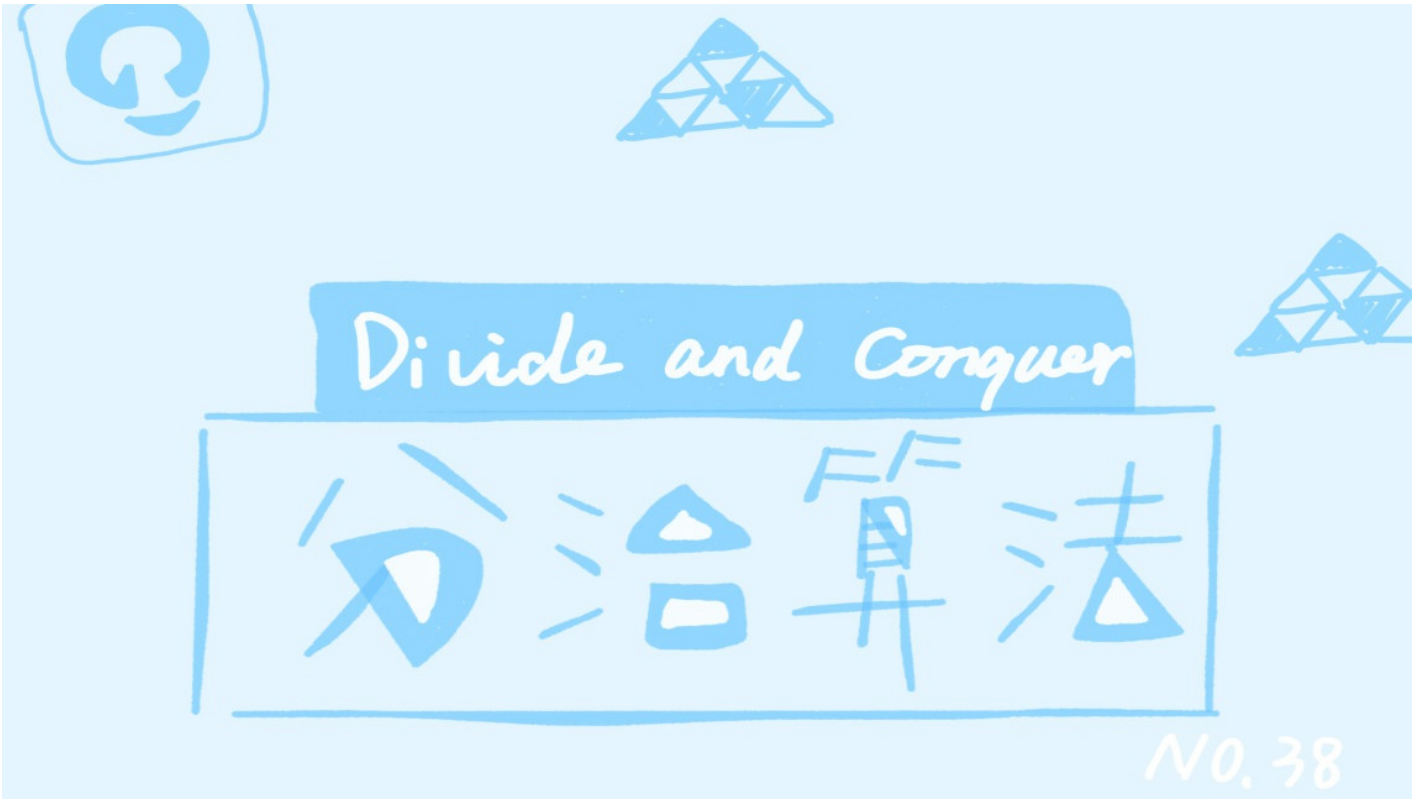
38讲分治算法：谈一谈大规模计算框架MapReduce中的分治思想



MapReduce是Google大数据处理的三驾马车之一，另外两个是GFS和Bigtable。它在倒排索引、PageRank计算、网页分析等搜索引擎相关的技术中都有大量的应用。

尽管开发一个MapReduce看起来很高深，感觉跟我们遥不可及。实际上，万变不离其宗，它的本质就是我们今天要学的这种算法思想，分治算法。

如何理解分治算法?

为什么说MapRedue的本质就是分治算法呢？我们先来看，什么是分治算法?

分治算法（divide and conquer）的核心思想其实就是四个字，分而治之，也就是将原问题划分成n个规模较小，并且结构与原问题相似的子问题，递归地解决这些子问题，然后再合并其结果，就得到原问题的解。

这个定义看起来有点类似递归的定义。关于分治和递归的区别，我们在排序（下）的时候讲过，**分治算法是一种处理问题的思想，递归是一种编程技巧**。实际上，分治算法一般都比较适合用递归来实现。分治算法的递归实现中，每一层递归都会涉及这样三个操作：

- 分解：将原问题分解成一系列子问题；
- 解决：递归地求解各个子问题，若子问题足够小，则直接求解；
- 合并：将子问题的结果合并成原问题。

分治算法能解决的问题，一般需要满足下面这几个条件：

- 原问题与分解成的小问题具有相同的模式；
- 原问题分解成的子问题可以独立求解，子问题之间没有相关性，这一点是分治算法跟动态规划的明显区别，等我们讲到动

态规划的时候，会详细对比这两种算法；

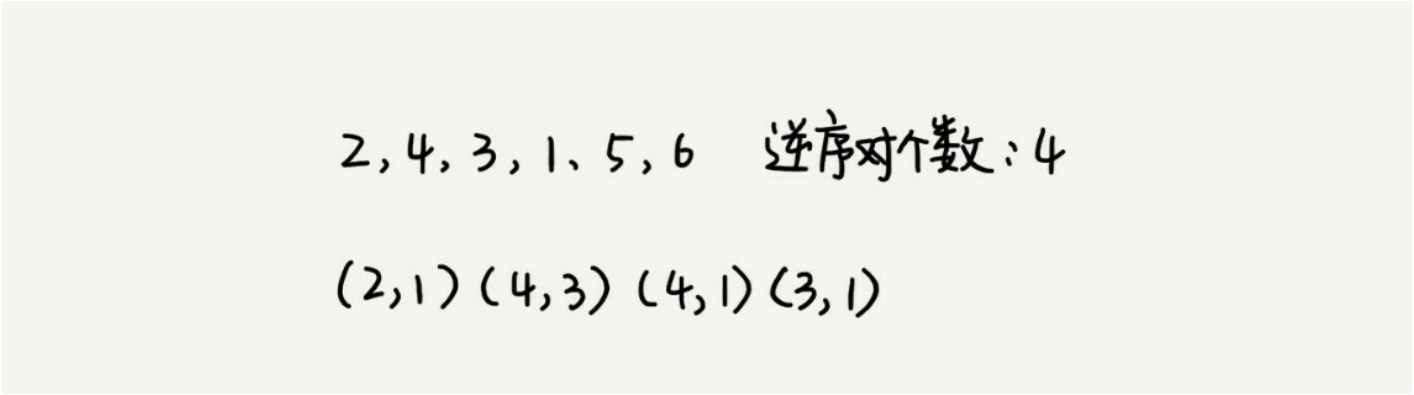
- 具有分解终止条件，也就是说，当问题足够小时，可以直接求解；
- 可以将子问题合并成原问题，而这个合并操作的复杂度不能太高，否则就起不到减小算法总体复杂度的效果了。

分治算法应用举例分析

理解分治算法的原理并不难，但是要想灵活应用并不容易。所以，接下来，我会带你用分治算法解决我们在讲排序的时候涉及的一个问题，加深你对分治算法的理解。

还记得我们在排序算法里讲的数据的有序度、逆序度的概念吗？我当时讲到，我们用有序度来表示一组数据的有序程度，用逆序度表示一组数据的无序程度。

假设我们有n个数据，我们期望数据从小到大排列，那完全有序的数据的有序度就是n(n-1)/2，逆序度等于0；相反，倒序排列的数据的有序度就是0，逆序度是n(n-1)/2。除了这两种极端情况外，我们通过计算有序对或者逆序对的个数，来表示数据的有序度或逆序度。



我现在的问题是，**如何编程求出一组数据的有序对个数或者逆序对个数呢**？因为有序对个数和逆序对个数的求解方式是类似的，所以你可以只思考逆序对个数的求解方法。

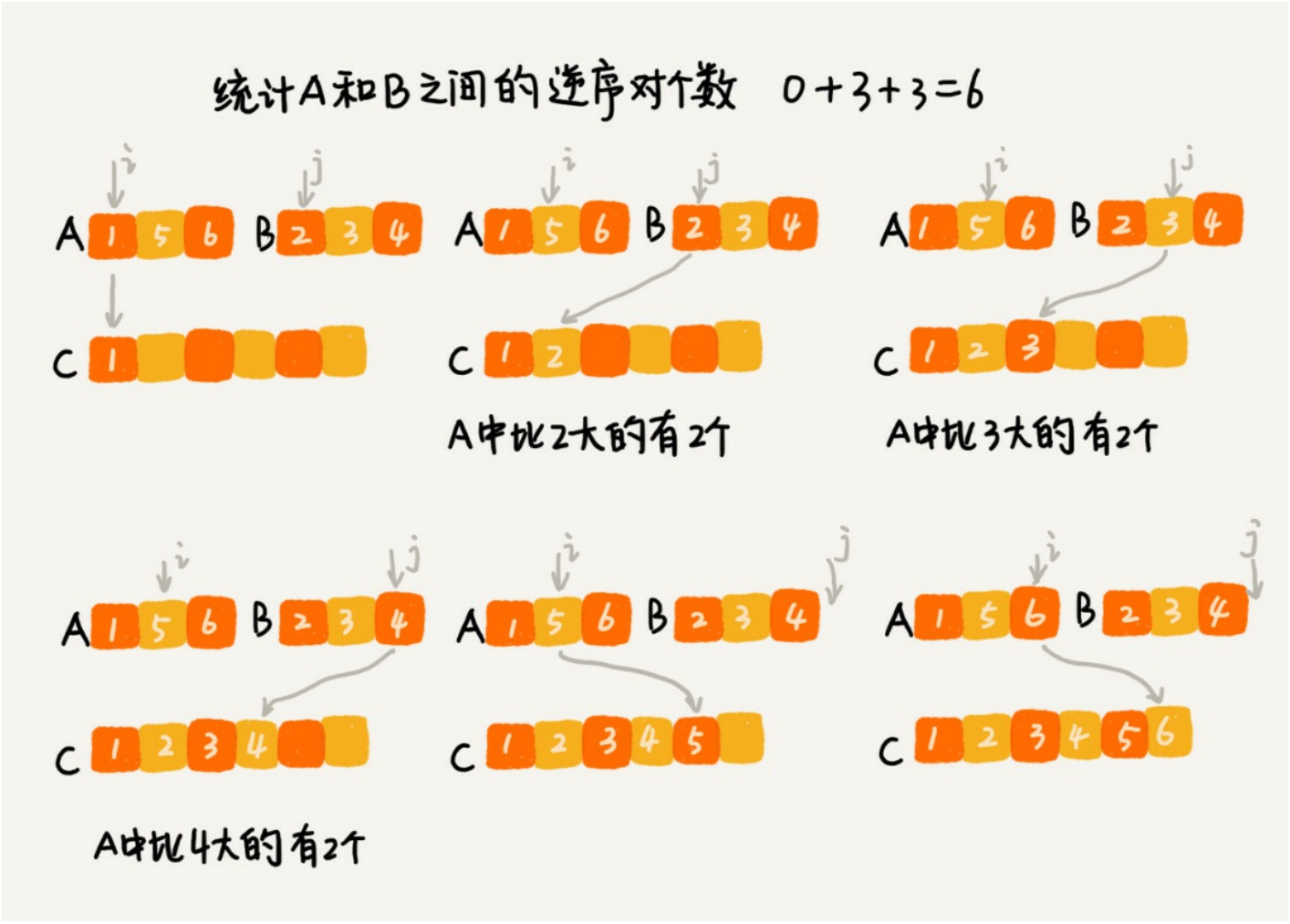
最笨的方法是，拿每个数字跟它后面的数字比较，看有几个比它小的。我们把比它小的数字个数记作k，通过这样的方式，把每个数字都考察一遍之后，然后对每个数字对应的k值求和，最后得到的总和就是逆序对个数。不过，这样操作的时间复杂度是O(n^2)。那有没有更加高效的处理方法呢？

我们用分治算法来试试。我们套用分治的思想来求数组A的逆序对个数。我们可以将数组分成前后两半A1和A2，分别计算A1和A2的逆序对个数K1和K2，然后再计算A1与A2之间的逆序对个数K3。那数组A的逆序对个数就等于K1+K2+K3。

我们前面讲过，使用分治算法其中一个要求是，子问题合并的代价不能太大，否则就起不了降低时间复杂度的效果了。那回到这个问题，如何快速计算出两个子问题A1与A2之间的逆序对个数呢？

这里就要借助归并排序算法了。你可以先试着想想，如何借助归并排序算法来解决呢？

归并排序中有一个非常关键的操作，就是将两个有序的小数组，合并成一个有序的数组。实际上，在这个合并的过程中，我们就可以计算这两个小数组的逆序对个数了。每次合并操作，我们都计算逆序对个数，把这些计算出来的逆序对个数求和，就是这个数组的逆序对个数了。



尽管我画了张图来解释，但是我个人觉得，对于工程师来说，看代码肯定更好理解一些，所以我们把这个过程翻译成了代码，你可以结合着图和文字描述一起看下。

```
private int num = 0; // 全局变量或者成员变量

public int count(int[] a, int n) {
  num = 0;
  mergeSortCounting(a, 0, n-1);
  return num;
}

private void mergeSortCounting(int[] a, int p, int r) {
  if (p >= r) return;
  int q = (p+r)/2;
  mergeSortCounting(a, p, q);
  mergeSortCounting(a, q+1, r);
  merge(a, p, q, r);
}

private void merge(int[] a, int p, int q, int r) {
  int i = p, j = q+1, k = 0;
  int[] tmp = new int[r-p+1];
  while (i<=q && j<=r) {
    if (a[i] <= a[j]) {
      tmp[k++] = a[i++];
    } else {
      num += (q-i+1); // 统计p-q之间，比a[j]大的元素个数
      tmp[k++] = a[j++];
    }
  }
  while (i <= q) { // 处理剩下的
    tmp[k++] = a[i++];
  }
  while (j <= r) { // 处理剩下的
    tmp[k++] = a[j++];
  }
  for (i = 0; i <= r-p; ++i) { // 从tmp拷贝回a
    a[p+i] = tmp[i];
  }
}
```

有很多同学经常说，某某算法思想如此巧妙，我是怎么也想不到的。实际上，确实是的。有些算法确实非常巧妙，并不是每个人短时间都能想到的。比如这个问题，并不是每个人都能想到可以借助归并排序算法来解决，不夸张地说，如果之前没接触过，绝大部分人都想不到。但是，如果我告诉你可以借助归并排序算法来解决，那你就应该要想到如何改造归并排序，来求解这个问题了，只要你能做到这一点，我觉得就很棒了。

关于分治算法，我这还有两道比较经典的问题，你可以自己练习一下。

- 二维平面上有n个点，如何快速计算出两个距离最近的点对?
- 有两个n*n的矩阵A，B，如何快速求解两个矩阵的乘积C=A*B?

分治思想在海量数据处理中的应用

分治算法思想的应用是非常广泛的，并不仅限于指导编程和算法设计。它还经常用在海量数据处理的场景中。我们前面讲的数据结构和算法，大部分都是基于内存存储和单机处理。但是，如果要处理的数据量非常大，没法一次性放到内存中，这个时候，这些数据结构和算法就无法工作了。

比如，给10GB的订单文件按照金额排序这样一个需求，看似是一个简单的排序问题，但是因为数据量大，有10GB，而我们的机器的内存可能只有2、3GB这样子，无法一次性加载到内存，也就无法通过单纯地使用快排、归并等基础算法来解决了。

要解决这种数据量大到内存装不下的问题，我们就可以利用分治的思想。我们可以将海量的数据集合根据某种方法，划分为几个小的数据集合，每个小的数据集合单独加载到内存来解决，然后再将小数据集合合并成大数据集合。实际上，利用这种分治的处理思路，不仅仅能克服内存的限制，还能利用多线程或者多机处理，加快处理的速度。

比如刚刚举的那个例子，给10GB的订单排序，我们就可以先扫描一遍订单，根据订单的金额，将10GB的文件划分为几个金额区间。比如订单金额为1到100元的放到一个小文件，101到200之间的放到另一个文件，以此类推。这样每个小文件都可以单独加载到内存排序，最后将这些有序的小文件合并，就是最终有序的10GB订单数据了。

如果订单数据存储在类似GFS这样的分布式系统上，当10GB的订单被划分成多个小文件的时候，每个文件可以并行加载到多台机器上处理，最后再将结果合并在一起，这样并行处理的速度也加快了很多。不过，这里有一个点要注意，就是数据的存储与计算所在的机器是同一个或者在网络中靠的很近（比如一个局域网内，数据存取速度很快），否则就会因为数据访问的速度，导致整个处理过程不但不会变快，反而有可能变慢。

你可能还有印象，这个就是我在讲线性排序的时候举的例子。实际上，在前面已经学习的课程中，我还讲了很多利用分治思想来解决的问题。

解答开篇

分治算法到此就讲完了，我们现在来看下开篇的问题，为什么说MapReduce的本质就是分治思想?

我们刚刚举的订单的例子，数据有10GB大小，可能给你的感受还不强烈。那如果我们要处理的数据是1T、10T、100T这样子的，那一台机器处理的效率肯定是非常低的。而对于谷歌搜索引擎来说，网页爬取、清洗、分析、分词、计算权重、倒排索引等等各个环节中，都会面对如此海量的数据（比如网页）。所以，利用集群并行处理显然是大势所趋。

一台机器过于低效，那我们就把任务拆分到多台机器上来处理。如果拆分之后的小任务之间互不干扰，独立计算，最后再将结果合并。这不就是分治思想吗?

实际上，MapReduce框架只是一个任务调度器，底层依赖GFS来存储数据，依赖Borg管理机器。它从GFS中拿数据，交给Borg中的机器执行，并且时刻监控机器执行的进度，一旦出现机器宕机、进度卡壳等，就重新从Borg中调度一台机器执行。

尽管MapReduce的模型非常简单，但是在Google内部应用非常广泛。它除了可以用来处理这种数据与数据之间存在关系的任务，比如MapReduce的经典例子，统计文件中单词出现的频率。除此之外，它还可以用来处理数据与数据之间没有关系的任务，比如对网页分析、分词等，每个网页可以独立的分析、分词，而这两个网页之间并没有关系。网页几十亿、上百亿，如果单机处理，效率低下，我们就可以利用MapReduce提供的高可靠、高性能、高容错的并行计算框架，并行地处理这几十亿、上百亿的网页。

内容小结

今天我们讲了一种应用非常广泛的算法思想，分治算法。

分治算法用四个字概括就是“分而治之”，将原问题划分成n个规模较小而结构与原问题相似的子问题，递归地解决这些子问题，然后再合并其结果，就得到原问题的解。这个思想非常简单、好理解。

今天我们讲了两种分治算法的典型的应用场景，一个是用来指导编码，降低问题求解的时间复杂度，另一个是解决海量数据处理问题。比如MapReduce本质上就是利用了分治思想。

我们也时常感叹Google的创新能力如此之强，总是在引领技术的发展。实际上，创新并非离我们很远，创新的源泉来自对事物本质的认识。无数优秀架构设计的思想来源都是基础的数据结构和算法，这本身就是算法的一个魅力所在。

课后思考

我们前面讲过的数据结构、算法、解决思路，以及举的例子中，有哪些采用了分治算法的思想呢？除此之外，生活、工作中，还有没有其他用到分治算法的地方呢？你可以自己回忆、总结一下，这对你将零散的知识提炼成体系非常有帮助。

欢迎留言和我分享，也欢迎点击“请朋友读”，把今天的内容分享给你的好友，和他一起讨论、学习。

精选留言

Williamzhang

第一个留言有问题可以再理解一下，不要误导后边人，作者的num+=语句位置正确

2018-12-20 10:22

作者回复

哈哈 终于有人看懂了 我的跟留言那位同学的思路不一样而已 他的更简洁些

2018-12-21 10:07

Yves

代码略有问题：1，num += (q - i + 1)，应该是在 a[i] <= a[j] 这个条件分支里面；2，while (i <= q) 里面不应该有 num += (q - i

+ 1)，3，最后的修改原数组迭代条件应该是 i < r - p + 1 而不是 i < r - p 。

```
private void merge(int[] a, int p, int q, int r) {
int i = p, j = q + 1, k = 0;
int[] tmp = new int[r - p + 1];
while (i <= q && j <= r) {
if (a[i] <= a[j]) {
tmp[k++] = a[i++];
} else {
num += (q - i + 1);
tmp[k++] = a[j++];
}
}
while (i <= q) {
tmp[k++] = a[i++];
}
while (j <= r) {
tmp[k++] = a[j++];
}
for (i = 0; i < r - p + 1; ++i) {
a[p + i] = tmp[i];
}
}
```

2018-12-19 12:10

作者回复

是的 大家代码直接看这位同学的 我晚点改正下。写的时候匆忙 不好意思

2018-12-19 19:40

三木子

在统计方面比较多，比如统计我国人口，要知道我国人口就要先知道每个省人口，要知道省人口就要知道每个市人口，要知道市人口就要知道每个区县人口，直到村社区，然后汇总求的总人数。

2018-12-19 22:27

作者回复

2018-12-20 10:01

刘远通

第一个求最近的点对

分成两块 单独求其中一块点对最小距离

然后求这两块之间点对的最小距离 通过一些排序和删除 可以减少到6个点之间比较 很神奇

第二个矩阵计算

v.斯特拉森提出了2*2分块矩阵的计算公式 从原来的8次乘法 缩减到了7次

当n规模很大的时候 缩减效果就很明显 （7/8）^(logn)

2018-12-20 10:03

渊凝

老师，我有两个疑问：

给 10GB 的订单排序，我们就可以先扫描一遍订单

1.场景中描述的机器内存只有2、3GB，我理解的是直接加载文件内存应该不够用来扫描一次10GB订单文件，对吗？如果不能，那应该怎么扫描呢？

2.如果用buffer来缓存扫描结果的话，即使能扫描完成，又该怎么对文件根据金额区间进行分割呢？

2019-01-11 11:39

Sharry

使用归并排序求逆序度, 实在是太妙了! 老师的代码一点儿问题都没有, (j-q-1) 记录的是比子序列 A 中当前即将添加到 tmp 数组中的元素的逆序对的个数, 看到留言里小伙伴说应该放在下面的 else 里, 可能需要再斟酌斟酌

2018-12-20 11:38

ALAN

老师，你好，有一个建议，就是对于代码每一行里不是很显然易懂的地方，能否注释下此行代码的作用，不然有时看了代码也不知为啥这样写。

2018-12-19 20:22

Smallfly

「创新并非离我们很远，创新的源泉来自对事物本质的认识。无数优秀架构设计的思想来源都是基础的数据结构和算法，这本身就是算法的一个魅力所在。」

这句话讲的太好啦。各种前端框架层出不穷，本质的东西，也是基本都没有变。

与其最新，不如求本。

2018-12-19 08:47

不上进的码农

if (a[i] <= a[j]) {
num += (j - q - 1);
tmp[k++] = a[i++];
} else {
tmp[k++] = a[j++];
}
我想了想，这段代码应该求的是有序对而不是逆序对吧

2018-12-19 08:19

作者回复

逆序对

2018-12-19 09:38

Geek_fbe6fe

还是写代码理解的快

```
package baseMind

import (
"fmt"
)

var totalNum int

func CountReversed() {
list := []int{1, 2, 43, 344, 3, 46, 75}
//list := []int{5, 2, 43, 344, 3, 46, 75}
mergeSortCount(list, 0, len(list)-1)
fmt.Println(totalNum)
}
func mergeSortCount(a []int, start int, end int) {
//return
if start >= end {
return
}
low := start
min := (start + end) / 2
mergeSortCount(a, low, min)
mergeSortCount(a, min+1, end)
```

```
mergeCount(a, low, min, end)
}
func mergeCount(a []int, low int, min int, end int) {
tmp := make([]int, end-low+1)
i := low
k := 0
j := min + 1
//获取左半边和右半边的逆序度
for i <= min && j <= end {
if a[i] < a[j] {
tmp[k] = a[i]
k++
i++
} else {
totalNum += min - i + 1
tmp[k] = a[j]
k++
j++
}
}
//处理左边剩下
//fmt.Println(i, min)
for i <= min {
tmp[k] = a[i]
k++
i++
}
//处理右边剩下
//fmt.Println(j, end)
for j <= end {
tmp[k] = a[j]
k++
j++
}
fmt.Println(tmp, low, min, end)
//将数据拷贝回a
for n := 0; n < end-low+1; n++ {
//fmt.Println(n)
a[low+n] = tmp[n]
}
fmt.Println(a)
fmt.Println("num:", totalNum)
}
```

其实，分析递归应该从最小最 底层的递归进行分析，要不然很容易产生误解，归并的最底层只有两个元素所以可以用这种方式做逆序计算，合并的时候两个小数组已经是有序的所以也可以用合并的方式做合并，真的挺神奇的，换一个方式角度思考问题就解决了。

2019-01-08 11:29

spark

归并排序忘记了，又跑头前面看一下，不然看不懂了……忘的好快……

2019-01-06 11:42

Geek_fbe6fe

老师，使用归并排序算有序度，分成两个小数组必须是有序的，是吗？好疑惑这样子应用场景不是很小？

2019-01-03 10:42

作者回复

不 你有点误解了 你最好还是回过头去再看下归并排序那一节课

2019-01-04 09:52

苏雅拉

微积分是分治思想鼻祖

2019-01-02 08:16

唯她命

老师 一开始逆序度不是4吗，最后怎么成了6了

2018-12-28 23:06

作者回复

不是同一个例子 你再仔细看看

2019-01-02 16:36

MIAN-勉

把归并排序merge方法的参数列表 由merge(int[] a, int p, int q, int r) 改为 merge(int[] a, int low, int middle, int high) 更容易理解，小细节，哈哈

2018-12-27 21:36

猫头鹰爱拿铁

打下卡 还有两节 就赶上进度了 前面字符串算法那耽误了好一会 好再多看几遍多写几遍也基本理解了 难度越来越大了 希望自己能坚持下去 不要掉队

2018-12-26 00:01

杨槐

老师，普通本科生学这个算法，数据结构可以拓展自己的思维，有较大的机会以后能转算法或者大数据呢？看完你的专栏，刷刷leetcode，还需要哪些书看呢

2018-12-24 08:53

作者回复

不需要了 直接刷吧

2018-12-26 20:22

李盏

老师，是不是每课都有代码放git上了，地址是啥

2018-12-22 20:06

作者回复

专栏简介有写

2018-12-22 22:24

feifei

老师这个分治算法我理解了，但在加入统计逆序对个数的代码的后，我有一点没有理解，就是逆序对的个数的加法，为什么是当前中间值下标减开始下标加1，这是为什么？我本来的想法是当左边大于右边就加1，但这样是不对的，所以请老师帮我解释下，谢谢！

2018-12-21 08:45

作者回复

主要思想就代码中的你说的那一行 每次统计有几个比他大的

2018-12-21 09:45

大可可

求逆对数实现的很巧妙

2018-12-21 07:43