Relációk és függvények

1. Tekintsük az $(A, B; S)$ halmazhármassal adott relációkat, ahol $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$.

(a) $S = \{(1, a), (1, c), (2, b), (2, d), (3, a)\}$

(b) $S = \{(1, d), (2, a), (3, c)\}$

(c) $S = \{(1, a), (2, a), (3, d)\}$

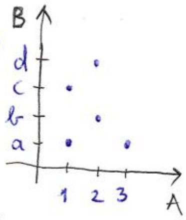
(d) $S = \{(1, a), (2, d)\}$

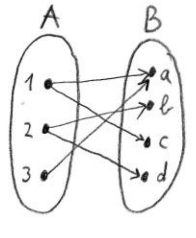
Ábrázolja a fenti relációkat Descartes-koordinátarendszerben. Készítse el a relációknak megfelelő nyíldiagramokat. Határozza meg a fenti relációk indulási halmazát, érkezési halmazát, értelmezési tartományát, értékkészletét. Van-e közöttük függvény?

eml.: $(A,B;S)$ halmazhármassal adott bináris reláció esetén A az indulási halmaz, B az érkezési halmaz, S a reláció jele. $S \subseteq A \times B$

x és y S relációban áll egymással: jel: xSy vagy $(x,y) \in S$

(a)





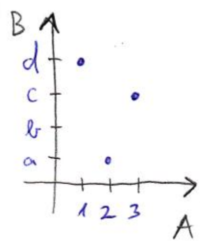
indulási halmaz: A
érkezési halmaz: B
értelmezési tart.: $D_S = \{1,2,3\} = A$
értékkészlet: $R_S = \{a,b,c,d\} = B$

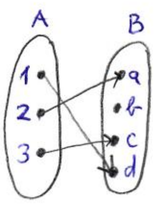
Egy bináris reláció függvényreláció (röviden: függvény), ha minden indulási halmaz-beli elem pontosan egy érkezési halmaz-beli elemmel áll relációban.

S nem függvény, mert pl. $(1,a) \in S$ és $(1,c) \in S$, tehát az 1 két elemmel is relációban áll.

megj.: S inverzrelációja: $S^{-1} = \{(a,1),(c,1),(b,2),(d,2),(a,3)\}$ ahol az inverzreláció a $(B,A;S^{-1})$ halmazhármassal adott

(b)





indulási halmaz: A
érkezési halmaz: B
$D_S = \{1,2,3\} = A$
$R_S = \{a,c,d\}$

S függvény, mert minden A-beli elem pontosan egy B-beli elemmel áll relációban.

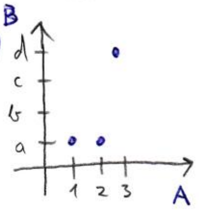
$S^{-1} = \{(a,2),(c,3),(d,1)\}$

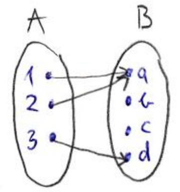
megj: egy $(A,B;S)$ bináris reláció parciális függvény-reláció (röviden: parciális függvény) ha minden A-beli elem legfeljebb egy B-beli elemmel áll relációban.

megj: Minden függvény parciális függvény is egyben, de nem minden parciális függvény függvény.

most: $(A,B;S)$ függvény és ezért parciális függvény is, (B,A,S^{-1}) nem függvény, mert b-nek nincs képe, de parciális függvény

(c)





indulási halmaz: A

érkezési halmaz: B

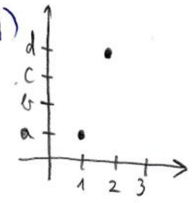
$D_S = \{1,2,3\} = A$

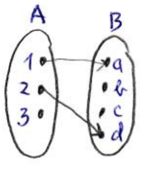
$R_S = \{a,d\}$

$S^{-1} = \{(a,1),(a,2),(d,3)\}$

S fv ($\Rightarrow$ S parciális fv)

(d)





indulási halmaz: A

érkezési halmaz: B

$D_S = \{1,2\}$

$R_S = \{a,d\}$

$S^{-1} = \{(a,1),(d,2)\}$

S parciális fv, de nem fv.

2. $A = \{$alma, körte, szilva$\}$, $B = \{$a,b,sz$\}$, $C = \{$a magyar ábécé betűi$\}$. Határozza meg az alábbi relációk indulási-, érkezési halmazát, értelmezési tartományát, értékkészletét!

(a) Az S reláció, ahol $(x, y) \in S$, ha az $x \in A$ szóban szerepel az $y \in B$ betű.

(b) A Q reláció, ahol $(x, y) \in Q$, ha az $x \in B$ betű a magyar ábécében az $y \in C$ betűt közvetlenül követi.

(c) S^{-1}

(d) $Q \circ S$

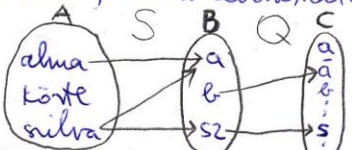
Mo.:

(a) $S = \{(\text{alma}, a), (\text{szilva}, a), (\text{szilva}, sz)\}$
indulási halmaz: A, érkezési halmaz: B, $D_S = \{\text{alma}, \text{szilva}\}$, $R_S = \{a, sz\}$

(b) $Q = \{(b, \bar{a}), (sz, s)\}$
indulási halmaz: B, érkezési halmaz C, $D_Q = \{b, sz\}$, $R_Q = \{\bar{a}, s\}$

(c) $S^{-1} = \{(a, \text{alma}), (a, \text{szilva}), (sz, \text{szilva})\}$
indulási halmaz: B, érkezési halmaz: A, $D_{S^{-1}} = \{a, sz\}$, $R_{S^{-1}} = \{\text{alma}, \text{szilva}\}$

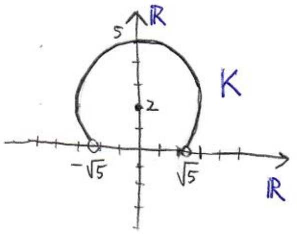
(d) $Q \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \ (x, y) \in S \text{ és } (y, z) \in Q\} = \{(\text{szilva}, s)\}$
nyíldiagrammal kényelmesen leolvasható



3. Írjunk fel az alábbi relációk elemeiből néhányat, ábrázoljuk a relációk grafikonjait Descartes koordináta-rendszerben. Adjuk meg a relációk inverzeit! Válasszuk ki a függvényeket!

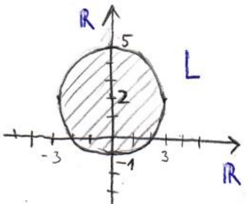
$K = \{(x, y) \mid x^2 + (y-2)^2 - 9 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$L = \{(x, y) \mid x^2 + (y-2)^2 - 9 \leq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



pl. $(0,5) \in K$
$(3,2) \in K$
$(-3,2) \in K$
$(1, \sqrt{8}+2) \in K$

$K^{-1} = \{(x,y) \mid y^2 + (x-2)^2 - 9 = 0, \ x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq$
$\subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$



pl. $(0,0) \in L$
$(1,1) \in L$
$(0,-1) \in L$
$(1, -\sqrt{8}+2) \in L$

$L^{-1} = \{(x,y) \mid y^2 + (x-2)^2 - 9 \leq 0 \ x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq$
$\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

K, K^{-1}, L, L^{-1} egyike sem függvény.

4. (a) Legyen az $S = \{a, b, c, d\}$ halmazon értelmezett reláció: R homogén, bináris reláció

$R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$. megj: $(S,S;R)$ helyett röviden $(S;R)$

Határozza meg önmagával való kompozícióját és inverzét. Függvény-e az inverzreláció?

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$

Határozza meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ relációkat!

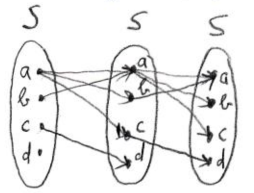
(c) Igazoljuk, hogy $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$!

(a) $R \circ R = \{(x,z) \in S \times S \mid \exists y \in S \ (x,y) \in R$ és $(y,z) \in R\} =$

$= \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c)\}$

y: a,b a a c a a a

nyíldiagrammal kényelmesen leolvasható:



$R^{-1} = \{(a,a), (a,b), (b,a), (c,a), (d,c)\}$

R^{-1} nem fv, mert az a elem két elemmel is relációban áll: $(a,a) \in R^{-1}$ és $(a,b) \in R^{-1}$

(b) megj f fv. tulajdonképpen: $(\mathbb{R},\mathbb{R};f)$ röviden $(\mathbb{R};f)$ homogén bináris reláció

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2$

azaz: $f \circ g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x+1)^2\}$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 1$

azaz: $g \circ f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$

(c) $\boxed{(x,z) \in R \circ S} \Leftrightarrow \exists y \left((x,y) \in S \text{ és } (y,z) \in R\right) \Leftrightarrow \exists y \left((y,x) \in S^{-1} \text{ és } (z,y) \in R^{-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y \left((z,y) \in R^{-1} \text{ és } (y,x) \in S^{-1}\right) \Leftrightarrow \boxed{(z,x) \in S^{-1} \circ R^{-1}}$

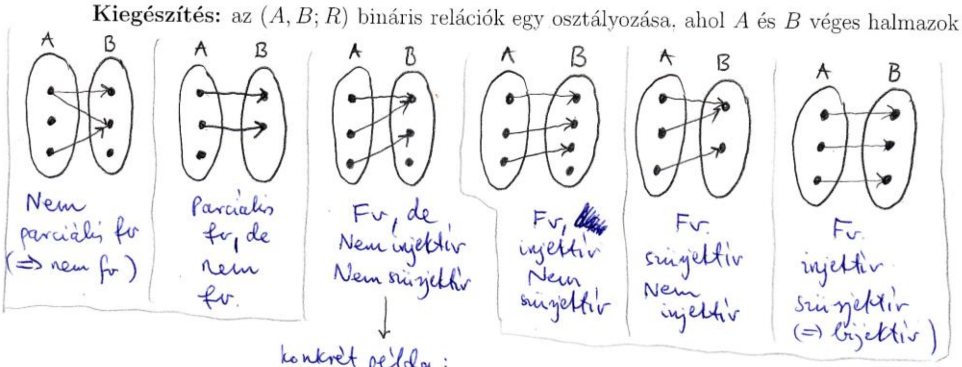
Kaptuk: $\boxed{(z,x) \in (R \circ S)^{-1}} \Leftrightarrow (x,z) \in R \circ S \Leftrightarrow \boxed{(z,x) \in S^{-1} \circ R^{-1}}$

5. Vizsgálja a kövekező programot... (Nem kell.)

6. Az A halmaz karakterisztikus függvénye... (Nem kell.)

7. Legyen A és B két tetszőleges részhalmaza U-nak... (Nem kell.)

Kiegészítés: az $(A, B; R)$ bináris relációk egy osztályozása, ahol A és B véges halmazok



konkrét példa:
$A = \{-1, 1, 2\}$ $B = \{1, 3, 4\}$ $f(x) = x^2$

8. Mire képezi le az f függvény az alábbiakban megadott halmazokat? Döntse el a függvényekről, hogy injektívek-e ill. szürjektívek-e!

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n + 1$ $H_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(n) = n + 1$ $H_2 = \mathbb{N}^+$

(c) $f : [0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$ $H_3 = \{x : 0 \le x \le \pi/4\}$

(d) $f : [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$ $H_4 = \{x : \frac{3\pi}{4} \le x \le \pi\}$

(e) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| \le 1 \\ |x+1| & \text{egyébként} \end{cases}$ $H_5 = \{x : 0 \le x \le \pi/4 \text{ és } x \in \mathbb{N}\}$

(a)
$\mathbb{N}: 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n \quad (n+1) \quad \dots$
$\mathbb{N}: 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n \quad (n+1) \quad \dots$

f injektív: $f(k) = f(m) \Rightarrow k+1 = m+1 \Rightarrow k = m$
f nem szürjektív: 0-nak nincs őse
$f(H_1) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

(b)
$\mathbb{Z}: \dots \; -3 \; -2 \; -1 \; 0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \dots$
$\mathbb{Z}: \dots \; -3 \; -2 \; -1 \; 0 \; 1 \; 2 \; 3 \; \dots$

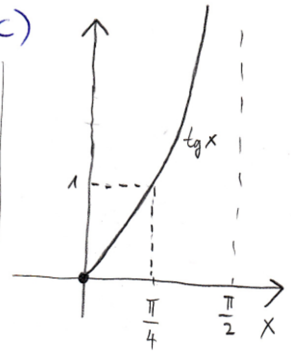
f injektív: $f(k) = f(m) \Rightarrow k+1 = m+1 \Rightarrow k = m$
f szürjektív $\forall k \in \mathbb{Z}$-nek van őse: k őse $k-1$

$f(H_2) = \{2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N}^+ \setminus \{1\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

emlék

Egy $f : A \to B$ fv. injektív, ha $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$ teljesül.
Egy $f : A \to B$ fv. szürjektív ha $B = R_f$, azaz minden B-beli elem fellép képként (minden B-beli elemnek van őse.)

(c)

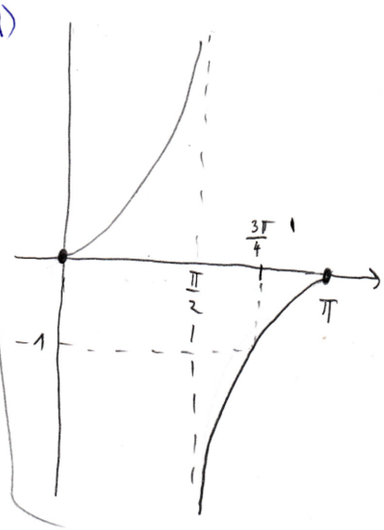


f az adott intervallumon szig. mon. növő $\Rightarrow$ f injektív

f nem szürjektív, mert negatív szám nem lép fel képként
(a negatív számoknak nincs őse)

$f(H_3) = [0,1]$

(d)

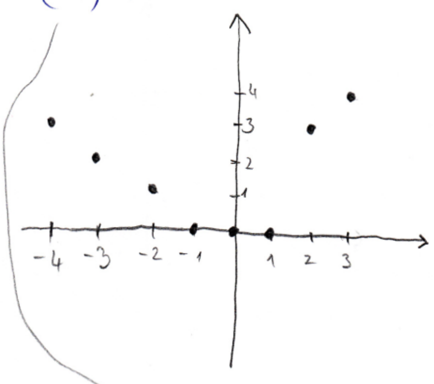


f nem injektív:
$f(0) = f(\pi) = 0$

f szürjektív: minden valós szám fellép képként
(grafikonról leolvasható)

$f(H_4) = [-1,0]$

(e)



f nem injektív
$f(0) = f(1) = 0 \quad f(-4) = f(2)$ stb.

f szürjektív, minden természetes szám fellép képként

0 őse (pl.): 1
1 őse : -2
2 őse : -3
k őse (pl) : $k-1$ (ha $k>2$)

$f(H_5) = f(\{0\}) = \{0\}$

9. Határozza meg az $f(A)$ halmazt, ha

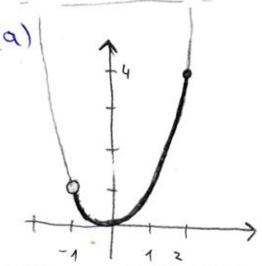
(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$ $\quad A=\,]-1,2\,]$

(b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$ $\quad A=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(c) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ $\quad A=[0,2]\setminus\{1\}$

Van-e a fenti függvények között bijektív függvény?

(a)

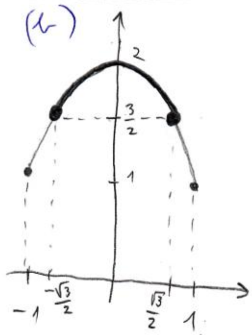


$f(A)=f(\,]-1,2]\,)=f(\,]-1,0]\,)\cup f(\,[0,2]\,)=$

$=[0,1[\,\cup[0,4]=[0,4]$

f nem injektív, nem szürjektív $\Rightarrow$ nem bijektív

(b)



$f(A)=\left[\frac{3}{2},2\right]$

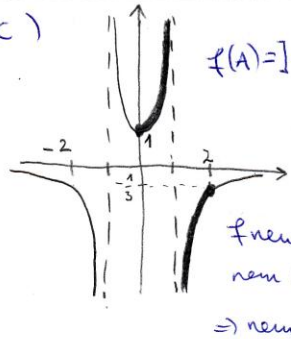
f nem injektív

nem szürjektív

$\Downarrow$

nem bijektív

(c)



$f(A)=\,]-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[1,+\infty[$

f nem injektív,

nem szürjektív

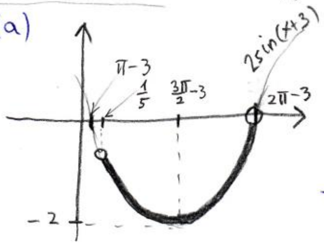
$\Rightarrow$ nem bijektív

10. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2\sin(x+3)$

(a) Határozza meg az $X=\left\{x\,|\,\frac{1}{5}<x<2\pi-3, x\in\mathbb{R}\right\}$ intervallum f által definiált képét!

(b) Bijektív-e a $g:\,]\frac{1}{5},2\pi-3[\,\to f(X)$, $\quad g(x)=f(x)$ függvény?

(a)



f grafikonja: a sin fv grafikonját balra toljuk 3-mal, majd y-tengellyel párhuzamosan 2-szeresére nyújtjuk.

$f(X)=[-2,0[$ $\qquad$ megj: f nem injektív, nem szürjektív

(b) $g:\,]\frac{1}{5};2\pi-3[\,\longrightarrow[-2,0[\qquad g(x)=2\sin(x+3)$

g szürjektív (minden $[-2,0[$-beli elem felléр képként),
de nem injektív (grafikonról leolvasható)

11. Írjon fel bijektív függvényt, amely

(a) $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$

(b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

(c) $f : \mathbb{R} \to]0, \pi[$

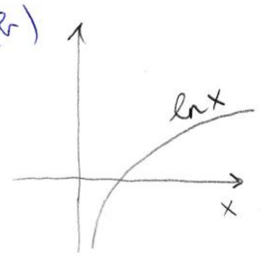
(d)* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N}^+: & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array}$$

pl. $\left.\begin{array}{l} f(n) = n-1 \\ f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N} \end{array}\right\}$ f bijektív

(b)



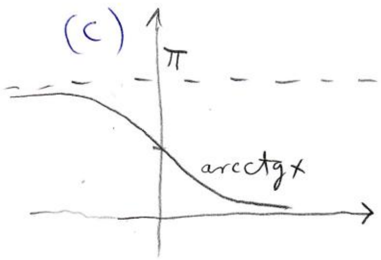
pl.

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$f(x) = \ln x$

f bijektív

(c)



pl.

$f : \mathbb{R} \to]0, \pi[$

$f(x) = \operatorname{arcctg} x$

f bijektív

megj.

$f(x) = \operatorname{arcctg} x + \frac{\pi}{2}$ is jó

(d)*

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \end{array}$$

pl. $f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{n+1}{2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ f bijektív