Egyváltozós függvények differenciálszámítása II.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. Határozza meg a következő határértékeket L'Hospital-szabály alkalmazásával:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$ $\quad \left(\text{megj.: } \frac{0}{0} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x\cos x)'}{\left(\sin^3 x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x\sin x)}{3\sin^2 x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3\sin x\cos x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(3\sin x\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)} = \frac{1}{3}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ $\quad \left(\text{megj.: } \frac{0}{0} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\arcsin x}$ $\quad \left(\text{megj.: } \frac{0}{0} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$ $\quad \left(\text{megj.: } \frac{0}{0} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2(\cos x)(-\sin x)}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{2^{x-2} - \sin\frac{\pi}{x}}$ $\quad \left(\text{megj.: } \frac{0}{0} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{2^{x-2}-\sin\frac{\pi}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{2^{x-2}\ln 2 - \left(\cos\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)} = \frac{4}{\ln 2 - 0} \approx 5{,}77$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}$ $\qquad\left(\text{megj.: } \frac{0}{0} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

msz.:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{(nevezetes)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\frac{1}{x}}{x}$ $\qquad\left(\text{megj.: } \frac{-\infty}{\infty} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ $\qquad\left(\text{megj.: } \frac{-\infty}{\infty} \text{ típus}\right)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left((-\sin x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ $\qquad\left(\text{megj.: } \nexists - \nexists \text{ típus, majd } \frac{0}{0}\right)$

Megoldás:

Felhasználjuk a következő összefüggést:

$$f(x)-g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{\frac{(x-1)\ln x}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - 1 + \frac{1}{x}}{\ln x - \frac{1}{x}\ln x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln x-\frac{1}{x^2}} \overset{\cdot\frac{x^2}{x^2}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+\ln x-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ $\qquad\left(\text{megj.: } \infty-\infty \text{ típus, majd } \frac{0}{0}\right)$

Megoldás:

Felhasználjuk a következő összefüggést:

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{2x\sin^2 x+x^2\cdot 2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{2\sin^2 x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\overset{\text{L'H}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{2\sin 2x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{(6-4x^2)\sin 2x+12x\cos 2x}\overset{\text{L'H}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x}{-8x\sin 2x+2(6-4x^2)\cos 2x+12\cos 2x-24x\sin 2x}=-\frac{8}{24}=-\frac{1}{3}$$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\quad\Big($megj.: 1^∞ típus, majd $e^{\infty\cdot 0}$, majd $e^{\frac{0}{0}}\Big)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[e^{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\right]\overset{*}{=}$$

msz.:

A kitevő határértékét számoljuk:

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\infty\cdot 0}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}}_{\frac{0}{0}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\overset{\text{L'H}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{4\sin x+2x\cos x}\overset{\text{L'H}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cos x+2\cos x-2x\sin x}=\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}$$

Ezzel a keresett határérték:

$$\overset{*}{=}e^{-\frac{1}{6}}\approx 0,85$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $\quad\Big($megj.: ∞^0 típus, majd $e^{0\cdot\infty}$, majd $e^{\frac{\infty}{-\infty}}$ stb.$\Big)$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[e^{\ln(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\operatorname{ctg} x)}\right]\overset{*}{=}$$

msz.:

A kitevő határértékét számoljuk:

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{\ln x} \ln(\operatorname{ctg} x)}_{0^-\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\ln x}}_{\frac{\infty}{-\infty}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{tg} x)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\sin x \cos x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{-x}{\sin x \cos x}}_{\frac{0}{0}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{-1}{1} = -1$$

Ezzel a keresett határérték:

$\overset{*}{=} e^{-1} \approx 0,37$