

図のように、地球の中心 O を通り、地表のある地点 A と地点 B とを結ぶ細長いトンネル内における小球の直線運動を考える。地球を半径 R 、一様な密度 ρ の球とみなし、万有引力定数を G として、次の問いに答えよ。なお、地球の中心 O から距離 r の位置において、小球が地球から受ける力は、中心 O から距離 r 以内にある地球の部分の質量が中心 O に集まったと仮定した場合に、小球が受ける万有引力に等しい。ただし、地球の自転と公転の影響、トンネルと小球の間の摩擦および空気抵抗は無視するものとし、地球の質量は小球の質量に比べて十分に大きいものとする。

I 質量 m の小球を地点 A から静かにはなしたときの運動を考える。

- (1) 小球が地球の中心 O から距離 r ($r < R$) の位置にあるとき、小球にはたらく力の大きさを求めよ。
- (2) 小球が運動を開始した後、初めて地点 A に戻ってくるまでの時間 T を求めよ。

II 同じ質量 m をもつ 2 つの小球 P , Q の運動を考える。時刻 0 には小球 P を、時刻 t_1 には小球 Q を同一の地点 A で静かにはなしたところ、2 つの小球は OB の中点 C で衝突した。ここで 2 つの小球の間の反発係数を 0 とし、衝突後、2 つの小球は一体となって運動するものとする。ただし、 t_1 は (2) で求めた時間 T より小さいものとする。

- (1) t_1 を T を用いて表せ。
- (2) 2 つの小球 P , Q が衝突してから初めて中心 O を通過するまでの時間を T を用いて表せ。

III II と同様に、時刻 0 に小球 P を、時刻 t_1 に小球 Q を同一の地点 A で静かにはなした。ただし、2 つの小球の間の反発係数を e ($0 < e < 1$) とする。

- (1) 2 つの小球が最初に衝突した後、小球 P は地点 B に向かって運動し、地球の中心 O から距離 d の点 D において、中心 O に向かって折り返した。このときの d の値を反発係数 e および地球の半径 R を用いて表せ。
- (2) 小球 P と小球 Q が 2 回目に衝突する位置を求めよ。
- (3) その後 2 つの小球は衝突を繰り返した。十分に時間が経過した後、どのような運動になるか答えよ。