$\boxed{\text{NewTH2-2}}$ [大阪大 2005]

図 1 のように，鉛直に立てられている断面積 S の十分に長いシリンダー内に，なめらかに動く質量 M のピストンがある．これらは断熱材でできており，外側は真空である．ピストンは，シリンダーの底面から高さ d の位置に，初めは固定されている．ピストンの下のシリンダー内には，単原子分子からなる 2 種類の理想気体 A，B が均一に混ざって入っており，絶対温度 T の熱平衡状態になっている．ピストンのすぐ下には，A の分子だけが抵抗なく通り抜けられるフィルターが，シリンダーに固定されている．フィルターの厚さは無視できるものとする．以下の文中の $\boxed{}$ に適切な数式を書き入れよ．ただし，重力加速度の大きさを g とし，重力はピストンのみにはたらくとする．

まず，A，B それぞれが壁に及ぼす圧力 p_{A}，p_{B} を，理想気体の分子運動から考えてみよう．圧力は多数の気体分子が容器の壁に衝突することで生じる．この衝突は完全弾性衝突であるとして，質量 m_{A} の A の分子が速度 $\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$ でピストンに衝突して力を及ぼす場合を考える．鉛直上向きに z 軸をとる．ピストンが 1 個の分子から 1 回の衝突で受ける力積の z 成分は，$\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$ の z 成分 $v_{\mathrm{A}z}$ を用いると，$\boxed{\text{ア}}$ と表される．また，この分子が時間 t の間にピストンに衝突する回数は，$\boxed{\text{イ}}$ と表される．分子の速度は，1 つ 1 つの分子によっていろいろな値をとる．そこで，シリンダー内の A の全分子数を N_{A} とすると，A の全分子がピストンに及ぼす平均の力は $\boxed{\text{ウ}} \times \left\langle {v_{\mathrm{A}z}}^2 \right\rangle$ と書ける．ここで，$\left\langle {v_{\mathrm{A}z}}^2 \right\rangle$ は $v_{\mathrm{A}z}$ の 2 乗の平均を表す．気体分子の運動に方向による差はないので，$\left\langle {v_{\mathrm{A}z}}^2 \right\rangle$ は，$\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$ の大きさ v_{A} を用いて書き直すことができる．よって，圧力は $p_{\mathrm{A}} = \boxed{\text{エ}} \times \left\langle {v_{\mathrm{A}}}^2 \right\rangle$ となる．同様にして，B の分子の質量，速さ，シリンダー内の全分子数をそれぞれ m_{B}，v_{B}，N_{B} とすると，$p_{\mathrm{B}} = \boxed{\text{オ}} \times \left\langle {v_{\mathrm{B}}}^2 \right\rangle$ である．p_{A}，p_{B} のことを，A，B の分圧と呼ぶ．A，B 合わせた気体全体の圧力は分圧の和になっている．ここで，ボルツマン定数を k とすると，分子 1 個あたりの平均の運動エネルギーは $\dfrac{3}{2}kT$ なので，$\dfrac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{B}}}$ は，分子の速さや質量によらず，$\boxed{\text{カ}}$ と書ける．

次に，ピストンの固定を外した．すると，ピストンは上方へ動き，最初の位置から h だけ上方でピストンの速さが 0 になった．その瞬間に，図 2 のようにピストンを固定した．ピストンの移動に伴って A がピストンにする仕事は，ピストンの力学的エネルギーの変化に一致する．これより，A がピストンにした仕事は $\boxed{\text{キ}}$ である．

しばらくすると，A，B ともに温度 T' の熱平衡状態になった．この状態を熱力学の第 1 法則を用いて考えよう．温度 T' は A，B 合わせた気体全体の内部エネルギーの変化に着目すると，$T' = \boxed{\text{ク}} \times Mgh + T$ と表される．また，ピストンの固定を外してから温度が T' となるまでに B が得た熱量 Q_{B} は，B の内部エネルギーの変化に着目し，T と T' を含んだ式で表すと，$\boxed{\text{ケ}}$ と求まる．このとき，A が得た熱量 Q_{A} は，$\boxed{\text{コ}}$ である．

最後に，この熱平衡状態での圧力について考えてみよう．A，B それぞれの分圧を ${p_{\mathrm{A}}}'$，${p_{\mathrm{B}}}'$ とする．$\boxed{\text{カ}}$ で $\dfrac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{B}}}$ を求めた考え方を，フィルターの下のシリンダー内の分子について適用すると，${p_{\mathrm{A}}}'$ と ${p_{\mathrm{B}}}'$ の圧力の比は，$\dfrac{{p_{\mathrm{A}}}'}{{p_{\mathrm{B}}}'} = \boxed{\text{サ}} \times \dfrac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{B}}}$ と表される．また，この状態ではフィルターの上下に圧力差が生じて

いる．下の圧力は上の圧力に比べて $p_{\mathrm{B}} + \boxed{\quad シ \quad} \times Q_{\mathrm{B}}$ だけ大きくなっている．