

A.1 Legendre 多項式の公式について

Jackson 本文中の eq.(3.25) から eq.(3.26) での式変形で

$$\int_0^1 dx P_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{k+1} (k+1)!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} (k+1)(k!)^2} \quad (\text{A.1})$$

という式変形を用いたが、これを Rodrigues の公式を使って証明する。

Proof. まず, Rodrigues の公式は,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (\text{A.2})$$

であった。これを用いて、奇数次の Legendre 多項式の積分は

$$\int_0^1 dx P_{2k+1}(x) = \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)!} \int_0^1 dx \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} (x^2 - 1)^{2k+1} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)!} \left. \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^{2k+1} \right|_0^1 \quad (\text{A.4})$$

と表される。ここで、

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^{2k+1} = \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} [(x+1)^{2k+1} (x-1)^{2k+1}] \quad (\text{A.5})$$

$$= \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{d^j}{dx^j} (x+1)^{2k+1} \frac{d^{2k-j}}{dx^{2k-j}} (x-1)^{2k+1} \quad (\text{A.6})$$

が成り立つ。和の中に含まれる微分について、 $j = 0, \dots, 2k$ に対して、

$$\frac{d^j}{dx^j} (x+1)^{2k+1} = \overbrace{(2k+1)(2k) \cdots (2k+1-j+1)}^{j\text{個}} (x+1)^{2k+1-j} \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!} (x+1)^{2k+1-j} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d^{2k-j}}{dx^{2k-j}} (x-1)^{2k+1} = \frac{(2k+1)!}{(j+1)!} (x-1)^{j+1} \quad (\text{A.9})$$

であるから、

$$\left. \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^{2k+1} \right|_{x=1} = 0 \quad (\text{A.10})$$

となる。また、

$$\left. \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^{2k+1} \right|_{x=0} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!} \frac{(2k+1)!}{(j+1)!} (-1)^{j+1} \quad (\text{A.11})$$

$$= -[(2k+1)!]^2 \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{(-1)^j}{(2k+1-j)! (j+1)!} \quad (\text{A.12})$$

$$= -[(2k+1)!]^2 \frac{(-1)^k}{(2k+1)k! (k+1)!} \quad (\text{A.13})$$

$$= -\frac{(2k+1)! (2k)! (-1)^k}{k! (k+1)!} \quad (\text{A.14})$$

であるから、この結果を合わせることで、

$$\int_0^1 dx P_{2k+1}(x) = \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)!} \frac{(2k+1)! (2k)! (-1)^k}{k! (k+1)!} \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} (k+1)(k!)^2} \quad (\text{A.16})$$

が従う。これで等号が示された。

ここで、赤文字の変形 (A.12) \rightarrow (A.13) で以下のことを用いた：

$(1+x)^2(1-x^2)^{2k}$ を展開した時の x^{2k+1} の係数を考えればよい^a。具体的には、

$$(1+x)^2(1-x^2)^{2k} = (1+x)^{2k+2}(1-x)^{2k} \quad (\text{A.17})$$

$$= \sum_{i=0}^{2k+2} \binom{2k+2}{i} x^i \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j x^j \quad (\text{A.18})$$

ここで、 $i + j = 2k + 1$ となる部分だけを取り出して考えると、 x^{2k+1} の係数は

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k+2}{2k-j+1} \binom{2k}{j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{2k} \frac{(2k+2)!}{(j+1)!(2k-j+1)!} \binom{2k}{j} (-1)^j \quad (\text{A.19})$$

$$= (2k+2)! \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)!(2k-j+1)!} \quad (\text{A.20})$$

であり、一方、

$$(1+x)^2(1-x^2)^{2k} = (1+2x+x^2) \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j x^{2j} \quad (\text{A.21})$$

であり、 $j = k$ の時のみが x^{2k+1} の係数に寄与することに注意すれば、その係数は

$$2 \binom{2k}{k} (-1)^k = \frac{2(2k)!(-1)^k}{(k!)^2} \quad (\text{A.22})$$

であるから、

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)!(2k-j+1)!} = \frac{2(2k)!(-1)^k}{(2k+2)!(k!)^2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(k+1)!} \quad (\text{A.23})$$

を得ることができる。

■

^a この式については@qoo_trout10 さんより教えていただきました。