Numerikus sorok

1. Vizsgálja meg az alábbi számsorok konvergenciáját. Ha konvergensek, akkor számítsa ki az összegüket:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k+5^k}{15^k}$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^k}$ **c)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}}$

d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{a^2+2}\right)^k$ **e)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2b}{b-10}\right)^k$, $(b \neq 10)$ **f)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0,1$

g) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 0,1^{k+1}$

2. Határozza meg a következő sorok összegét résztörtekre bontással:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ **b)** $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{3}}$

3. Számítsuk ki a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor összegét, ha $a_1 = 20$, $a_{2n} = a_{2n-1}$, ha $n \geq 1$ egész, és $a_{2n+1} = \frac{a_{2n}}{4}$, ha $n \geq 1$ egész!

4. A konvergencia szükséges feltételét felhasználva mutassa meg, hogy a következő sorok divergensek:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k+1}{5k+2}\right)^{5k}$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k-1}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}}$ d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k \cdot 2^k}$

5. Mutassa meg, hogy a következő (harmonikus sorra visszavezethető) sor divergens:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\binom{k}{1}}{\binom{k}{2}}$$

6. A majoráns és a minoráns kritérium alkalmazásával döntsük el, hogy a következő sorok közül melyik konvergens és melyik divergens:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+4)}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2-4k+5}$ **e)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+k}{1+k^2}$ f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+2)k}$

g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4k}\right)$ **h)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-1}$ i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$

j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}$

7. Döntse el hányadoskritérium segítségével, hogy a következő sorok konvergensek-e:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^2}$ d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{k!}$

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ **f)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{2^k \cdot k!}$ **g)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$ h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

8. A gyökkritérium alkalmazásával döntse el, hogy a következő sorok konvergense-e:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{k}p^k$, ahol $0 < p < 1$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^{2k}\left(\frac{k}{2}\right)}{k^k+2}$ e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{10k+2}\right)^k$ **f)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k^2}$

g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg}(k))^k}{(k+2)2^{k-1}}$

9. Integrálkritérium alkalmazásával döntse el, hogy a következő sorok konvergensek-e:

a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k \cdot \ln(k^2)}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$ **c)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^2(k)}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, ahol $\alpha > 0$ e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ **f)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}\,(k+1)}$

g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+2)}$ i) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$

j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

10. Vizsgálja meg a következő váltakozó előjelű sorokat konvergencia szempontjából:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1}$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k^2+k}$ **d)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sqrt[k+1]{0,01}$