集合族上下极限

实数构建

一族集合的极限

$B_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ 单减 $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$

$C_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$ 单增 $\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$

for example $\quad A_n = \begin{cases} [0,1] & n \text{ even} \\ [1,2] & n \text{ odd.} \end{cases}$

$\overline{\lim} A_n = [0,2]$, $\underline{\lim} A_n = 1$

实数的构建

(I) 柯西序列

柯西序列：$s: N \to Q$ 是柯西序列 $\Leftrightarrow$
$\exists N_0 \in N$, $\forall m, n > N_0$, $|s_m - s_n| < \varepsilon$

等价关系：C 为所有柯西列的集合
$r, s \in C$, $r \sim s \Leftrightarrow \exists N_0 \in N, \forall n > N_0, |r_n - s_n| < \varepsilon$

$\mathbb{R} = C/\sim$ （任一实数可用有理数逼近）

(II) 戴德金分割 Dedekind Cut.

戴德金分割：有理数 Q 的真空子集 x, satisfying:
(i) $\forall q \in x$, if $r < q$, $r \in x$
(ii) x 不存在最大元