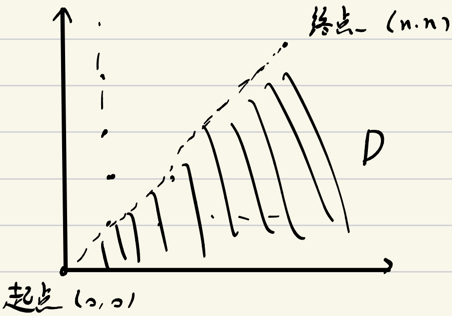
1、卡特兰数解决问题

2、介值思想

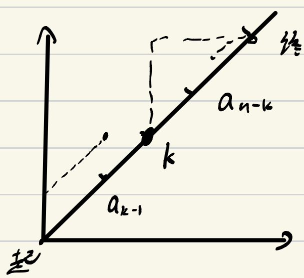
1. 考虑如下格点网络　　　　问有多少种方法从起点到终点，且不接触区域 $D: x < y$



Sol.

令一方案为 k-方案，如果它在 (k,k) 处第一次接触 ∂D

令 a_k 为 k-方案数量



则 $a_n = \sum a_{n-k} a_{k-1}$

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$

则 $[f(x)]^2 = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) x^2 + \cdots$

$= (f(x) - 1)/x$

则 $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$　　(卡特兰数列)

$\square$.

2. 将正整数 n 的二进制表达写为如下：

$$n = 2^0 \cdot b_0 + 2^1 \cdot b_1 + \cdots + 2^k \cdot b_k \qquad b_i \in \{0,1\}$$

令 a_n 为：

$$a_n = q^0 b_0 + q^1 b_1 + \cdots + q^k b_k$$

证 $\forall n$，$\exists m$ s.t. $a_n < a_m \le a_{n+1}$

Proof.

设 a_t 为最小的 t 使得 $a_n < a_t$

则 $a_{t-1} \le a_n$

if $t-1$ even:

$$\left.\begin{aligned} t-1 &= 0 + b_1 \cdot 2^1 + \cdots \\ t &= 1 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \cdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_t = a_{t-1} + 1$$

if $t-1$ odd:

$$t-1 = 1 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \cdots + b_l \cdot 2^l + \cdots$$

where b_l 是最小的非 1 b_i

则 $t = 1 \cdot 2^l + \cdots$

$$\left.\begin{aligned} a_{t-1} &= 1 + q + \cdots + q^{l-1} + x_{l+1} \cdot q^{l+1} + \cdots \\ a_t &= q^l + x_{l+1} q^{l+1} + \cdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_t \le a_{t-1} + 1$$

则有 $\forall t$，$a_t \le a_{t-1} + 1$

则 $a_n < a_t \le a_{t-1} + 1 \le a_n + 1$

□