


$n \times n$ 方格输入 n 个不同数字，上至下，左至右不减

求同值共边 K 最小值：

Solution:

$n=2, 3, 4, 5$ 时的构造

$n=2$

$\begin{array}{|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$

$n=3$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$

$n=4$

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$

$n=5$

$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array}$

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ 为偶数时 } K = \frac{n^2}{2} \\ n \text{ 为奇数时 } K = \frac{n^2 - 1}{2} \end{array} \right\} \text{ 即 } K = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$$

对于最左一列与最下一行的并集，共有 $(n-1) \times 2$ 个共边
 由于单调性 + n 个不同数字，最多有 $(n-1)$ 个非同值共边
 最少有 $(n-1)$ 个同值共边

例)

t_1	t_2	t_3	t_4	\dots	t_n
1	2	3	4	---	n

其中 $t_1, t_n \neq 0$, $t_2 \dots t_{n-1}$ 可为 0,

非同值共边仅在数字变换时出现

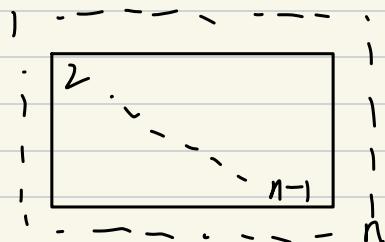
归纳法尝试

若除最上最下行，最左最右列之外 不再有 1 & n.

如图删去外围行列，将内部数字统一减1，可引用归纳假设

$$L(n-2) \rightarrow L(n)$$

$$\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{2} \right\rfloor + 2(n-1) \rightarrow \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$$



调整法 解决红色假设

希望在尽可能不改变同数共边数量的情况下

去除所有不符合要求的 1 & n

对于 1：将如此 1 改为 2

1 上方左方必为 1,

至少减少 2 个 同数共边，至多增加 2 个 同数共边，附合题意

要求：1 下方右方不再有 1，因此要求先处理最下最右的 1.

重复执行以上操作，后因为 归纳假设

□.