Analízis előadások

Vajda István

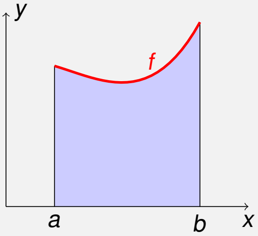
Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2018. február 11.

A függvénygörbe alatti terület

Definíció: Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett, nemnegatív, folytonos f függvény grafikonja alatti terület, azaz az $y = f(x)$ egyenletű görbe, az $x = a$, $x = b$ egyenesek és az abszcisszatengely által határolt tartomány területe alatt az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett határozott integrálját értjük:

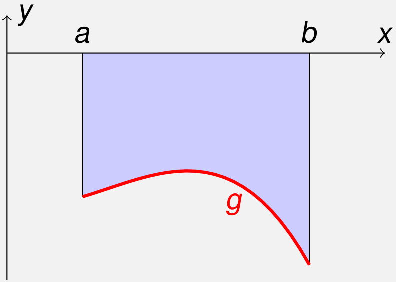
$$T = \int_a^b f.$$



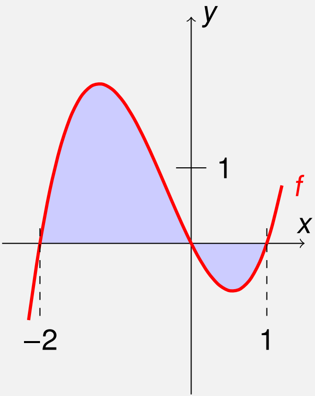
A függvénygörbe feletti terület

Ha a g függvény az $[a, b]$ intervallumon értelmezett, folytonos és csak negatív értékeket vesz fel, akkor integrálja negatív, de integráljának abszolút értéke ekkor is a megfelelő síkidom területe:

$$T = -\int_a^b g = \left| \int_a^b g \right| .$$



Az $y = x^3 + x^2 - 2x$ görbe és az x-tengely közé zárt terület



$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ zérushelyei:

$x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$.

$$T = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2F(0) - F(-2) - F(1) = \frac{37}{12},$$

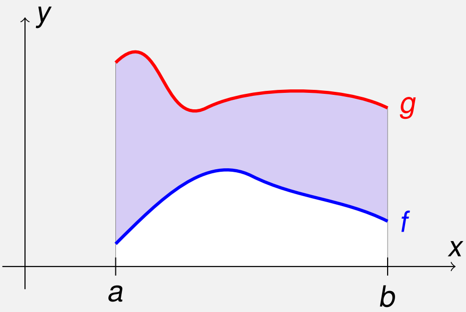
ahol $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - x^2$.

Két függvénygörbe közé zárt terület

Definíció: Ha f és g az $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós-valós függvények és $\forall x \in [a, b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor az

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

halmazt *normáltartománynak* nevezzük.

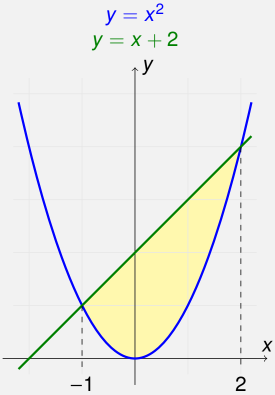


Két függvénygörbe közé zárt terület

Tétel: Ha f és g az $[a, b]$ intervallumon értelmezett és ott integrálható valós-valós függvények, amelyekre $\forall x \in [a, b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor a függvénygörbék által meghatározott normáltartomány területe:

$$T = \int_a^b (g - f) \, .$$

Két függvénygörbe közé zárt terület



Példa: Számítsuk ki az

$$y = x^2 \text{ és } y = x + 2$$

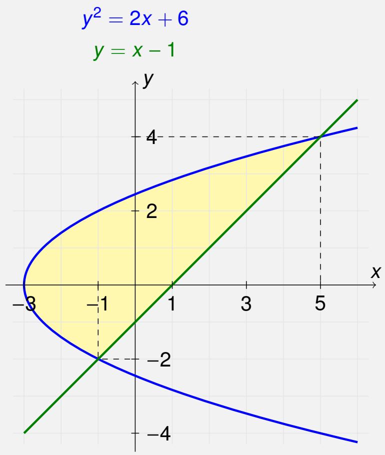
görbék által meghatározott korlátos tartomány területét!

Megoldás:

$$T = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Két függvénygörbe közé zárt terület



Példa: Számítsuk ki az

$$y^2 = 2x + 6 \text{ és } y = x - 1$$

görbék által közrezárt síkidom területét!

Megoldás: Fejezzük ki x-et az egyenletekből: $x_B = \frac{1}{2}y^2 - 3$ és $x_J = y + 1$.

$$T = \int_{-2}^{4} (x_J - x_B)\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y\right]_{-2}^{4} = 18.$$

Paraméteresen megadott görbe alatti terület

Tétel: Legyen adott egy g görbe az xy-koordinátarendszerben az

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

paraméteres összefüggéssel, ahol φ szigorúan monoton és ψ csak pozitív értékeket vesz fel az $[\alpha, \beta]$ intervallumban.
Ha a $\psi(t)\dot{\varphi}(t)$ függvény integrálható, akkor a g görbe, az x-tengely és az $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ egyenesek által meghatározott síkidom területe

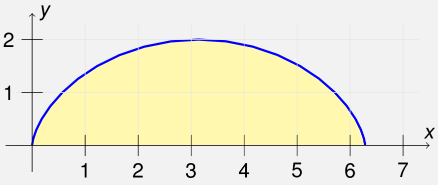
$T = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$ ha φ szigorúan monoton nő $[\alpha, \beta]$-n, és

$T = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$ ha φ szigorúan monoton csökken $[\alpha, \beta]$-n.

Paraméteresen megadott görbe alatti terület

Számítsuk ki az $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ görbe

(közönséges ciklois egy íve) alatti területet!



Paraméteresen megadott görbe alatti terület

Számítsuk ki az $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ görbe

(közönséges ciklois egy íve) alatti területet!

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\dot{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\, \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

Zárt görbe által meghatározott terület

Tétel: Legyen adott egy g zárt görbe az xy-koordinátarendszerben az

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

paraméteres összefüggéssel, ahol φ differenciálható, ψ pedig folytonos az $[\alpha, \beta]$ intervallumban, $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ és $\psi(t)\dot{\varphi}(t)$ integrálható, továbbá tegyük fel, hogy az így keletkező g görbe nem hurkolt.

Ekkor a g görbe által meghatározott síkidom területe

$$T = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\dot{\varphi}(t) \, \mathrm{d}t \right|.$$

Az integrál előjele akkor pozitív, ha a $P(\varphi(t), \psi(t))$ pont a görbét az óramutató járásával egyező körüljárási irány szerint futja be, ellenkező esetben negatív.

Zárt görbe által meghatározott terület

Számítsuk ki az $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ kör által határolt körlap területét!

$$T = -\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{2\pi} \left(-r^2 \sin^2 t\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= r^2 \int_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = r^2 \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right)\mathrm{d}t =$$

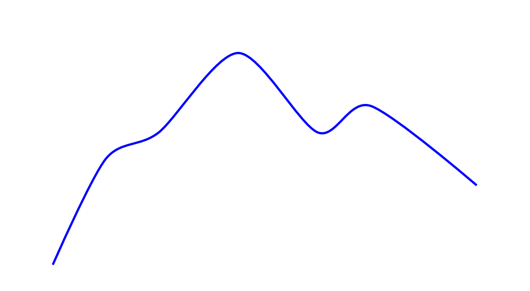
$$= r^2 \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = r^2\pi.$$

Síkgörbe ívhossza

Közelítsük egy folytonos síkgörbe hosszát a görbéhez írt poligon hosszával:

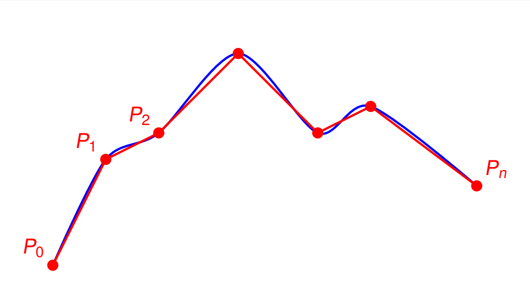
Síkgörbe ívhossza

Közelítsük egy folytonos síkgörbe hosszát a görbéhez írt poligon hosszával:



Síkgörbe ívhossza

Közelítsük egy folytonos síkgörbe hosszát a görbéhez írt poligon hosszával:



Síkgörbe ívhossza

Definíció: Egy folytonos síkgörbét *rektifikálhatónak* nevezünk, ha a görbéhez írt poligonok hosszának szuprémuma véges. Ha a görbe rektifikálható, akkor *ívhosszán* éppen a fenti szuprémumot értjük.

Definíció: Az f függvényt folytonosan differenciálhatónak nevezzük az I intervallumon, ha f differenciálható $\forall x \in I$ esetén és f deriváltfüggvénye folytonos I-n.

Tétel: Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható (azaz deriváltfüggvénye folytonos ezen az intervallumon), akkor az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ görbe rektifikálható és ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Síkgörbe ívhossza

Definíció: Egy folytonos síkgörbét *rektifikálhatónak* nevezünk, ha a görbéhez írt poligonok hosszának szuprémuma véges. Ha a görbe rektifikálható, akkor *ívhosszán* éppen a fenti szuprémumot értjük.

Definíció: Az f függvényt folytonosan differenciálhatónak nevezzük az I intervallumon, ha f differenciálható $\forall x \in I$ esetén és f deriváltfüggvénye folytonos I-n.

Tétel: Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható (azaz deriváltfüggvénye folytonos ezen az intervallumon), akkor az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ görbe rektifikálható és ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Síkgörbe ívhossza

Definíció: Egy folytonos síkgörbét *rektifikálhatónak* nevezünk, ha a görbéhez írt poligonok hosszának szuprémuma véges. Ha a görbe rektifikálható, akkor *ívhosszán* éppen a fenti szuprémumot értjük.

Definíció: Az f függvényt folytonosan differenciálhatónak nevezzük az I intervallumon, ha f differenciálható $\forall x \in I$ esetén és f deriváltfüggvénye folytonos I-n.

Tétel: Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható (azaz deriváltfüggvénye folytonos ezen az intervallumon), akkor az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ görbe rektifikálható és ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Síkgörbe ívhossza

Példa: Határozzuk meg az $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x}$, $x \in [1;2]$ görbe ívhosszát!

Megoldás: $f(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{x}$. Mivel f' folytonos az $[1;2]$ intervallumban a görbe rektifikálható és használhatjuk a fenti integrált az ívhossz kiszámításához.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(2\sqrt{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{1+4x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 4}\right]_1^2 = \left[\frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_1^2 = \frac{27 - 5\sqrt{5}}{6} \approx 2{,}64.$$

Paraméteresen adott síkgörbe ívhossza

Tétel: Ha a φ és ψ függvények folytonosan differenciálhatók az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, akkor az

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

görbe rektifikálható és ívhossza:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Paraméteresen adott síkgörbe ívhossza

Példa: Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

görbe (origó középpontú, r-sugarú kör) kerületét!

Megoldás:

$$k = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\,\mathrm{d}t = r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = r\,[t]_0^{2\pi} = 2r\pi.$$

Paraméteresen adott síkgörbe ívhossza

Példa: Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x = r\,(t - \sin t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

görbe (közönséges ciklois egy íve) hosszát!

Megoldás:

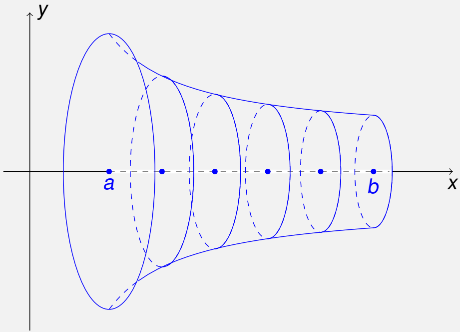
$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\varphi}^2\,(t) + \dot{\psi}^2\,(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{r^2\,(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= r \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2r \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2r \int_{0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4r \left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r.$$

Forgástest térfogata

Legyen adott az $[a, b]$ intervallumon értelmezett f folytonos függvény, ami ebben az intervallumban csak nemnegatív értékeket vesz fel. Ennek grafikonját az x-tengely körül megforgatva olyan forgástesthez jutunk, amelyet a görbe által leírt felület és két végén egy-egy körlap határol.



Forgástest térfogata

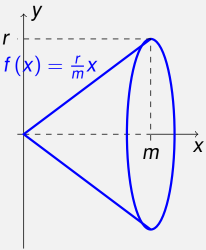
Tétel: Az $[a, b]$ intervallumon nemnegatív, folytonos f függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

Forgástest térfogata

Példa: Számítsuk ki az r sugarú, m magasságú egyenes körkúp térfogatát!

Megoldás:



A kúp előállítható a $[0, m] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{r}{m}x$ függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával.

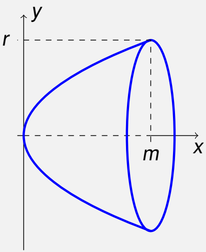
$$V = \pi \int_0^m \frac{r^2}{m^2}x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^m =$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} = \frac{r^2 \pi m}{3} = \frac{Tm}{3}.$$

Forgástest térfogata

Példa: Számítsuk ki az r-sugarú, m-magasságú forgási paraboloid térfogatát!

Megoldás:



Tekintsük a $[0, m] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{r}{\sqrt{m}}\sqrt{x}$ függvényt! Mivel $f(m) = r$, a függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával éppen a megfelelő paraboloidhoz jutunk.

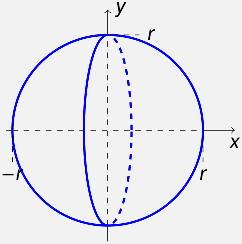
$$V = \pi \int_0^m \frac{r^2}{m} x \,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{r^2}{m} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^m =$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{m} \cdot \frac{m^2}{2} = \frac{r^2 \pi m}{2} = \frac{Tm}{2}.$$

Forgástest térfogata

Példa: Számítsuk ki az r-sugarú gömb térfogatát!

Megoldás:



Tekintsük a $[-r,r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvényt! Ennek grafikonját az x-tengely körül megforgatva éppen egy r-sugarú gömböt kapunk.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi\left(\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Forgástest térfogata

Tétel: Legyen ψ nemnegatív, folytonos, φ pedig differenciálható és szigorúan monoton növekedő az $[\alpha, \beta]$ intervallumon. Ekkor az $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ paraméteresen megadott görbe x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Forgástest térfogata

Példa: Számítsuk ki az $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $t \in [1,2]$ görbe x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogatát!
Megoldás:

$$V = \pi \int_1^2 \operatorname{sh}^2 t \cdot \operatorname{sh} t \,\mathrm{d}t = \pi \int_1^2 \left(\operatorname{ch}^2 t - 1\right) \cdot \operatorname{sh} t \,\mathrm{d}t =$$

$$= \pi \left[\frac{\operatorname{ch}^3 t}{3} - \operatorname{ch} t\right]_1^2 = \pi \left(\frac{\operatorname{ch}^3 2}{3} - \operatorname{ch} 2 - \frac{\operatorname{ch}^3 1}{3} + \operatorname{ch} 1\right) \approx 44{,}945.$$

Forgástest palástjának felszíne

Tétel: Az $[a, b]$ intervallumon nemnegatív és folytonosan differenciálható f függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest palástjának felszíne:

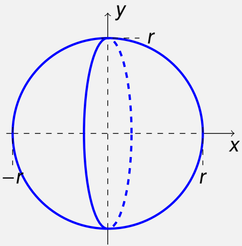
$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Forgástest palástjának felszíne

Példa: Számítsuk ki az r sugarú gömb felszínét!

Tekintsük a $[-r, r] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvényt! Ennek grafikonját az x-tengely körül megforgatva éppen egy r-sugarú gömböt kapunk.

Az f függvény deriváltja: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$



$$F = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x =$$

$$2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = 4\pi \int_{0}^{r} r\, \mathrm{d}x =$$

$$= 4\pi \left[rx\right]_0^r = 4r^2\pi.$$

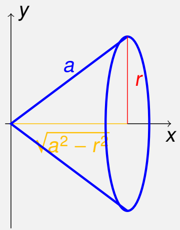
Forgástest palástjának felszíne

Példa: Számítsuk ki az r a alkotójú egyenes körkúp palástfelszínét!

Megoldás: A körkúp az $\left[0, \sqrt{a^2 - r^2}\right]$ intervallumon értelmezettt

$f(x) = \dfrac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} x$ függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával nyerhető.

$$f'(x) = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \Rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - r^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$



$$F = 2\pi \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} x \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \frac{ra}{a^2 - r^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} = 2\pi \frac{ra}{a^2 - r^2} \frac{a^2 - r^2}{2} = ra\pi.$$

Forgástest palástjának felszíne

Tétel: Legyen adott egy hurokmentes görbe az $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ összefüggésekkel, ahol φ és ψ folytonosan differenciálható függvények. Ekkor a görbe x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest palástjának felszíne:

$$F = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + \left(\dot{\psi}(t)\right)^2} \, \mathrm{d}t.$$

Forgástest palástjának felszíne

Példa: Számítsuk ki az $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, görbe x-tengely-körüli megforgatásával nyert forgásfelület felszínét!

$$F = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{(3\cos^2 t\,(-\sin t))^2 + \left(3\sin^2 t \cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t = 6\pi \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi}{5}.$$