線形双曲型問題

FTCSスキーム

$$u_t + cu_x = 0 \quad (c > 0)$$

をFTCS (Forward in Time and Central Difference in Space)スキームで計算する.

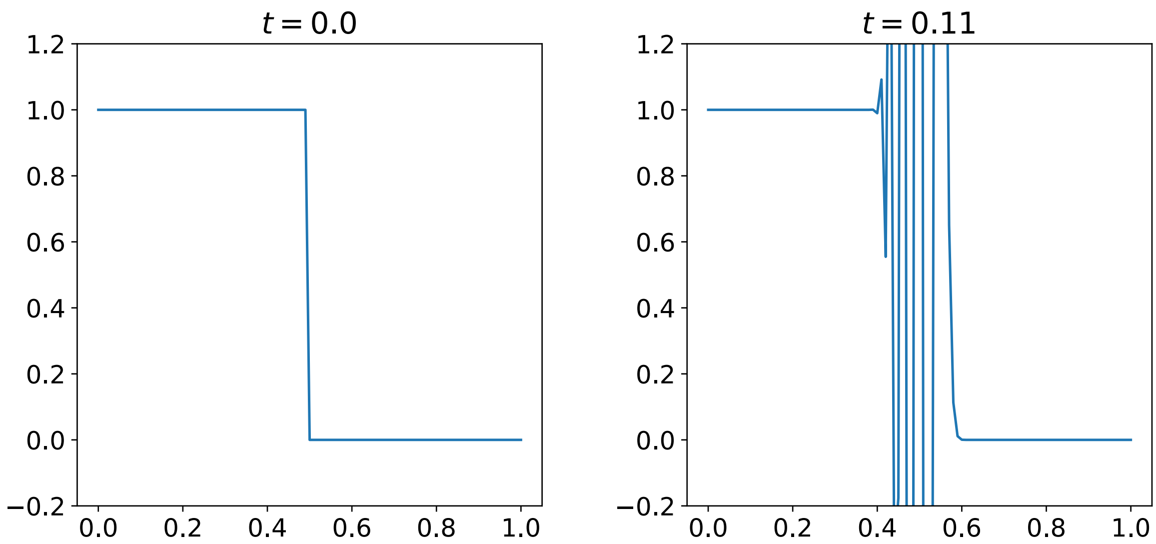
$$u_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}, u_x = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

として,

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{FTCS}$$

で計算をする.
ここで, $\nu = c\Delta t / \Delta x$はCourant数（物理的信号の伝達速度$c$と数値的信号の伝達速度$\Delta x / \Delta t$の比を表す.）

$c = 1, \Delta t = 0.01, \Delta x = 0.01$として計算すると, 下図.



のようになる.
von Neumannの安定性解析を用いると,

$$|g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2\theta > 1$$

であるから, このスキームは無条件不安定となる.

Laxのスキーム

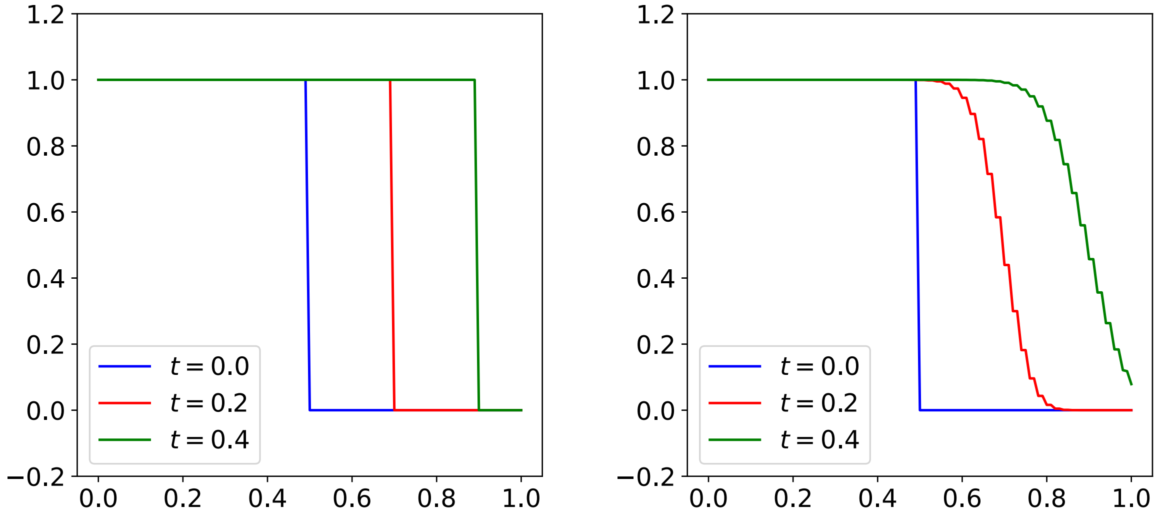
eq.(FTCS)の右辺第1項を平均として

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{Lax}$$

としたもの.
このとき，von Neumannの安定性解析では

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2 \sin^2\theta$$

となり．$\nu^2 \leq 1$のときに$|g| < 1$となることがわかる.
下図（左）はFTCSスキームと同じ条件で解いた時の時間発展を表す.
下図（右）では$\Delta t = 0.005$として，$\nu = 0.5$としたときの時間発展.
時間発展とともに滑らかになっている（拡散されている）ことがわかる.



Leap-Frog スキーム

空間微分と時間微分の両方を中心差分で近似して，

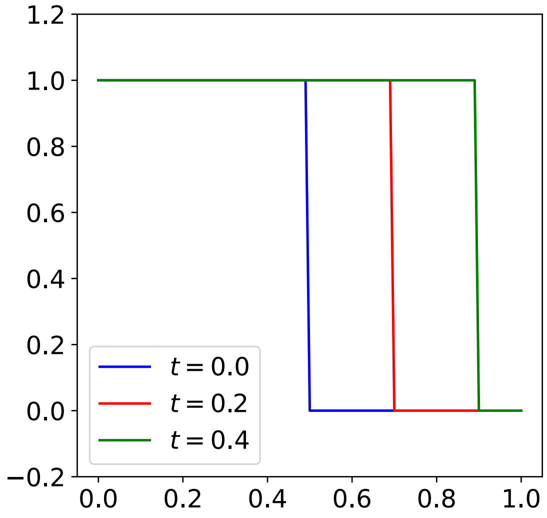
$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

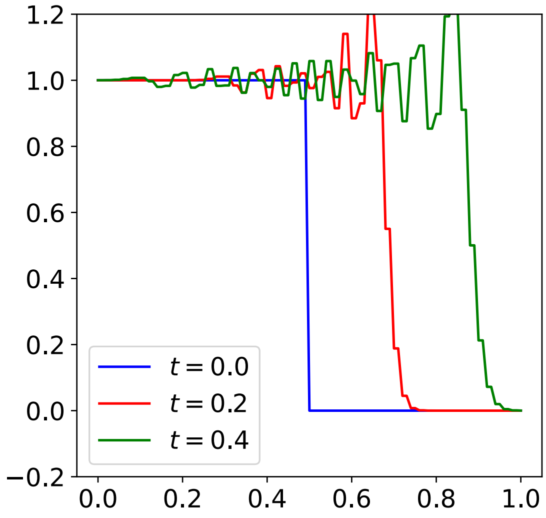
として計算をする.
von Neumannの安定性解析では$\nu^2 \leq 1$のとき

$$|g|^2 = 1$$

となり，これは**中立安定**と呼ばれる方法.
計算した時の時間発展の様子は下図.

左図は$\Delta t = 0.01$，右図は$\Delta t = 0.005$として計算をした.





Lax-Wendroff スキーム

Taylor展開より

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_j^n + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_j^n + O(\Delta t^3)$$

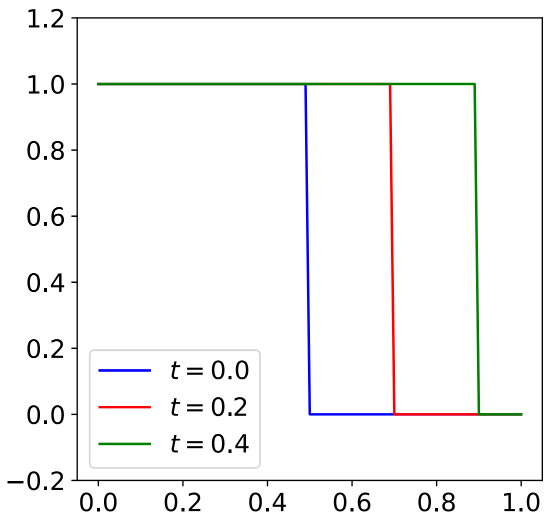
$u_t = -cu_x, u_{tt} = c^2 u_{xx}$を代入して，空間微分を中心差分で置き換えて

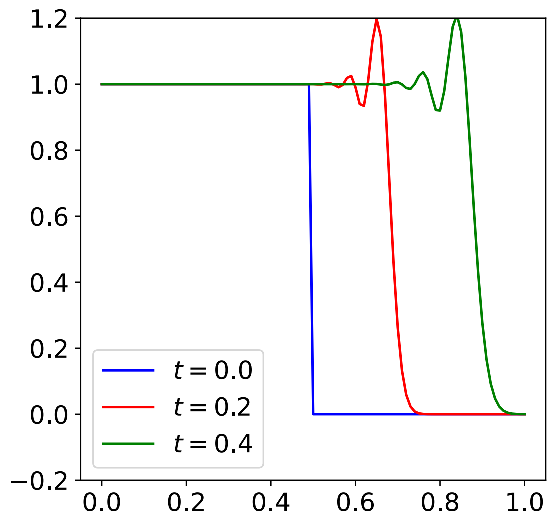
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

で計算される.
von Neumannの安定性解析では

$$|g|^2 = \{1 - \nu^2(1 - \cos\theta)\}^2 + \nu^2 \sin^2\theta$$

時間発展の様子は下図.
左図は$\Delta t = 0.01, \nu = 1.0$，右図は$\Delta t = 0.005, \nu = 0.5$である.





2段階Lax-Wendroff スキーム

1. (step1)
   時刻$n+1/2$，位置$j+1/2$でのuを計算する：

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}}{\Delta t/2} + c\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

2. (step2)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0$$

   で計算される．線型方程式に対しては元のLax-Wendroffと同じ結果を返す．
   また，安定性についても同じである．

MacCormackスキーム

2段階Lax-Wendroffスキームの一種．
特に非線形問題を解く際に有用．

1. (予測段階)

$$\overline{u}_j = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

2. (修正段階)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left[(u_j^n + \overline{u}_j) - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{u}_j - \overline{u}_{j-1})\right]$$

   これも，線型方程式ではLax-Wendroffスキームと同じ結果を返す．

1次精度風上差分法

(upwind difference scheme)

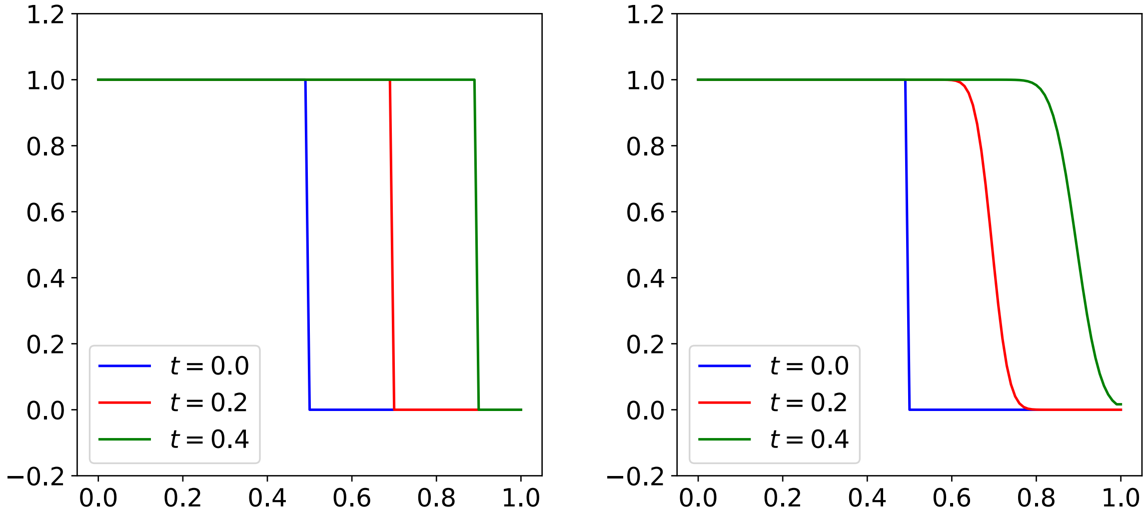
空間方向に後退差分，時間方向に前進差分を考えることで，

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

von Neumannの安定性解析では

$$|g|^2 = (1 - \nu + \nu\cos\theta)^2 + (-\nu\sin\theta)^2$$

計算結果は下図．
左はCourant数1，右はCourant数0.5で計算を行った．



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$t = 0.0$
$t = 0.2$
$t = 0.4$
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$t = 0.0$
$t = 0.2$
$t = 0.4$