A.1. Legendre 多項式の公式について

Jackson の eq.(3.25) から eq.(3.26) での式変形で

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^{k+1}(k+1)!} = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}(k+1)(k!)^2} \tag{A.1}$$

を用いたが，これを Rodrigues の公式を使って証明する．

Proof. まず，Rodrigues の公式は，

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \tag{A.2}$$

であった．これを用いて，

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_{2k+1}(x) = \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!}\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}}(x^2-1)^{2k+1} \tag{A.3}$$

$$= \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!}\left.\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}(x^2-1)^{2k+1}\right|_0^1 \tag{A.4}$$

ここで，

$$\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}(x^2-1)^{2k+1} = \frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}\left[(x+1)^{2k+1}(x-1)^{2k+1}\right] \tag{A.5}$$

$$= \sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(x+1)^{2k+1}\frac{\mathrm{d}^{2k-j}}{\mathrm{d}x^{2k-j}}(x-1)^{2k+1} \tag{A.6}$$

和の中に含まれる微分について，$j = 0, \ldots, 2k$ に対して，

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(x+1)^{2k+1} = \overbrace{(2k+1)(2k)\cdots(2k+1-j+1)}^{j\text{個}}(x+1)^{2k+1-j} \tag{A.7}$$

$$= \frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!}(x+1)^{2k+1-j} \tag{A.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2k-j}}{\mathrm{d}x^{2k-j}}(x-1)^{2k+1} = \frac{(2k+1)!}{(j+1)!}(x-1)^{j+1} \tag{A.9}$$

であるから，

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}(x^2-1)^{2k+1}\right|_{x=1} = 0 \tag{A.10}$$

および

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}(x^2-1)^{2k+1}\right|_{x=0} = \sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!}\frac{(2k+1)!}{(j+1)!}(-1)^{j+1} \tag{A.11}$$

$$= -[(2k+1)!]^2\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\frac{(-1)^j}{(2k+1-j)!\,(j+1)!} \tag{A.12}$$

$$= -[(2k+1)!]^2\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!\,(k+1)!} \tag{A.13}$$

$$= -\frac{(2k+1)!\,(2k)!\,(-1)^k}{k!\,(k+1)!} \tag{A.14}$$

であるから，

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, P_{2k+1}(x) = \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \frac{(2k+1)!\,(2k)!\,(-1)^k}{k!\,(k+1)!} \tag{A.15}$$

$$= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}(k+1)(k!)^2} \tag{A.16}$$

が従う．

ここで，赤文字の変形 (A.12) → (A.13) で以下のことを用いた：

$(1+x)^2(1-x^2)^{2k}$ を展開した時の x^{2k+1} の係数を考えればよい[a]．具体的には，

$$(1+x)^2(1-x^2)^{2k} = (1+x)^{2k+2}(1-x)^{2k} \tag{A.17}$$

$$= \sum_{i=0}^{2k+2} \binom{2k+2}{i} x^i \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j x^j \tag{A.18}$$

ここで，$i + j = 2k + 1$ となる部分だけを取り出して考えると，x^{2k+1} の係数は

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k+2}{2k-j+1} \binom{2k}{j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{2k} \frac{(2k+2)!}{(j+1)!\,(2k-j+1)!} \binom{2k}{j} (-1)^j \tag{A.19}$$

$$= (2k+2)! \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)!\,(2k-j+1)!} \tag{A.20}$$

であり，一方，

$$(1+x)^2(1-x^2)^{2k} = (1+2x+x^2) \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j x^{2j} \tag{A.21}$$

であり，$j = k$ の時のみが x^{2k+1} の係数に寄与することに注意すれば，その係数は

$$2\binom{2k}{k}(-1)^k = \frac{2(2k)!\,(-1)^k}{(k!)^2} \tag{A.22}$$

であるから，

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)!\,(2k-j+1)!} = \frac{2(2k)!\,(-1)^k}{(2k+2)!\,(k!)^2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!\,(k+1)!} \tag{A.23}$$

を得ることができる． □

[a] @qoo_trout10 さんより教えていただきました．