莫比乌斯变换

等域变换（退化 Möbius）$[0,1]\to[0,1]$ （本质为三角换元）

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t} \\ dx=-\dfrac{2}{(1+t^2)}dt \end{cases}$$

适用于 $f(1+x)$

$$\begin{cases} x=\dfrac{k(1-t)}{k+t} \\ dx=-\dfrac{k(k+1)}{(k+t)^2}dt \end{cases}$$

适用于 $f(k+x)$

例：

(I) $$\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{2x}\right)dx \qquad \begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t} \\ dx=-\dfrac{2}{(1+t)^2}dt \end{cases}$$

$$=\int_0^1 \frac{\cancel{(1+t)^2}}{\cancel{4}t}\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\frac{\cancel{2}}{\cancel{(1+t)^2}}dt$$

$$=-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}t^{k-1}dt$$

$$=\frac{\pi^2}{12}$$

(II) $$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(k+x)^{m+n}}dx \qquad \begin{cases} x=\dfrac{k(1-t)}{k+t} \\ dx=-\dfrac{k(k+1)}{(k+t)^2}dt \end{cases}$$

$$=\int_0^1 \frac{(k-kt)^{m-1}(t+kt)^{n-1}}{(k+k^2)^{m+n-1}}dt$$

$$=\frac{1}{(t+1)^m t^n}B(m,n)$$

大果！ Möbius 变换 （本质为多次三角换元、自相似）

Möbius变换 $x=\dfrac{at+b}{ct+d}$ Möbius反解 $t=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

用于处理形如：$\displaystyle\int\frac{1}{(x-x_0)^n\sqrt[m]{ax^2+bx+c}}\,dx$

化为 $\displaystyle\int\frac{1}{(x-x_0)^n\sqrt[m]{A(x-x_0)^2+(Bx+C)}}\,dx$

进行 $x=\dfrac{t+x_0}{Bt+C}$ 或 $x=\dfrac{Bt+C}{t+x_0}$

例：

(I) $\displaystyle I=\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

$x^2+x+1=\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{3}{4}(x+1)^2$

$x=\dfrac{1+t}{1-t}$ $\displaystyle I=\int\frac{1}{\sqrt{3+t^2}}\,dt=\operatorname{arcsinh}\frac{t}{\sqrt{3}}+C$

(II) $\displaystyle I=\int\frac{dx}{(x-2)^2(x-3)^3}$ 幂次高的放分母上

$t=\dfrac{x-2}{x-3}$

$\displaystyle I=\int\frac{(1-t)^3}{t^2}\,dt=-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3t-\frac{1}{2}t^2+C$

扩展：

对于 $\displaystyle\int \frac{gx+h}{(ax^2+2bx+c)\sqrt{dx^2+2ex+f}}dx$

令 $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$ $\quad dx=\dfrac{\alpha-\beta}{(t+1)^2}dt$

其中 α,β 为 $\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=0$ 的解

例：

$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} d=1 \\ e=\frac{1}{2} \\ f=1 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=0 \iff x^2-1=0$. $\quad \alpha=1$, $\beta=-1$

令 $x=\dfrac{t-1}{t+1}$

$$I=2\int \frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}\,dt$$