J. D. Jackson, Classical Electrodynamics

Section 3: Boundary-Value Problems in Electrostatics: II ノート

@crutont

Contents

3.1 Laplace Equation in Spherical Coordinates

3.2 Legendre Equation and Legendre Polynomials

3.3 Boundary-Value Problems with Azimuthal Symmetry

3.4 Behavior of Fields in a Conical Hole or Near a Sharp Point

3.5 Associated Legendre Functions and the Spherical Harmonics $Y_{lm}(\theta, \phi)$

3.6 Addition Theorem for Spherical Harmonics

3.7 Laplace Equation in Cylindrical Coordinates; Bessel Functions

3.8 Boundary-Value Problems in Cylindrical Coordinates

3.9 Expansion of Green Functions in Spherical Coordinates

3.10 Solution of Potential Problems with the Spherical Green Function Expansion

3.11 Expansion of Green Functions in Cylindal Coordinates

円筒座標系で Green 関数の満たすべき式；

$$\nabla_x^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') \tag{3.1}$$

ϕ と z に関する部分のデルタ関数を

$$\delta(\phi-\phi') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')} \tag{3.2}$$

$$\delta(z-z') = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-z')} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}k \cos[k(z-z')] \tag{3.3}$$

として，Green 関数が

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\phi-\phi')}\cos[k(z-z')]g_m(k;\rho,\rho') \tag{3.4}$$

として表されるとする．

Green 関数の式 (3.1) に代入して，丁寧に計算をすると，g_m の部分についての関係式が得られる；

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}\rho}\right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)g_m = -\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho') \tag{3.5}$$

$\rho \neq \rho'$ のときは右辺がゼロになり，これは modified Bessel function である．一般解は $I_m(k\rho)$ と $K_m(k\rho)$ の線型結合で表される．

$\psi_1(k\rho)$ と $\psi_2(k\rho)$ がそれぞれ，$\rho < \rho'$，$\rho > \rho'$ での境界条件を満たす，I_m, K_m の線型結合で表される（線型独立な）解であるとすると，Green 関数の対称性（ρ と ρ' の入れ替えに関して同じ関数を与えること）より，

$$g_m(k;\rho,\rho') = \psi_1(k\rho_<)\psi_2(k\rho_>) \tag{3.6}$$

で表すことができる．

$\rho = \rho'$ での接続条件を考えると，

$$\left.\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=\rho'+0} - \left.\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=\rho'-0} = -\frac{4\pi}{\rho'} \tag{3.7}$$

となる．これに，(3.6) を代入すると，

$$kW[\psi_1(k\rho), \psi_2(k\rho)] = -\frac{4\pi}{\rho} \tag{3.8}$$

$$\text{i.e.}\quad W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x} \tag{3.9}$$

となる．ただし，$W[\psi_1, \psi_2]$ は ψ_1 と ψ_2 の Wronskian であり，

$$W[\psi_1, \psi_2] = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2 \tag{3.10}$$

で与えられる．

(3.5) は Strum-Liouville 型の微分方程式；

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + g(x)y = 0 \tag{3.11}$$

である．この方程式の線型独立な 2 つの解の Wronskian は $1/p(x)$ に比例する形でかけることが知られている．このことを認めることにする．[*1]

いま，境界面がない自由空間を考える．g_m は $\rho = 0$ で有限かつ $\rho \to \infty$ でゼロになるので，（係数を ψ_1 に取り込むことにすると）$\psi_1(k\rho) = AI_m(k\rho)$ および，$\psi_2(k\rho) = K_m(k\rho)$ と表される．係数 A は Wronskian の条件から定める．

Wronskian は $1/\rho$ に比例しているが，これはどの ρ についても成立している．いま，$\rho \gg 1$ の極限で考えることにすると，（$\rho \ll 1$ の極限で考えても良い）modified Bessel function の漸近形

$$\begin{cases} I_m(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,\mathrm{e}^{x} \\[2ex] K_m(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases} \tag{3.12}$$

を代入して計算すれば，

$$W[I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x} \tag{3.13}$$

となる，したがって，(3.9) と係数を比較することにより，$A = 4\pi$ を得る．

さて，自由空間における Green 関数は $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ であったから，この結果より，

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{im(\phi-\phi')}\cos[k(z-z')]I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>) \tag{3.14}$$

これは，実関数だけを用いて表すことができて，

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}&\mathrm{d}k\cos[k(z-z')] \\ &\times\left\{\frac{1}{2}I_0(k\rho_<)K_0(k\rho_>) + \sum_{m=1}^{\infty}\cos[m(\phi-\phi')]I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>)\right\}\end{aligned} \tag{3.15}$$

[*1] いつかメモにしたい

と書くことができる．

$\boldsymbol{x}' = 0$ としたとき，$m \geq 1$ に対して，$I_m(0) = 0$ であるから，$m = 0$ の項だけが残り，($I_m(z) \sim (z/2)^m$ if $z \ll 1$ である．)

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k \cos(kz) K_0(k\rho) \tag{3.16}$$

となる．また，$\rho^2 \to R^2 = \rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')$ と置き直すと， このとき，$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(z' = 0)| = \sqrt{R^2 + z^2}$ であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k \cos(kz) \left\{ \frac{1}{2} I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \right\} \tag{3.17}$$

これと (3.16) を比較して，

$$\begin{aligned} &K_0\left(k\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}\right) \\ &\qquad = I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \end{aligned} \tag{3.18}$$

を得る．ここで，$k \to 0$ の極限を考える．$z \ll 1$ のとき，

$$I_m(z) \sim \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^m \tag{3.19}$$

$$K_m(z) \sim \begin{cases} -\log\left(\frac{z}{2}\right) - 0.5772\ldots & (m = 0) \\ \frac{\Gamma(m)}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^m & (m \neq 0) \end{cases} \tag{3.20}$$

で漸近形が与えられるので，これを (3.18) に代入して計算をすると，

$$\log\left(\frac{1}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}\right) = 2\log\left(\frac{1}{\rho_>}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m \cos[m(\phi - \phi')] \tag{3.21}$$

これは二次元極座標系における Green 関数の表式である．(問題 2.17)

3.12 Eigenfunction Expansions for Green Functions

3.13 Mixed Boundary Conditions; Conducting Plane with a Circular Hole

3.14 Problems

章末問題の手の付け方，略解とかを書きたい．

$\boxed{\textbf{3.1}}$ 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \tag{3.22}$$

に代入して境界条件から各係数を決定する．Legendre 多項式について成り立つ関係：

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} 2^{-n} \binom{n}{n/2} \quad (n : \text{even}) \tag{3.23}$$

を使えば良い．

3.2 (a) (3.22) のように展開して，表面電荷密度による境界条件を考えることで係数を決定する．Legendre 多項式の直交関係式：

$$\int_0^1 \mathrm{d}(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) P_l(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \tag{3.24}$$

および，Legendre 多項式の基本的な式：

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \tag{3.25}$$

を用いれば良い．

(b) $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ を用いて原点での電場を計算する．$\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いると結果を $\hat{\boldsymbol{z}}$ のみで表すことができる．

(c) (2) では $\beta = \pi - \alpha$ として $\beta \to 0$ の極限を考えるとよい．

3.3 この問題は議論の余地がある．ちょっと後回しにする．

3.4 (a) ポテンシャルを球面調和関数を用いた展開で表す：

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=l}^{l}\left(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.26}$$

$r = a$ の球面上で境界条件から各係数を定める．計算の途中で，

$$V(\phi) = \begin{cases} +V & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{n}\cdot 2j \le \phi \le \dfrac{\pi}{n}\cdot(2j+1) \\ -V & \text{if} \quad \dfrac{\pi}{n}\cdot(2j+1) \le \phi \le \dfrac{\pi}{n}\cdot(2j+2) \end{cases} \quad (\text{for } j = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{3.27}$$

を用いて，積分

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi V(\phi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} \tag{3.28}$$

の計算があらわれるが，$m \neq 0$ のときを考えると，

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi V(\phi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi} = -\frac{\mathrm{i}V}{m}\left[1 - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}\pi\right)\right]^2 \sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}2j\pi\right) \tag{3.29}$$

となる．$m = 0, \pm 2n, \pm 4n, \ldots$ のときは $\exp(-\mathrm{i}(m/n)\pi) = 1$ となるので，積分はゼロ．いま，m は整数であるから，残りとして考えるのは $m = \pm n, \pm 3n, \ldots$ である．このとき，

$$\exp\left(-\mathrm{i}\frac{m}{n}2j\pi\right) = 1 \tag{3.30}$$

であるから，これらをまとめて

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi V(\phi) e^{-\mathrm{i}m\phi} = \begin{cases} -\mathrm{i}\dfrac{4Vn}{m} & \text{if} \quad m = \pm n, \pm 3n, \ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.31}$$

と書ける．

(b) (a) の結果を用いて具体的に計算を進めていくだけであるが，Jackson §3.3 eq. (3.36) との比較の時には座標軸の取り方に気をつける必要がある．具体的には，$\cos\theta' = \sin\theta\sin\phi$ とすれば良い．

$\boxed{\textbf{3.5}}$ Jackson eq. (3.70) の式を r, a でそれぞれ微分して，差を考えて $\mathrm{d}\Omega' V(\theta', \phi')$ で積分をすれば良い．

$\boxed{\textbf{3.6}}$ ポテンシャルが具体的に計算できるので，Jackson eq. (3.70) を用いて，球面調和関数で展開して，和を考えれば良い．この問題は易しい．

$\boxed{\textbf{3.7}}$ 前問と同じように考えれば良い．

$\boxed{\textbf{3.8}}$ $\log(\csc\theta) = \log(1/\sin\theta)$ を Legendre 多項式で展開する．このときに積分

$$\int \mathrm{d}x \log(1-x^2) = (1+x)\log(1+x) - (1-x)\log(1-x) - 2x \tag{3.32}$$

を用いる．普通に log 積分をしてしまうと発散してしまうことに注意．この積分は知らないとキビシイかも．

$\boxed{\textbf{3.9}}$ 円筒座標系での Laplace 方程式

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3.33}$$

を $z = 0, L$ での境界条件に注意して解けば良い．

$\boxed{\textbf{3.10}}$ 前問の結果を用いればよい．(b) での極限を考える時は，

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu + \mathcal{O}(z^{\nu+1}) \quad \text{if} \quad z \ll 1 \tag{3.34}$$

を用いると良い．また，三角関数の無限和を求める時は，exp の形にして無限級数として和を求めてその実部・虚部を求めると見通しが良い．また，log の虚部は arg で与えられることに注意．

$\boxed{\textbf{3.11}}$

$\boxed{\textbf{3.12}}$

$\boxed{\textbf{3.13}}$

$\boxed{\textbf{3.14}}$ 線電荷密度を求めて，それを体積電荷密度で書くと

$$\rho_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}) = \frac{3Q}{8\pi d^3}\frac{d^2 - r^2}{r^2}[\delta(\cos\theta - 1) + \delta(\cos\theta + 1)] \tag{3.35}$$

と表すことができる．Jackson eq. (3.125) の Green 関数を用いて球内部のポテンシャルを求めればよい．$r \gtrless d$ で積分の計算が異なるが，丁寧に計算をすれば良い．

$\boxed{\textbf{3.15}}$

$\boxed{\textbf{3.16}}$ Bessel の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu(k\rho) = 0 \tag{3.36}$$

から出発して，部分積分，k, k' の入れ替えをして差を考えると，

$$(k^2 - (k')^2)\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \left[\rho J_\nu(k\rho)\frac{\mathrm{d}J_\nu(k'\rho)}{\mathrm{d}\rho} - \rho J_\nu(k'\rho)\frac{\mathrm{d}J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\infty} \tag{3.37}$$

となる．$\rho = \infty$ の場合を考える．$\rho = R$ として，$R \to \infty$ を考えることにする．Bessel 関数の漸近形を用いて，

$$\begin{aligned}&\left[\rho J_\nu(k\rho)\frac{\mathrm{d}J_\nu(k'\rho)}{\mathrm{d}\rho} - \rho J_\nu(k'\rho)\frac{\mathrm{d}J_\nu(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]\Bigg|_{\rho=R} \\ &\qquad = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{kk'}}\left[\frac{-1}{k+k'}\cos[(k+k')R - \nu\pi] + \frac{1}{k'-k}\sin[(k'-k)R]\right]_{R\to\infty}\end{aligned} \tag{3.38}$$

と書き直すことができる．

デルタ関数は，sinc 関数を用いて

$$\lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sin(x/\epsilon)}{x/\epsilon} \frac{1}{\pi\epsilon} = \delta(x) \tag{3.39}$$

として近似することができる．

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\cos[(k+k')R - \nu\pi]}{k+k'} \propto \delta_{1/R}\left((k+k') - \left(\nu - \frac{1}{2}\frac{\pi}{R}\right)\right) = 0 \tag{3.40}$$

$$\lim_{R \to \infty} \tag{3.41}$$

$\boxed{\textbf{3.17}}$

$\boxed{\textbf{3.18}}$

$\boxed{\textbf{3.19}}$

$\boxed{\textbf{3.20}}$

$\boxed{\textbf{3.21}}$