

図 1 に示すような、球状の惑星 Q の中心 O を通るまっすぐな細い穴を考える。この穴に沿って O を原点とする x 軸をとる。図 1 で穴の下端と上端の x 座標の値は、それぞれ $-R$ と R である、穴の占める体積は惑星 Q の体積に比べて無視することができ、惑星 Q の質量 M は $\frac{4\pi\rho R^3}{3}$ であるとする。ただし、 ρ は惑星 Q の密度で一定であり、 R は惑星 Q の半径である。また、惑星 Q には大気がなく自転していないものとする。万有引力定数を G とし、次の問いに M を用いずに答えよ。

- (1) x 軸上の位置 $x \geq R$ にある質量 m の物体 A に働く力 f と、力 f による位置エネルギー U (無限遠方を基準とする) を答えよ。ただし、 x 軸の正の向きにはたらく力の符号を正とする。
- (2) 惑星 Q の表面 ($x = R$) から x 軸の正の向きに A を速さ v_0 で発射して、 $x = 3R$ の位置まで到達させる。このために必要な最小の初速度の大きさ v_0 を求めよ。
- (3) A が穴の中の位置 x ($-R < x < R$) にある場合に、惑星 Q から受ける力 f を考える。O を中心とする半径 $|x|$ の球内の質量を M' とすると、力 f は惑星中心 O に集中した質量 M' から A が受ける万有引力に等しい。質量 M' と力 f を求めよ。ただし、 f については $0 \leq x < R$ と $-R < x < 0$ の場合に分けて答えよ。
- (4) A にはたらく力 f を x の関数として図 2 のグラフに表せ。グラフには $x = \pm R$ の位置での f の値も記入せよ。
- (5) 惑星 Q の表面から A を初速度 0 で穴に落とした場合に、A が惑星表面から中心 O に最初に達するまでの時間 t_1 と、中心 O における速さ v_1 を求めよ。
- (6) A を惑星中心 O から x 軸の正の向きに速さ v_2 で発射し、惑星 Q の表面を通り越して $x = 3R$ の位置まで到達させる。このために必要な最小の初速度の大きさ v_2 を求めよ。