

度量空间和拓扑空间



度量 (metric)

函数 $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

当 $p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$p(x, y) = p(y, x)$$

$$p(x, z) + p(y, z) \geq p(x, y) \quad \text{for all } x, y, z \in X$$

则 p 被称为一个度量

有序对 (X, p) 为一个度量空间

开 & 闭球

$$\text{开球} \quad B(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$$

$$\text{闭球} \quad \bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) \leq \varepsilon\}$$

开 & 闭集

U 在 X 中开放 (open) $\Leftrightarrow U = \bigcup \mathcal{O}$ \mathcal{O} 为开球

开集的补为闭集

拓扑空间

\mathcal{T} 为 X 的子集的集合族, \mathcal{T} 为 X 的一个拓扑 (topology)

$\Leftrightarrow \mathcal{T}$ 满足开集公理 (open set axioms)

即: $X \in \mathcal{T}$

$$\forall U \in \mathcal{T} \quad \bigcup U \in \mathcal{T}$$

$$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{T} \quad \bigcap \mathcal{V} \in \mathcal{T}$$

有序对 (X, \mathcal{T}) 被称为拓扑空间

对任意 $U \in \mathcal{T}$, 称 U 在 \mathcal{T} 中开的, $X \setminus U \in \mathcal{T}$, 称 U 在 \mathcal{T} 中闭的

粗细

$T \subseteq T'$ T' 比 T 细 vice versa

包含集合族 \mathcal{U} 的最粗拓扑:

$$T = \{ \bigcup I, \bigcap I \mid I \subseteq \mathcal{U} \}$$

离散拓扑空间:

(X, T) 为 离散的 (discrete) $\Leftrightarrow T$ 包含所有 X 子集 即 T 最细

不可分拓扑

(X, T) 不可分 (indiscrete) $\Leftrightarrow T = \{\emptyset, X\}$

诱导拓扑

T 诱导自 度量 ρ

$$\Leftrightarrow \forall I \subseteq B, \quad \bigcup I \in T$$

$$\forall U \in T, \exists J \subseteq B, \quad U = \bigcup J$$

因此有 可度量空间 (metrizable)

余有限拓扑

$A^c = X - A$ 是有限集, A 为余有限集

如果 $T_f(X)$ 只包含 X 的所有余有限集和 \emptyset , $T_f(X)$ 为余有限拓扑

有心拓扑

\Leftrightarrow 所有包含元素 p 的子集形成的拓扑

同理有无心拓扑

欧氏拓扑

对于实数集 \mathbb{R} , T 为若干个不相交的开区间的并, 则 T 为欧氏拓扑

