

J. D. Jackson, Classical Electrodynamics
Section 3: Boundary-Value Problems in Electrostatics: II ノート

@crutont

Contents

3.1	Laplace Equation in Spherical Coordinates	2
3.2	Legendre Equation and Legendre Polynomials	2
3.3	Boundary-Value Problems with Azimuthal Symmetry	2
3.4	Behavior of Fields in a Conical Hole or Near a Sharp Point	2
3.5	Associated Legendre Functions and the Spherical Harmonics $Y_{lm}(\theta, \phi)$	2
3.6	Addition Theorem for Spherical Harmonics	2
3.7	Laplace Equation in Cylindrical Coordinates; Bessel Functions	2
3.8	Boundary-Value Problems in Cylindrical Coordinates	2
3.9	Expansion of Green Functions in Spherical Coordinates	2
3.10	Solution of Potential Problems with the Spherical Green Function Expansion	2
3.11	Expansion of Green Functions in Cylindrical Coordinates	2
3.12	Eigenfunction Expansions for Green Functions	4
3.13	Mixed Boundary Conditions; Conducting Plane with a Circular Hole	4
3.14	Problems	4

3.1 Laplace Equation in Spherical Coordinates**3.2 Legendre Equation and Legendre Polynomials****3.3 Boundary-Value Problems with Azimuthal Symmetry****3.4 Behavior of Fields in a Conical Hole or Near a Sharp Point****3.5 Associated Legendre Functions and the Spherical Harmonics $Y_{lm}(\theta, \phi)$** **3.6 Addition Theorem for Spherical Harmonics****3.7 Laplace Equation in Cylindrical Coordinates; Bessel Functions****3.8 Boundary-Value Problems in Cylindrical Coordinates****3.9 Expansion of Green Functions in Spherical Coordinates****3.10 Solution of Potential Problems with the Spherical Green Function Expansion****3.11 Expansion of Green Functions in Cylindrical Coordinates**

円筒座標系で Green 関数の満たすべき式；

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (3.1)$$

ϕ と z に関する部分のデルタ関数を

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \quad (3.2)$$

$$\delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z - z')} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z - z')] \quad (3.3)$$

として, Green 関数が

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi - \phi')} \cos[k(z - z')] g_m(k; \rho, \rho') \quad (3.4)$$

として表されたとする.

Green 関数の式 (3.1) に代入して, 丁寧に計算をすると, g_m の部分についての関係式が得られる；

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dg_m}{d\rho} \right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \quad (3.5)$$

$\rho \neq \rho'$ のときは右辺がゼロになり, これは modified Bessel function である. 一般解は $I_m(k\rho)$ と $K_m(k\rho)$ の線型結合で表される.

$\psi_1(k\rho)$ と $\psi_2(k\rho)$ がそれぞれ, $\rho < \rho'$, $\rho > \rho'$ での境界条件を満たす, I_m, K_m の線型結合で表される (線型独立な) 解であるとする, Green 関数の対称性 (ρ と ρ' の入れ替えに関して同じ関数を与えること) より,

$$g_m(k; \rho, \rho') = \psi_1(k\rho_<) \psi_2(k\rho_>) \quad (3.6)$$

で表すことができる.

$\rho = \rho'$ の接続条件を考えると,

$$\left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_{\rho=\rho'+0} - \left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_{\rho=\rho'-0} = -\frac{4\pi}{\rho'} \quad (3.7)$$

となる. これに, (3.6) を代入すると,

$$kW[\psi_1(k\rho), \psi_2(k\rho)] = -\frac{4\pi}{\rho} \quad (3.8)$$

$$\text{i.e. } W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x} \quad (3.9)$$

となる. ただし, $W[\psi_1, \psi_2]$ は ψ_1 と ψ_2 の Wronskian であり,

$$W[\psi_1, \psi_2] = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2 \quad (3.10)$$

で与えられる.

(3.5) は Sturm-Liouville 型の微分方程式;

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + g(x)y = 0 \quad (3.11)$$

である. この方程式の線型独立な 2 つの解の Wronskian は $1/p(x)$ に比例する形でかけることが知られている. このことを認めることにする.*1

いま, 境界面がない自由空間を考える. g_m は $\rho = 0$ で有限かつ $\rho \rightarrow \infty$ でゼロになるので, (係数を ψ_1 に取り込むことにすると) $\psi_1(k\rho) = AI_m(k\rho)$ および, $\psi_2(k\rho) = K_m(k\rho)$ と表される. 係数 A は Wronskian の条件から定める.

Wronskian は $1/\rho$ に比例しているが, これはどの ρ についても成立している. いま, $\rho \gg 1$ の極限で考えることにすると, ($\rho \ll 1$ の極限で考えても良い) modified Bessel function の漸近形

$$\begin{cases} I_m(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \\ K_m(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \end{cases} \quad (3.12)$$

を代入して計算すれば,

$$W[I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x} \quad (3.13)$$

となる, したがって, (3.9) と係数を比較することにより, $A = 4\pi$ を得る.

さて, 自由空間における Green 関数は $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ であったから, この結果より,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} \cos[k(z-z')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) \quad (3.14)$$

これは, 実関数だけを用いて表すことができ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z')] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi-\phi')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

*1 いつかメモにしたい

と書くことができる.

$\mathbf{x}' = 0$ としたとき, $m \geq 1$ に対して, $I_m(0) = 0$ であるから, $m = 0$ の項だけが残る, ($I_m(z) \sim (z/2)^m$ if $z \ll 1$ である.)

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \cos(kz) K_0(k\rho) \quad (3.16)$$

となる. また, $\rho^2 \rightarrow R^2 = \rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')$ と置き直すと, このとき, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(z' = 0)| = \sqrt{R^2 + z^2}$ であるから,

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dk \cos(kz) \left\{ \frac{1}{2} I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) + \sum_{m=1}^\infty \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \right\} \quad (3.17)$$

これと (3.16) を比較して,

$$\begin{aligned} K_0(k\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}) \\ = I_0(k\rho_<) K_0(k\rho_>) + 2 \sum_{m=1}^\infty \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) \end{aligned} \quad (3.18)$$

を得る. ここで, $k \rightarrow 0$ の極限を考える. $z \ll 1$ のとき,

$$I_m(z) \sim \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^m \quad (3.19)$$

$$K_m(z) \sim \begin{cases} -\log\left(\frac{z}{2}\right) - 0.5772 \dots & (m=0) \\ \frac{\Gamma(m)}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^m & (m \neq 0) \end{cases} \quad (3.20)$$

で漸近形が与えられるので, これを (3.18) に代入して計算をすると,

$$\log\left(\frac{1}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}\right) = 2 \log\left(\frac{1}{\rho_>}\right) + 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m \cos[m(\phi - \phi')] \quad (3.21)$$

これは二次元極座標系における Green 関数の表式である. (問題 2.17)

3.12 Eigenfunction Expansions for Green Functions

3.13 Mixed Boundary Conditions; Conducting Plane with a Circular Hole

3.14 Problems

章末問題の手の付け方, 略解とかを書きたい.

3.1 方位角対称なポテンシャルを Legendre 多項式で展開したときの一般形

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^\infty (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (3.22)$$

に代入して境界条件から各係数を決定する. Legendre 多項式について成り立つ関係:

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} 2^{-n} \binom{n}{n/2} \quad (n : \text{even}) \quad (3.23)$$

を使えば良い.

- 3.2** (a) (3.22) のように展開して、表面電荷密度による境界条件を考えることで係数を決定する。Legendre 多項式の直交関係式：

$$\int_0^1 d(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (3.24)$$

および、Legendre 多項式の基本的な式：

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \quad (3.25)$$

を用いれば良い。

- (b) $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ を用いて原点での電場を計算する。 $\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を用いると結果を $\hat{\mathbf{z}}$ のみで表すことができる。
- (c) (2) では $\beta = \pi - \alpha$ として $\beta \rightarrow 0$ の極限を考えるとよい。

- 3.3** この問題は議論の余地がある。ちょっと後回しにする。

- 3.4** (a) ポテンシャルを球面調和関数を用いた展開で表す：

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.26)$$

$r = a$ の球面上で境界条件から各係数を定める。計算の途中で、

$$V(\varphi) = \begin{cases} +V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot 2j \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \\ -V & \text{if } \frac{\pi}{n} \cdot (2j+1) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n} \cdot (2j+2) \end{cases} \quad (\text{for } j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3.27)$$

を用いて、積分

$$\int_0^{2\pi} d\varphi V(\varphi) e^{-im\varphi} \quad (3.28)$$

の計算があらわれるが、 $m \neq 0$ のときを考えると、

$$\int_0^{2\pi} d\varphi V(\varphi) e^{-im\varphi} = -\frac{iV}{m} \left[1 - \exp\left(-i\frac{m}{n}\pi\right) \right]^2 \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i\frac{m}{n}2j\pi\right) \quad (3.29)$$

となる。 $m = 0, \pm 2n, \pm 4n, \dots$ のときは $\exp(-i(m/n)\pi) = 1$ となるので、積分はゼロ。いま、 m は整数であるから、残りとして考えるのは $m = \pm n, \pm 3n, \dots$ である。このとき、

$$\exp\left(-i\frac{m}{n}2j\pi\right) = 1 \quad (3.30)$$

であるから、これらをまとめて

$$\int_0^{2\pi} d\varphi V(\varphi) e^{-im\varphi} = \begin{cases} -i\frac{4Vn}{m} & \text{if } m = \pm n, \pm 3n, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.31)$$

と書ける。

- (b) (a) の結果を用いて具体的に計算を進めていくだけであるが、Jackson §3.3 eq. (3.36) との比較の時には座標軸の取り方に気をつける必要がある。具体的には、 $\cos\theta' = \sin\theta\sin\varphi$ とすれば良い。