkalmazásával adja meg az alábbi függvények közelítő értékét a megadott x_1 helyen és adjon felső becslést a közelítő érték hibájára:

a) $f(x) = e^x \quad x_1 = -0,1$ b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x} \quad x_1 = 0,1$

c) $f(x) = \cos x \quad x_1 = 0,2$ d) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x \quad x = 0,1$

5. Az integrandus $x_0 = 0$ körüli negyedfokú Taylor-polinomjának alkalmazásával adja meg az alábbi integrálok közelítő értékét és adjon felső becslést a közelítő érték hibájára:

a) $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{0,3} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

6. Az integrandus $x_0 = 0$ körüli Taylor-polinomjának alkalmazásával számítsa ki az alábbi integrálok közelítő értékét úgy, hogy a pontos értéktől való eltérés legfeljebb 10^{-6} legyen:

a) $\displaystyle\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_{0,4}^{0,6} \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

Fourier-sorok

Fejtse Fourier-sorba a következő függvényeket:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leqq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$ és $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi) = f(x)$

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 6 & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{ha} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$ és $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi) = f(x)$

3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{ha} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$ és $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi) = f(x)$

4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \pi & \text{ha} \quad 0 \leqq x < \pi \\ x+\pi & \text{ha} \quad -\pi \leqq x < 0 \end{cases}$ és $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi) = f(x)$