1. A B 实对称矩阵

证：$tr(AB)^2 \le tr(A^2B^2)$

Proof. 1.

$E = AB - BA$

$E^T = BA - AB = -E$

令 λ，μ 为 E-特征值，特征向量

$$\begin{cases} E\eta = \lambda\eta \\ -\eta^* E = \bar{\lambda}\eta^* \end{cases}$$ （共扼转置）

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \eta^* E\eta = \lambda\eta^*\eta \\ -\eta^* E\eta = \bar{\lambda}\eta^*\eta \end{cases} \Rightarrow \lambda + \bar{\lambda} = 0$$ ，λ 为 0 或纯虚数

设 E 特征值为 a_1，$-a_1$，a_2，$-a_2$ ---，0，0，0 --

E^2 特征值为 $-|a_1|^2$，$-|a_1|^2$，------，0 ---

$$tr(E^2) = tr(AB)^2 + tr(BA)^2 - tr\,ABBA - tr\,BAAB \le 0$$

Q.E.D.

Proof. 2

$$2tr(AABB - ABAB) = tr[(AB-BA)(AB-BA)^T] \ge 0$$