Analízis előadások

Vajda István

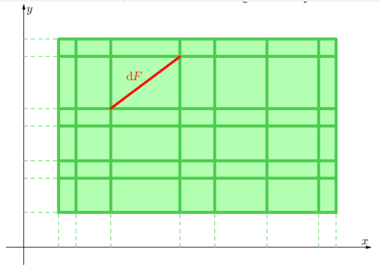
Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2015. október 26.

A kétváltozós függvény integrálja

Definíció: Legyen adott az xy síkban egy téglalap, melynek oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Ha a téglalapot oldalaival párhuzamos egyenesek segítségével kisebb téglalapokra bontjuk, akkor az eredeti téglalap egy felosztását kapjuk. A felosztás finomságán a „kis” téglalapok átlóinak legnagyobbikát értjük.

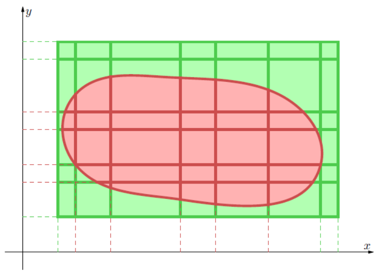
Jelölés: Szokás a felosztást F-fel, a felosztás finomságát $\mathrm{d}F$-fel jelölni.



A kétváltozós függvény integrálja

Definíció: Egy folytonos, zárt görbe által meghatározott tartomány felosztását egy a tartományt magában foglaló téglalap felosztásával kapjuk. A felosztás azokból a síkidomokból áll, amelyek a „kis” téglalapok és a tartomány metszetei.

Megjegyzés: A tartomány felosztása olyan síkidomokat határoz meg, melyek csak a határvonaluk mentén érintkezhetnek és együttesen lefedik a tartományt. Területük összege így a tartomány területét adja.



A kétváltozós függvény integrálja

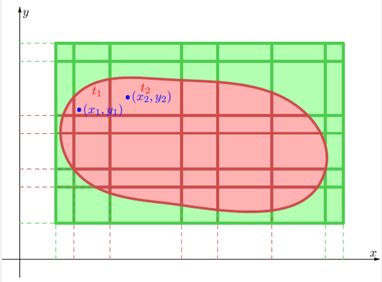
Definíció: Legyen adott egy folytonos, zárt görbe által meghatározott T tartomány és ennek egy F felosztása, továbbá legyen értelmezett T-n egy f kétváltozós függvény. Az f függvény egy F felosztáshoz tartozó Riemann-féle integrálközelítő összegén a

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot t_i = f(x_1, y_1) \cdot t_1 + f(x_2, y_2) \cdot t_2 + \ldots + f(x_n, y_n) \cdot t_n$$

összeget értjük, ha az F felosztás a T tartományt n síkidomra bontja, melyek területe $t_1, t_2, \ldots, t_n$, és az (x_i, y_i) pont a t_i területű síkidom egy tetszőleges pontja.

A kétváltozós függvény integrálja

Megjegyzés: Ha az f függvény a T tartományon csak pozitív értékeket vesz fel, akkor az integrálközelítő összeg a függvényt ábrázoló felület T tartomány feletti része és a T tartomány közötti térrész térfogatának közelítése. A közelítés annál pontosabb, minél finomabb felosztást alkalmazunk.



A kétváltozós függvény integrálja

Definíció: Legyen adott egy folytonos, zárt görbe által meghatározott T tartomány és legyen az f kétváltozós függvény értelmezett T-n. Az f függvény Riemann-értelemben integrálható T-n, ha minden végtelenül finomodó felosztássorozat esetén az ehhez tartozó integrálközelítő összegek sorozata egy véges számhoz tart. (Azaz a

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathrm{d}F_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot t_i$$

határérték létezik és véges.) Ezt a számot az f függvény T tartományon vett határozott integráljának nevezzük.

Jelölés: $\iint\limits_T f$ vagy $\iint\limits_T f(x,y)\,\mathrm{d}T$

Megjegyzés: A kétváltozós függvény integrálját szokás kettős integrálnak is nevezni.

Az n változós függvény integrálja

Az integrál fogalma akkor is hasonlóan értelmezhető, ha a függvény 2-nél több változós. Az n változós függvény integrálját az n dimenziós tér egy tartományán értelmezzük. A tartomány felosztása n dimenziós téglatestek segítségével állítható elő.

Az integrálközelítő összeg tagjai a résztartományok (n dimenziós) térfogatának és egy a résztartománybeli pontban felvett függvényértéknek a szorzataként álnak elő. Ha minden végtelenül finomodó felosztássorozat esetén az ehhez tartozó integrálközelítő összegek sorozata egy véges I számhoz tart, akkor a függvény integrálható az n dimenziós tartományon és integrálja I-vel egyenlő.

A kettős integrál kiszámítása téglalapon

Tétel: Ha az f kétváltozós, valós függvény értelmezett és integrálható a $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\right\}$ téglalapon, akkor ezen téglalapon vett határozott integrálja:

$$\iint\limits_T f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Megjegyzések:

- Mint a tételből látszik kétféleképpen lehet az integrált kiszámítani: Először az x majd az y változó szerint integrálunk, vagy éppen fordítva először az y majd az x változó szerint.
- Amikor az egyik változó szerint integrálunk, akkor a másikat konstansként kell kezelni.

A kettős integrál kiszámítása téglalapon

Tétel: Ha az f kétváltozós, valós függvény értelmezett és integrálható a $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\right\}$ téglalapon, akkor ezen téglalapon vett határozott integrálja:

$$\iint\limits_T f = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Megjegyzések:

- Mint a tételből látszik kétféleképpen lehet az integrált kiszámítani: Először az x majd az y változó szerint integrálunk, vagy éppen fordítva először az y majd az x változó szerint.
- Amikor az egyik változó szerint integrálunk, akkor a másikat konstansként kell kezelni.

A kettős integrál kiszámítása téglalapon

Példa: Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 + 4xy$ függvény kettős integrálját a $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x \leqq 3,\ 2 \leqq y \leqq 5\right\}$ téglalapon!

Megoldás:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}T = \int_2^5 \left(\int_1^3 \left(x^2 + 4xy\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_2^5 \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 y \right]_1^3 \mathrm{d}y =$$

$$= \int_2^5 \left(16y + \frac{26}{3}\right) \mathrm{d}y = \left[8y^2 + \frac{26}{3}y\right]_2^5 = 194.$$

A kettős integrál kiszámítása téglalapon

Példa: Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 + 4xy$ függvény kettős integrálját a $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x \leqq 3,\ 2 \leqq y \leqq 5\right\}$ téglalapon!

Megoldás:

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}T = \int_2^5 \left(\int_1^3 \left(x^2 + 4xy\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_2^5 \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 y\right]_1^3 \mathrm{d}y =$$

$$= \int_2^5 \left(16y + \frac{26}{3}\right) \mathrm{d}y = \left[8y^2 + \frac{26}{3}y\right]_2^5 = 194.$$

A kettős integrál kiszámítása

Tétel: Ha az f kétváltozós, valós függvény értelmezett és integrálható a $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\right\}$ tartományon, akkor ezen tartományon vett határozott integrálja:

$$\iint_T f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

A normáltartomány

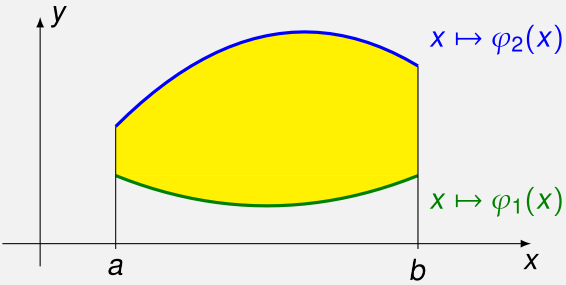
Megjegyzés: Az előző tételben leírt tartományt tehát alulról és felülről egy-egy függvénygörbe, balról és jobbról pedig egy-egy egyenesszakasz határolja. (Az egyenesszakaszok esetleg ponttá is fajulhatnak.)

Az ilyen tartományt az x-tengelyre nézve normáltartománynak nevezzük. Hasonlóan értelmezhető a normáltartomány az y-tengelyre nézve is.

A normáltartomány

Megjegyzés: Az előző tételben leírt tartományt tehát alulról és felülről egy-egy függvénygörbe, balról és jobbról pedig egy-egy egyenesszakasz határolja. (Az egyenesszakaszok esetlegronttá is fajulhatnak.)

Az ilyen tartományt az x-tengelyre nézve normáltartománynak nevezzük. Hasonlóan értelmezhető a normáltartomány az y-tengelyre nézve is.



Kettős integrál kiszámítása normáltartományon

Példa: Számítsuk ki az $f(x;y) = 2x + 3y$ kétváltozós függvény kettős integrálját a $T = \{(x;y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$ tartományon!

Megoldás:

$$\iint_T f(x;y)\,\mathrm{d}T = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (2x+3y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

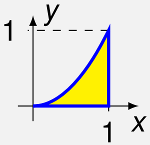
$$= \int_0^1 \left[2xy + \frac{3y^2}{2} \right]_0^{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{3x^4}{2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} + \frac{3x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}.$$

Kettős integrál kiszámítása normáltartományon

Példa: Számítsuk ki az $f(x;y) = 2x + 3y$ kétváltozós függvény kettős integrálját a $T = \{(x;y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$ tartományon!

Megoldás:



$$\iint_T f(x;y)\,\mathrm{d}T = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (2x+3y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[2xy + \frac{3y^2}{2} \right]_0^{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{3x^4}{2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} + \frac{3x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}.$$

Háromváltozós függvény integrálása

Az integrál kiszámítása hasonlóan történik 2-nél több változó esetén is. *Példa:* Számítsuk ki az $f(x;y) = x^2 - y + 2z$ háromváltozós függvény hármas integrálját az egységkockán, azaz a $T = \{(x;y;z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ tartományon!

Megoldás:

$$\iiint\limits_T f(x;y;z)\,\mathrm{d}T = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 - y + 2z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - xy + 2xz \right]_0^1 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - y + 2z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} + 2yz \right]_0^1 \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + 2z \right) \mathrm{d}z = \left[-\frac{z}{6} + z^2 \right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Háromváltozós függvény integrálása

Az integrál kiszámítása hasonlóan történik 2-nél több változó esetén is. *Példa:* Számítsuk ki az $f(x;y) = x^2 - y + 2z$ háromváltozós függvény hármas integrálját az egységkockán, azaz a $T = \{(x;y;z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ tartományon!

Megoldás:

$$\iiint\limits_T f(x;y;z)\,\mathrm{d}T = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 - y + 2z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - xy + 2xz \right]_0^1 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - y + 2z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} + 2yz \right]_0^1 \mathrm{d}z = \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + 2z \right) \mathrm{d}z = \left[-\frac{z}{6} + z^2 \right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$