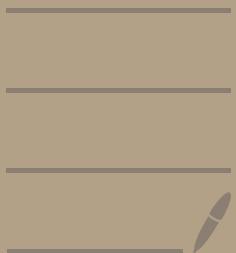


度量空间和拓扑空间



度量 (metric)

函数 $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

当 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$\rho(x, z) + \rho(y, z) \geq \rho(x, y) \quad \text{for all } x, y, z \in X$$

则 ρ 被称为一个度量

有序对 (X, ρ) 为一度量空间

开 & 闭球

开球 $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$

闭球 $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$

开 & 闭集

U 在 X 中开放 (open) $\Leftrightarrow U = \bigcup O$ O 为开球

开集的补为闭集

拓扑空间

T 为 X 的子集的集合族， T 为 X 的一个拓扑 (topology)

$\hookrightarrow T$ 满足开集公理 (open set axioms)

即： $X \in T$

$$\forall U \in T . \cup U \in T$$

$$\forall V \in T . \cap V \in T$$

有序对 (X, T) 被称为拓扑空间

对任意 $V \in T$ ，称 V 在 T 中开的， $X / P \in T$ ，称 P 在 T 中闭的

粗细

$T \leq T'$ T' 比 T 细 vice versa

包含集合族 \mathcal{U} 的最粗拓扑:

$$T = \{ \bigcup I, \cap I \mid I \subseteq \mathcal{U} \}$$

离散拓扑空间:

(X, T) 为 离散的 (discrete) $\Leftrightarrow T$ 包含所有 X 子集即 T 最细

不可分离

(X, T) 不可分 (indiscrete) $\Leftrightarrow T = \{\emptyset, X\}$

诱导拓扑

T 诱导自 底层 P

$$\Leftrightarrow \forall I \subseteq B, \bigcup I \in T \\ \forall U \in T, \exists J \subseteq B, U = UJ$$

因此有 可度量空间 (metrizable)

余有限拓扑

$A^c = X - A$ 是有限集, A 为余有限集

如果 $T_f(X)$ 只包含 X 的所有余有限集和 \emptyset , $T_f(X)$ 为余有限拓扑

有心拓扑

\Leftrightarrow 所有包含 元素 P 的子集形成的拓扑

无理有无心拓扑

疏式拓扑

对于 实数集 \mathbb{R} , T 为若干个不相关的开区间的并, 则 T 为疏式拓扑

