序数

序数:

α 为序数 $\iff$ (1) α 为可递集
(2) $\in$ 为 α 上的良序

α 为序数 $\Rightarrow$ $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ 是序数

$\exists \beta,\ \alpha = \beta^+ \Rightarrow \alpha$ 为 β 后继序数
$\neg \exists \beta,\ \alpha = \beta^+ \Rightarrow \alpha$ 为极限序数

Prop.
(I) $\forall n \in \mathbb{N}$ 都是序数，$\mathbb{N}$ 的序数为 ω

(II) $\forall$ 非空序数集合 X，$\bigcap X = \inf(X)$ & $\bigcup X = \sup(X)$ 是序数

(III) 不存在所有序数的集合（否则其自包含，引发罗素悖论）

超限归纳

a 是序数 $\Rightarrow a \in On$，On (Ord) 表示全体序数构成的真类

最小序数原理:

$$\exists \alpha \left(\phi(\alpha) \wedge \alpha \in On \wedge \forall \beta \left(\beta \in \alpha \to \neg (\phi(\beta)) \right) \right)$$

On 上超限归纳法原理:

$$\forall \alpha \left(\forall \beta < \alpha \left(p(\beta) \to p(\alpha) \right) \right) \Rightarrow \forall \alpha (p(\alpha))$$

超限归纳过程

(1) $p(0)$

(2) 后继序数 α, $p(\alpha) \to p(\alpha^+)$

(3) 非零极限序数 α, $\forall \beta < \alpha\ (p(\beta)) \Rightarrow p(\alpha)$

[由此可推自然数加法 & 乘法)