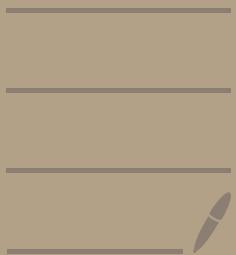


# 序 敦

---



## 序数:

$\alpha$  为序数  $\Leftrightarrow$  (1)  $\alpha$  为可递集  
(2)  $\in$  为  $\alpha$  上的良序

$\alpha$  为序数  $\Rightarrow \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$  是序数

$\exists \beta, \alpha = \beta^+ \Rightarrow \alpha$  为  $\beta$  后缀序数

$\neg \exists \beta, \alpha = \beta^+ \Rightarrow \alpha$  为极限序数

## Prop.

(I)  $\forall n \in N$  都是序数,  $N$  的序数为  $w$

(II)  $\forall$  非空序数集合  $X, \cap X = \inf(X)$  &  $\cup X = \sup(X)$  是序数

(III) 不存在所有序数的集合 (否则其自包含, 引发罗素悖论)

## 超限归纳

$\alpha$  是序数  $\Rightarrow \alpha \in O_n$ ,  $O_n$  ( $Ord$ ) 表示全体序数构成的真类

### 最小序数原理:

$\exists \alpha (\phi(\alpha) \wedge \alpha \in O_n \wedge \forall \beta (\beta \in \alpha \rightarrow \neg(\phi(\beta)))$

### $O_n$ 上超限归纳法原理:

$\forall \alpha (\forall \beta < \alpha (p(\beta) \rightarrow p(\alpha)) \Rightarrow \forall \alpha (p(\alpha))$

## 超限归纳过程

(1)  $p(0)$

(2) 后继序数  $\alpha$ ,  $p(\alpha) \rightarrow p(\alpha^+)$

(3) 非零极限序数  $\alpha$ ,  $\forall \beta < \alpha (p(\beta)) \Rightarrow p(\alpha)$

[由此可推自然数加法及乘法]