Analízis előadások

Vajda István

Neumann János Informatika Kar
Óbudai Egyetem

2013. március 10.

Másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenletek általános alakja

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

ahol F adott négyváltozós függvény, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény.

Ha a fenti összefüggésből y'' kifejezhető, akkor a másodrendű differenciálegyenlet

$$y'' = f(x, y, y')$$

alakba írható, ahol f adott háromváltozós függvény.

Példák:

- $yy'' - 2(y' + 1)x^2 + 6 = 0$
- $y'' = (\mathrm{tg}(x))\, y' + 3y^2 - \sin(x)$

Másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenletek általános alakja

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

ahol F adott négyváltozós függvény, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény.

Ha a fenti összefüggésből y'' kifejezhető, akkor a másodrendű differenciálegyenlet

$$y'' = f(x, y, y')$$

alakba írható, ahol f adott háromváltozós függvény.

Példák:

- $yy'' - 2(y' + 1)x^2 + 6 = 0$
- $y'' = (\mathrm{tg}(x))y' + 3y^2 - \sin(x)$

Másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenletek általános alakja

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0,$$

ahol F adott négyváltozós függvény, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény.

Ha a fenti összefüggésből y'' kifejezhető, akkor a másodrendű differenciálegyenlet

$$y'' = f\left(x, y, y'\right)$$

alakba írható, ahol f adott háromváltozós függvény.

Példák:

- $yy'' - 2\left(y' + 1\right)x^2 + 6 = 0$
- $y'' = (\mathrm{tg}(x))\, y' + 3y^2 - \sin(x)$

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Ha a másodrendű differenciálegyenletben az x változó az y függvény és annak y' deriváltfüggvénye közül valamelyik (esetleg közülük több) nem szerepel, akkor *hiányos másodrendű differenciálegyenletről* beszélünk.

Megjegyzés: Az y'' nem hiányozhat, hiszen akkor nem lenne a differenciálegyenlet másodrendű.

A hiányos másodrendű differenciálegyenletek egyes fajtáira létezik megoldási módszer. Legegyszerűb közülük az

$$y'' = f(x)$$

alakra hozható, amelyet kétszeri integrálással oldhatunk meg, feltéve, hogy az integrálások elvégezhetők. (Ezt a típust szokás közvetlen integrálással megoldható differenciálegyenletnek nevezni.)

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Ha a másodrendű differenciálegyenletben az x változó az y függvény és annak y' deriváltfüggvénye közül valamelyik (esetleg közülük több) nem szerepel, akkor *hiányos másodrendű differenciálegyenletről* beszélünk.

Megjegyzés: Az y'' nem hiányozhat, hiszen akkor nem lenne a differenciálegyenlet másodrendű.

A hiányos másodrendű differenciálegyenletek egyes fajtáira létezik megoldási módszer. Legegyszerűb közülük az

$$y'' = f(x)$$

alakra hozható, amelyet kétszeri integrálással oldhatunk meg, feltéve, hogy az integrálások elvégezhetők. (Ezt a típust szokás közvetlen integrálással megoldható differenciálegyenletnek nevezni.)

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

Ha a másodrendű differenciálegyenletben az x változó az y függvény és annak y' deriváltfüggvénye közül valamelyik (esetleg közülük több) nem szerepel, akkor *hiányos másodrendű differenciálegyenletről* beszélünk.

Megjegyzés: Az y'' nem hiányozhat, hiszen akkor nem lenne a differenciálegyenlet másodrendű.

A hiányos másodrendű differenciálegyenletek egyes fajtáira létezik megoldási módszer. Legegyszerűb közülük az

$$y'' = f(x)$$

alakra hozható, amelyet kétszeri integrálással oldhatunk meg, feltéve, hogy az integrálások elvégezhetők. (Ezt a típust szokás közvetlen integrálással megoldható differenciálegyenletnek nevezni.)

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: *Másodrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amely másodrendű és elsőfokú.

Megjegyzés: Az elsőrendű differenciálegyenlet mindig

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = h(x)$$

alakra hozható, ahol p, q és h adott egyváltozós függvények, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény. Ezt az alakot a másodrendű differenciálegyenlet *általános alakjának* szokás nevezni.

Definíció: Ha az másodrendű lineáris differenciálegyenletben a h függvény (az ún. zavaró függvény) azonosan 0, akkor a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: *Másodrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amely másodrendű és elsőfokú.

Megjegyzés: Az elsőrendű differenciálegyenlet mindig

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = h(x)$$

alakra hozható, ahol p, q és h adott egyváltozós függvények, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény. Ezt az alakot a másodrendű differenciálegyenlet *általános alakjának* szokás nevezni.

Definíció: Ha az másodrendű lineáris differenciálegyenletben a h függvény (az ún. zavaró függvény) azonosan 0, akkor a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: *Másodrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük az olyan differenciálegyenletet, amely másodrendű és elsőfokú.

Megjegyzés: Az elsőrendű differenciálegyenlet mindig

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = h(x)$$

alakra hozható, ahol p, q és h adott egyváltozós függvények, y pedig ismeretlen egyváltozós függvény. Ezt az alakot a másodrendű differenciálegyenlet *általános alakjának* szokás nevezni.

Definíció: Ha az másodrendű lineáris differenciálegyenletben a h függvény (az ún. zavaró függvény) azonosan 0, akkor a differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Az elsőrendű, lineáris differenciálegyenletekhez hasonlóan, ha az

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = h(x)$$

differenciálegyenletbe a $h(x)$ zavaró függvény helyére 0-t helyettesítünk, akkor az így kapott

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

differenciálegyenletet az eredeti differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenletnek nevezzük.

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Tétel: A másodrendű, lineáris differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az eredeti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását, akkor megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását.

Bizonyítás: Legyen y_h a homogén egyenlet általános megoldása – ez két független paramétert tartalmaz – y_p pedig az eredeti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása. Ekkor

$$\begin{cases} y_h'' + p(x)\,y_h' + q(x)\,y_h &= 0 \\ y_p'' + p(x)\,y_p' + q(x)\,y_p &= h(x) \end{cases}$$

A fenti két egyenletet összeadva

$$y_h'' + y_p'' + p(x)\,y_h' + p(x)\,y_p' + q(x)\,y_h + q(x)\,y_p = h(x)$$

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Tétel: A másodrendű, lineáris differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az eredeti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását, akkor megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását.

Bizonyítás: (folyt.) A fenti két egyenletet összeadva

$$y_h'' + y_p'' + p(x)\, y_h' + p(x)\, y_p' + q(x)\, y_h + q(x)\, y_p = h(x)$$

Felhasználva az összegfüggvény deriválására vonatkozó tételt és $p(x)$-et, illetve $q(x)$-et kiemelve a megfelelő tagokból:

$$(y_h + y_p)'' + p(x)\,(y_h + y_p)' + q(x)\,(y_h + y_p) = h(x)$$

Ez azt jelenti, hogy $y_h + y_p$ megoldása a differenciálegyenletnek, és mivel két – az y_h-ból származó – független paramétert tartalmaz, ez az általános megoldás.

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha y_1 és y_2 megoldásai az

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenletnek, akkor ezek lineáris kombinációja azaz $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ is megoldása a differenciálegyenletnek tetszőleges $c_1 \in \mathbb{R}$ és $c_2 \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítás: Mivel y_1 és y_2 megoldások

$$y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0$$
$$y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2 = 0$$

Az első egyenletet c_1-gyel, a második egyenletet c_2-vel megszorozva, majd az így kapott egyenleteket összeadva rendezés után adódik:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(x)\,(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(x)\,(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha y_1 és y_2 megoldásai az

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenletnek, akkor ezek lineáris kombinációja azaz $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ is megoldása a differenciálegyenletnek tetszőleges $c_1 \in \mathbb{R}$ és $c_2 \in \mathbb{R}$ esetén. *Bizonyítás:* Mivel y_1 és y_2 megoldások

$$y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0$$
$$y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2 = 0$$

Az első egyenletet c_1-gyel, a második egyenletet c_2-vel megszorozva, majd az így kapott egyenleteket összeadva rendezés után adódik:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(x)\,(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(x)\,(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldása

Definíció: Az I intervallumon értelmezett y_1 és y_2 függvényeket *lineárisan függetleneknek* nevezzük, ha a $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ azonosság csak akkor teljesül, ha $c_1 = c_2 = 0$.
Ha két függvény nem lineárisan független, akkor *lineárisan összefüggők* a kérdéses intervallumon.

Tétel: Ha y_1 és y_2 az $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása, akkor a differenciálegyenlet minden megoldása előáll $c_1 y_1 + c_2 y_2$ alakban, azaz y_1 és y_2 lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés: A másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet y_1, y_2 partikuláris megoldásainak meghatározására nincs általános módszer.

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldása

Definíció: Az I intervallumon értelmezett y_1 és y_2 függvényeket *lineárisan függetleneknek* nevezzük, ha a $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) azonosság csak akkor teljesül, ha $c_1 = c_2 = 0$.
Ha két függvény nem lineárisan független, akkor *lineárisan összefüggők* a kérdéses intervallumon.

Tétel: Ha y_1 és y_2 az $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása, akkor a differenciálegyenlet minden megoldása előáll $c_1 y_1 + c_2 y_2$ alakban, azaz y_1 és y_2 lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés: A másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet y_1, y_2 partikuláris megoldásainak meghatározására nincs általános módszer.

Másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldása

Definíció: Az I intervallumon értelmezett y_1 és y_2 függvényeket *lineárisan függetleneknek* nevezzük, ha a $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ azonosság csak akkor teljesül, ha $c_1 = c_2 = 0$.
Ha két függvény nem lineárisan független, akkor *lineárisan összefüggők* a kérdéses intervallumon.

Tétel: Ha y_1 és y_2 az $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása, akkor a differenciálegyenlet minden megoldása előáll $c_1 y_1 + c_2 y_2$ alakban, azaz y_1 és y_2 lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés: A másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet y_1, y_2 partikuláris megoldásainak meghatározására nincs általános módszer.

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Definíció: Az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ *másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenletnek* nevezzük.

Definíció: Az $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletén az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

másodfokú egyenletet értjük.

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Definíció: Az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$ *másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenletnek* nevezzük.

Definíció: Az $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletén az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

másodfokú egyenletet értjük.

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletet, $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletének a $\lambda \in \mathbb{R}$ szám gyöke, akkor az $e^{\lambda x}$ függvény a differenciálegyenlet partikuláris megoldása.

Bizonyítás: Ha $y_1 = e^{\lambda x}$, akkor $y_1' = \lambda e^{\lambda x}$ és $y_1'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenlet baloldalába:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = e^{\lambda x} \cdot 0 = 0$$

adódik, tehát y_1 valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletet, $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletének a $\lambda \in \mathbb{R}$ szám gyöke, akkor az $e^{\lambda x}$ függvény a differenciálegyenlet partikuláris megoldása.

Bizonyítás: Ha $y_1 = e^{\lambda x}$, akkor $y_1' = \lambda e^{\lambda x}$ és $y_1'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenlet baloldalába:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = e^{\lambda x} \cdot 0 = 0$$

adódik, tehát y_1 valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének két különböző valós gyöke van, akkor a fenti tétel alapján két lineárisan független partikuláris megoldás adódik, ezek segítségével pedig az általános megoldás is felírható.

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$
Tehát $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$
A differenciálegyenlet általános megoldása: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének két különböző valós gyöke van, akkor a fenti tétel alapján két lineárisan független partikuláris megoldás adódik, ezek segítségével pedig az általános megoldás is felírható.

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 5y' + 6y = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3$
Tehát $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$
A differenciálegyenlet általános megoldása: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének egy λ valós gyöke van, akkor az partikuláris megoldás mellett az $xe^{\lambda x}$ is partikuláris megoldása.

Bizonyítás: Ha az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van, akkor diszkriminánsa $b^2 - 4ac = 0$ és gyöke $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$.

Helyettesítsük be a differenciálegyenlet bal oldalába az $y_2 = xe^{\lambda x}$ függvényt és deriváltjait:

$y_2' = e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x}$-et és $y'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 xe^{\lambda x}$-et:

$$2a\lambda e^{\lambda x} + a\lambda^2 xe^{\lambda x} + be^{\lambda x} + b\lambda xe^{\lambda x} + cxe^{\lambda x} =$$

$$= xe^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) + e^{\lambda x}\left(2a\lambda + b\right) =$$

$$= xe^{\lambda x} \cdot 0 + e^{\lambda x}\left(2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right) = e^{\lambda x}\left(-b + b\right) = 0$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének egy λ valós gyöke van, akkor az partikuláris megoldás mellett az $xe^{\lambda x}$ is partikuláris megoldása.

Bizonyítás: Ha az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van, akkor diszkriminánsa $b^2 - 4ac = 0$ és gyöke $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$.
Helyettesítsük be a differenciálegyenlet bal oldalába az $y_2 = xe^{\lambda x}$ függvényt és deriváltjait:
$y_2' = e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x}$-et és $y'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 xe^{\lambda x}$-et:

$$2a\lambda e^{\lambda x} + a\lambda^2 xe^{\lambda x} + be^{\lambda x} + b\lambda xe^{\lambda x} + cxe^{\lambda x} =$$
$$= xe^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) + e^{\lambda x}\left(2a\lambda + b\right) =$$
$$= xe^{\lambda x} \cdot 0 + e^{\lambda x}\left(2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right) = e^{\lambda x}\left(-b + b\right) = 0$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

A tétel alapján a $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet általános megoldása meghatározható abban az esetben is, ha a karakterisztikus egyenletének egy valós gyöke van.

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 4y' + 4y = 0$ differenciálegyenletet!
Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, melynek egyetlen gyöke $\lambda = 2$. Ennek alapján a differenciálegyenletnek $y_1 = e^{2x}$ és $y_2 = xe^{2x}$ partikuláris megoldásai.
Az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

A tétel alapján a $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet általános megoldása meghatározható abban az esetben is, ha a karakterisztikus egyenletének egy valós gyöke van.

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 4y' + 4y = 0$ differenciálegyenletet!
Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, melynek egyetlen gyöke $\lambda = 2$. Ennek alapján a differenciálegyenletnek $y_1 = e^{2x}$ és $y_2 = xe^{2x}$ partikuláris megoldásai.
Az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ másodfokú egyenlet gyökei nem valósak, akkor az egyenlet két gyöke egymásnak komplex konjugáltja.

Bizonyítás: Ha az egyenlet gyökei nem valósak, akkor diszkriminánsa negatív, azaz $b^2 - 4ac < 0$. Írjuk ezt a -1 és egy pozitív szám szorzataként. Ez utóbbi felírható egy $\omega \in \mathbb{R}$ szám négyzeteként. Tehát

$$b^2 - 4ac = -\omega^2 = j^2\omega^2 = (j\omega)^2$$

Ennek alapján az egyenlet gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \omega j}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\omega}{2a} j = \alpha \pm \beta j$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei a $\lambda_{1,2} = \pm\beta j$ komplex számok (amelyek valós része 0), akkor az $y_1 = \cos(\beta x)$ és $y_2 = \sin(\beta x)$ függvények a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai.

Bizonyítás: Mivel a karakterisztikus egyenlet másodfokú, megoldásai $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ alakúak és most $\alpha = 0$, az egyenlet $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ alakra hozható. Tehát a differenciálegyenlet (a-val való osztás után)

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei a $\lambda_{1,2} = \pm\beta j$ komplex számok (amelyek valós része 0), akkor az $y_1 = \cos(\beta x)$ és $y_2 = \sin(\beta x)$ függvények a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai.

Bizonyítás: Mivel a karakterisztikus egyenlet másodfokú, megoldásai $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ alakúak és most $\alpha = 0$, az egyenlet $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ alakra hozható. Tehát a differenciálegyenlet (a-val való osztás után)

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei a $\lambda_{1,2} = \pm\beta j$ komplex számok (amelyek valós része 0), akkor az $y_1 = \cos(\beta x)$ és $y_2 = \sin(\beta x)$ függvények a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai.

Bizonyítás: Mivel a karakterisztikus egyenlet másodfokú, megoldásai $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ alakúak és most $\alpha = 0$, az egyenlet $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ alakra hozható. Tehát a differenciálegyenlet (a-val való osztás után) Helyettesítsük be y_1-et és a deriváltjait az $y_1 = \cos(\beta x)$, $y_1' = -\beta \sin(\beta x)$, $y_1'' = -\beta^2 \cos(\beta x)$ függvényeket a differenciálegyenletbe:

$$y_1'' + \beta^2 y_1 = -\beta^2 \cos(\beta x) + \beta^2 \cos(\beta x) = 0$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei a $\lambda_{1,2} = \pm\beta j$ komplex számok (amelyek valós része 0), akkor az $y_1 = \cos(\beta x)$ és $y_2 = \sin(\beta x)$ függvények a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai.

Bizonyítás: Mivel a karakterisztikus egyenlet másodfokú, megoldásai $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ alakúak és most $\alpha = 0$, az egyenlet $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ alakra hozható. Tehát a differenciálegyenlet (a-val való osztás után)

Helyettesítsük be y_2-et és a deriváltjait az $y_2 = \sin(\beta x)$, $y_2' = \beta\cos(\beta x)$, $y_2'' = -\beta^2\sin(\beta x)$ függvényeket a differenciálegyenletbe:

$$y_2'' + \beta^2 y_2 = -\beta^2 \sin(\beta x) + \beta^2 \sin(\beta x) = 0$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai $\lambda = \pm\beta j$, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$$

Példa: Oldjuk meg az $y'' + 9y = 0$ differenciálegyenletet!
Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 9 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = \pm 3j$. Ennek alapján a differenciálegyenletnek általános megoldása:

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai $\lambda = \pm\beta j$, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$$

Példa: Oldjuk meg az $y'' + 9y = 0$ differenciálegyenletet!
Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 9 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = \pm 3j$. Ennek alapján a differenciálegyenletnek általános megoldása:

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai $\lambda = \alpha \pm \beta j$, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$$

Példa: Oldjuk meg az $y'' + 2y' + 5y = 0$ differenciálegyenletet!
Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2j$. Ennek alapján a differenciálegyenletnek általános megoldása:

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right)$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek megoldása

Tétel: Ha az $ay'' + by' + cy = 0$ másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai $\lambda = \alpha \pm \beta j$, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$$

Példa: Oldjuk meg az $y'' + 2y' + 5y = 0$ differenciálegyenletet!
Megoldás: A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2j$. Ennek alapján a differenciálegyenletnek általános megoldása:

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right)$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

- Először megoldjuk a differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenletet.
- Meghatározzuk a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását. (Pl. próbafüggvény-módszerrel)
- A homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk a differenciálegyenlet partikuláris megoldását, így megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását!

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

- Először megoldjuk a differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenletet.
- Meghatározzuk a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását. (Pl. próbafüggvény-módszerrel)
- A homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk a differenciálegyenlet partikuláris megoldását, így megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását!

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

- Először megoldjuk a differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenletet.
- Meghatározzuk a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását. (Pl. próbafüggvény-módszerrel)
- A homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk a differenciálegyenlet partikuláris megoldását, így megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását!

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 3y' + 2y = -6\cos(2x) - 2\sin(2x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet $y'' - 3y' + 2y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.
A karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 2$.
A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 3y' + 2y = -6\cos(2x) - 2\sin(2x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet partikuláris megoldását
$y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ alakban keressük.
$y_p' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$, $y_p'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned} -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 6A\sin(2x) - 6B\cos(2x) + \\ + 2A\cos(2x) + 2B\sin(2x) = -6\cos(2x) - 2\sin(2x) \\ (-2A - 6B)\cos(2x) + (6A - 2B)\sin(2x) = -6\cos(2x) - 2\sin(2x) \end{aligned}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 3y' + 2y = -6\cos(2x) - 2\sin(2x)$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az együtthatók összehasonlításával: $-2A - 6B = -6 \Rightarrow A = 3 - 3B$ és $6A - 2B = -2 \Rightarrow 3A - B = -1 \Rightarrow 9 - 10B = -1 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = 0$
Tehát a partikuláris megoldás: $y_p = \sin(2x)$

Ezt hozzáadva $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$-hez:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \sin(2x)$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x - 25$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet $y'' - 6y' + 9y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
A karakterisztikus egyenlet egyetlen valós gyöke $\lambda = 3$.
A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x - 25$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet partikuláris megoldását $y_p = Ax^2 + Bx + C$ alakban keressük.
$y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 9x^2 - 12x - 25$$
$$9Ax^2 + (-12A + 9B)\,x + 2A - 6B + 9C = 9x^2 - 12x - 25$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x - 25$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az együtthatók összehasonlításával: $9A = 9 \Rightarrow A = 1$,
$-12A + 9B = -12 \Rightarrow -12 + 9B = -12 \Rightarrow B = 0$ és
$2A - 6B + 9C = -25 \Rightarrow 2 + 9C = -25 \Rightarrow C = -3$
Tehát a partikuláris megoldás: $y_p = x^2 - 3$

Ezt hozzáadva $y_h = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$-hez:

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + x^2 - 3$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 4y' + 13y = 27e^{2x} - 52x + 16$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet $y'' - 4y' + 13y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$.
A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3j$.
A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_h = e^{2x}\left(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)\right)$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 4y' + 13y = 27e^{2x} - 52x + 16$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet partikuláris megoldását $y_p = Ae^{2x} + Bx + C$ alakban keressük.
$y_p' = 2Ae^{2x} + B$, $y_p'' = 4Ae^{2x}$
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} - 4B + 13Ae^{2x} + 13Bx + 13C = 27e^{2x} - 52x + 16$$
$$9Ae^{2x} + 13Bx + 13C - 4B = 27e^{2x} - 52x + 16$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 4y' + 13y = 27e^{2x} - 52x + 16$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az együtthatók összehasonlításával: $9A = 27 \Rightarrow A = 3$,
$13B = -52 \Rightarrow B = -4$ és $13C - 4B = 16 \Rightarrow 13C + 16 = 16 \Rightarrow C = 0$
Tehát a partikuláris megoldás: $y_p = 3e^{2x} - 4x$

Ezt hozzáadva $y_h = e^{2x}\left(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)\right)$-hez:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)\right) + 3e^{2x} - 4x$$

Lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása rezonancia esetén

Ha a differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet megoldásában van olyan tag, amely nem lineárisan független a felírt próbafüggvény valamely tagjától (hányadosuk állandó), akkor *rezonancia* esete áll fenn. Ilyenkor a próbafüggvényben a lineárisan függő tagot x-szel megszorozzuk.

Lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása rezonancia esetén

Példa: Oldjuk meg az $y' - 2y = 4e^{2x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Az $y' - 2y = 0$ homogén egyenlet megoldása:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = 2x + \ln|C| = \ln e^{2x} + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln\left|Ce^{2x}\right|$$

$$y = Ce^{2x}$$

Lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása rezonancia esetén

Példa: Oldjuk meg az $y' - 2y = 4e^{2x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Az $y' - 2y = 0$ homogén egyenlet megoldása:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = 2x + \ln|C| = \ln e^{2x} + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln\left|Ce^{2x}\right|$$

$$y = Ce^{2x}$$

Lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása rezonancia esetén

Példa: Oldjuk meg az $y' - 2y = 4e^{2x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: A partikuláris megoldást nem kereshetjük $y_p = Ae^{2x}$ alakban, mert az nem független a homogén egyenlet megoldásától, ezért az $y_p = Axe^{2x}$ próbafüggvényt választjuk. Ekkor $y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$. Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$Ae^{2x} + 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 4e^{2x}$$
$$Ae^{2x} = 4e^{2x}$$
$$A = 4$$

Tehát $y_p = 4xe^{2x}$. Ezt hozzáadva a homogén egyenlet megoldásához:

$$y = y_h + y_p = Ce^{2x} + 4xe^{2x}$$

Lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása rezonancia esetén

Példa: Oldjuk meg az $y' - 2y = 4e^{2x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás: A partikuláris megoldást nem kereshetjük $y_p = Ae^{2x}$ alakban, mert az nem független a homogén egyenlet megoldásától, ezért az $y_p = Axe^{2x}$ próbafüggvényt választjuk. Ekkor $y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$. Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$Ae^{2x} + 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 4e^{2x}$$
$$Ae^{2x} = 4e^{2x}$$
$$A = 4$$

Tehát $y_p = 4xe^{2x}$. Ezt hozzáadva a homogén egyenlet megoldásához:

$$y = y_h + y_p = Ce^{2x} + 4xe^{2x}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x} + 8x^2 - 20x + 4$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet $y'' - 5y' + 4y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$.
A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$.
A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x} + 8x^2 - 20x + 4$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez rendelt homogén egyenlet $y'' - 5y' + 4y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$.
A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$.
A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x} + 8x^2 - 20x + 4$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet partikuláris megoldását $y_p = Axe^{4x} + Bx^2 + Cx + D$ alakban keressük. (Az első tagban az x szorzótényezőt a rezonancia miatt szerepel.)

$y_p' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x} + 2Bx + C$, $y_p'' = 8Ae^{4x} + 16Axe^{4x} + 2B$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$8Ae^{4x} + 16Axe^{4x} + 2B - 5Ae^{4x} - 20Axe^{4x} - 10Bx - 5C +$$
$$+ 4Axe^{4x} + 4Bx^2 + 4Cx + 4D = 3e^{4x} + 8x^2 - 20x + 4$$

$$3Ae^{4x} + 4Bx^2 + (4C - 10B)\,x + 2B - 5C + 4D = 3e^{4x} + 8x^2 - 20x + 4$$

Másodrendű lineáris állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x} + 8x^2 - 20x + 4$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az együtthatók összehasonlításával: $3A = 3 \Rightarrow A = 1$, $4B = 8 \Rightarrow B = 2$,
$4C - 10B = -20 \Rightarrow 4C - 20 = -20 \Rightarrow C = 0$ és
$2B - 5C + D = 4 \Rightarrow 4 + D = 4 \Rightarrow D = 0$
Tehát a partikuláris megoldás: $y_p = xe^{4x} + 2x^2$

Ezt hozzáadva $y_h = C_1e^x + C_2e^{4x}$-hez:

$$y = C_1e^x + C_2e^{4x} + xe^{4x} + 2x^2$$