

覆盖和基 分离定理



覆盖:

集合族 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{P}(X)$ 为 X 子集集合族

\mathcal{C} 是 X 的一个覆盖 \Leftrightarrow

$$X \subseteq \bigcup \mathcal{C}$$

\mathcal{C} 是可分的 $\Leftrightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ vice versa

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \text{ 是子覆盖 } \Leftrightarrow X \subseteq \bigcup \mathcal{S}$$

基

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 的一个合成基 (synthetic base)

$\Leftrightarrow \mathcal{B}$ 是 X 的一个覆盖

\forall 有限族 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$, $\exists I \subseteq \mathcal{B}$ s.t. $\bigcap \mathcal{K} = \bigcup I$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 \mathcal{T} 的一个解析基 (analytic base)

$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T} \exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ s.t. $U = \bigcup \mathcal{K}$

生成拓扑

一个 X 上的拓扑为生成自 \mathcal{B} \Leftrightarrow

$$\mathcal{T} = \{ \bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \}$$

领域

$N \subseteq X$ 为 x 的领域

$\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T}, x \in U$ s.t. $x \in U \subseteq N$

N 是开的 $\Leftrightarrow N$ 是开邻域 v.v.

局部基

\mathcal{B} 为 x 的领域形成的集合族

\mathcal{B} 为局部基 $\Leftrightarrow \forall x$ 的领域 $N, \exists B \in \mathcal{B}$ s.t. $N \supseteq B$

第一可数空间

(X, τ) 为第一可数空间 $\Leftrightarrow \forall x \in X, x$ 存在一个可数局部基

第二可数空间

(X, τ) 为 ω $\Leftrightarrow \tau$ 有一个可数基

T_0 空间

(X, τ) 是 T_0 空间 $\Leftrightarrow x \neq y$ 是拓扑可分的
which is N_x 为 x 的所有邻域的集合
 $N_x \neq N_y$

R_0 空间

(X, τ) 是 R_0 空间 $\Leftrightarrow \forall x, y$ 拓扑可分, x, y 是分离的
which is \exists 闭集 $V_x \ni x, V_y \ni y$ s.t. $x \notin V_y, y \notin V_x$

T_1 空间

(X, τ) T_1 空间 $\Leftrightarrow (X, \tau)$ 既是 T_0 也是 R_0 .
which is $\forall x \neq y, x, y$ 可分离的

等价于 (X, τ) 中所有单点集合是闭的

R_1 空间

$\Leftrightarrow \forall x, y$ 拓扑可分, x, y 邻域可分离的
which is $\exists N_x, N_y$ s.t. $N_x \cap N_y = \emptyset$

T_2 空间

\Leftrightarrow 即豪斯多夫空间 $\Leftrightarrow (X, \tau)$ 既是 R_1 也是 T_0 .
which is $\forall x \neq y, \exists N_x, N_y$ s.t. $N_x \cap N_y = \emptyset$

任意度量空间都是 T_2 空间

σ -环

X 上的非空子集族 Σ 为 σ -环

$$\Leftrightarrow \text{(I) } \forall A \in \Sigma, A^c \in \Sigma$$

$$\text{(II) } \forall i \in \mathbb{N} \ A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$$