

覆盖和基 分离定理



覆盖:

集合族 $C \subseteq P(X)$ $P(X)$ 为 X 子集集合族

C 是 V 的一个覆盖 \Leftrightarrow

$$U \subseteq UC$$

C 是开的 $\Leftrightarrow C \subseteq T$ vice versa

$S \subseteq C$ 是子覆盖 $\Leftrightarrow V \subseteq VS$

基

$B \subseteq P(X)$ 是 X 的一个合成基 (synthetic base)

$\Leftrightarrow B$ 是 X 的一个覆盖

\forall 有限族 $K \subseteq B$, $\exists I \subseteq B$ s.t. $\bigcap K = VI$

$B \subseteq P(X)$ 是 T 的一个解析基 (analytic base)

$\Leftrightarrow \forall U \in T \ \exists K \subseteq B$ s.t. $U = \bigcup K$

生成拓扑

$\rightarrow X$ 上的拓扑为生成自 B (\Leftrightarrow)

$$T = \{ \bigcup U : U \subseteq B \}$$

领域

$N \subseteq X$ 为 X 的领域

$\Leftrightarrow \exists U \in T, x \in U$ s.t. $x \in V \subseteq N$

N 是开的 $\Leftrightarrow N$ 是开领域 v.v.

局部基

B 为 X 的领域形成的集合族

B 为局部基 $\Leftrightarrow \forall x$ 的领域 $N, \exists B \in B$ s.t. $N \supseteq B$

第一可数空间

(X, τ) 为第一可数空间 $\Leftrightarrow \forall x \in X, x$ 存在一个可数局部基

第二可数空间

(X, τ) 为 \sim $\Leftrightarrow \tau$ 有一个可数基

T_0 空间

(X, τ) 是 T_0 空间 $\Leftrightarrow x \neq y$ 是拓扑可分的

which is N_x 为 x 的所有领域的集合
 $N_x \neq N_y$

R_0 空间

(X, τ) 是 R_0 空间 $\Leftrightarrow \forall x, y$ 拓扑可分, x, y 是分离的

which is \exists 闭集 $V_x \ni x, V_y \ni y$ s.t. $x \notin V_y, y \notin V_x$

T_1 空间

(X, τ) T_1 空间 $\Leftrightarrow (X, \tau)$ 既是 T_0 也是 R_0

which is $\forall x \neq y, x, y$ 可分离的

等价于 (X, τ) 中所有单点集合是关闭的

R_1 空间

$\Leftrightarrow \forall x, y$ 拓扑可分, x, y 领域可分离的

which is $\exists N_x, N_y$ s.t. $N_x \cap N_y = \emptyset$

T_2 空间

\Leftrightarrow 距离空间 $\Leftrightarrow (X, \tau)$ 既是 R_1 也是 T_0

which is $\forall x \neq y \exists N_x, N_y$ s.t. $N_x \cap N_y = \emptyset$

任意度量空间都是 T_2 空间

σ -环

X 上的非空子集族 Σ 为 σ -环

\Leftrightarrow (I) $\forall A \in \Sigma, A^c \in \Sigma$

(II) $\forall i \in N, A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{i \in N} A_i \in \Sigma$