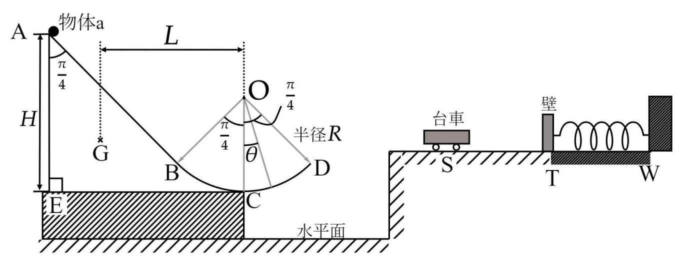
NewTH1-3 [京都大]

次の文を読んで，空欄に適した式を記せ．必要であれば三角関数の公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を用いること．

水平面上に質量が十分に大きい直方体の台（右図の斜線部）があり，その台上に，側面が ABCE で表される質量 M のすべり台を置いた．AB は直線であり，BC は半径 R の円弧である．すべり台の先端（点 C）には，図のように質量の無視できる半径 R の円弧 CD の板が取り付けられており，すべり台と円弧 CD は剛体として一体となって動く．すべり台と円弧 CD の厚み（図では紙面と垂直な方向の長さ）は考えないものとする．また，半径 OB と OC，および OC と OD のなす角度はそれぞれ $\dfrac{\pi}{4}$ である．直方体の台と水平面の間，およびすべり台と直方体の間には摩擦力が働き，水平方向には動かないものとする．



点 A は直方体の台の上面から高さ H の位置にある．A から，大きさの無視できる質量 m の物体 a が斜面をすべり落ち，半径 R の円弧 BCD の区間を通って点 D から空中に放出された．$H > R$ とし，斜面 AB および円弧 BCD はなめらかであるとする．また，重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視できるものとする．

問 1　物体 a が円弧 CD を通過するとき，すべり台（ABCE の部分）が点 C を中心として回転し，浮き上がるかどうかを考えよう．

まず，物体 a が円弧 CD に及ぼす力による点 C のまわりの力のモーメントを計算する．物体 a が半径 OC から円弧 CD の方向に測って角度 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ の位置にあるとき，物体 a の速度の大きさを H, R, g, θ を用いて表すと $\boxed{\quad(1)\quad}$ となる．また，物体 a が円弧に及ぼす力の大きさを H, R, g, θ, m を用いて表すと $\boxed{\quad(2)\quad}$ となり，

$$\theta = \boxed{\quad(3)\quad}$$

の位置で最大となる．点 C のまわりの力のモーメントは，右回り（時計回り）を正とすれば，H, R, g, θ, m を用いて $\boxed{\quad(4)\quad}$ と表され，

$$\theta = \boxed{\quad(5)\quad}$$

の位置で最大となる．

一方，すべり台の重心の位置は図中の点 G であり，点 G と点 C の水平距離を L とする．すべり台の質量による点 C のまわりの力のモーメントは，左回り（反時計回り）を正とすれば MgL となるの

で，すべり台が浮き上がらない条件は,

$$MgL \geqq \boxed{\quad (6) \quad} \;((4)\text{ の最大値})$$

で与えられる．

問 2　物体 a は点 D で空中に放出された後，点 D と同じ高さの水平な床面上においてある，大きさが無視できる質量 m の台車に点 S で衝突した．点 D と点 S の距離を H, R を用いて表すと $\boxed{\quad (7) \quad}$ となる．

物体 a は点 S で台車と完全非弾性衝突し，衝突後一体となり質量 $2m$ の物体 b として床面の上を水平方向に動いた．ただし，点 T まで床はなめらかであり，台車と床との間に摩擦力は働からないものとする．そのときの物体 b の速度の大きさ V は，H, R, g を用いて,

$$V = \boxed{\quad (8) \quad}$$

となる．

物体 b はばねのついた質量 m の壁に完全非弾性衝突し，物体 b と壁は一体となって，質量 $3m$ の物体 c として動き出した．衝突前のばねの長さは自然の長さであった．衝突直後の物体 c の速度の大きさ U は，V を用いて表すと $\boxed{\quad (9) \quad}$ となる．

物体 c が動き出した後，TW の区間内では質量 $3m$ の物体 c と床面の間に摩擦力が働くものとし，そのときの静止摩擦係数 μ_0，動摩擦係数は μ である．物体 b が壁に衝突してから，物体 c が最初に速度 0 となったときのばねの縮み量を $\mathit{\Delta} l$ とおく．ばね定数を k とすると，$\mathit{\Delta} l$ は U, m, g, μ, k を用いて $\boxed{\quad (10) \quad}$ となる．また，ばねが $\mathit{\Delta} l$ だけ縮んだ位置から再び動き出さないための条件式は,

$$k\mathit{\Delta} l \leqq \boxed{\quad (11) \quad}$$

となる．