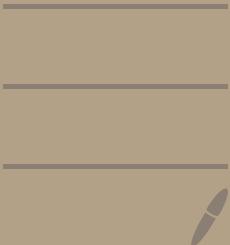


# 集合族上下极限

## 实数构造



# 一族集合的极限

$$B_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \text{ 单减} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$$

$$C_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j \text{ 单增} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$$

for example  $A_n = \begin{cases} [0, 1] & n \text{ even} \\ [1, 2] & n \text{ odd} \end{cases}$

$$\overline{\lim} A_n = [0, 2], \quad \underline{\lim} A_n = 1$$

# 实数的构建

## (I) 柯西序列

柯西序列:  $s: N \rightarrow \mathbb{Q}$  是柯西序列  $\Leftrightarrow$   
 $\exists N_0 \in N, \forall m, n > N_0, |s_m - s_n| < \varepsilon$

等价关系:  $C$  为所有柯西列的集合

$r, s \in C, r \sim s \Leftrightarrow \exists N_0 \in N, \forall n > N_0, |r_n - s_n| < \varepsilon$

$\mathbb{R} = C / \sim$  (任一实数可用有理数逼近)

## (II) 戴德金分割 Dedekind Cut.

戴德金分割: 有理数  $\mathbb{Q}$  的真子集  $X$ , satisfying:

(i)  $\forall q \in X, \text{ if } r < q, r \in X$

(ii)  $X$  不存在最大元