Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

Universidad Autónoma Metropolitana

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Hacia una Generalización de la Categoría de Módulos de Cocientes

TESIS QUE PRESENTA:

M. en C. Juan Carlos Cruz González

ASESOR:

Dr. Rogelio Fernandez-Alonso González

10 de febrero de 2023 CDMX, México

Índice general

Introducción

El primer capitulo 1 (preliminares) tiene como único objetivo que este trabajo sea lo más autocontenible posible, además de contener la notación y terminología que usaremos a lo largo del texto sobre Copos, retículas, anillos, módulos y el lenguaje categórico. Ahora, si A denota un anillo asociativo con unidad, entonces A-**Mod** denotará la categoría de todos los A-módulos izquierdos. En el capitulo 2 que lleva por nombre **Teorías de torsión y preradicales** presentamos algunos conceptos y resultados básicos sobre preradicales y teorías de torsión. Para más detalle, ver [5], y [10]. Un *preradical* sobre un anillo A es una asignación $\sigma : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ tal que para cada $M \in A$-**Mod**, $\sigma(M) \leq M$ y para cada homomorfismo $f : M \to N$, $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$. Por lo que, σ puede ser considerardo como un subfuntor del funtor identidad sobre de A-Mod. Por simplicidad, a veces escribiremos σM en lugar de $\sigma(M)$. A- pr denota la colección de todos los preradicales sobre A. Los preradicales preservan sumas directas Preradicals, es decir, para cada familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de A-módulos izquierdos tenemos:

$$\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha)$$

Hay un orden parcial natural sobre A-pr dado por $\sigma \preceq \tau$ si $\sigma(M) \leq \tau(M)$ para cada $M \in A$-Mod. De hecho, A-pr es una *gran* retícula (e.d., una retícula que no necesariamente es un conjunto) con ínfimo y supremo para cada $\sigma, \tau \in A$-pr, descritos como sigue, para cada $M \in R$-**Mod**:

$$(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$$

$$(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$$

El ínfimo y el supremo pueden ser descritos de manera similar para una subcolección arbitraria de A-pr, considerando el hecho que, para cada $M \in A$-**Mod** una suma, o una intersección de submódulos M la cuales estan indexados por una clase pueden ser indexados por un conjunto. Por lo tanto A-pr es una gran retícula completa. Denotaremos como 0_A y 1_A a los elementos; mínimo y máximo de A-pr, respectivamente.

Podemos describir los siguientes preradicales dando una transformación natural entre funtores en A-**Mod**. Sea $H : A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ un endofuntor sobre A-**Mod**. Consideremos $\gamma : 1_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \to H$ una transformación natural, donde $1_{A\text{-Mod}}$ es el funtor identidad sobre A-**Mod**. Sea $\mathrm{Ker}(\gamma)$ un preradical definido como $\mathrm{Ker}(\gamma)(M) = \mathrm{Ker}\ \gamma_M$, para cada $M \in A$-**Mod**. Ahora consideremos $\delta : H \to 1_{A\text{-Mod}}$ una transformación natural y sea $\mathrm{Im}(\delta)$ el preradical definido por $\mathrm{Im}(\delta)(M) = \mathrm{Im}\ \delta_M$ para cada $M \in A$-**Mod**.

Tenemos dos operaciones binarias, uno llamado *producto*, y lo denotamos por "$\cdot$", y el otro llamado *coproducto*, denotado por ":", son definidas en A-pr. Para cada $\sigma, \tau \in A$-*pr* y si $M \in A$-**Mod**:

$$(\sigma \cdot \tau)(M) = \sigma(\tau(M))$$
$$(\sigma : \tau)(M) \text{ es tal que } (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M))$$

Por lo general, escribimos $\sigma\tau$ en lugar de $\sigma \cdot \tau$. Estas operaciones son asociativas y preservan el orden. Es decir, para cada $\sigma, \tau \in A$-pr tenemos:

$$\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma,\ \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$$

Cada $\sigma \in A$ -pr se le puede asociar dos clases de A-módulos: $\mathbb{T}_\sigma = \{M \in A\text{-Mod} \mid \sigma(M) = M\}$, el cual es una *clase de pretorsión*, e.d., es cerrado bajo epimorfismos, suma directas, y $\mathbb{F}_\sigma = \{M \in A\text{-Mod} \mid \sigma(M) = 0\}$, el cual es una *clase libre de pretorsion*, e.d., es cerrado bajo monomorfismos y productos directos. Notemos que si $\sigma \preceq \tau$ entonces $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{F}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma$.

Un preradical σ sobre A es *idempotente* sí $\sigma\sigma = \sigma$, mientras que σ se llama *radical* sí $(\sigma : \sigma) = \sigma$. Notemos que σ es un radical si,y solo si, para cada $M \in A$- **Mod** tenemos que $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$. Diremos que σ es un preradical *exacto izquierdo* si lo es como funtor. σ es un *t-radical* si preserva epimorfismos, o equivalentemente, si para cada $M \in A$- **Mod** tenemos que $\sigma(M) = \sigma(A)M$. Hay una correspondencia biunívoca entre preradicales idempotentes y clases de pretorción, y entre radicales y clases libres de pretorsión. Hasta antes de este trabajo existían únicamente dos conceptos de filtros, a saber, **filtros lineales** y **filtros de Gabriel** ambos constan de una familia de ideales izquierdos de un anillo A y que satisfacen ciertas condiciones. Hay una correspondencia unno a uno entre los filtros lineales y los preradicales exactos izquierdos dada por:

$$\begin{aligned} &r \mapsto \mathcal{L}_r = \{{}_A I \leq A \mid A/I \in \mathbb{T}_r\} \\ &\mathcal{L} \mapsto r_{\mathcal{L}}, \text{ donde } r_{\mathcal{L}}(M) = \{m \in M \mid \text{ existe } I \in \zeta \text{ tal que } Im = 0\}. \end{aligned}$$

Todo filtro de Gabriel es filtro lineal. Si r es un radical exacto izquierdo entonces su correspondiente filtro lineal $\mathcal{L}_r$ es un filtro de Gabriel, e inversamente, si $\mathcal{G}$ es un filtro de Gabriel entonces su correspondiente preradical exacto izquierdo $r_{\mathcal{G}}$ es un radical. Entonces, existe una correspondencia uno a uno entre los radicales exactos izquierdos y los filtros de Gabriel. Más información sobre filtros de Gabriel se puede encontrar en [6].

El capitulo 3 es muy importante, pues ahí abordamos lo que dio origen a esta tesis. Sabemos que dado un dominio entero A, se denomina campo de Fracciones de A al mínimo campo que lo contiene. Este campo siempre existe. Un ejemplo muy sencillo de esto, es $\mathbb{Q}$ que es el campo de fracciones de $\mathbb{Z}$. En el proceso de la construcción del campo de fracciones de $\mathbb{Z}$ se observa que dicha construcción, solo depende de tres cosas: (i) la estructura de anillo conmutativo de $\mathbb{Z}$, (ii) el conjunto $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$, y (iii) S cumple con lo siguiente: $1 \in S$ y para cada $x, y \in \mathbb{Z}$, $xy \in S$. Esto último no lleva a la definición bien conocida de conjunto multiplicativo sobre un anillo A arbitrario y consta de un conjunto $S \subseteq A$ que satisface (iii). Dado que (i), (ii), (iii) no son exclusivos del anillo $\mathbb{Z}$, entonces podemos considerar un anillo conmutativo arbitrario A junto con un subconjunto multiplicativo S de A, usando el mismo proceso se obtiene un anillo $\left[S^{-1}\right] A$, llamado anillo de fracciones. De nueva cuenta, analizando ciertas propiedades de este anillo, se prueba que este anillo queda totalmente determinado por un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow \left[S^{-1}\right] A$ que cumple lo siguiente: (a) $\varphi(S) \subseteq U\left(\left[S^{-1}\right] A\right)$, (b) Los elementos de $\left[S^{-1}\right] A$ son de la forma $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ con $s \in S$, $a \in A$, (c) $\mathrm{Nu}(\varphi) = \{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sa = 0\}$. Las últimas tres propiedades (a), (b) y (c) nos permiten saltar al nivel de anillos no conmutativos como sigue; sea A anillo no conmutativo y S conjunto multiplicativo de A, se define un anillo de fracciones de A como un anillo $\mathfrak{A}$, junto con un homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow \mathfrak{A}$ que cumplen las propiedades (a), (b) y (c). Se demuestra que existe un anillo de fracciones de A, y este es único salvo isomorfismos. Más aún $\left[S^{-1}\right] A$ existe si y solo si S satisface dos propiedades: (S_1) Para cada $a \in A$, $s \in S$, se tiene que $As \cap Sa = \emptyset$, (S_2) Para cada $a \in A$, $s \in S$ con $as = 0$, implica que existe $t \in S$ tal que $ta = 0$. Mas aun, $\left[S^{-1}\right] A \cong S \times A/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por: $(s, a) \sim (t, b)$ si existen $c, d \in A$ tales que $ca = db$ y $cs = dt \in S$. Se dice que un subconjunto S de A es un conjunto denominador (izquierdo) de A, si cumple con S_1 y S_2, a la primera condición se llama condición de Ore.

Ahora, si consideramos que S es un conjunto denominador y dado que φ es homomorfismo de anillos, entonces $\left[S^{-1}\right] A$ se puede ver como un A-módulo derecho, así, $\left[S^{-1}\right] A \cong \left[S^{-1}\right] A \otimes A$ es A-módulo izquierdo. De manera que, podemos dar un salto más, esta vez a la categoría A-**Mod**, así definimos para cada $M \in A$-**Mod** su módulo de fracciones de M, como $\left[S^{-1}\right] M := \left[S^{-1}\right] A \otimes M$. Esta definición es completa en el sentido que es única salvo isomorfismo. Se demuestra que $\left[S^{-1}\right] M \cong S \times M/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por: $(s, m) \sim (t, n)$ si existen $c, d \in A$ tales que $cs = dt \in S$ y $cm = dn$.

Continuando con el análisis de este proceso se puede probar que $\left[S^{-1}\right]M$ es isomorfo al módulo

$$\varinjlim_{I\in\mathcal{G}} \operatorname{Hom}_A\left(I, \frac{M}{t(M)}\right),$$

donde $\mathcal{G}_\circ = \{I : I \text{ es ideal izquierdo de } A \text{ y } (I:a)\cap S \neq \emptyset, \text{ para cada } a\in A\}$ que sabemos que es un filtro de Gabriel y t es el radical asociado a $\mathcal{G}_\circ$. Esto último fue el motivo suficiente para pensar en la siguiente generalización de lo anterior. Consideremos un filtro de Gabriel $\mathcal{G}$, y para cada $M\in A$-**Mod**, se define

$$M_{(\mathcal{G})} := \varinjlim_{I\in\mathcal{G}} \operatorname{Hom}_A(I,M).$$

Una de sus principales propiedades es que $\left(M_{(\mathcal{G})}\right)_{(\mathcal{G})} \cong \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}$, donde t es el radical asociado al filtro de Gabriel $\mathcal{G}$. Si a M le aplicamos la definición mas de dos veces, todos serán isomorfos, es por esta razón que para cada $M\in A$-**Mod**, se define su *módulo de cocientes asociado al filtro de Gabriel* $\mathcal{G}$ como:

$$M_{\mathcal{G}} := \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}.$$

Estos objetos conforman una categoría llamada **Categoría de Módulos Cocientes**. Observe que en cada salto, es una generalización del eslabón previo.

Siguiendo este camino, el proyecto pretende dar una generalización de esta categoría y el capitulo 4 es dedicado exclusivamente a esta generalización. En este capítulo hemos introducido un concepto nuevo de filtro al que hemos llamado **filtro de continuidad**. Un filtro de continuidad ζ sobre un anillo A consiste en una colección de ideales izquierdos de A tales que (1) $A\in\zeta$ y (2) si $I,J\in\zeta$ y $f\in\operatorname{Hom}_A(I,A)$, entonces $f^{-1}(J)\in\zeta$. En la sección de *Filtros de continuidad* nuestro principal objetivo es mostrar la diferencias que existen entre este nuevo concepto con respecto a los de filtros lineales y de Gabriel, es decir, asegurarnos que no un filtro de continuidad no es equivalentes a ninguno de los filtros previos. De hecho con iniciamos como primer resultado el Teorema 4.1.2 en la que podemos notar que un filtro de continuidad es casi un filtro lineal, pero en realidad no hay relación de implicación entre ellos, los Ejemplos 4.1.3, 4.1.4 y 4.1.5 lo muestran. Sin embargo, todo filtro de Gariel es filtro de continuidad pero el reciproco no necesariamente se cumple. Tenemos casos en la que los tres conceptos coinciden como lo es cuando consideremos a los *anillo semisimples*, en un anillo auto-inyectivo todo filtro lineal es filtro de continuidad. La intersección de filtros de continuidad es un filtro de continuidad, de hecho, la Proposición 4.1.10 nos muestra que para cada filtro de continuidad podemos describir el filtro lineal más pequeño que lo contiene. En este mismo capitulo damos la clasificación de los filtros lineales, de Gabriel y de continuidad en un DIP con la finalidad de contrastar los conceptos, nos damos cuenta que en los DIPs los filtros de continuidad si tienen diferencias notable con respecto a un filtro lineal pero no tanto con los filtros de Gabriel, de hecho, se prueba que en un DIP los filtros de continuidad son un filtro de Gabriel o un filtro de Gabriel unión el ideal cero.En este mismo capitulo damos la clasificación de los filtros de continuidad en un producto finito de anillos que podríamos decir que es principal teorema de este capitulo y nos permitió clasificar los filtros de gabriel en los siguientes anillos: en un **anillo local uniserial**, en un **anillo conmutativo de ideales principales (AIP especial)**, en particular sobre las congruencias módulo n; $\mathbb{Z}_n$. Finalmente, para cada filtro de continuidad ζ de un anillo A y cada $M\in A$-**Mod** consideramos **su módulo cociente sobre el filtro** ζ como sigue:

$$M_{(\zeta)} := \varinjlim_{I\in\zeta} \operatorname{Hom}_A(I,M).$$

Resulta que $A_{(\zeta)}$ tiene estructura de anillo y $M_{(\zeta)}$ tiene estructura de $A_{(\zeta)}$-módulo izquierdo al igual que de A-módulo izquierdo, la función que permite darle estructura de A-módulo izquierdo a $M_{(\zeta)}$ es cuando consideramos el caso particular $M = A$ de los homomorfismos $\varphi_M : M \longrightarrow M_{(\zeta)}$ definidos como $m \to [(f_m, A)]$.

La asignación $F_\zeta : A$-**Mod** $\longrightarrow A_{(\zeta)}$-**Mod** dada por $F_\zeta(M) = M_{(\zeta)}$ es un funtor covariante exacto izquierdo, de hecho, si consideramos el funtor olvidadizo $F'_\zeta : A_{(\zeta)}$-**Mod** $\longrightarrow A$-**Mod** que manda cada $A_{(\zeta)}$-módulo izquierdo a si mismo pero considerado con la estructura de A-módulo izquierdo y tomamos el funtor $L_\zeta = F'_\zeta \circ F_\zeta$, entonces se puede demostrar que la clase $\{\varphi_M\}$ conforman una transformación natural $\varphi : \mathrm{id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \to L_\zeta$. Ahora, para cada filtro de continuidad ζ existe un preradical exacto izquierdo (idempotente) asociado r_ζ, el cual es definido como:

$$r_\zeta(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M^\zeta) = \{m \in M : \text{ existe } I \in \zeta \text{ tal que } Im = 0\}, \text{ con } M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod}).$$

En otras palabras, $r_\zeta = \mathrm{Nu}(\varphi^\zeta)$, donde $\varphi^\zeta : \mathrm{id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \longrightarrow L_\zeta$ es la transformación natural asociado a ζ. Este preradical tiene asociado al filtro lineal $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \left\{I \in \mathcal{I}(A) : A/I \in \mathbb{T}_{r_\zeta}\right\}$ y de hecho es justo el filtro lineal menor que contiene a ζ, es decir, $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \mathcal{L}(\zeta)$. En general, $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \mathcal{L}(\zeta)$ si y solo si ζ es filtro lineal, y un caso que cumple eso son los **AIP**'s especiales, en particular, las congruencias módulo n ($\mathbb{Z}_n$). Finalmente, si nos fijamos únicamente en los filtros de continuidad con elemento menor $\cap\zeta$, resulta que este elemento menor es (A, A)-bimódulo y nos permite describir como A-modulo izquierdoa los módulos iterados de cocientes sobre dicho filtro ζ para cada $M \in A\text{-}\mathbf{Mod}$, concretamente tendremos:

$$M_{(n)} \cong \mathrm{Hom}_A\left(T_n, M\right), \text{ donde } T_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \cap\zeta$$

$M_{_{(1)}} := M_{_{(\zeta)}}$, si $n = 1$ y $M_{_{(n)}} := \left[M_{_{(n-1)}}\right]_{_{(\zeta)}}$, si $n > 1$. Por lo tanto, en este caso tendremos que los módulos de cocientes sobre este tipo de filtros de continuidad ζ con elemento mínimo conmutan con productos, esto es, si $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es una familia de A-módulos izquierdos. Entonces:

$$\left(\prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right)_{(\zeta)} = \prod_{\lambda\in\Delta} (M_\lambda)_{(\zeta)}.$$

Aún más, si consideramos un anillo local uniserial podemos describir los anillos cocientes sobre cada filtro de continuidad con elemento mínimo. Y si consideramos un anillo auto-inyectivo A y L un ideal de A, entonces $L_{(\zeta)}$ es isomorfo a un ideal de $A_{(\zeta)}$. Culminamos este trabajo con el capitulo 7 5 en la que hablamos sobre posibles lineas de investigación y que por falta de tiempo no se indago mucho en ellas, un ejemplo de esto es la una extensión del concepto de filtro de continuidad sobre cualquier módulo izquierdo.

Capítulo 1

Preliminares

Con la finalidad de que el presente trabajo sea lo más autocontenido posible, en este primer capítulo se presentan las secciones de anillos, módulos y teoría de categorías. En cada una de las secciones se presentan sus respectivas definiciones, propiedades y resultados básicos. Además de que gran parte de la notación y terminología que se usarán en lo subsecuente están descritos en este apartado. Cabe señalar que se suponen conocidos los conceptos y resultados presentados en cada sección, es decir, por lo general omitimos la demostración de los resultados presentados pues son considerados de dominio común, o bien, podrán ser consultados en alguna de las fuentes citadas en la bibliografía.

1.1. Anillos

En general daremos por conocida la teoría básica de anillos, sin embargo en este apartado se escribirán algunos resultados que usaremos más adelante y con la única finalidad de tenerlos a la mano cuando se haga mención de ciertos resultados o conceptos en este rubro. Dejemos en claro que en todo el texto estaremos considerando que los anillos tienen unidad.

Definición 1.1.1. *Un anillo es una quinteta* $(A, +, \cdot, 0, 1_A)$ *donde* $+, \cdot : A \times A \longrightarrow A$ *operaciones binarias y cumplen:*

(1) $(A, +, 0)$ *es un grupo abeliano con neutro* 0.

(2) $(A, \cdot, 1_A)$ *con unidad* 1_A.

(3) $\cdot$ *se distribuye sobre* $+$*, por los ambos lados, es decir se cumple*

$$(3a) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ \ \forall x, y, z \in A \text{ (Axioma de distributividad por la izquierda)}$$

$$(3b) \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + x \cdot z, \ \ \forall x, y, z \in A \text{ (Axioma de distributividad por la derecha)}$$

Si se cumple que para todo $x, y \in A$*,* $x \cdot y = y \cdot x$*, entonces diremos que* A *es un anillo conmutativo. En general, denotaremos un anillo únicamente por* A *y su unidad por* 1.

Definición 1.1.2. *Sea* A *un anillo,* $a \in A$ *y* $S, I \subseteq A$*. Diremos que:*

- S *es un* ***subanillo*** *de* A *si y sólo si* $(S, +|_{S\times S}, \cdot|_{S\times S}, 0, 1_A)$ *es un anillo.*
- I *es un* ***ideal izquierdo*** A *si y sólo si* $(I, +)$ *es un subgrupo de* $(A, +)$ *y para cada* $a \in A$*,* $x \in I$ *se tiene que* $ax \in I$.
- I *es un* ***ideal derecho*** A *si y sólo si* $(I, +)$ *es un subgrupo de* $(A, +)$ *y para cada* $a \in A$*,* $x \in I$ *se tiene que* $xa \in I$.

- *I es **ideal bilateral** (o simplemente **ideal**) si y sólo si es ideal izquierdo y derecho. Es decir, para cada $a, b \in A$, $x \in I$ se tiene que $axb \in I$.*

Denotaremos por $\mathcal{I}(A)$ al conjunto de todos los ideales izquierdos de A.

Teorema 1.1.3. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ anillos con unidad.*

(i) Si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ I_i es ideal izquierdo de A_i, entonces $I = \prod_{i=1}^{n} I_i$ es ideal izquierdo de A.

(ii) I es ideal izquierdo de A si y solo si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe I_i ideal izquierdo de A_i tal que $I = \prod_{i=1}^{n} I_i$, más aún, $I_i = \pi_i(I)$.

Proposición 1.1.4. *Sea A un anillo y $x \in A$. El conjunto $\langle x \rangle = Ax := \{ax : a \in A\} \in \mathcal{I}(A)$.*

Definición 1.1.5. *El ideal izquierdo Ax se llama el **ideal izquierdo generado** por x.*

Definición 1.1.6. *Sea A un anillo y $x \in A$.*

- *x es **invertible por la izquierda (o unidad por la izquierda)** si existe $y \in A$, tal que $yx = 1$.*
- *x es **invertible por la derecha (o unidad por la izquierda)** si existe $y \in A$, tal que $xy = 1$.*
- *x es **invertible (o unidad)** si es invertible por la izquierda y por la derecha.*

Proposición 1.1.7. *Sea A un anillo y $x \in A$. x es invertible si y solo si existe $y \in A$ tal que $yx = 1 = xy$.*

Denotaremos como $U(A)$ al conjunto de todos lo elementos invertibles A que tienen inverso. Y denotaremos como $A^* = A \setminus \{0\}$.

Definición 1.1.8. *Sea A un anillo y $x \in A^*$.*

- *x es un **divisor de cero por la izquierda** si existe $y \in A^*$, tal que $xy = 0$.*
- *x es un **divisor de cero por la derecha)** si existe $y \in A^*$, tal que $yx = 0$.*
- *x es un **divisor de cero** si lo es por la izquierda y derecha.*

Denotaremos como $\mathcal{D}(A)$ al conjunto de todos los divisores de cero del anillo A.

Definición 1.1.9. *Sea A un anillo.*

- *Si $\mathcal{D}(A) = \emptyset$, entonces diremos que A es un **dominio entero**.*
- *Si para cada $I \in \mathcal{I}(A)$, existe $x \in A$ tal que $I = Ax$ (es decir, es generado por un elemento), entonces diremos que A es un **dominio de ideales principales** (DIP).*
- *A satisface la **condición de cadena ascendente** (CCA) en sus ideales izquierdos (o derechos), si para todo $I_1, I_2, \ldots$ tales que $I_1 \subseteq I_2, \ldots,$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \leq m$, $I_k = I_m$. Se dice que A es **noetheriano por la izquierda** si satisface CCA en sus ideales izquierdos, **noetheriano por la derecha** si satisface CCA en sus ideales derechos y **noetheriano** si satisface CCA en sus ideales izquierdos y derechos.*

- *A satisface la **condición de cadena descendente** (CCD) en sus ideales izquierdos (o derechos), si para todo $I_1, I_2, \ldots$ tales que $I_1 \supseteq I_2, \ldots$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \leq m$, $I_k = I_m$. Se dice que A es **artiniano por la izquierda** si satisface CCD en sus ideales izquierdos, **artiniano por la derecha** si satisface CCD en sus ideales derechos y **artiniano** si satisface CCD en sus ideales izquierdos y derechos.*

Proposición 1.1.10. *Sea A un anillo, $I \in \mathcal{I}(A)$ y $u \in U(A)$. Entonces, $\langle u \rangle = A$, en particular podemos denotar $\langle 1 \rangle = A$, más aún si $u \in I$, entonces $I = A$.*

Introduciremos conceptos que hará símil con la divisibilidad en los enteros.

Definición 1.1.11. *Sea A un anillo y $a, b \in A$.*

(1) *a es un **divisor por la izquierda** de b o que b **multiplo por la derecha** de a si existe $x \in A$ tal que $ax = b$.*

(2) *a es un **divisor por la derecha** de b o que b es un **multiplo por la izquierda** de a si existe $x \in A$ tal que $xa = b$.*

(3) *a es **divisor bilateral** de b si lo es por ambos lados.*

(4) *Si A es conmutativo, entonces las definiciones $(1) - (3)$ coinciden, por lo que solo se dice que a es **divisor** de b o b es multiplo de a si existe $x \in A$ tal que $xa = b$ y se escribe $a|b$.*

(5) *Si A es conmutativo, $a|b$ y $b|a$, entonces decimos que a y b son asociados.*

Las afirmaciones sobre divisibilidad en un anillo conmutativo A se puede traducir en declaraciones sobre el ideal principal, como ejemplo de ello es la siguiente proposición.

Proposición 1.1.12. *Sea A un anillo conmutativo.*

(1) *$a|b$ si y solo si $(b) \subseteq (a)$.*

(2) *a y b Son asociados si y solo si $\langle a \rangle = \langle b \rangle$.*

(3) *$u \in U(A)$ si y solo si para cada $a \in A$, $u|a$.*

(4) *$u \in \mathrm{U}(A)$ si y solo si $\langle u \rangle = A$.*

(5) *Si $a = bu$ para algún $u \in U(A)$, entonces a y b son **asociados**.*

Definición 1.1.13. *Sea A un anillo conmutativo y $a, b, p \in A$.*

(1) *p es un **elemento primo** de A si y solo si $p|ab$ en A, entonces $p|a$ o $p|b$.*

(2) *b es **irreducible** si y solo si $a|b$ entonces $a \in U(A)$ o a es asociado con b.*

Teorema 1.1.14. *Sea D un DIP, entonces D satisface CCA y todo elemento que no es cero y no es unidad, puede ser escrito como producto de una cantidad finita de elementos irreducibles.*

Los ideales pueden ser clasificados según algunas propiedades muy especificas que se anuncian a continuación:

Definición 1.1.15. *Sea A un anillo un anillo conmutativo, sean $a, b \in A$ y $M, P, Q \in \mathcal{I}(A)$. Diremos que:*

(1) *P es un* ***ideal primo*** *de A si y sólo si, $P \neq A$ y si $ab \in P$, entonces $a \in P$ o $b \in P$.*

(2) *Q es un* ***ideal primario*** *de A si y solo si $Q \neq A$ y cada vez que $ab \in Q$, entonces $a \in Q$ o existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $b^m \in Q$.*

(3) *M es un* ***ideal máximo*** *de A si y sólo si $M \neq A$ y para todo $I \in \mathcal{I}(A)$ tal que $M \subseteq I \subseteq A$ entonces $I = M$ o $I = A$.*

(4) *Llamaremos* ***el radical del ideal*** *I al conjunto $\sqrt{I} := \{a \in A : a^n \in I, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.*

Lema 1.1.16. *Sea D un DIP y sean $I, J, M, P \in \mathcal{I}(D)$;*

(i) *P es ideal primo si y sólo si $P = \langle p \rangle$ para algún elemento primo $p \in D$.*

(ii) *M es un ideal máximo si y sólo si $M = \langle p \rangle$ para algún elemento irreducible $p \in D$.*

Lema 1.1.17. *Sea A un anillo conmutativo y $I, J \in \mathcal{I}(A)$, entonces:*

(i) $I + J := \langle i + j | i \in I, j \in J \rangle \in \mathcal{I}(A)$.

(ii) $\sqrt{I} \in \mathcal{I}(A)$.

Teorema 1.1.18. *Todo ideal máximo es un ideal primo.*

Corolario 1.1.19. *Sea D un DIP y $p \in D$ un elemento irreducible, entonces p es un elemento primo.*

Lema 1.1.20. *Sea A un anillo conmutativo y $Q \in \mathcal{I}(A)$. Si $\sqrt{Q}$ es in ideal primo, entonces $Q \neq A$, ademas si Q es un ideal primario, entonces $\sqrt{Q}$ es un ideal primo.*

Definición 1.1.21. *Sea D un dominio entero, diremos que D es un* ***dominio de factorización única*** *(DFU) si y sólo si para todo $r \in D^*$ y $r \notin U(D)$ existen $p_1, p_2, \ldots, p_t \in D$ elementos irreducibles, tales que $r = p_1 p_2 \cdots p_t$ y esta descomposición es única salvo asociados.*

Teorema 1.1.22. *Todo DIP es un DFU.*

Lema 1.1.23. *Sea A un DIP. Para todo $a, b \in A$ se cumplen las siguientes:*

(1) *Si $f \in \operatorname{Hom}_A(\langle a \rangle, A)$, entonces $f = 0$ ó f es inyectiva.*

(2) $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$

(3) $\langle ab \rangle = \langle a \rangle b$

Dem.
Sea $a, b \in A$ y $f \in \operatorname{Hom}_A(\langle a \rangle, A)$.

(1) Tenemos que $\operatorname{Im}(f) = \langle f(a) \rangle$. Supongamos que $f \neq 0$ y sean $xa, x'a \in \langle a \rangle$ tal que $f(xa) = f(x'a)$, se sigue que $xf(a) = x'f(a)$, en consecuencia $x = x'$, es decir, f es inyectiva.

(2) Veamos que $\langle a\rangle \langle b\rangle \subseteq \langle ab\rangle$. Sea $c \in \langle a\rangle \langle b\rangle$, existen $x_1a, \ldots, x_na \in \langle a\rangle$, $y_1b, \ldots, y_nb \in \langle b\rangle$ tales que

$$c = \sum_{j=1}^{n}(x_ja)(y_jb) = \sum_{j=1}^{n}(x_jy_j)(ab) = \left[\sum_{j=1}^{n} x_jy_j\right](ab) \in \langle ab\rangle$$

Por lo tanto, $\langle a\rangle \langle b\rangle \subseteq \langle ab\rangle$. Ahora, veamos que $\langle a\rangle \langle b\rangle \supseteq \langle ab\rangle$. Sea $\mu(ab) \in \langle ab\rangle$, entonce $\mu(ab) = (\mu a)(1b) \in \langle a\rangle \langle b\rangle$, lo cual muestra lo deseado.

En consecuencia, $\langle a\rangle \langle b\rangle = \langle ab\rangle$.

(3) Veamos que $\langle ab\rangle \subseteq \langle a\rangle b$. Sea $x(ab) \in \langle ab\rangle$, tenemos que $x(ab) = (xa)b \in \langle a\rangle b$.

Por lo tanto, $\langle ab\rangle \subseteq \langle a\rangle b$. Ahora, veamos que $\langle ab\rangle \supseteq \langle a\rangle b$. Sea $c \in \langle a\rangle b$, existe $x \in A$, tal que $c = (xa)b = x(ab) \in \langle ab\rangle$, eso muestra lo deseado.

En consecuencia, $\langle ab\rangle = \langle a\rangle b$

Q.E.D

Lema 1.1.24. *Sea A un DIP, $a, b, c \in A$, $d = \operatorname{mcd}(a, b)$ y $a', b' \in A$ tales que $a = da'$, $b = db'$. Las siguientes se cumplen:*

(a) *Si $d \in \mathrm{U}(A)$, y $a|bc$, entonces $a|c$.*

(b) $\operatorname{mcd}(a', b') \in \mathrm{U}(A)$.

(c) $(\langle b\rangle : a) = \langle b'\rangle$.

Dem.
(a) Supongamos que $d \in \mathrm{U}(A)$ y $a|bc$. Tenemos que

- Por el **Teorema de Bezout** existen $x, y \in A$ tales que $xa + yb = d$, y dado que $d \in \mathrm{U}(A)$, entonces $\left(d^{-1}x\right)a + \left(d^{-1}y\right)b = 1$.
- Existe $r \in A$ tal que $bc = ra$.

Así, $c = \left(cd^{-1}x\right)a + \left(cd^{-1}y\right)(cb) = \left(cd^{-1}x\right)a + \left(rd^{-1}y\right)a = \left(cd^{-1}x + rd^{-1}y\right)a$

Por lo tanto, $a|c$.

(b) Sea $u = \operatorname{mcd}(a', b')$. Existen $a'', b'' \in A$ tales que $a' = ua''$ y $b' = ub''$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a = da' = d(ua'') = (du)a'' \quad \wedge \quad b = db' = d(ub'') = (du)b''\\
&\Rightarrow \quad du|a,\ du|b \quad \Rightarrow \quad du|d \Rightarrow \quad \text{existe } v \in A \text{ tal que } d = (du)v\\
&\Rightarrow \quad uv = 1 \Rightarrow \quad u, v \in \mathrm{U}(A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{mcd}(a', b') = u \in \mathrm{U}(A)$.

(c) Veamos que $(\langle b\rangle : a) = \langle b'\rangle$.

($\subseteq$) Sea $r \in (\langle b \rangle : a)$. Tenemos que $ra \in \langle b \rangle$, es decir, existe $t \in A$ tal que $ra = tb$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad r(da') = t(db') \quad \Rightarrow \quad (ra' - tb')d = 0 \\ &\Rightarrow \quad ra' = tb' \quad \Rightarrow \quad a'|tb' \\ &\Rightarrow \quad a'|t, \;\; \text{por } (a) \text{ y } (b) \end{aligned}$$

Se sigue que existe $t' \in A$ tal que $t = a't'$, así $ra' = tb' = a't'b'$ por lo que $r = t'b'$, es decir, $r \in \langle b' \rangle$.

Por lo tanto, $(\langle b \rangle : a) \subseteq \langle b' \rangle$

($\supseteq$) Sea $r \in \langle b' \rangle$. Existe $s \in A$ tal que $r = sb'$, entonces $ra = (sb')(da') = (sa')(db') = (sa')b \in \langle b \rangle$.

Por lo tanto, $\langle b' \rangle \subseteq (\langle b \rangle : a)$

En consecuencia, $(\langle b \rangle : a) = \langle b' \rangle$.

Q.E.D

Proposición 1.1.25. *Sea A un dominio entero y consideremos la relación $a \sim b$ en A si y sólo si a, b son asociados. Entonces, $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Definición 1.1.26. *Sea D un dominio entero y $\sim$ una relación de equivalencia. Un **sistema completo de representantes de la relación** $\sim$ es un subconjunto $X \subseteq D$ tal que para todo $a \in D$ existe un único $x \in X$ tal que $a \sim x$.*

Definición 1.1.27. *Un anillo A es **uniserial izquierdo (derecho)** si sus ideales izquierdos (derechos) están totalmente ordenados por inclusión y diremos que es **uniserial** si los es por la izquierda y derecha.*

Definición 1.1.28. *Un anillo A es **local** si cumple las siguientes propiedades equivalentes:*

- *Tiene un único ideal izquierdo máximo.*
- *Tiene un único ideal derecho máximo.*
- $1 \neq 0$, *y si* $x, y \in A \setminus U(A)$, *entonces* $x + y \in A \setminus U(A)$.
- $1 \neq 0$, *y si* $x \in A$, *entonces* $x \in U(A)$ *o* $1 - x \in U(A)$.
- *Si* $x_1, \ldots, x_n \in A$ *tal que* $x_1 + \cdots + x_n \in U(A)$, *entonces existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $x_i \in U(A)$.

Si se dan estas propiedades, entonces el único ideal por la izquierda maximo coincide con el único ideal maximo por la derecha y también con el Radical de Jacobson del anillo

Definición 1.1.29. *Un anillo A es un **anillo de ideales principales izquierdo (derecho)** si cada ideal izquierdo(derecho) es principal y que denotaremos como **AIP izquierdo (AIP derecho)**. Cuando se satisface tanto para los ideales izquierdos como para los derechos, entonces lo llamaremos **anillo de ideales principales (AIP)***

Proposición 1.1.30. *[7, P. 210, Section: Uniserial rings, Theorem 1] Las siguientes condiciones sobre un anillo A son equivalentes.*

(*a*) *A es uniserial.*

(*b*) *A es un* ***AIP*** *artiniano*

Definición 1.1.31. *Un anillo A se llamará* ***anillo de ideales principales especial (AIP especial)*** *si es conmutativo, local y uniserial.*

Proposición 1.1.32. *Si A es un anillo local uniserial con ideal máximo* $M = \langle a \rangle$*, entonces,*

(*a*) *Si* $b \in A$*, entonces* $b \in U(A)$ *ó* $b \in M$*.*

(*b*) *Para cada* $j \in \mathbb{N}_0$ *y* $M^j = \langle a^j \rangle$*, donde* $a^0 := 1$ *y* $M^0 := A$*. Además, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$A = M^0 \supseteq M \supseteq \cdots \supseteq M^k = 0.$$

(*c*) $\mathcal{I}(A) = \{M^j : j \in \mathbb{N}_0\}$.

(*d*) *Todo los los ideales izquierdos son ideales derechos, es decir, bilaterales.*

Dem.
Recordemos que $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $b \in A$.

(*a*) Dado que A es uniserial se sigue que $\langle b \rangle \subseteq M$ o $M \subseteq \langle b \rangle$, en el primer caso tendremos que $b \in M$ y en el segundo caso tendríamos que $\langle b \rangle = A$, pues M es máximo, por lo que b estaría en $U(A)$.

(*b*) Consideremos el siguiente conjunto $S = \{j \in \mathbb{N}_0 : M^j = \langle a^j \rangle\}$.

(1) $0 \in S$, pues $M^0 = A = \langle a \rangle^0$ y $\langle a^0 \rangle = \langle 1 \rangle = A$.

(2) Supongamos que $\{0, \ldots, n\} \in S$. Mostremos que $n+1 \in S$. Tenemos que $\langle a \rangle^{n+1} = \langle a \rangle \langle a \rangle^n$. Ahora, por hipótesis de inducción y del hecho de que $a^{n+1} \in \langle a \rangle^{n+1}$ se sigue que

$$\langle a^{n+1} \rangle \subseteq \langle a \rangle^{n+1} = \langle a \rangle \langle a^n \rangle$$

Ahora, si $x, y \in A$ entonces $xaya^n \in \langle a^{n+1} \rangle$, pues $ay \in aA = Aa = M$ (pues M es el mismo ideal máximo tanto izquierdo como derecho), en consecuencia, existe $y' \in A$ tal que $y'a = ay$. Así, $xaya^n = xy'a^{n+1}$, esto muestra lo afirmado, por lo tanto

$$\langle a \rangle^{n+1} = \langle a \rangle \langle a^n \rangle \subseteq \langle a^{n+1} \rangle$$

Por lo tanto, $\langle a \rangle^{n+1} = \langle a^{n+1} \rangle$, es decir, $n+1 \in S$. Entonces, por el principio de inducción matemáticas se concluye que $S = \mathbb{N}_0$, en otras palabras, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple que $M^n = \langle a^n \rangle$.

Finalmente, la cadena $M^0 \supseteq M \supseteq \cdots \supseteq M^j \supseteq \cdots$ se estaciona pues por la Proposición 1.1.30 A es artiniano, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $M^k = M^m$ para todo $m \geq k$. Veamos que $\langle a^k \rangle = M^k = 0$, tenemos que $M^k = M^{k+1}$, es decir, existe $l \in A$ tal que $a^k = la^{k+1} = (la)a^{a^k}$, y dado que A es local, entonces $la \in U(A)$ ó $1 - la \in U(A)$, el primer caso no es posible, pues $la \in M$, por lo tanto, $1 - la \in U(A)$, así $(1 - la)a^k = 0$, entonces $a^k = 0$. Por lo tanto, $M^k = 0$.

(*c*) Si $b \in U(A)$, entonces $\langle b \rangle = A = M^0$. Supongamos que $b \notin U(A)$, entonces $b \in M$ por (*a*), esto es $a|b$ por lo que el conjunto $\Delta(b) = \{n \in \{1, \ldots, k\} : a^n|b\}$ no es vació. Obsérvese que si $a^n|b$, entonces todos los elementos; $a^0 := 1, a, \ldots, a^{n-1}$ también lo dividen. Así, sea $n = \text{máx}(\Delta(b))$, esto es, $a^n|b$, pero $a^{n+1} \not| b$, en otras palabras, $\langle b \rangle \subseteq \langle a^n \rangle$. Sea $\alpha \in A$ tal que $b = \alpha a^n$. Si $\alpha \notin U(A)$, entonces $\alpha \in M$ (por (*a*)), es decir, $a|\alpha$, esto nos lleva a que $b \in a^{n+1}$, lo cual es falso. Por tanto, $\alpha \in U(A)$, en consecuencia, $\langle b \rangle = \langle a^n \rangle$. En conclusión, $\mathcal{I}(A) = \{M^j : j \in \mathbb{N}_0\}$.

(*d*) Se debe a que el ideal máximo para ideales izquierdos y derechos son el mismo.

Q.E.D

Teorema 1.1.33 (Teorema de Zariski - Samuel). *Sea A un anillo conmutativo. Si A es un **AIP**, entonces $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i es un **DIP** o un **AIP especial** conmutativo.*

Teorema 1.1.34 (Teorema Chino del Residuo para anillos). *Sea A un anillo conmutativo y $I_i, \ldots, I_n$ ideales de A tales que $I_i + I_j = A$ para cada $i \neq j$. Entonces,*

$$A/I_1 \cdots I_n \cong \prod_{k=1}^{n} A/I_k, \quad a + I_1 \cdots I_n \mapsto (a + I_k)_{1 \leq k \leq n}$$

1.2. Módulos

1.2.1. Módulos

A continuación presentamos algunos conceptos y resultados básicos sobre la teoría de módulos, sobre los cuales estaremos trabajando a lo largo de este trabajo.

Definición 1.2.1. *Dado un anillo A, un A **módulo izquierdo** es un grupo abeliano $(M.+)$ junto con una multiplicación por escalar $A \times M \longrightarrow M$, denotado por $(a, m) \mapsto rm$, tal que, para todo $m, m' \in M$ y $a, a' \in A$,*

(*i*) $a(m + m') = am + am'$,

(*ii*) $(a + a')m = am + a'm$,

(*iii*) $(aa')m = a(a'm)$,

(*iv*) $1m = m$.

A menudo escribimos ${}_AM$ para denotar que M es un A-módulo izquierdo.

■ **Ejemplos 1.2.2.** (1) *Cada grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo.*

(2) *Cada anillo A es un módulo izquierdo sobre si mismo, cuya multiplicación por escalar $A \times A \longrightarrow A$ es la multiplicación de los elementos de A. Más generalmente, cada ideal izquierdo en A es un A-módulo izquierdo.*

(3) *Si S es un subanillo de A, entonces A es un S-módulo izquierdo, donde la multiplicación por escalar es $S \times A \ni (s, a) \longmapsto sr \in A$. Por ejemplo, el centro $Z(A)$ de un anillo es*

$$Z(A) = \{a \in A : ar = ra, \text{ para todo } r \in A\}$$

Es facil ver que $Z(A)$ es un subanillo de A y que A es un $Z(A)$ módulo izquierdo. Un anillo A es conmutativo si y solo si $Z(A) = A$.

Definición 1.2.3. *Si M y N son A-módulos izquierdos, entonces un A-homomorfismo es una función $f : M \longrightarrow N$ tal que, para todo $m, m' \in M$ y $a \in A$,*

(*i*) $f(m + m') = f(m) + f(m')$

(*ii*) $f(am) = af(m)$

Un A-isomorfismo es un A-homomorfismo biyectivo.

Note que la composición de A-homomorfismos es un A-homomorfismos, si f es un A-isomorfismo, entonces la función inversa f^{-1} es también un A-isomorfismo.

■ **Ejemplos 1.2.4.** (1) *Cada homomorfismo de grupos abelianos es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo.*

(2) *Sea M un A-módulo izquierdo, donde A es un anillo. Si $a \in Z(A)$, la multiplicación por a (o homotecia) es la función $\mu_a : M \longrightarrow M$ definida por $m \mapsto am$. Las funciones μ_a son A-homomorfismos porque $a \in Z(A)$: si $r \in A$ y $m \in M$, entonces*

$$\mu_a(rm) = a(rm) = (ar)m = (ra)m = r(am) = r\mu_a(m).$$

Definición 1.2.5. *Dado A anillo, un A-módulo derecho, es un grupo abeliano $(M, +)$ junto con una multiplicación por escalar $M \times A \longrightarrow M$, denotado por $(m, a) \mapsto ma$, tal que para todo $m, m' \in M$ y $a, a' \in A$,*

(i) $(m + m')\,a = ma + m'a,$

(ii) $m\,(a + a') = ma + ma'$

(iii) $m(aa') = (ma)a'$

(iv) $m = m1$

A menudo escribimos M_A para denotar que M es un A-módulo derecho.

■ **Ejemplo 1.2.6.** *Cada anillo A es un módulo derecho sobre si mismo y definimos una multiplicación por escalar $A \times A \longrightarrow A$ como la multiplicación de elementos de A. Más generalmente, cada ideal derecho I en A es un A-módulo derecho, porque si $x \in I$ y $a \in A$, entonces $xa \in I$.*

Definición 1.2.7. *Si M y M' son A-módulos derechos, entonces un A-**homomorfismo** es una función $f : M \longrightarrow M'$ tal que para todo $m, m' \in M$ y $a \in A$, entonces*

(i) $f(m + m') = f(m) + f(m'),$

(ii) $f(ma) = f(m)a.$

*Un A-**isomorfismo** es un A-homomorfismo biyectivo.*

Sí en un A-módulo derecho, denotamos ma por am, entonces todos los axiomas de la definición de módulo izquierdo se cumplirían para M con la excepción del axioma (iii): Este axioma nos diría que

$$(aa')m = m(aa') = (ma)a' = a'(ma) = a'(am) = (a'a)m$$

Esta observación muestra que si A es conmutativo, entonces los A módulos derechos son los mismos que los izquierdos. Por lo tanto, cuando A es conmutativo, usualmente decimos A-**módulo** sin los adjetivos izquierdo o derecho. Hay una manera de tratar propiedades de los módulos izquierdos y derechos al mismo tiempo, en lugar de discutir primero los módulos izquierdos y luego decir que se puede dar una discusión similar para los módulos derechos. Estrictamente hablando, un anillo A es una triple ordenada (A, α, μ), donde A es un conjunto, $\alpha : A \times A \longrightarrow A$ es la suma, y $\mu : A \times A \longrightarrow A$ es la multiplicación, que satisfacen ciertos axiomas. Por supuesto que generalmente abreviamos la notación y en lugar de decir que (A, α, μ^o), decimos que A es un anillo.

Definición 1.2.8. *Si (A, α, μ) es un anillo, entonces el **anillo opuesto** A^{op} es (A, α, μ^o) donde*

$$A \times A \ni (a, a') \xrightarrow{\mu^o} \mu(a', a) \in A$$

Es fácil verificar que A^{op} es un anillo. Informalmente decimos que invertimos el orden de la multiplicación. Es obvio que $(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = A$ y que $A^{op} = A$ si y solo si A es conmutativo.

Proposición 1.2.9. *Cada A-módulo derecho es un A^{op}-módulo izquierdo y cada A-módulo izquierdo es un A^{op}-módulo derecho.*

Definición 1.2.10. *La categoría A-**Mod** de todos los A-**módulos izquierdos** (donde A es un anillo) tiene como objetos todos los A-módulos izquierdos, como sus morfimos son todos los A-homomorfismos, y la composición es la composición usual de funciones. Denotamos el conjunto* $\mathrm{Hom}\,(M,N)$ *en A-**Mod** por*

$$\mathrm{Hom}_A\,(M,N)\,.$$

Si $A=\mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{Z}$-**Mod** = **Ab**, los grupos abelianos son los $\mathbb{Z}$-módulos y los homomorfismos de grupos son los $\mathbb{Z}$-homomorfismo.

Hay también una categoría para los A-módulos derechos.

Definición 1.2.11. *La categoría **Mod**-A de todos los A-**módulos derechos** (donde A es un anillo) tiene como objetos todos los A-módulos derechos, como sus morfimos son todos los A-homomorfismos, y la composición es la composición usual de funciones. Denotamos el conjunto* $\mathrm{Hom}\,(M,N)$ *en **Mod**-A por*

$$\mathrm{Hom}_A\,(M,N)\,.$$

(es decir, usamos la misma notación para Hom *como en A-**Mod**)*

A menudo abusamos de la notación, pero generalmente es para simplificar las cosas, en este caso, a menudo escribiremos $M\in A$-**Mod** [$M\in$ **Mod**-A], en lugar de $M\in\mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ [$M\in\mathrm{Obj}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$].

Otro ejemplo de abuso de notación que tenderemos a usar en este texto es el siguiente: Si $f:A\longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces $f(1_A)=1_B$; sin embargo, siempre escribiremos $f(1)=1$ y sobreentenderá que $f(1)$ es la identidad de B.

Podemos ver a los módulos como herramientas para estudiar a los anillos. Si $(M,+)$ es un grupo abeliano, entonces $\mathrm{End}\,(M):=\{f:M\longrightarrow M:\ f \text{ es homomorfismo de grupos}\}$ es un anillo con las operaciones de suma punto a punto $[f+g:m\overset{f}{\mapsto}(m)+g(m)]$ y la composición como multiplicación.

Definición 1.2.12. *Una **representación** de un anillo A es un homomorfismo de anillos $\varphi:A\longrightarrow$* $\mathrm{End}(M)$ *para algún grupo abeliano M.*

Proposición 1.2.13. *Sea A un anillo y sea $(M,+)$ un grupo abeliano. Si $\varphi:A\longrightarrow\mathrm{End}\,(M)$ es una representación, definimos*

$$A\times M\ni(a,m)\xrightarrow{\sigma}\varphi_a\,(m):=\varphi(a)(m)\in\mathrm{End}\,(M)$$

*Entonces, $(M,+,\sigma)\in A$-**Mod**. Inversamente, Si $M\in A$-**Mod**, entonces la función*

$$A\ni a\longrightarrow am\in\mathrm{End}\,(M)$$

es una representación, con $m\in M$ fijo.

Lema 1.2.14. *Si $M,N\in\mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ [o si $M,N\in\mathrm{Obj}(\mathbf{Mod}\text{-}A)$], entonces el conjunto $\mathrm{Hom}_A\,(M,N)$ es un grupo abeliano. Ademas, si $f,g\in\mathrm{Hom}_A\,(M,N)$, $p:M'\longrightarrow M$ y $q:N\longrightarrow N'$ son A-homomorfismos, entonces*

$$(f+g)\circ p=f\circ p+g\circ p\quad y\quad q\circ(f+g)=q\circ f+q\circ g$$

Dem.
Sean $f, g \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$. Uno fácilmente puede verificar que $f+g \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$. El elemento neutro en $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ es el homomorfismos $M \ni m \xrightarrow{\hat{0}} 0 \in N$, y el inverso de f es $M \ni m \xrightarrow{-f} -\{f(m)\}$. Es puramente rutinario verificar que efectivamente se cumple cada axioma de grupo abeliano. Finalmente, para las últimas ecuaciones debe checarse mediante evaluación.

Q.E.D

Definición 1.2.15. *Un funtor $F : A$-**Mod** $\longrightarrow$ **Ab** de cualquier variante se llama **funtor aditivo** si para cada $f, g \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$, tenemos*

$$F(f+g) = F(f) + F(g).$$

Proposición 1.2.16. *Sea A un anillo, y sean $M, N, K \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$.*

(i) $\operatorname{Hom}_A(M, \Box)$ *es un funtor aditivo .*

(ii) *Si $M \in A$-**Mod**, entonces $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ es un $Z(A)$-módulo izquierdo, si $f \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$ y $a \in Z(A)$, definimos*

$$M \ni m \xrightarrow{af} \in f(am) \in N.$$

*Si $q \in \operatorname{Hom}_A(N,K)$, entonces el morfismo inducido $q_* : \operatorname{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,K)$ es un $Z(A)$-homomorfismo, y $\operatorname{Hom}_A(M,\Box)$ toma valores en $Z(A)$-**Mod**. En particular si A es conmutativo, entonces $\operatorname{Hom}_A(M,\Box)$ es un funtor A-**Mod** $\longrightarrow$ A-**Mod***

Dem.
(i) Del lema 1.2.14 sabemos que $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ es un grupo abeliano y para toda $q \in \operatorname{Hom}_A(N,K)$, $f, g \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$ se cumple $q \circ (f+g) = q \circ f + q \circ g$; esto es $q_*(f+g) = q_*(f) + q_*(g)$. Por lo tanto, q_* es un homomorfismo de grupos abelianos. Ya que $\operatorname{Hom}_A(M,\Box)$ preserva identidades y composición, es un funtor aditivo.

(ii) Mostremos que para $a \in Z(A)$, $f \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$, entonces af es un $Z(A)$-homomorfismo . Si $b \in A$, entonces $ab = ba$ y

$$(af)(bm) = f(a(bm)) = f((ab)m) = f((ba)m) = f(b(am)) = bf(am) = b[af](m).$$

Se sigue que $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ es un $Z(A)$-módulo izquierdo. Sea $q \in \operatorname{Hom}_A(N,K)$ mostremos que q_* es un $Z(A)$-homomorfismo. Ahora, q_* es aditivo, por la parte (i). Mostremos que $q_*(af) = aq_*(f)$, donde $a \in Z(A)$; esto es, $q(af) = (aq) \circ f$. Sea $m \in M$ y tengamos en cuenta la definición de la multiplicación, tambien que $f \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$ y que $qf \in \operatorname{Hom}_A(N,K)$

$$\begin{aligned} q_*(af)(m) &= [q \circ (af)](m) = g(af(m)) = q(f(am)) \\ &= q(af(m)) = aq(f(m)) = a[q \circ f](m) = aq_*(f)(m) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $q_*(af) = aq_*(f)$. Por lo tanto, q_* es un $Z(A)$-homomorfismo. Así, $\operatorname{Hom}_A(M,\Box) : A$-**Mod** $\longrightarrow Z(A)$-**Mod**, en particular, si A es conmutativo, entonces $A = Z(A)$ por lo que se tiene lo afirmado.

Q.E.D

Proposición 1.2.17. *Sea A un anillo, y sean $M, N, K \in \operatorname{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$.*

(i) $\operatorname{Hom}_A(\Box, K)$ *es un funtor contravariante aditivo .*

(*ii*) *Si $N \in A$-**Mod**, entonces $\operatorname{Hom}_A(M,K)$ es un $Z(A)$-módulo izquierdo, si $f \in \operatorname{Hom}_A(M,K)$ y $a \in Z(A)$, definimos*

$$M \ni m \xrightarrow{af} \in f(am) \in N.$$

*Si $q \in \operatorname{Hom}_A(M,K)$, entonces el morfismo inducido $q_* : \operatorname{Hom}_A(N,K) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,K)$ es un $Z(A)$-homomorfismo, y $\operatorname{Hom}_A(\Box, K)$ toma valores en $Z(A)$-**Mod**. En particular si A es conmutativo, entonces $\operatorname{Hom}_A(\Box, K)$ es un funtor contravariante A-**Mod** $\longrightarrow$ A-**Mod***

Dem.
Similar a 1.2.16.

Q.E.D

Los dos resultandos inmediatamente previos nos dicen que los funtores Hom son aditivos. Ahora, si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor covariante, entonces existen funciones

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N) \ni g \xrightarrow{F_{AB}} F(h) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(M), F(N)),$$

Si F : A-**Mod** $\longrightarrow$ **Ab** es un funtor aditivo, entonces cada F_{AB} es un homomorfismo de grupos: la afirmación análoga para funtores contravariantes es también cierta.

Proposición 1.2.18. *Sea F : A-**Mod** $\longrightarrow$ **Ab** un funtor aditivo de cualquier variante.*

(*i*) *Si $0 : M \longrightarrow N$, es **el morfismo cero**, entonces $F(0) = 0$.*

(*ii*) *$F(\{0\}) = \{0\}$.*

Dem.
(*i*) Dado que F es un funtor aditivo, entonces F_{AB} es un homomorfismo de grupos abelianos de modo que preserva elementos identidad; esto es, $F(0) = 0$.

(*ii*) Si $M \in A$-**Mod**, entonces $0 = \mathrm{id}_M$ si y solo si $M = 0$; pues si $M = 0$, entonces se cumple trivialmente $0 = \mathrm{id}_M$, si $0 = \mathrm{id}_M$, entonces para todo $m \in M$, $0 = 0(m) = \mathrm{id}_M(m) = m$, por lo tanto, $M = 0$. Por la parte (*i*), tenemos que $0 = F(0) = F\left(\mathrm{id}_{\{0\}}\right) = \mathrm{id}_{F(\{0\})}$, es decir, $F(\{0\}) = \{0\}$.

Q.E.D

Definición 1.2.19. *Si $(M, +, \cdot) \in \operatorname{Obj}(A$-**Mod**$)$, entonces $(N, +, \cdot)$ es submódulo de M si cumple con;*

(1) *$N \subseteq M$,*

(2) *$(N, +)$ es subgrupo de $(M, +)$,*

(3) *Para todo $n \in N$, $a \in A$ se tiene que $an \in N$.*

Una definición similar tendremos para módulos derechos. Denotaremos como

$$\mathcal{S}(M)$$

a todos los submódulos de M.

■ **Ejemplos 1.2.20.** (1) *Un submódulo de un $\mathbb{Z}$-módulo (e.d., de un grupo abeliano) es un subgrupo, y un submodulo de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.*

(2) *Ambos $\{0\}$ y M son submodulos de un módulo M. Un **submódulo propio** de M es un submódulo $N \subseteq M$ con $N \neq M$. En este caso, escribiremos $N \subsetneq M$.*

(3) *Si un anillo A es visto como un módulo izquierdo sobre si mismo, entonces un submódulo de A es un ideal izquierdo I de A; I es un submódulo propio cuando es un ideal izquierdo propio. Similarmente, si A es visto como un módulo derecho sobre si mismo, entonces sus submódulos son sus ideales derechos.*

(4) *Si $M \in A$-**Mod** y $a \in A$, donde A es un anillo conmutativo, entonces*

$$aM = \{am : m \in M\}$$

es un submódulo de M. Una generalización de esto es si J es un ideal de A y M es un A-módulo, entonces

$$JM = \left\{ \sum_i x_i m_i : x_i \in J \text{ y } m_i \in M \right\}$$

es submódulo de M.

(5) *Si S y T son submódulos de un módulo izquierdo M, entonces*

$$S + T = \{s + t : s \in S \text{ y } t \in T\}$$

es un submódulo de M que contiene a S y a T.

(6) *Si $(S_i)_{i\in I}$ es una familia de submódulos de un A-módulo izquierdo M, entonces $\bigcap_{i\in I} S_i$ es un submódulo de M.*

(7) *$N \in \mathrm{Obj}(A$-**Mod**$)$ es **cíclico** si existe $n \in N$ con $N = \{an : a \in A\}$. Si $M \in \mathrm{Obj}(A$-**Mod**$)$ y $m \in M$, entonces el **submódulo ciclico generado por** m, denotado por $\langle m \rangle$, es*

$$\langle m \rangle = \{am : a \in A\}$$

Más general, si $X \subseteq M$, entonces

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{finito} a_i x_i : a_i \in A, X_i \in X \right\}$$

*es el conjunto de todas las A-combinaciones lineales de elementos en X. Llamamos $\langle X \rangle$ el **submódulo generado por** X. De hecho se puede probar que*

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X\subseteq N} N.$$

Definición 1.2.21. *Un A-módulo izquierdo M es **finitamente generado** si M es generado por un conjunto finito; esto es, si hay un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $M = \langle X \rangle$.*

Por ejemplo, un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-módulo finitamente generado si y solo si V es finito dimensional.

Definición 1.2.22. *Si $M \in \mathrm{Obj}(A$-**Mod**$)$ y $N \in \mathcal{S}(M)$, entonces el **modulo cociente** es el grupo cociente M/N (recuerda que M es un grupo abeliano y N es un subgrupo) equipado con la multiplicación escalar*

$$r\,(m + N) = rm + N$$

La **proyección natural** $M \ni m \xrightarrow{\pi} m + N \in M/N$, es fácil verificar que es un A-homomorfismo.

Multiplicación escalar en la definición de módulo cociente esta bien definido: si $m + N = m' + N$, entonces $m - m' \in N$. Por lo tanto, $a\,(m - m') \in N$ (porque N es un submódulo), $am - am' \in N$, y $am + N = am + N$.

■ **Ejemplo 1.2.23.** *Si J es un ideal izquierdo (o derecho) de A, entonces A/J es un A-módulo izquierdo (o derecho). Si J es un ideal bilateral, entonces A/J es un anillo con multiplicación*

$$(a+J)(b+J) = ab + J$$

Esta multiplicación esta bien definida, pues si $a+J = a'+J$ y $b+J = b'+J$, entonces $ab+J = a'b'+J$, por que

$$ab - a'b' = ab - a'b + a'b - a'b' = (a-a')b + a'(b-b') \in J$$

Definición 1.2.24. *Si $f : M \longrightarrow N$ es un A-homomorfismo entre A-módulos izquierdos, entonces*

- $Nucleo\,(f) = \mathrm{Nu}\,(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$,
- $Imagen\,(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \{n \in N : \text{ existe } m \in M, f(m) = n\}$,
- $Conucleo\,(f) = \mathrm{Conucleo}\,(f) = N/\,\mathrm{Im}(f)$.

Es meramente rutinario checar que $\mathrm{Nu}\,(f) \in \mathcal{S}\,(M)$ y que $\mathrm{Im}\,(f) \in \mathcal{S}\,(N)$.

Teorema 1.2.25 (Primer Teorema de Isomorfismo)**.** *Si $f : M \longrightarrow N$ es un A-homomorfismo de A-módulos izquierdos, entonces hay un A-isomorfismo*

$$M/\,\mathrm{Nu}\,(f) \ni m + \mathrm{Nu}\,(f) \overset{f}{\mapsto} f(m) \in \mathrm{Im}\,(f)$$

El segundo y tercer teorema de isomorfismo son corolarios del primero.

Teorema 1.2.26 (Segundo teorema de isomorfismo). *Si $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $S, T \in \mathcal{S}\,(M)$, entonces hay un A-isomorfismo*

$$S/\,(S \cap T) \longrightarrow (S+T)\,/T.$$

Teorema 1.2.27 (Tercer teorema de isomorfismo). *Si $K \subseteq N \subseteq M$ es una torre de submódulos de $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, entonces la ampliación de clases laterales $M/K \ni x+K \xrightarrow{\alpha} x+N \in M/N$ induce un A-isomorfismo*

$$(M/K)\,/\,(N/K) \longrightarrow M/N$$

Si $f : M \longrightarrow N$ es un A-homomorfismo y $K \subseteq N$, entonces $f^{-1}\,(K) = \{m \in M : f(m) \in K\}$ es un submódulo de M que contiene al $\mathrm{Nu}\,(f) = f^{-1}\,(\{0\})$.

Teorema 1.2.28 (Teorema de correspondencia). *Si $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $K \in \mathcal{S}(M)$, entonces*

$$\{N \in \mathcal{S}(M) : K \subseteq N \subseteq M\} \ni N \overset{\varphi}{\longmapsto} N/K \in \mathcal{S}\,(M/K)$$

Es más, $K \subseteq N \subseteq N'$ en M si y solo si $N/K \subseteq N'/K$ en $M \subseteq K$.

Dem.
Dado que cada módulo es un grupo abeliano, cada submódulo es un subgrupo, y así por el teorema de correspondencia usual para grupos se sigue que φ es una inyección que preserva inclusiones: $N \subseteq N'$ si y solo si $N/K \subseteq N'/K$ en M/N. Más aún, φ es suprayectiva: si $N^* \subseteq M/K$, entonces hay un único submódulo $N \supseteq K$ tal que $N^* = N/K$. El resto de esta demostración es una repetición de la prueba para grupos, checando solo que la imagen y las preimagenes de submódulos son submódulos.

Q.E.D

El teorema de correspondencia es usualmente usado como sigue: un submódulo N^* de M/K es igual a N/K para algún unico submódulo intermedio K. En seguida anunciaremos la versión teorica para anillos.

Teorema 1.2.29 (**Teorema de correspondencia para anillos**). *Si I es un ideal bilateral de un anillo A, entonces*

$$\{J \in \mathcal{I}(A) : I \subseteq J \subseteq A\} \ni J \xmapsto{\varphi} J/I \in \mathcal{I}\,(A/I)$$

Es más, $I \subseteq J \subseteq J'$ en A si y solo si $J/I \subseteq J'/I$ en $A \subseteq I$.

Proposición 1.2.30. *$M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ es ciclico si y solo si $M \cong A/I$, para algún $I \in \mathcal{I}(A)$.*

Dem.
Si M es ciclico, entonces $M = \langle m \rangle$ para algún $m \in M$.Definamos $f : A \longrightarrow M$ por $f(a) = am$. Ahora, f es sobreyectiva, ya que M es ciclico, y su nucleo es un submódulo de A; esto es, $\mathrm{Nu}\,(f)$ es ideal izquierdo I. El primer teorema de isomorfismo nos da $R/I \cong M$. Inversamente, R/I es ciclico con generador $m = 1+I$.

Q.E.D

Definición 1.2.31. *Un A-módulo izquierda M es **simple** (o **irreducible**) si $M \neq \{0\}$ y M no tienen submódulos propios no cero; esto es, $\{0\}$ y M son los únicos submódulos de M.*

Corolario 1.2.32. *Un A-módulo izquierdo M es simple si y solo si $M \cong A/I$, donde I es un ideal izquierdo maximal.*

Dem.
Esto se sigue del teorema de correspondencia.

Q.E.D

Por ejemplo, un grupo abeliano G es simple si y solo si G es cíclico de orden p para algún primo p. La existencia de ideales izquierdos máximos garantiza la existencia de módulos simples.

Definición 1.2.33. *Un sucesión finita o infinita de A-homomorfismos y A-módulos izquierdos*

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es llamada sucesión exacta si $\mathrm{Im}\,(f_{n+1}) = \mathrm{Nu}\,(f_n)$

Observe que no hay necesidad de etiquetar los morfimos $0 \xrightarrow{f} M$ o $N \xrightarrow{g} 0$: En cualquier caso, hay un único morfismo, a saber, $f : 0 \overset{0}{\mapsto}$ o el homomorfismo constante $g(n) = 0$ para todo $n \in N$. Aquí hay algunas consecuencias de las sucesiones exactas.

Proposición 1.2.34. (*i*) *Una sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ es exacto si y solo si es inyectivo.*

(*ii*) *Una sucesión $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es exacta si y solo si g es sobreyectivo.*

(*iii*) *Una sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$ es exacta si y solo si h es un isomorfismo.*

Definición 1.2.35. *Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0.$$

Algunos autores llaman a esta extensión de K por M; algunos autores dicen que el modulo de en medio N es una extensión.

La siguiente proposición reafirma la primera y tercer teorema de isomorfismo en terminos de sucesiones exactas.

Proposición 1.2.36. (I) *Si* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ *es una sucesión excata corta, entonces*

$$M \cong \operatorname{Im}(f) \ \ y \ N/\operatorname{Im}(f) \cong K.$$

(ii) *Si* $T \subseteq S \subseteq K$ *es una torre de submódulos, entonces existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow S/T \longrightarrow M/S \longrightarrow M/T \longrightarrow 0.$$

Dem.

(i) Ya que f es inyectiva, cambiando su dominio nos da un isomorfismo $M \longrightarrow \operatorname{Im}(f)$. El primer teorema de isomorfismo nos dice que $N/\operatorname{Nu}(g) \cong \operatorname{Im}(g)$. Por exactitud, $\operatorname{Nu}(g) = \operatorname{Im}(f)$ y $\operatorname{Im}(g) = K$; por lo tanto, $N/\operatorname{Im}(f) \cong K$.

Esto es solo una reformulación del tercer teorema de isomorfismo. Define $f : S/T \longrightarrow M/T$ la inclusión y $g : M/T \longrightarrow M/S$ dada por $g(m+T) = m+S$. Como en la demostración del teorema 1.2.27 , g es sobreyectiva, y $\operatorname{Nu}(g) = S/T = \operatorname{Im}(f)$.

Q.E.D

En el caso especial cuando N es un submódulo de M y $f : M \longrightarrow N$ es la inclusión, entonces la exactitud de $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ nos da $N/M \cong K$.

La noción familiar de suma directa de espacios vectoriales y suma directa de grupos abelianos se extiende a módulos al igual que la de producto.

Definición 1.2.37. *Sea A un anillo y $(M_i)_{i\in I}$ una familia de A-módulos izquierdos, entonces su **suma directa** se define como:*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ (m_i)_{i\in I} : m_i \in M_i, \ \textit{tal que } m_i = 0 \textit{ para todo } i \in I \textit{ excepto un número finito de estos} \right\}$$

junto con una familia de A-homomorfismo $\left\{ \iota_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in I} M_j \right\}_{i\in I}$ *donde cada ι_i es la inclusión de M_i en la i-ésima coordenada de $\bigoplus_{i\in I} M_i$, cuya suma en $\bigoplus_{i\in I} M_i$ y producto por escalar estan dados como siguen:*

- $(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I}$,
- $a\,(m_i)_{i\in I} = (am_i)_{i\in I}$.

Observación 1.2.38. *Es fácil verificar que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ es un coproducto de la categoría A-**Mod**.*

Similarmente, definimos el producto de A-módulos izquierdos.

Definición 1.2.39. *Sea A un anillo y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos izquierdos, entonces su **producto directa** se define como;* $\prod\limits_{\in I} M_i := \{(m_i)_{i\in I} : m_i \in M_i\}$, *junto con una familia de A-homomorfismo*

$$\left\{\pi_i : \prod_{j\in I} M_i \longrightarrow M_j\right\}_{i\in I}$$

donde cada π_i es la proyección canónica de $\prod_{j\in I} M_i$ en M_i, cuya suma en $\prod\limits_{i\in I} M_i$ y producto por escalar están dados como siguen:

- $(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I}$,
- $a\,(m_i)_{i\in I} = (am_i)_{i\in I}$.

Observación 1.2.40. *Es fácil verificar que $\prod\limits_{i\in I} M_i$ es un producto de la categoría A-**Mod**.*

1.2.2. Producto Tensorial

Definición 1.2.41. *Sea A un anillo, M_A un A-módulo derecho, ${}_AN$ un A-módulo izquierdo y G un grupo abeliano. Una función $f : M \times N \longrightarrow G$ se llama A-**biaditiva** si, para cada $m, m' \in M, n, n' \in N$, y $a \in A$, tenemos:*

- $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$
- $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$
- $f(ma, n) = f(m, an)$

*Si A es conmutativo y M, N, K son A-módulos, entonces una función $f : M \times N \longrightarrow K$ se llama A-**bilineal** si f es A-biaditiva y también*

- $f(mr, n) = rf(m, n) = f(m, rn)$

El producto tensorial convierte funciones A-biaditivas en A-homomorfismos.

Definición 1.2.42. *Dado un anillo A, un A- módulo derecho M_A y un A-módulo izquierdo ${}_AN$, su **producto tensorial** es un grupo abeliano $M \otimes_A N$ y una función A-biaditiva*

$$h : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$$

tal que, par cada grupo abeliano G y cada función A-biaditiva $f : M \times N \longrightarrow G$ existe un único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\tilde{f} : M \otimes_A N \longrightarrow G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & G \\
M \otimes_A N \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.2.43. *Si U y $M \otimes_A N$ son productos tensoriales de M_A y ${}_AN$ sobre A, entonces $U \cong M \otimes_A N$.*

Dem.
Supongamos que $\eta : M \times N \longrightarrow U$ es una función A-biaditiva tal que para cada grupo G y cada función A-biaditiva $f : M \times N \longrightarrow G$ existe una único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f' : U \longrightarrow G$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & G \\ U \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Tomando $f = h$ y $G = M \otimes_A N$ hay un $\mathbb{Z}$-homomorfismo tal que $h = h' \circ \eta$. Similarmente, en el diagrama correspondiente a $M \otimes_A N$ tomamos $f = \eta$ y $G = U$ por lo que existe un $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\tilde{\eta} : M \otimes_A N \longrightarrow U$ tal que $\eta = \tilde{\eta} \circ h$. Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_A N \arrow[d, "\tilde{\eta}"'] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{id}_{M\otimes_A N}"] \\ M \times N \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "h"'] & U \arrow[d, "h'"'] \\ & M \otimes_A N \end{tikzcd}$$

Ahora, $(h' \circ \tilde{\eta}) \circ h = h' \circ (\tilde{\eta} circ h) = h' \circ \eta = h$, por tanto, $h' \circ \tilde{\eta}$ y $\mathrm{id}_{M\otimes_A N}$ hacen conmutar el triangulo con vértices $M \times N$, $M \otimes_A N$ y $M \otimes_A N$, por unicidad (definición de producto tensorial) se concluye que $h' \circ \tilde{\eta} = \mathrm{id}_{M\otimes_A N}$, de manera análoga se puede mostrar que $\tilde{\eta} \circ h' = \mathrm{id}_U$, por lo tanto, $\tilde{\eta}$ es un isomorfismo

Q.E.D

Proposición 1.2.44. *Si A es un anillo y M_A, ${}_AN$ módulos, entonces su producto tensorial existe.*

Dem.
Sea F un grupo abeliano libre con base $M \times N$; esto es, F es libre en todos los pares ordenados (m, n) donde $m \in M$ y $n \in N$, definamos S el subgrupo de F generado por todos los elementos de los siguientes tres tipos:

$$\begin{aligned} (m, n + n') - (m, n) - (m, n') \\ (m + m', n) - (m, n) - (m', n) \\ (mr, n) - (m, rn) \end{aligned}$$

Sea $M \otimes_A N := F/S$, denotaremos las clases $(m, n) + S$ como $m \otimes n$ y definimos

$$M \times N \ni (m, n) \xmapsto{h} m \otimes n \in M \otimes_A N$$

(esto es, h es la restricción de la proyección canónica $F \longrightarrow F/S$), tenemos las siguientes identidades en $M \otimes_A N$:

$$\begin{aligned} &m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' \\ &(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n \\ &(mr) \otimes n = m \otimes (rn) \end{aligned}$$

Por lo que claramente, h es A-biaditiva. Ahora, consideremos el siguiente diagrama, donde G es un grupo abeliano, f es A-biaditiva y $i : M \times N \longrightarrow F$ es la inclusión

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, "f"'] & & M \otimes_A N \arrow[ddl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & F \arrow[ur, "nat"] \arrow[d, "\varphi"] & \\ & G & \end{tikzcd}$$

Ya que F es un grupo abeliano libre con base $M \times N$, entonces existe un homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ con $\varphi(m,n) = f(m,n)$ para todo $(m,n) \in M \times N$. Ahora, $S \subseteq \mathrm{Nu}(\varphi)$ pues f es A-biaditiva y así induce un morfismo $\hat{f} : M \otimes_A N = F/S \longrightarrow G$ dada por

$$\hat{f}(m \otimes n) = \hat{f}((m,n) + S) = \varphi(m,n) = f(m,n).$$

Esto último puede reescribirse como $\hat{f} \circ h = f$; esto es, el diagrama conmuta. Finalmente, $\hat{f}$ es único porque $M \times_A N$ es generado por el conjunto de todos los $m \otimes n$'s y sabemos que dos homomorfismos que son iguales en un conjunto generador son iguales.

Q.E.D

Observación 1.2.45. *Ya que $M \otimes_A N$ es generado por los elementos de la forma $m \otimes n$, cada $u \in M \otimes_A N$ tiene la forma*

$$u = \sum_i m_i \otimes n_i$$

Esta expresión de u no es única; por ejemplo, para cero hay expresiones

$$\begin{aligned} 0 &= m \otimes (n + n') - m \otimes n - m \otimes n', \\ 0 &= (m + m') \otimes n - m \otimes n - m' \otimes n, \\ 0 &= (mr) \otimes n - m \otimes (rn). \end{aligned}$$

Proposición 1.2.46. *Sea $f : M_A \longrightarrow M'_A$ y $g :_A N \longrightarrow_A N'$ homomorfimos de A-módulos derechos e izquierdos, respectivamente. Entonces hay un único $\mathbb{Z}$-módulos, denotado por $f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$ con*

$$f \otimes g : m \otimes n \longrightarrow f(m) \otimes g(n).$$

Dem.
La función $M \times N \ni (m,n) \overset{\varphi}{\longmapsto} f(m) \otimes g(n) \in M' \otimes_A N'$ es A-biaditiva, es fácil comprobarlo, así, existe un único homomorfismo $M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ dada por $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$

Q.E.D

Corolario 1.2.47. *Dado homomorfismos de A-módulos derechos $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$ y homomorfimos de A-módulos izquierdos $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$,*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

Dem.
Ambos homomorfismos mandan $m \otimes n$ a $f' \circ f(m) \otimes g' \circ g(n)$ y así la unicidad nos da lo que queremos.

Q.E.D

Teorema 1.2.48. *Dado M_A hay un funtor aditivo $F_M :_A \boldsymbol{Mod} \longrightarrow \boldsymbol{Ab}$, definido por*

$$F_M(N) = M \otimes_A N \text{ y } F_M(g) = \mathrm{id}_M \otimes g,$$

donde $g : N \longrightarrow N'$ es un homomorfismo de A-módulos izquierdos. Similarmente, dado ${}_AN$ hay un funtor aditivo $G_N : \boldsymbol{Mod}_A \longrightarrow \boldsymbol{Ab}$ definido por

$$F_N(M) = M \otimes_A N \text{ y } F_M(g) = f \otimes \mathrm{id}_N,$$

donde $f : M \longrightarrow M'$ es homomorfismo de A-módulos derechos.

Dem.
Primero, note que F_M preserva identidades: $F_M(\mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N$ es la identidad $\mathrm{id}_{M\otimes N}$, por que fija cada generador $m \otimes n$. Segundo, F_M, preserva composición:

$$F_M(g' \circ g) = \mathrm{id}_M \otimes (g' \circ g) = (\mathrm{id}_M \otimes g') \circ (\mathrm{id}_M \otimes g) = F_M(g') \circ F_M(g)$$

Por lo tanto, F_M es un funtor. Veamos que F_M es biaditiva, esto también es fácil de ver, pues $\mathrm{id}_M \otimes (g+h) = \mathrm{id}_M \otimes g + \mathrm{id}_M \otimes h$, ya que ambos homomorfismos mandan $m \otimes n$ a $m \otimes g(n) + m \otimes h(n)$

Q.E.D

Notación: Denotaremos el funtor F_M por $M \otimes_A \Box$ y al funtor G_N por $\Box \otimes_A N$.

Corolario 1.2.49. *Si $f : M \longrightarrow M'$ y $g : N \longrightarrow N'$ son isomorfismos de A-módulos derechos e izquierdos, respectivamente. Entonces $f \otimes g : M \otimes_A N \longrightarrow M' \otimes_A N'$ es un isomorfismos de grupos abelianos.*

Dem.
Ahora $f \otimes \mathrm{id}_N$ es el valor del funtor $\Box \otimes_A N$ en el isomorfismo f, y entonces $f \otimes \mathrm{id}_N$ es un isomorfismo; similarmente, $\mathrm{id}_M \otimes g$ es isomorfismo. Así, $f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}_M \otimes g)$. Por lo tanto, $f \otimes g$ es un isomorfismo, pues es composición de isomorfismos.

Q.E.D

En general, el producto tensorial de dos módulos es solo un grupo abeliano; ¿cuando es un módulos? SI es así,los funtores del producto tensorial toman valores en una categoría de módulos, no simplemente en **Ab**; es decir, ¿es $\mathrm{id} \otimes f$ un homomorfismo de módulos? La noción de bimodule generalmente responde a tales preguntas.

Definición 1.2.50. *Sean A, B anillos y sea M un grupo abeliano. Entonces M es un (A, B)-**bimódulo**, denotado como ${}_AM_B$, sí M es un A-módulo izquierdo y un B-módulo derecho, y se cumple la ley de asociación: $\forall a \in A, m \in M, \in B$*

$$a(mb) = (am)b.$$

Si M es un (A, B)-bimódulo, está permitido escribir amb, pues la ley de asociación previa nos dice que las dos posibles asociaciones concuerdan.

La siguiente proposición usa el producto tensorial para extender los escalares.

Proposición 1.2.51. ***(Extensión de escalares)*** *Sea S un subanillo de un anillo A.*

(i) *Dado un bimodulo ${}_AM_S$ y un S-módulo izquierdo ${}_SN$, entonces el producto tensorial $M \otimes_S N$ es un A-módulo izquierdo, donde*

$$a\,(m \otimes n) = (am) \otimes n$$

Similarmente, dado un S-módulo derecho M_S y un (S, A)-bimodulo N, el producto tensorial $M \otimes_S N$ es un A-módulo derecho, donde

$$(m \otimes n)\,a = m \otimes (na)$$

(ii) *El anillo A es un (A, S)-bimodulo y, si M es un S-módulo izquierdo, entonces $A \otimes_S M$ es un A-módulo izquierdo.*

Dem.
(i) Sea $a \in A$ fijo, la multiplicación $M \ni m \xmapsto{\mu_a} am \in M$ es un S-homomorfismo, por ser M bimodulo tenemos que

$$\mu_a(ms) = a(ms) = (am)s = \mu_a(m)s.$$

Si $F = \square \otimes_S N : \mathbf{Mod}_S \longrightarrow \mathbf{Ab}$, entonces $F(\mu_a) : M \otimes_S N \longrightarrow M \otimes_S N$ es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo. Por lo tanto, $F(\mu_a) = \mu_a \otimes \mathrm{id}_N : m \otimes n \mapsto (am) \otimes n$, y así la fórmula en el enunciado tiene sentido y es sencillo comprobar que los axiomas del módulo son válidos para $M \otimes_S N$.

(ii) Aplicando (i)

Q.E.D

Corolario 1.2.52. *Las siguientes se cumplen:*

(i) *Dado un bimodulo ${}_SM_A$, el funtor $M \otimes_A \square :{}_A$ **Mod** $\longrightarrow$ **Ab** en realidad toma valores en ${}_S$ **Mod***

(ii) *Si A es un anillo, entonces $M \otimes_A N$ es un $Z(A)$-módulo, donde*

$$a(m \otimes n) = (am) \otimes n = m \otimes (an)$$

para todo $a \in Z(A)$, $m \in M$, y $n \in N$.

(iii) *Si A es un anillo, $a \in Z(A)$ y $\mu_a : N \longrightarrow N$ es la multiplicación por a, entonces*

$$\mathrm{id}_M \otimes \mu_a : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$$

es también multiplicación por a.

Dem.
(i) Por la proposición previa, $M \otimes_A N$ es un S-módulo izquierdo, donde $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$, así que es suficiente mostrar que si $g : N \longrightarrow N'$ es un homomorfismo de A-modulos izquierdos, entonces $\mathrm{id}_A \otimes g$ es un S-homomorfismo, pero

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_M \otimes g)[s(m \otimes n)] &= (\mathrm{id}_M \otimes g)[(sm) \otimes n] \\ &= (sm) \otimes g(n) \\ &= s(m \otimes g(n)), \text{ por la proposición anterior} \\ &= s(\mathrm{id}_M \otimes g)(m \otimes n)\end{aligned}$$

(ii) Ya que el centro $Z(A)$ es conmutativo, podemos considerar M y N como $(Z(A), Z(A))$- bimodulo definidas por $ma = am$ y $na = an$ para todo $a \in Z(A)$, $m \in M$ y $n \in N$. En inciso (i) de la proposición anterior nos da

$$a(m \otimes n) = (am) \otimes n = (ma) \otimes n = m \otimes (an)$$

(iii) Esta afirmación es ver la última ecuación desde otro punto de vista:

$$(\mathrm{id}_M \otimes \mu_a)(m \otimes n) = m \otimes (an) = a(m \otimes n).$$

Q.E.D

Cuando uno de los módulos es un bimódulo, Hom también tiene estructura extra.

Proposición 1.2.53. *Sea A y S anillos.*

(i) *Dado ${}_AM_S$ y ${}_AN$, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un S-módulo izquierdo, donde $sf : m \mapsto f(ms)$, y $\mathrm{Hom}_A(M, \square)$ es un funtor ${}_A$ **Mod** $\longrightarrow {}_S$ **Mod**.*

(ii) *Dado ${}_AM_S$ y N_S, entonces $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ es un A-módulo derecho, donde $fa : m \mapsto f(am)$, y $\mathrm{Hom}_S(M, \square)$ es un funtor **Mod**$_S \longrightarrow$ **Mod**$_A$.*

(iii) *Dado ${}_SN_A$ y M_A, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un S-módulo izquierdo, donde $sf : m \mapsto s[f(m)]$, y $\mathrm{Hom}_A(\square, N)$ es un funtor **Mod**$_A \longrightarrow {}_S$ **Mod**.*

(iv) *Dado ${}_SN_A$ y ${}_SM$, entonces $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ es un A-módulo derecho, donde $fa : m \mapsto f(m)a$, y $\mathrm{Hom}_S(M, \square)$ es un funtor ${}_S$ **Mod** $\longrightarrow$ **Mod**$_A$.*

1.2.3. Limite Directo

En esta sección consideremos una categoría $\mathcal{C}$.

Definición 1.2.54. *Un COPO $(\Delta, \leq)$ se llama* ***conjunto dirigido*** *si para cada pareja $i, j \in \Delta$, existe $k \in \Delta$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.*

Definición 1.2.55. *Sea Δ es un conjunto dirigido y $(X_i)_{i\in\Delta}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ indexadas por Δ y para cada $i, j \in \Delta$ con $i \leq j$, sea $f_{i,j} : X_i \longrightarrow X_j$ morfismo. $(X_i, f_{i,j})$ es un* ***sistema directo*** *en $\mathcal{C}$ si se cumple:*

- *$f_{i,i} = 1_{X_i}$, para cada $i \in \Delta$.*
- *$f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$, para cada $i, j, k \in \Delta$ con $i \leq j \leq k$.*

Dado un sistema directo $(X_i, f_{i,j})$, definamos

$$\Omega(X_i, f_{i,j}) := \big\{ (X, \{\phi_i\}) : X \in \mathcal{C} \text{ y para cada } i, j \in \Delta \text{ con } i \leq j,\ \phi_i = \phi_j \circ f_{i,j} \big\}.$$

Definición 1.2.56. *Sea $(X_i, f_{i,j})$ un sistema directo. Un par $(X, \{\phi_i\}) \in \Omega(X_i, f_{i,j})$ se llama* ***limite directo*** *de $(X_i, f_{i,j})$, si cumple la siguiente propiedad universal:*

Para cada par $(Y, \{\psi_i\}) \in \Omega(X_{i,j}, f_{i,j})$, existe un único morfismo $\upsilon : X \longrightarrow Y$ tal que para cada $i \leq j$ (en Δ) el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{i,j}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "\upsilon"] & \\
& Y &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Se puede probar que si el limite directo de un sistema directo existe, entonces es único salvo isomorfismos.

Así, dado $(X_i, f_{i,j})$ un sistema directo. Si existe el limite directo de este sistema, lo denotaremos por:

$$\varinjlim_{i\in\Delta}(X_i) = \varinjlim(X_i)$$

A nosotros nos interesa los limites directos en la categoría A-**Mod**. Entonces, consideremos un sistema directo $(M_i, \alpha_{i,j})$ en A-**Mod**. Y sea

$$\widehat{M} = \bigsqcup_{i\in\Delta} \big(M_i \times \{i\}\big).$$

En $\widehat{M}$ definamos la siguiente relación $\sim$ definida como sigue:

$$(x, i) \sim (y, j) \text{ en } \widehat{M} \iff \text{ existe } k \in \Delta \text{ tal que } i \leq k,\ j \leq k \text{ y } \alpha_{i,k}(x) = \alpha_{j,k}(y).$$

Lema 1.2.57. $\sim$ *es una relación de equivalencia.*

Dem.
Sean $(x,i),(y,j),(z,k)\in\widehat{M}$.

(*a*) Dado que $i\le i$, y $\alpha_{i,i}(x)=i_{M_i}(x)$, entonces $(x,i)\sim(s,i)$. Por lo tanto, $\sim$ es reflexiva.

(*b*) Supongamos que $(x,i)\sim(y,j)$. Se sigue que existe $k\in\Delta$ tal que $i\le k$, $j\le k$ y $\alpha_{i,k}(x)=\alpha_{j,k}(y)$. Por lo tanto, $\sim$ es simétrica.

(*c*) Supongamos que $(x,i)\sim(y,j)$ y $(y,j)\sim(z,k)$. Existen $k_1,k_2\in\Delta$ tales que

(1) $\alpha_{i,k_1}(x)=\alpha_{j,k_1}(y)$ con $i,j\le k_1$.

(2) $\alpha_{j,k_2}(y)=\alpha_{k,k_2}(z)$ con $j,k\le k_2$.

Por ser Δ dirigido, se sigue que existe $\eta\in\Delta$ tal que $k_1,k_2\le\eta$. Así, $i,k\le\eta$, pues $i\le k_1\le\eta$, se sigue de (1) y (2) que

$$\begin{aligned}\alpha_{i,\eta}(x)&=\alpha_{k_1,\eta}\circ\alpha_{i,k_1}(x)=\alpha_{k_1,\eta}\circ\alpha_{j,k_1}(y)=\alpha_{j,\eta}(y)\\&=\alpha_{k_2,\eta}\circ\alpha_{j,k_2}(y)=\alpha_{k_2,\eta}\circ\alpha_{k,k_2}(z)=\alpha_{k,\eta}(z)\end{aligned}$$

Por tanto, $\sim$ es transitiva.

De $(a),(b)$ y (c) se concluye que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Q.E.D

Sea $X=\widehat{M}/\sim$. Consideremos en X las siguientes operaciones:

- $X\times X\ni\big([(x,i)],[(y,j)]\big)\xmapsto{+}\big[(\alpha_{i,k}(x)+\alpha_{j,k}(y),k)\big]\in X$, donde $i,j\le k$.
- $A\times X\ni\big(a,[(x,i)]\big)\xmapsto{\cdot}\big[(ax,i)\big]\in X$.

Lema 1.2.58. $+,\cdot$ *están bien definidas.*

Dem.
Primero mostremos que $+$ esta bien definida. Para ello, sean $[(x,i)],[(y,j)]\in X$ y $k,k'\in\Delta$ tales que $i,j\le k$ y $i,j\le k'$. Por ser Δ dirigido se sigue que existe $k''\in\Delta$ tal que $k,k'\le k''$.

$$\begin{aligned}\alpha_{k,k''}\big(\alpha_{i,k}(x)+\alpha_{j,k}(y)\big)&=\alpha_{k,k''}\circ\alpha_{i,k}(x)+\alpha_{k,k''}\circ\alpha_{j,k}(y)=\alpha_{i,k''}(x)+\alpha_{j,k''}(y)\\&=\alpha_{k',k''}\circ\alpha_{i,k'}(x)+\alpha_{k',k''}\circ\alpha_{j,k'}(y)=\alpha_{k',k''}\big(\alpha_{i,k'}(x)+\alpha_{j,k'}(y)\big).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\alpha_{i,k}(x)+\alpha_{j,k}(y),k)\sim(\alpha_{i,k'}(x)+\alpha_{j,k'}(y),k')$, de manera que $[(\alpha_{i,k}(x)+\alpha_{j,k}(y),k)]=[(\alpha_{i,k'}(x)+\alpha_{j,k'}(y),k')]$, así, $+$ no depende de la eleccion de k tal que $i,j\le k$.

Ahora, supongamos que $[(x,i)]=[(x',i')]$, $[(y,j)]=[(y',j')]$, se sigue que $(x,i)\sim(x',i')$, $(y,j)\sim(y',j')$, así, existen $k_1,k_2\in\Delta$ tales que $i,i'\le k_1$, $j,j'\le k_2$ y se cumplen las siguientes igualdades:

$$\alpha_{i,k_1}(x)=\alpha_{i',k_1}(x')\qquad\text{y}\qquad\alpha_{j,k_2}(y)=\alpha_{j',k_2}(y').$$

Por ser Δ dirigido, existe $k \in \Delta$ tal que $k_1, k_2 \leq k$. En consecuencia, usando las igualdades previas, tenemos que:

$$\alpha_{i,k}(x) = \alpha_{k_1,k} \circ \alpha_{i,k_1}(x) = \alpha_{k_1,k} \circ \alpha_{i',k_1}(x') = \alpha_{i',k}(x')$$
$$\alpha_{j,k}(y) = \alpha_{k_2,k} \circ \alpha_{j,k_2}(y) = \alpha_{k_2,k} \circ \alpha_{j',k_2}(y') = \alpha_{j',k}(y')$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned}[(x,i)] + [(y,j)] &= [(\alpha_{i,k}(x) + \alpha_{j,k}(y), k)] = [(\alpha_{i',k}(x') + \alpha_{j',k}(y'), k)] \\ &= [(x',i')] + [(y',j')]\end{aligned}$$

Por lo tanto, $+$ esta bien definida.

Finalmente, sea $a \in A$. Dado que $\alpha_{i,k_1}(x) = \alpha_{i',k_1}(x')$, se sigue que $\alpha_{i,k_1}(ax) = \alpha_{i',k_1}(ax')$, esto es, $(ax,i) \sim (ax',i')$, por lo que

$$a \cdot [(x,i)] = [(ax,i)] = [(ax',i')] = a \cdot [(x',i')]$$

Por lo tanto, $+, \cdot$ están bien definidas.

Q.E.D

Proposición 1.2.59. $(X, +, \cdot)$ *es un A-módulo izquierdo.*

Dem.
(a) Veamos que $(X,+)$ es un grupo abeliano. Con esta finalidad, sean $[(x,i)], [(y,j)], [(z,k)] \in X$.

(1) $([(x,i)] + [(y,j)]) + [(z,k)] = [(\alpha_{i,k_1}(x) + \alpha_{j,k_1}(y), k_1)] + [(z,k)]$, donde $i,j \leq k_1$.
$= [(\alpha_{k_1,k_2}(\alpha_{i,k_1}(x) + \alpha_{j,k_1}(y)) + \alpha_{k,k_2}(z), k_2)]$, donde $k, k_1 \leq k_2$
$= [(\alpha_{k_1,k_2} \circ \alpha_{i,k_1}(x) + \alpha_{k_1,k_2} \circ \alpha_{j,k_1}(y) + \alpha_{k,k_2}(z), k_2)] = [(\alpha_{i,k_2}(x) + \alpha_{j,k_2}(y) + \alpha_{k,k_2}(z)), k_2)]$
$= [(\alpha_{i,k_2}(x) + \alpha_{k_2,k_2}(\alpha_{j,k_2}(y) + \alpha_{k,k_2}(z)), k_2)] = [(x,i)] + [(\alpha_{j,k_2}(y) + \alpha_{k,k_2}(z), k_2)]$
$= [(x,i)] + ([(y,j)] + [(z,k_1)])$.

Por lo tanto, $+$ es asociativo.

(2) Como $[(x,i)] + [(0,i)] = [(\alpha_{i,i}(x) + \alpha_{i,i}(0), i)] = [(x,i)] = [(\alpha_{i,i}(0) + \alpha_{i,i}(x), i)] = [(0,i)] + [(x,i)]$. Dado que para cada $i,j \in \Delta$, sea $k \in \Delta$ tal que $i,j \leq k$. Tenemos, $\alpha_{i,k}(0) = \alpha_{j,k}(0)$, por lo que $[(0,i)] = [(0,j)]$. Por lo tanto, $+$ tiene inverso y es: $[(0,i)]$.

(3) Como $[(x,i)] + [(-x,i)] = [(x-x,i)] = [(0,i)] = [(-x+x,i)] = [(-x,i)] + [(x,i)]$. Entonces, $+$ es cerrado bajo inversos.

(4) $[(x,i)] + [(y,j)] = [(\alpha_{i,k}(x) + \alpha_{j,k}(y), k)]$, donde $i,j \leq k$
$= [(\alpha_{j,k}(y) + \alpha_{i,k}(x), k)] = [(y,j)] + [(x,i)]$

Por lo tanto, $+$ es conmutativo.

De (1)-(4) se sigue que $(X,+)$ es un grupo abeliano.

Ahora, sean $[(x,i)], [(y,j)] \in X$ y $a, b \in A$.

(b) $(ab)[(x,i)] = [((ab)x,i)] = [(a(bx),i)] = a[(bx,i)] = a(b[(x,i)])$

(c) $(a+b)[(x,i)] = [((a+b)x,i)] = [(ax+bx,i)] = [(ax,i)] + [(bx,i)] = a[(x,i)] + b[(x,i)]$

(d) $a([(x,i)] + [(y,j)]) = a[(\alpha_{i,k}(x) + \alpha_{j,k}(y), k)] = [(a\alpha_{i,k}(x) + a\alpha_{j,k}(y), k)]$, donde $i,j \leq k$
$= [(\alpha_{i,k}(ax) + \alpha_{j,k}(ay), k)] = [(ax,i)] + [(ay,j)]$

$$= a[(x,i)] + a[(y,j)].$$

(e) $1[(x,i)] = [(1x,i)] = [(x,i)]$.

De $(a),(b),(c),(d)$ y (e) se concluye que $(X,+,\cdot)$ es un A-modulo izquierdo.

Q.E.D

Ahora, para cada $i \in \Delta$. Sea $M_i \ni x \xmapsto{\phi_i} [(x,i)] \in X$.

Lema 1.2.60. *Para cada $i \in \Delta$, ϕ_i es uan A-homomorfismo, y para cada $i,j \in \Delta$ con $i \leq j$ se tiene que $\phi_i = \phi_j \circ \alpha_{i,j}$.*

Dem.
Sea $i,j \in \Delta$ con $i \leq j$. Veamos que ϕ_i es A-homomorfismo, con esta finalidad, sea $x,y \in M_i$ y $a \in A$, tenemos:

$$\begin{aligned}\phi_i(x+ay) &= [(x+ay,i)] = [(\alpha_{i,i}(x)+\alpha_{i,i}(ay),i)] = [(x,i)] + [(ay,i)]\\ &= [(x,i)] + a[(y,i)] = \phi_i(x) + a\phi(y).\end{aligned}$$

Se sigue que, ϕ_i es un A-homomorfismo. Ahora, para cada $x \in M_i$ se tiene que $\alpha_{j,j}\big(\alpha_{i,j}(x)\big) = \alpha_{i,j}(x)$, es decir, $(\alpha_{i,j}(x),j) \sim (x,i)$, entonces:

$$\phi_j \circ \alpha_{i,j}(x) = \phi_j\big(\alpha_{i,j}(x)\big) = [(\alpha_{i,j}(x),j)] = [(x,i)] = \phi(x).$$

Por lo tanto, $\phi_i = \phi_j \circ \alpha_{i,j}$.

Q.E.D

Observación 1.2.61. *Cada elemento en X tiene la forma $[(x,i)]$ para algún $i \in \Delta$, es decir, $\phi_i(x) = [(x,i)]$, $x \in M_i$. Diremos que x representa a $[(x,i)]$. Ademas tenemos que:*

$$(X,\{\phi_i\}) \in \Omega(M_i,\{\alpha_{i,j}\})$$

Teorema 1.2.62. $(X,\{\phi_i\})$ *es el limite directo de* $(X_i,\alpha_{i,j})$

Dem.
Sea $(Y,\{\psi_i\}) \in \Omega(M_i,\{\alpha_{i,j}\})$. Consideremos la siguiente relación $X \ni [(x,i)] \xmapsto{u} \psi_i(x) \in Y$.

Veamos que u es función, es decir, que esta bien definida. Con esta finalidad, supongamos que $[(x,i)] = [(y,j)]$, se sigue que $(x,i) \sim (y,j)$, así, existe $k \in \Delta$ con $i,j \leq k$ tal que $\alpha_{i,k}(x) = \alpha_{j,k}(y)$. Se sigue que

$$u(x) = \psi_i(x) = \psi_k \circ \alpha_{i,k}(x) = \psi_k \circ \alpha_{j,k}(y) = \psi_j(y)$$

por tanto, u esta bien definida.

Veamos que u es morfismo de módulos. Sean $[(x,i)],[(y,j)] \in X$, $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}u([(x,i)] + a[(y,j)]) =& u([(x,i)] + [(ay,j)]) = u([(\alpha_{i,k}(x)+\alpha_{j,k}(ay),k)]) \qquad \text{donde} \quad i,j \leq k\\ =& \psi_k(\alpha_{i,k}(x)+\alpha_{j,k}(ay)) = \psi_k \circ \alpha_{i,k}(x) + \psi_k \circ \alpha_{j,k}(ay)\\ =& \psi_i(x) + \psi_j(ay) = \psi_i(x) + a\psi_j(y) = u([(x,i)]) + au([(y,j)])\end{aligned}$$

Por lo tanto, u es morfismo.

Ahora, sea $x \in M_i$, $y \in M_j$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
u \circ \phi_i(x) =& u([(x,i)]) = \psi_i(x) \\
u \circ \phi_j(y) =& u([(y,j)]) = \psi_j(y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "\alpha_{i,j}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & M_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd} \tag{i}
$$

Finalmente, veamos la unicidad de u. Supongamos que $u' : X \longrightarrow Y$ es tal que sustituyéndolo en el diagrama (i) en lugar de u también hace conmutar el diagrama. Entonces, para cada $[(x,i)] \in X$ $u'([(x,i)]) = u' \circ \phi_i(x) = \psi_i(x) = u \circ \phi_i(x) = u([(x,i)])$. Por tanto, $u = u'$.

Q.E.D

■ **Ejemplo 1.2.63.** *Sea $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_n \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ una sucesión de A-homomorfimos, donde $i \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto dirigido donde $\leq$ es el orden usual. Ahora, para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ con $i \leq i$ sea $f_{i,j} := f_{j-1} \circ \cdots \circ f_i$ si $i \neq j$ y si $i = j$, entonces $f_{i,i} := \mathrm{id}_{M_i}$. El par $(M_i, M_{i,j})$ es un sistema directo, pues si $i \leq j \leq k$, entonces $f_{i,k} = f_{k-1} \circ \cdots f_j \circ f_{j-1} \circ \cdots \circ f_i = f_{j,k} \circ f_{i,j}$. Por lo tanto, el limite directo $\varinjlim_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ existe y es A-módulo izquierdo, donde para cada $i \in \mathbb{Z}$,*

$$
M_i \ni m_i \overset{\phi_i}{\longmapsto} [(m_i, i)] \in \varinjlim M_i
$$

*Se llamará **limite directo asociado a la sucesión**.*

Observación 1.2.64. *Si $[(m_i, i)] \in \varinjlim M_i$, entonces para todo $k \geq i$ se cumple que*

$$
[(m_i, i)] = [(f_{i,k}(m_i), k)],
$$

pues $f_{i,k}(m_i) = f_{k,k}(f_{i,k}(m_i))$.

Proposición 1.2.65. *Sea $\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_n \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$ una sucesión de homomorfismos de anillos conmutativos. Entonces $\varinjlim_{i \in \mathbb{Z}} A_i \in \mathbb{Z}$-**Mod** tiene estructura de anillo, con el siguiente producto: Para cada $[(x_i, i)], [(x_j, j)] \in \varinjlim A_i$*

$$
[(x_i, i)] * [(x_j, j)] = [(f_{i,k}(x_i) f_{j,k}(x_j), k)] \ \text{ donde } i \leq k \text{ y } j \leq k
$$

Dem.
Sea $\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_n \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$ una sucesión de homomorfismos de anillos conmutativos. En particular, es una sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos izquierdos, es decir, el limite directo asociado $A := \varinjlim_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ existe y es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo.

(1) Veamos que $*$ esta bien definida: sean $[(x_i,i)],[(x_j,j)] \in A$, $k,l \in \mathbb{N}$ tales que $k,l \geq i,j$ y sea $\delta = \text{máx}\{k,l\}$, entonces

$$f_{k,\delta}\left(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j)\right) = f_{i,\delta}(x_i)f_{j,\delta}(x_j) = f_{l,\delta}\left(f_{i,l}(x_i)f_{j,l}(x_j)\right)$$

así $[(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j),k)] = [(f_{i,l}(x_i)f_{j,l}(x_j),l)]$, por lo que no importa el valor de l mientras se cumple que $l \geq i,j$. Ahora, supongamos que $[(x_i,i)] = [(x_{i'},i')]$ y $[(x_j,j)] = [(x_{j'},j')]$, entonces existe $i'',j'' \in \mathbb{N}$ tales que $i,i' \leq i''$, $j,j' \leq j''$ y cumplen que $f_{i,i''}(x_i) = f_{i',i''}(x_{i'})$ y $f_{j,j''}(x_j) = f_{j',j''}(x_{j'})$. Sean $k \geq i,j$, $k' \geq i',j'$ y $\delta = \text{máx}\{k,k',i'',j''\}$. Dado que $f_{i,i''}(x_i) = f_{i',i''}(x_{i'})$ y $f_{j,j''}(x_j) = f_{j',j''}(x_{j'})$, entonces

$$f_{i,\delta}(x_i) = f_{i',\delta}(x_{i'}) \tag{1.1}$$
$$f_{j,\delta}(x_j) = f_{j',\delta}(x_{j'}) \tag{1.2}$$

Por definición:

$$[(x_i,i)]*[(x_j,j)] = [(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j),k)] \text{ y } [(x_{i'},i')]*[(x_{j'},j')] = [(f_{i',k'}(x_{i'})f_{j',k'}(x_{j'}),k')].$$

Mostremos que los productos $f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j)$ y $f_{i',k'}(x_{i'})f_{j',k'}(x_{j'})$ están relacionados. Dado que $k,k' \leq \delta$, entonces:

$$f_{k,\delta}\left(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j)\right) = f_{i,\delta}(x_i)f_{j,\delta}(x_j) \tag{1.3}$$
$$f_{k',\delta}\left(f_{i',k'}(x_{i'})f_{j',k'}(x_{j'})\right) = f_{i',\delta}(x_{i'})f_{j',\delta}(x_{j'}) \tag{1.4}$$

Combinando 1.1, 1.2 con 1.3 y 1.4, se concluye que $*$ esta bien definido.

(2) Veamos que $*$ es asociativa: sean $[(a_i,i)],[(a_j,j)],[(a_k,k)] \in A$ y $w \geq i,j,k$, entonces

$$\begin{aligned}
[(a_i,i)]*([(a_j,j)]*[(a_k,k)]) &= [(a_i,i)]*[(f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]\\
&= [(f_{i,w}(a_i)f_{w,w}\left(f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k)\right),w)]\\
&= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
([(a_i,i)]*[(a_j,j)])*[(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j),w)]*[(a_k,k)]\\
&= [(f_{w,w}\left(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)\right)f_{k,w}(a_k),w)]\\
&= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $*$ es asociativo.

(3) $[(1,1)]$ es la unidad de A, pues si $[(a_i,i)] \in A$ y $k \geq 1,i$ entonces

$$\begin{aligned}
[(1,1)]*[(a_i,i)] = [(f_{1,k}(1)f_{i,k}(a_i),k)] = [(f_{i,k}(a_{i,k}),k)] = [(a_i,i)],\\
[(a_i,i)]*[(1,1)] = [(f_{i,k}(a_i)f_{i,k}(1),k)] = [(f_{i,k}(a_{i,k}),k)] = [(a_i,i)]
\end{aligned}$$

(4) Veamos que $*$ es distributiva por la izquierda. Sean $[(a_i,i)],[(a_j,j)],[(a_k,k)] \in A$ y $w \geq i,j,k$ entonces

$$\begin{aligned}
[(a_i,i)]*([(a_j,j)]+[(a_k,k)]) &= [(a_i,i)]*[(f_{j,w}(a_j)+f_{k,w}(a_k),w)]\\
&= [(f_{i,w}(a_i)f_{w,w}\left(f_{j,w}(a_j)+f_{k,w}(a_k)\right),w)]\\
&= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)+f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
[(a_i,i)]*[(a_j,j)]+[(a_i,i)]*[(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j),w)]+[(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)]\\
&= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)+f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $*$ es distributivo por la izquierda.

(5) Veamos que $*$ es distributiva por la izquierda. Sean $[(a_i,i)],[(a_j,j)],[(a_k,k)] \in A$ y $w \geq i,j,k$ entonces

$$\begin{aligned}([(a_i,i)]+[(a_j,j)])*[(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i)+f_{j,w}(a_j),w)]*[(a_k,k)] \\ &= [(f_{w,w}\left(f_{i,w}(a_i)+f_{j,w}(a_j)\right)f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k)+f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[(a_i,i)]*[(a_k,k)]+[(a_j,j)]*[(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)]+[(f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k)+f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

Por lo tanto, $*$ es distributivo por la derecha.

Se concluye de (1)-(5) que $A = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ es un anillo.

Q.E.D

1.3. Teoría de categorías

1.3.1. Categorías

Teoría de categorías son el terreno para discutir propiedades generales de sistemas como los grupos, anillos, módulos, conjuntos, o espacios topologicos, con sus respectivas tranformaciones: homomorfismos, funciones, o funciones continuas.

Hay "paradojas"bien conocidas en la teoría de conjuntos que muestran que surgen contradicciones si no tenemos cuidado acerca de como se usan los términos indefinidos de çonjuntoz .elemento". Por ejemplo, la **"La paradoja de Russell's"** nos da una contradicción al considerar toda colección como un conjunto. Definamos a un conjunto de Rusell como un conjunto S que no es miembro de si mismo; esto es, $S \notin S$, y definamos Ω como la collección de todos los conjuntos de Russell. Entonces, Ω es un conjunto de Russell o no lo es. Si Ω es un conjunto de Russell, entonces $\Omega \notin \Omega$, pero todo conjunto de Russell esta en Ω luego $\Omega \in \Omega$, lo cual es una contradicción. En otras palabras, si Ω no es un conjunto de Russell, entonces $\Omega \notin \Omega$, pero ese es el criterio de ser un conjunto de Russell, lo cual es una contradicción.

Vamos a dar un poco más de detalle. Los axiomas de Zermelo-Fraenkel tiene términos primitivos como *clase* y reglas para la construcción de clases, así como también para la construcción de ciertas clases especiales, llamados **conjuntos**. Por ejemplo, las clases finitas y los números naturales $\mathbb{N}$ son asumidos como conjuntos. Una clase se llama **pequeña** si tiene un número cardinal, y es un teorema que una clase es un conjunto si y solo si es pequeña; una clase que no es un conjunto se llama **clase propia**. Por ejemplo, $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son conjuntos, la colección de todos los conjuntos es una clase propia, y la colección Ω de todas las clases de Russell nisiquiera es una clase. Para mayor profundidad en esta dirección, revisar un buen texto de teoría de conjuntos.

Nosotros estaremos más sobre la teoría de conjuntos. En la practica, cuando surge una clase, hay tres posibilidades; es un conjunto; es una clase propia; no es una clase del todo (una consecuencia de los axiomas es que se prohíbe que una clase propia sea elemento de alguna clase). En este escrito, no nos preocuparemos por la posibilidad de que una supuesta clase no sea una clase.

Definición 1.3.1. *Una **categoría** $\mathcal{C}$ consiste de tres ingredientes; una clase de objetos* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*, para cada* $(A,B) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *un conjunto de morfimos* $\mathrm{Hom}(A,B)$*, y para cada* $A,B,C \in \mathrm{Obj}(C)$ *una composición* $\circ : \mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C)$*, denotado por*

$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

Nosotros a menudo escribiremos $f : A \longrightarrow B$ *o* $A \xrightarrow{f} B$ *en lugar de* $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$*. Estos ingredientes están sujetos a los siguientes axiomas:*

(*i*) *Los conjuntos de* Hom *son disjuntos por pares: Esto es, si* $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ *tiene un único* ***domino*** A *y un único* ***codominio*** B.

(*ii*) *Para cada* $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, *existe un* ***morfismo identidad*** $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}\,(A,A)$ *tal que para todo* $f \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ *se tiene que* $f \circ \mathrm{id}_{_A} = f$ *y* $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

(*iii*) *La composición es asociativa: Dados morfismos* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, *entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Proposición 1.3.2. *Los morfismos identidad de una categoría* $\mathcal{C}$ *son únicos.*

Dem.
Sea $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y supongamos que $h \in \mathrm{Hom}\,(A,A)$ es morfismo identidad, entonces

$$\mathrm{id}_{_A} = \mathrm{id}_{_A} \circ h = h$$

Por lo tanto, los morfismos identidad son únicos.

Q.E.D

■ **Ejemplos 1.3.3.** (1) ***Ab***. *Sus objetos son los grupos abelianos, los morfismos son los homomorfismos de grupos, y la composición es la composición usual.*

(2) ***Anillos***. *Sus objetos son los anillos, los morfismos son los homomorfismos de anillos, y la composición es la composición usual. Nosotros asumimos que los anillos* A *tiene elemento identidad* 1, *pero no exigimos que* $1 \neq 0$. *(Puede ser* $1 = 0$, *sin embargo, ya que* $1a = a$, *para todo* $a \in A$ *muestra que* $a = 0$, *pues* $0a = 0$. *En este caso llamamos a* A *el anillo zero.) Estamos de acuerdo que como parte de la definición, que* $\varphi(1) = 1$ *para cada homomorfismo de anillos* φ. *Ya que la inclusion* $S \longrightarrow A$ *de un subanillo debe ser un homomorfismo, esto se sigue del hecho que el elemento unidad 1 en un subanillo* S *debe ser el mismo que el elemento* 1 *en* A.

(3) ***ConmAnillos***. *Sus objetos son los anillos conmutativos, los morfismos son los homomorfismos de anillos, y la composición es la composición usual.*

Definición 1.3.4. *Una categoría* $\mathcal{S}$ *es una* ***subcategoría*** *de una categoría* $\mathcal{C}$ *si*

(*i*) $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$,

(*ii*) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}\,(M,N) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N)$ *para todo* $M, N \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{S})$, *donde mosotros denotamos a los conjuntos* Hom *en* $\mathcal{S}$ *por* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}\,(\Box,\Box)$,

(*iii*) *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}\,(M,N)$ *y* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}\,(N,K)$, *entonces la composición* $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}\,(M,K)$ *es igual a la composición* $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,K)$,

(*iv*) *Si* $M \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{S})$, *entonces el morfismo identidad* $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}\,(M,M)$ *es igual a la identidad* $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,M)$

Una subcategoría $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{C}$ *es* ***plena*** *si para todo* $M, N \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{S})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}\,(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N)$.

Definición 1.3.5. *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría, definamos su* ***categoría opuesta*** $\mathcal{C}^{op}$ *es la categoría con* $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, *con morfismos* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}\,(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(N,M)$ *(podriamos escribir los morfismos en* $\mathcal{C}^{op}$ *como* f^{op}, *donde* f *es un morfismo en* $\mathcal{C}$*) y con composición el inverso de la de* $\mathcal{C}$*; esto es,* $g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$

Ilustramos la composición en $\mathcal{C}^{op}$: un diagrama $C'' \xrightarrow{f^{op}} C' \xrightarrow{g^{op}} C$ en $\mathcal{C}^{op}$ corresponde al diagrama $C \xrightarrow{g} C' \xrightarrow{f} C''$ en $\mathcal{C}$. Las categorías opuestas son difíciles de visualizar. Por ejemplo en $\mathbf{Sets}^{op}$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{op}}(X, \emptyset)$, para cada conjunto X, tiene exactamente un elemento, a saber, ι^{op}, donde ι es la inclusión $\emptyset \longrightarrow X$ en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\emptyset, X)$. Pero $\iota^{op} : X \longrightarrow \emptyset$ no puede ser una función, porque no hay funciones de un conjunto no vacio al conjunto vació.

Definición 1.3.6. *Un morfismo $f : C \longrightarrow C'$ en una categoría $\mathcal{C}$ es in* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo $g : C' \longrightarrow C$ en $\mathcal{C}$ con*

$$g \circ f = \mathrm{id}_C \ \ y \ f \circ g = \mathrm{id}_{C'}$$

El morfismo g se llama ***inverso*** *de f*

Las siguientes definiciones son muy conocidas pero no esta demás mencionarlas.

Definición 1.3.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$. Diremos que $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es un coproducto de $\{X_i\}_{i\in I}$ si y solo si existe una familia de morfismos $\{\iota_i : X_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ llamados* ***inyecciones canónicas****, tal que para cualquier otro objeto Y y una familia de morfismos $\{f_i : X_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ existe un único $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que $f_i = f \circ \iota_i$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta para cualquier $i \in I$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ X_j \arrow[u, "\iota_j"] \arrow[r, "f_j"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dicho objeto, es usualmente denotado por $\bigoplus_{i\in I} X_i$ o $\coprod_{i\in I} X_i$.

Definición 1.3.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$. Diremos que $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es un* ***producto*** *de $\{X_j\}_{j\in J}$ si y solo si existe una familia de morfismos $\{\pi_j : X \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$ llamados* ***proyecciones canónicas****, tal que para cualquier otro objeto Y y una familia de morfismos $\{f_j : Y \longrightarrow X_j\}_{j\in J}$ existe un único $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cualquier $j \in J$:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

El producto se denota como $\prod_{j\in J} X_j$; si $I = \langle 1, \ldots, n\rangle$, entonces se denota como $X_1 \times \cdots \times X_n$ y el morfismo producto como $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$.

1.3.2. Funtores

Los funtores son los homomorfismos de las categorías.

Definición 1.3.9. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, entonces un* ***funtor (covariante)*** *$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una aplicación tal que*

(*i*) *Si $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, entonces $F(M) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$,*

(*ii*) *Para $f : M \longrightarrow N$ en $\mathcal{C}$, entonces $F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$ esta en $\mathcal{D}$.*

(iii) *Para* $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$ *en* $\mathcal{C}$*, entonces* $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(G)} F(K)$ *esta en* $\mathcal{D}$*. y*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f),$$

(iv) *Para cada* $M \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ $F\,(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)}$.

■ **Ejemplos 1.3.10.** *(i)* *Si* $\mathcal{S}$ *es una subcategoría de una categoría* $\mathcal{C}$ *, entonces la definición de subcategoría podría rescribirse diciendo que la inclusión* $I : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$ *es un funtor [esta es la razón de la precencia del axioma (iv) en la definición 1.3.9].*

(ii) *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría, entonces el* ***funtor identidad*** $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *es definido por* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(M) = M$ *para todo objeto* M *y* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ *para todo morfismo* f.

(iii) *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría y* $M\,\mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$*, entonces el funtor* $\mathrm{Hom}\,(M, \square) : \mathcal{C} \longrightarrow$ ***Sets****, definido por*

- *Para todo* $N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*,* $N \xmapsto{\mathrm{Hom}(M,\square)} \mathrm{Hom}\,(M, N)$.
- *Para cada* $f : N \longrightarrow N'$ *en* $\mathcal{C}$*, entonces* $\mathrm{Hom}\,(M, N) \ni h \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,f)} \in f \circ h\,\mathrm{Hom}\,(M, N')$.

  Denotamos a $\mathrm{Hom}\,(M, f)$ *como* f_*

Dada la importancia de este ejemplo daremos a detalle cada parte de la definición de funtor. Primero, la definición de categoría dice que $\mathrm{Hom}\,(M, N)$ *es un conjunto. Veamos que el inciso (ii) de la definición 1.3.9 se cumple; sea* $N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} K$ *en* $\mathcal{C}$ *y* $h \in \mathrm{Hom}\,(M, N)$*, tenemos que*

$$(g \circ f)_*(h) = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ f_*(h) = g_*(f_*(h)) = (g_* \circ f_*)(h)$$

Por lo tanto $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Finalmente, para $\mathrm{id}_N \in \mathrm{Hom}\,(N, N)$ *y* $h \in \mathrm{Hom}\,(M, N)$ *tenemos*

$$(\mathrm{id}_N)_*\,(h) = \mathrm{id}_N \circ h = h$$

Por lo tanto, $(\mathrm{id}_N)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(M,N)}$.

En consecuencia $\mathrm{Hom}\,(M, \square)$ *es un funtor.*

(iv) *Define el* ***funtor olvidadizo*** U : ***Grp*** $\rightarrow$ ***Sets*** *como sigue: para un grupo* G*,* $U\,(G)$ *es el conjunto que subyace de* G *y para un homomorfismo de grupos* f*,* $U(f)$ *es* f *considerado únicamente como función. Estrictamente hablando, un grupo* G *es un par ordenado* (G, μ) *[donde* G *es su (subyacente) conjunto y* $\mu : G \times G \longrightarrow G$ *es su operación], y* $U\,((G, \mu)) = G$*; el funtor* U *olvida la operación y recuerda solo el conjunto. Hay muchas variantes. Por ejemplo un anillo es una triple ordenada* (A, α, μ) *[donde* $\alpha : A \times A \longrightarrow A$ *es la suma y* $\mu : A \times A \longrightarrow A$ *es la multiplicación], hay funtores olvidadizos* U' : ***Anillos*** $\longrightarrow$ ***Ab*** *con* $U\,(A, \alpha, \mu) = (A, \alpha)$ *el grupo aditivo de* A*, y* U'' : ***Anillos*** $\longrightarrow$ ***Sets*** *con* $U''\,(A, \alpha, \mu) = A$*, el conjunto.*

Un segundo tipo de funtores que invierte morfismos.

Definición 1.3.11. *Un* ***funtor contravariante*** $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$*, donde* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *son categorías, es una asociación tal que*

(i) *Si* $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$*, entonces* $G\,(C) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$*,*

(ii) *Para cada* $f : C \longrightarrow C'$ *en* $\mathcal{C}$*,* $G\,(f) : G\,(C') \longrightarrow G\,(C)$ *esta en* $\mathcal{D}$

(iii) *Para* $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$ *en* $\mathcal{C}$, $G(C'') \xrightarrow{G(g)} G(C') \xrightarrow{G(f)} (C)$ *esta en* $\mathcal{D}$ *y*

$$G(g \circ f) = G(f) \circ G(g),$$

(iv) *Para todo* $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $G(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{G(C)}$.

■ **Ejemplo 1.3.12.** *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría y* $N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, *entonces el funtor contravariante* $\mathrm{Hom}(\square, N) : \mathcal{C} \longrightarrow$ ***Sets***, *es definido para todo* $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *por*

$$\mathrm{Hom}(C, N),$$

y si $f : C \longrightarrow C'$ *esta en* $\mathcal{C}$, *entonces* $\mathrm{Hom}(f, N) : \mathrm{Hom}(C', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, N)$ *es dado por*

$$\mathrm{Hom}(f, N) : h \mapsto h \circ f$$

Generalmente denotamos al morfismo inducido $\mathrm{Hom}(f, N)$ *como* f^*. *Dada la importancia de este ejemplo, ilustremos que efectivamente* $\mathrm{Hom}(\square, N)$ *es un funtor contravariante. Dados morfismos:*

$$C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C'',$$

Sea $h \in \mathrm{Hom}(C'', N)$,

$$(g \circ f)^*(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = g^*(h) \circ f = f^*(g^*(h)) = f^* \circ g^*(h)$$

Por lo que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Finalmente, si $h \in \mathrm{Hom}(C, N)$, *entonces*

$$(\mathrm{id}_C)^*(h) = h \circ \mathrm{id}_C = h$$

Por lo tanto, $(\mathrm{id}_C)^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(C,C)}$.

Proposición 1.3.13. *Sea* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *un funtor covariante [contravariante]. Si* $f : C \longrightarrow C'$ *es un isomorfismo en* $\mathcal{C}$, *entonces* $F(f)$ *es un isomorfismo en* $\mathcal{D}$.

Dem.
Sea $g : C' \longrightarrow C$ el inverso de f; esto es,

$$g \circ f = \mathrm{id}_C \text{ y } f \circ g = \mathrm{id}_{C'}$$

Así,

$$\mathrm{id}_{F(C)} = F(\mathrm{id}_C) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad [= f(f) \circ F(g)].$$
$$\mathrm{id}_{F(C')} = F(\mathrm{id}_{C'}) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), \quad [= f(g) \circ F(f)].$$

En cualquier caso $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

Q.E.D

Esta proposición ilustra, ciertamente en un nivel bajo, una razón del por qué es útil dar definiciones categóricas: los funtores pueden reconocer definiciones únicamente en términos de objetos, morfismos y diagramas.

Definición 1.3.14. *Sean* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$ *categorías abelianas y se* $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ *un funtor covariante, sea* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de objetos de* $\mathcal{B}$, *entonces*

(1) F *es* ***semi-exacto*** *si* $F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K)$ *es exacto.*

(2) F *es* ***exacto izquierdo*** *si* $0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K)$ *es exacto.*

(3) F *es* ***exacto derecho*** *si* $F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K) \longrightarrow 0$ *es exacto.*

(4) F *es* ***exacto*** *si* $0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K) \longrightarrow 0$ *es exacto.*

1.3.3. Transformaciones naturales

Así como los homomorfismos comparan objetos algebraicos y los funtores comparan categorías, las transformaciones naturales comparan funtores.

Definición 1.3.15. *Sean $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores covariantes. Una **tranformación natural** $\tau : F \longrightarrow G$ es una familia de morfismos en $\mathcal{D}$,*

$$\tau = \{\tau_C : F(C) \longrightarrow G(C)\}_{C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$$

tal que el siguiente diadrama conmuta para cada $f : C \longrightarrow C'$ en $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd}$$

*Un **isomorfismo natural** es una transformación natural tal que para cada τ_C es un isomorfismo.*

Las transformaciones naturales entre funtores covariantes son definidos de manera similar (remplazando $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}^{op}$). A partir de aquí diremos únicamente funtor cuando nos refiramos a funtor covariante.

Las transformaciones lineales pueden ser compuestas. Si $\tau : F \longrightarrow G$ y $\sigma : G \longrightarrow H$ son transformaciones lineales, donde $F, G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ son funtores, entonces definimos $\sigma \circ \tau : F \longrightarrow H$ por

$$(\sigma \circ \tau)_C = \sigma_C \circ \tau_C$$

para todo $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Es fácil verificar que $\sigma \circ \tau$ es una transformación natural.

Para cada funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, se define la **transformación natural identidad** $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow F$ como sigue; para cada $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $(\mathrm{id}_F)_C : F(C) \longrightarrow F(C)$ es el morfismo identidad $\mathrm{id}_{F(C)}$.

Proposición 1.3.16. *Una transformación natural $\tau : F \longrightarrow G$ es un isomorfismo natural si y solo si existe una transformación natural $\sigma : G \longrightarrow F$ tal que*

$$\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_F \;\; y \; \tau \circ \sigma = \mathrm{id}_G$$

■ **Ejemplo 1.3.17.** *Tomamos el conjunto de un punto $P = \{p\}$. Afirmamos que $\mathrm{Hom}\,(P, \square) :$ **Sets** $\longrightarrow$ **Sets** es un isomorfismo natural al funtor identidad en **Sets**. Si X es un conjunto, definimos*

$$\mathrm{Hom}\,(P, X) \ni f \xmapsto{\tau_X} f(p) \in X.$$

Cada τ_X es una biyección, ahora mostremos que τ es una transformación natural. Sean X, Y conjuntos, y sea $h : X \longrightarrow Y$; debemos mostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}\,(P, X) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\tau_X"'] & \mathrm{Hom}\,(P, Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ X \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sea $f \in \mathrm{Hom}\,(P, X)$,

$$\tau_Y \circ h_*\,(f) = \tau_Y\,(h \circ f) = (h \circ f)\,(p) = h\,(f(p)) = h\,(\tau_X\,(f)) = h \circ \tau_X\,(f)$$

Por lo tanto, τ es un isomorfismo natural.

Notación. Si $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ son funtores de la misma variante, entonces

$$\mathrm{Nat}\,(F,G) = \{\tau : F \longrightarrow G : \tau \text{ es transformación natural}\}\,.$$

En general, $\mathrm{Nat}\,(F,G)$ podría no ser una clase, incluso si es una clase, podría ser una clase propia. El siguiente teorema muestra que $\mathrm{Nat}\,(F,G)$ es un conjunto cuando $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M, \square)$.

Teorema 1.3.18 (Lema de Yoneda). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, sea $M \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, y sea $G : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Sets** un funtor covariante. Entonces existe una biyección*

$$\mathrm{Nat}\,(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,\square)\,, G) \ni \tau \xrightarrow{y} \tau_{M}\,(\mathrm{id}_{M}) \in G(A).$$

Dem.
Si $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,\square) \longrightarrow G$ es una transformación natural, entonces $y(\tau) = \tau_{M}\,(\mathrm{id}_{M}) \in G\,(M)$ porque $\tau_{M} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,M) \longrightarrow G(M)$ por lo tanto y esta bien definida.

Para cada $N \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N)$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,M) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & G(M) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N) \arrow[r, "\tau_N"'] & G(N)
\end{tikzcd}$$

Así que,

$$G(\varphi) \circ \tau_{M}\,(\mathrm{id}_{M}) = \tau_{N} \circ \varphi_*\,(\mathrm{id}_{M}) = \tau_{N}\,(\varphi \circ \mathrm{id}_{M}) = \tau_{N}\,(\varphi)$$

Veamos que y es inyectiva: Para ello,s ea $\sigma : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,\square) \longrightarrow G$ otra transformación natural tal que $y(\tau) = y(\sigma)$, es decir, $\tau_{M}\,(\mathrm{id}_{M}) = \sigma_{M}\,(\mathrm{id}_{M})$, entonces para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N)$ tenemos que

$$\tau_{N}\,(\varphi) = G(\varphi) \circ \tau_{M}\,(\mathrm{id}_{M}) = G(\varphi) \circ \sigma_{M}\,(\mathrm{id}_{M}) = \sigma_{N}\,(\varphi)$$

Esto es, $\sigma_{N} = \tau_{N}$, y como N es arbitrario, entonces $\sigma = \tau$. Por lo tanto, y es inyectiva.

Ahora, veamos que y es sobreyctiva: Sea $x \in G(M)$. Para $N \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N)$, definimos

$$\tau_{N}\,(\psi) = G(\psi)(x)$$

[Notemos que $G(\psi) : G(M) \longrightarrow G(N)$, así que $G(\psi)(x) \in G(N)$]. Afirmamos que τ es una transformación natural, nos resta verificar que el siguiente diagrama conmuta para $\theta : N \longrightarrow K$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N) \arrow[r, "\tau_N"] \arrow[d, "\theta_*"'] & G(N) \arrow[d, "G(\theta)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,K) \arrow[r, "\tau_K"'] & G(K)
\end{tikzcd}$$

Sea $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(M,N)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
G(\theta) \circ \tau_{N}\,(\psi) &= G\,(\theta)\,(G(\psi)(x)) = (G(\theta) \circ G(\psi))\,(x) = G(\theta \circ \psi)(x) \\
&= \tau_{K}\,(\theta \circ \psi) = \tau_{K}\,(\theta_*(\psi)) = \tau_{N} \circ \theta_*(\psi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, τ es una transformación natural. Ahora, $y\,(\tau) = \tau_{M}\,(\mathrm{id}_{M}) = G\,(\mathrm{id}_{M})\,(x) = \mathrm{id}_{G(M)}(x) = x$, y así y es una biyección.

Q.E.D

Definición 1.3.19. *Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Sets** es **representable** si existe un objeto $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square)$.*

En el siguiente resultado la parte más interesante es la (iii), el cual dice que si F es representable, entonces el objeto es único salvo isomorfismos.

Corolario 1.3.20. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $M, N \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.*

(i) *Si $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \square)$ es una transformación natural, entonces para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, tenemos que $\tau_{\mathcal{C}} = \psi^*$, donde $\psi = \tau_M(\mathrm{id}_M) : N \longrightarrow M$ y el morfismo inducido esta dado por*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C) \ni \varphi \xrightarrow{\psi^*} \varphi \circ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, C)$$

. Más aún, el morfismo ψ es único. Si $\tau_{\mathcal{C}} = \theta^*$, entonces $\theta = \psi$.

(ii) *Sean $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \square) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, \square)$ transformaciones naturales. Si $\sigma_C = \eta^*$ y $\tau_C = \psi^*$ para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, entonces*

$$(\sigma \circ \tau)_C = (\psi \circ \eta)^* .$$

(iii) *Si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \square)$ son funtores naturalmente isomorfos, entonces $M \cong N$ (El inverso también es cierto)*

Dem.
(i) Si denotamos $\tau_M(\mathrm{id}_M) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M)$ por ψ, entonces el lema Yoneda dice que para cada $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C)$, que $\tau_{\mathcal{C}}(\varphi) = \varphi_*(\psi)$. Pero, $\varphi_*(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi^*(\varphi)$. La unicidad se sigue de la inyectividad de la función y del lema de Yoneda.

(ii) Por la parte (i), hay un único morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M)$ y $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, N)$ con

$$\tau_{\mathcal{C}}(\varphi) = \psi^*(\varphi) \quad \text{y} \quad \sigma_{\mathcal{C}}(\varphi') = \eta^*(\varphi')$$

Para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C)$ y $\varphi' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, C)$. Por definición, $(\sigma \circ \tau)_C = \sigma_C \circ \tau_C$ y así

$$(\sigma \circ \tau)_C(\varphi) = \sigma_C(\psi^*(\varphi)) = \eta^* \circ \psi^*(\varphi) = (\psi \circ \eta)^*(\varphi).$$

(iii) Si $\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \square)$ es un isomorfismo natural, entonces hay un isomorfismo natural $\sigma : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, \square) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \square)$ con $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,\square)}$ y $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,\square)}$. Por la parte (i), hay un morfismo $\psi : N \longrightarrow M$ y $\eta : M \longrightarrow N$ con $\tau_C = \psi^*$ y $\sigma_C = \eta^*$ para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Por la parte (ii), tenemos $\tau \circ \sigma = \psi^* \circ \eta^* = (\eta \circ \psi)^* = \mathrm{id}_N^*$ y $\sigma \circ \tau = (\psi \circ \eta)^* = \mathrm{id}_M^*$. La unicidad en la parte (i) obtenemos que $\psi \circ \eta = \mathrm{id}_M$ y $\eta \circ \psi = \mathrm{id}_N$, asi que $\eta : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo.

Q.E.D

■ **Ejemplo 1.3.21.** *Informalmente, si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, la **categoría funtor** $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ tiene como objetos los funtores covariantes $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y como sus morfismos todas las transformaciones naturales. Cada funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tiene una transformación natural identidad $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow F$, y composición de transformaciones naturales es una transformación natural. Pero hay aquí un problema de teoría de conjuntos:* $\mathrm{Nat}(F, G)$ *necesita ser un conjunto. Recordemos que una categoría $\mathcal{A}$ es pequeña si la clase* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *es un conjunto; es este caso,* $\mathrm{Nat}(F, G)$ *es un conjunto, y así la definición formal de categoría de funtores $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ requiere que $\mathcal{C}$ sea una categoría pequeña.*

Corolario 1.3.22 (**Encaje de Yoneda**). *Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, entonces existe un funtor $Y : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Sets}^{\mathcal{C}}$ que es inyectiva en objetos y cuya imagen es una subcategoría plena de $\boldsymbol{Sets}^{\mathcal{C}}$*

Dem.
Definimos Y sobre los objetos por $Y(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \Box)$. Si $C \neq C'$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \Box) \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(C, \Box)$ (definición de categoría); esto es, $Y(C) \neq Y(C')$, y así Y es inyectiva en objetos. Si $\psi : C' \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces hay una transformación natural $Y(\psi) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \Box) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', \Box)$ con $Y(\psi)_C = \psi$ para cada $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, por el corolario 1.3.20(i). Ahora, por el corolario 1.3.20(ii) tenemos $Y(\psi \circ \eta) = Y(\eta) \circ Y(\psi)$, y así Y es un funtor contravariante. Finalmente, la sobreyectividad de la función de Yoneda y en el teorema 1.3.19 muestra que cada transformación natural $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \Box) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', \Box)$ surge como $Y(\psi)$ para algún ψ. Por lo tanto, la imagen de Y es una subcategoria plena de la categoría de funtores $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}}$.

Q.E.D

Capítulo 2

Teorías de torsión y preradicales

2.1. Pre-radicales y teorías de torsión

Definición 2.1.1. *Un pre-radical sobre A-**Mod** es una asociación $r : A\text{-}\boldsymbol{Mod} \longrightarrow A\text{-}\boldsymbol{Mod}$ tal que*

(1) *Para todo $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, $r(M) \leq M$.*

(2) *Para cada A-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, $f(r(M)) \leq r(N)$.*

Denotaremos a la clase de pre-radicales como $A\text{-pr} = \{r : r \text{ es pre-radical}\}$

Proposición 2.1.2. *Sea $r \in A$-pr. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de A-módulos izquierdos. Entonces,*

(1) $r\left(\prod_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\right) \leq \prod_{\alpha\in\Delta} r(M_\alpha)$

(2) $r\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} r(M_\alpha)$

Definición 2.1.3. *Dado una colección $\{r_i\}_{i\in I}$ de prerradicales sobre A- **Mod**. Consideramos las siguientes asignaciones para cada $M \in A$- **Mod**:*

$$\left(\bigvee_{i\in I} r_i\right)(M) := \sum_{i\in I} r_i(M)$$

$$\left(\bigwedge_{i\in I} r_i\right)(M) := \bigcap_{i\in I} r_i(M)$$

A-pr es una **gran retícula completa**. Para cada $r \in A$-pr le asociaremos dos clases de A-módulos izquierdos.

(a) $\mathbb{T}_r := \{M \in_A \mathbf{Mod} : r(M) = M\}$

(b) $\mathbb{F}_r := \{M \in_A \mathbf{Mod} : r(M) = 0\}$

Definición 2.1.4. *Dada una clase $\mathcal{C} \subseteq A$-**Mod**. Se dice que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo*

(1) *monomorfismos, si $N \in \mathcal{C}$ y $M \rightarrowtail N$, entonces $M \in \mathcal{C}$.*

(2) *epimorfismos, si* $M \in \mathcal{C}$ *y* $M \twoheadrightarrow N$*, entonces* $N \in \mathcal{C}$.

(3) *sumas directas, si* $\{M_i\}_{i\in I}$*, entonces* $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$.

(4) *productos directos, si* $\{M_i\}_{i\in I}$*, entonces* $\prod_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$.

(5) *extenciones, si* $0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *sucesión exacta y* $M, N \in \mathcal{C}$*, entonces* $K \in \mathcal{C}$.

Definición 2.1.5. *Dada una clase* $\mathcal{C} \subseteq A$-***Mod****. Se dice que;*

(1) $\mathcal{C}$ *es de* ***pretorsión*** *si es cerrado bajo epimorfismos y sumas directas.*

(2) $\mathcal{C}$ *es* ***prelibre de torsión*** *si es cerrado bajo monomorfismos y productos directos.*

(3) $\mathcal{C}$ *es de* ***torsión*** *si es de pretorsión y cerrado bajo extensiones.*

(4) $\mathcal{C}$ *es de* ***libre de torsión*** *si es prelibre de torsión y cerrado bajo extensiones.*

Definición 2.1.6. *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *y* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$*, definimos la traza de* M *como:*

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}(M) = \sum_{C\in\mathcal{C}} \sum_{f\in \mathrm{Hom}_A(C,M)} \mathrm{Im}(f) = \sum \{\mathrm{Im}(f) : f \in \mathrm{Hom}_A(C, M), C \in \mathcal{C}\}.$$

Definición 2.1.7. *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *y* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$*, definimos la traza de* M *como:*

$$\mathrm{Rej}_{\mathcal{C}}(M) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \bigcap_{g\in \mathrm{Hom}_A(M,C)} \mathrm{Nu}(g) = \bigcap \{\mathrm{Nu}(g) : g \in \mathrm{Hom}_A(M, C), C \in \mathcal{C}\}.$$

Proposición 2.1.8. $\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}, \mathrm{Rej}_{\mathcal{C}} \in A$*-pr*.

Definición 2.1.9. $r \in A$*-pr se llama* ***idempotente*** *si para todo* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$*,* $r(r(M)) = r(M)$ *y se llama* ***radical*** *si para todo* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$*,* $r\left(\frac{M}{r(M)}\right)$.

Definición 2.1.10 (Dickson, 1964)**.** *Una teoría de torsión sobre* A-***Mod*** *es una pareja* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *tales que* $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *y cumplen:*

(1) $\mathbb{T} \cap \mathbb{F} = 0$*,*

(2) $\mathbb{T}$ *es cerrado bajo epimorfismos.*

(3) $\mathbb{F}$ *es cerrado bajo monomorfismos.*

(4) *Para cada* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$*, exsite* $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *sucesión exacta, con* $N \in \mathbb{T}$ *y* $L \in \mathbb{F}$.

Proposición 2.1.11. *una pareja* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *tales que* $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *es una teoría de torsión si y sólo si*

(1) *Para cada* $M \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{F}$*,* $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$. *(****Ortogonalidad ó independecia homológica****).*

(2) $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ *son cerrados bajo isomorfismos.*

(3) *Para cada* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, *exsite* $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *sucesión exacta, con* $N \in \mathbb{T}$ *y* $L \in \mathbb{F}$.

Definición 2.1.12 (Operadores R y L)**.** *Dada* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A - \text{-}\boldsymbol{Mod})$, *se define las siguientes clases de módulos:*

- $R\,(\mathcal{C}) = \{N \in A\text{-}\boldsymbol{Mod} : \forall C \in \mathcal{C}, \mathrm{Hom}_A\,(C, N) = 0\}$,
- $L\,(\mathcal{C}) = \{M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod} : \forall C \in \mathcal{C}, \mathrm{Hom}_A\,(M, C) = 0\}$

Proposición 2.1.13 (Definición alternativa de teoría de torsión)**.** *una pareja* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *tales que* $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *es una teoría de torsión si y sólo si*

(1) $R\,(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$,

(2) $R\,(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.

Proposición 2.1.14. *Los operadores R y L tienen las siguientes propiedades:*

(1) $1 \subseteq LR$, *es decir,* $\forall\ \mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $\mathcal{C} \subseteq LR\,(\mathcal{C})$,

(2) $1 \subseteq RL$, *es decir,* $\forall\ \mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $\mathcal{C} \subseteq RL\,(\mathcal{C})$,

(3) $LRL = L$, *es decir,* $\forall\ \mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $lRL\,(\mathcal{C}) = L\,(\mathcal{C})$,

(4) $RLR = R$, *es decir,* $\forall\ \mathcal{C} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $RLR(\mathcal{C}) = R\,(\mathcal{C})$,

(5) *R invierte el orden:* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}\ [\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow R\,(\mathcal{D}) \subseteq R\,(\mathcal{C})]$,

(6) *L invierte el orden:* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq A\text{-}\boldsymbol{Mod}\ [\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow L\,(\mathcal{D}) \subseteq L\,(\mathcal{C})]$,

(7) $(LR\,(\mathcal{C})\,, R\,(\mathcal{C}))$ *es teoría de torsión (generado por* $\mathcal{C}$*),*

(8) $(L\,(\mathcal{C})\,, RL\,(\mathcal{C}))$ *es teoría de torsión (cogenerada por* $\mathcal{C}$*).*

Proposición 2.1.15. *Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión, entonces:*

(1) $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión.*

(2) $\mathbb{F}$ *es una clase libre de torsión.*

Proposición 2.1.16. (1) *Si* $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión, entonces* $LR\,(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

(2) *Si* $\mathbb{F}$ *es una clase de torsión, entonces* $LR\,(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$.

Corolario 2.1.17. *Dadas* $\mathbb{T}, \mathbb{F} \subseteq A\text{-}1\,\boldsymbol{Mod}$:

(1) $\mathbb{T}$ *es una clase se torsión si y sólo si existe* $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *tal que* $(\mathbb{T}, \mathcal{D})$.

(2) $\mathbb{F}$ *es una clase se torsión si y sólo si existe* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *tal que* $(\mathcal{C}, \mathbb{F})$.

Proposición 2.1.18. *Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión, entonces* $\mathrm{Tr}_{\mathbb{T}} = \mathrm{Rej}_{\mathbb{F}}$ *y en particular es un radical idempotente.*

Proposición 2.1.19. *Si entonces* r *es un radical idempotente, entonces* $(\mathbb{T}_r, \mathbb{F}_r)$ *es una teoría de torsión.*

Proposición 2.1.20. *Para* $r \in A\text{-}\mathrm{pr}$ *son equivalentes:*

(a) *r es exacto izquierdo.*

(b) *Para todo* $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *y* $N \leq M$, $r\,(N) = N \cap r\,(M)$.

(c) *r es idempotente y* $\mathbb{T}_r$ *es cerrado bajo monomorfismos.*

Lema 2.1.21. *Si* r *es radical y* $N \leq M$ *con* $M \in A \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ *es tal que* $N \leq r(M)$*, entonces* $r\,(M/N) = r(M)/N$.

Corolario 2.1.22. *Hay una correspondencia biunivoca entre pre-radicales exactos izquierdos y clases de pretorsión hereditarios (cerrados bajo monos)*

Proposición 2.1.23. *Para* $r \in A\text{-}\mathrm{pr}$ *las siguientes son equivalentes:*

(a) *r preserva epimorfismos.*

(b) $\forall\ M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod}$, $r(M) = r(A)M$.

(c) *r es radical y* $\mathbb{F}_r$ *es cerrada bajo epimorfismos (es cohereditaria).*

A los radicales que cumplen esto se les llama ***t-radicales****.*

Proposición 2.1.24. *Dada una teoría de torsión* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *son equivalentes:*

(a) *$\mathbb{T}$ es hereditaria, es decir, es cerrada bajo monomorfismos.*

(b) *$\mathbb{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Proposición 2.1.25. *Dada una teoría de torsión* $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *son equivalentes:*

(a) *$\mathbb{T}$ es hereditaria.*

(b) *Existe un A-módulo inyectivo Q tal que* $\tau = (L(Q), RL(Q))$ *(donde* $L(Q) := L(\{Q\})$*).*

Proposición 2.1.26. *Para dos A-módulos inyextivos* Q_1, Q_2 *son equivalentes:*

(a) $L(Q_1) = L(Q_2)$.

(b) *Q_1 y Q_2 se cogeneran mutuamente, es decir:*

$$\begin{aligned} Q_2 \text{ cogenera a } Q_1 &: \text{ existe } Q_1 \rightarrowtail Q_2^X \\ Q_1 \text{ cogenera a } Q_2 &: \text{ existe } Q_2 \rightarrowtail Q_1^Y \end{aligned}$$

2.2. Filtros lineales y filtros de Gabriel

Definición 2.2.1. *Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}(A)$ no vacío. $\mathcal{L}$ es un **filtro lineal** si cumple lo siguiente:*

(1) *Si $I, J \in \mathcal{I}(A)$ con $I \leq J$ y $I \in \mathcal{L}$, entonces $J \in \mathcal{L}$*

(2) *Si $I, J \in \mathcal{L}$, entonces $I \cap J \in \mathcal{L}$*

(3) *Si $I \in \mathcal{L}$, $a \in A$, entonces $(I : a) \in \mathcal{L}$*

*donde $(I : a) = \{x \in A : xa \in I\} = \operatorname{ann}(a + I)$ es el ideal trasladado de I a través de **a**.*

Proposición 2.2.2. *Dado un filtro lineal $\mathcal{L}$ la clase $\mathbb{T}_{\mathcal{L}} = \{M : \forall m \in M, \operatorname{ann}(m) \in \mathcal{L}\}$ de A-módulos es de pretorsión hereditaria.*

Proposición 2.2.3. *Dada una clase de pretorsión hereditaria $\mathbb{T}$ la familia $\mathcal{L}_{\mathbb{T}} = \{I \in \mathcal{I}(A) : A/I \in \mathbb{T}\}$ es un filtro lineal.*

Proposición 2.2.4. *Las asignaciones:*

$$A\text{-}\boldsymbol{fil} \ni \mathcal{L} \overset{\varphi}{\longmapsto} \mathbb{T}_{\mathcal{L}} \in A\text{-}\boldsymbol{pretorh}$$

$$A\text{-}\boldsymbol{pretorh} \ni \mathbb{T} \overset{\psi}{\longmapsto} \mathcal{L}_{\mathbb{T}} \in A\text{-}\boldsymbol{fil}.$$

Son inversos entre si y por tanto, constituyen una correspondencia biunívoca.

Observaciones 2.2.5. (a) *Dichas asignaciones son morfismos de COPOS (preservan el orden de la contención) y por lo tanto, isomorfismos de COPOS.*

(b) *Como A-**fil** es un conjunto, pues A-**fil** $\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ que es un conjunto y por lo tanto A-**pretorsh** también es un conjunto, con la misma cardinalidad y también A-**preradh**.*

Definición 2.2.6. *Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}(A)$ no vacío. $\mathcal{L}$ es un **filtro de Gabriel** (topología de Gabriel) si cumple lo siguiente:*

(i) *Si $I \in \mathcal{G}$, $a \in A$, entonces $(I : a) \in \mathcal{G}$*

(ii) *Si $I, J \in \mathcal{I}(A)$ tales que $I \in \mathcal{G}$ y para cada $a \in I$, $(J : a) \in \mathcal{G}$, entonces $J \in \mathcal{G}$*

Proposición 2.2.7. *Todo filtro de Gabriel es filtro lineal.*

Proposición 2.2.8. *Si $\mathcal{L}$ es un filtro de Gabriel, entonces $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}$ es una clase de torsión hereditaría.*

Proposición 2.2.9. *Si $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaría, entonces $\mathcal{L}_{\mathbb{T}}$ es un filtro de Gabriel.*

Se concluye que existe una correspondencia bionivoca (isomorfismo de copos) entre filtros de Gabriel y clases de torsión hereditarias y por lo tanto radicales exactos izquierdos y teorías de torsión hereditarios y clases de equivalencias de módulos inyectivos y clases de torsión cerrados bajo cápsulas inyectivos.

Capítulo 3

Módulos de cocientes sobre filtros de Gabriel

3.1. Anillo de fracciones

Para la motivación del concepto de anillo de fracciones, recordemos la construcción del campo de los números racionales $\mathbb{Q}$.

3.1.1. Campo de fracciones de $\mathbb{Z}$

Sea $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y consideremos al conjunto $S \times \mathbb{Z}$. Definamos en $S \times \mathbb{Z}$ la siguiente relación:

$$(s, a) \backsim (t, b) \iff at - sb = 0.$$

Proposición 3.1.1. *$\backsim$ es una relación de equivalencia.*

Dem.
Sean $(s, a), (t, b), (u, c) \in S \times \mathbb{Z}$.

(i) Dado que en $\mathbb{Z}$ $as - sa = 0$, entonces $(s, a) \backsim (s, a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es reflexiva.

(ii) Supongamos que $(s, a) \backsim (t, b)$. Entonces $at - sb = 0$. Dado que $\mathbb{Z}$ es conmutativo se sigue que $bs - ta = -(at - sb) = -0 = 0$, esto implica que $(t, b) \backsim (s, a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es simétrica.

(iii) Supongamos que $(s, a) \backsim (t, b)$ y $(t, b) \backsim (u, c)$. Entonces $at = sb$ y $bu = tc$. Por ser $\mathbb{Z}$ conmutativo se sigue que $(au)t = (ua)t = u(at) = u(sb) = (us)b = (su)b = s(ub) = s(tc) = s(ct) = (sc)t$

$$\implies t(au - sc) = 0 \implies au = sc \text{ (pues, } t \neq 0) \implies (s, a) \backsim (u, c)$$

Por lo tanto, $\backsim$ es transitiva.

De (i), (ii) y (iii) se concluye que $\backsim$ es una relación de equivalencias.

Q.E.D

Ahora, definamos $\mathbb{Q} := S \times \mathbb{Z} / \backsim$, es decir, $\mathbb{Q}$ es el conjunto de clases de equivalencia de $S \times \mathbb{Z}$ mediante la relación $\backsim$. Por convención, cada $[(s, a)] \in \mathbb{Q}$ generalmente se denota como $\dfrac{a}{s}$.

Al conjunto $\mathbb{Q}$, quisiéramos darle una estructura de anillo. Para ello, definamos en $\mathbb{Q}$ las siguientes operaciones:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ni \Big([(s, a)], [(t, b)]\Big) \xmapsto{+} [(st, at + sb)] \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ni \Big([(s, a)], [(t, b)]\Big) \xmapsto{\cdot} [(st, ab)] \in \mathbb{Q}$$

Es fácil verificar que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un anillo. Más aún, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un campo.

Hemos construido un anillo $\mathbb{Q}$ a partir de otro $\mathbb{Z}$ y nos gustaría generalizar dicha construcción. Entonces, analizando las propiedades del anillo $\mathbb{Z}$ y el conjunto $S = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ que nos permitieron hacer la construcción de $\mathbb{Q}$ y que no dependan estrictamente de los conjuntos que hemos elegido, nos damos que de lo siguiente:

Observación 3.1.2. *Tenemos:*

- $\mathbb{Z}$ *es un anillo.*
- $1 \in S$ *y para cada* $x, y \in S$, $xy \in S$.

Con base en la observación 3.1.2, nos preguntamos; ¿ podemos tener una primera generalización de la construcción previa sobre anillos conmutativos? La respuesta es sí.

Definición 3.1.3. *Sea* A *un anillo (no necesariamente conmutativo) y* $S \subseteq A$. *Diremos que que* S *es un conjunto multiplicativo si se cumple:*

(a) $1 \in S$

(b) *Para todo* $x, y \in S$, $xy \in S$.

3.1.2. Anillos de fracciones sobre anillos conmutativos

Dado un anillo conmutativo A y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativo, definimos en $S \times A$ las siguiente relación:

$$(s, a) \backsim (t, b) \iff \text{existe } u \in S \text{ tal que } u(at - sb) = 0$$

Proposición 3.1.4. $\backsim$ *es una relación de equivalencia.*

Dem.
Sean $(s, a), (t, b), (f, e) \in S \times A$.

(i) Dado que para toda $u \in S$, $u(as - sa) = 0$, pues A es abeliano. Entonces $(s, a) \backsim (s, a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es reflexiva.

(ii) Supongamos que $(s, a) \backsim (t, b)$. Entonces existe $u \in S$ tal que $u(at - sb) = 0$

$$u(at - sb) = 0 \Longrightarrow uat = usb \Longrightarrow usb - uat = 0 \Longrightarrow u(sb - at) = 0.$$

Esto implica que $(t, b) \backsim (s, a)$. Por lo tanto, $\backsim$ es simétrica.

(iii) Supongamos que $(s, a) \backsim (t, b)$ y $(t, b) \backsim (f, e)$. Entonces existen $u, u' \in S$ tales que $u(at) = u(sb)$ y $u'(bf) = u'(te)$. Y por ser A conmutativo y S multiplicativo se sigue que: $uu't(af) = u'fu(at) = u'fu(sb) = usu'(bf) = usu'(te) = uu't(se)$.

$$\Longrightarrow uu't(af - se) = 0 \Longrightarrow (s, a) \backsim (f, e)$$

Por lo tanto, $\backsim$ es transitiva.

De (i), (ii) y (iii) se concluye que $\backsim$ es una relación de equivalencias.

Q.E.D

Consideremos el conjunto cociente $[S^{-1}]A := A \times S/\backsim$. Por convención, a veces cada $[(s,a)] \in A \times S$ se denota como $\dfrac{a}{s}$. Ahora, en $[S^{-1}]A$ definamos las siguientes operaciones:

$$[S^{-1}]A \times [S^{-1}]A \ni \Big([(s,a)],[(t,b)]\Big) \overset{+}{\longmapsto} [(st, at+sb)] \in [S^{-1}]A$$

$$[S^{-1}]A \times [S^{-1}]A \ni \Big([(s,a)],[(t,b)]\Big) \overset{\cdot}{\longmapsto} [(st, ab)] \in [S^{-1}]A$$

Observación 3.1.5. *Para todo $s \in S$, $[(s,s)] = [(1,1)]$ y $[(s,0)] = [(1,0)]$. Esto es porque, $(s1 - s1) = 0$, es decir, $(s,s) \backsim (1,1)$, para cada $s \in S$, análogamente $0(1) - s(0) = 0$, así que $[(s,0)] = [(1,0)]$.*

Proposición 3.1.6. $\left(\left[S^{-1}\right]A, +, \cdot\right)$ *es un anillo con elemento unidad $1 = [(1,1)]$ y neutro $0 = [(1,0)]$*

Dem.
(a) Veamos que $+$ esta bien definida. Con este fin, Sea $[(s,a)] = [(s',a')]$ y $[(t,b)] = [(t',b')]$.

Tenemos que

$$(s,a) \backsim (s',a') \;\; y \;\; (t,b) \backsim (t',b').$$

Esto implica que existe $u, u' \in S$ tales que $u(as' - sa') = 0 = u'(bt' - tb')$. Y por ser A conmutativo, se tiene para $+$ que:

$$\begin{aligned} uu'\big((at+sb)s't' - st(a't' + s'b')\big) &= uu'\big((as' - sa')tt' + (bt' - tb')ss'\big) \\ &= u'u(as' - sa')tt' + uu'(bt' - tb')ss' = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que, $(st, at+sb) \backsim (s't', a't' + s'b')$, es decir, $[(st, at+sb)] = [(s't', a't' + s'b')]$.

Para $\cdot$ tenemos:

$$\begin{aligned} uu'\big(abs't' - sta'b'\big) &= uu'\big(abs't' - sa'bt' + sa'bt' - sta'b'\big) \\ &= uu'\big((as' - sa')bt' + (bt' - tb')sa'\big) \\ &= u'u(as' - sa')bt' + uu'(bt' - tb')sa' = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que $(st, ab) \backsim (s't', a'b')$, es decir, $[(st, ab)] = [(s't', a'b')]$

Por lo tanto $+$ y $\cdot$ están bien definida.

(b) Veamos que $(A, +)$ es un grupo abeliano con neutro $[(1,0)]$. Para esto, sean $[(s,a)], [(t,b)], [(v,c)]$ en $\left[S^{-1}\right]A$.

(i) Veamos que $+$ es asociativo.

$$\begin{aligned} [(s,a)] + \big([(t,b)] + [(v,c)]\big) &= [(s,a)] + \big[\big(tv, bv + tc\big)\big] = [(s(tv), a(tv) + s(bv) + s(tc))] \\ &= [((st)v, (at)v + (sb)v + (st)c)] = [(st, at+sb)] + [(v,c)] \\ &= \big([(s,a)] + [(t,b)]\big) + [(v,c)] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $+$ es asociativo.

(ii) Mostremos que $[(1,0)]$ es el elemento neutro. Tenemos:

$$[(s,a)] + [(1,0)] = [(s1, a1 + s0)] = [(s,a)] \quad \text{y} \quad [(1,0)] + [(s,a)] = [(1s, 0s + 1a)] = [(s,a)]$$

Por lo tanto, $[(1,0)]$ es el elemento neutro.

(iii) Ahora, veamos que $[(s,a)]$ tiene inverso aditivo. Dado que:

$$[(s,a)] + [(s,-a)] = [(ss, as - sa)] = [(ss, 0)] = [(1,0)]$$

y

$$[(s,-a)] + [(s,a)] = [(ss, -as + sa)] = [(ss, 0)] = [(1,0)].$$

Se concluye que $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$ tiene inverso.

De (a), (i), (ii) y (iii) se sigue que $(A,+)$ es un grupo abeliano.

(c) Veamos que $(A,\cdot)$ es asociativo.

$$\begin{aligned}[(s,a)]\big([(t,b)][(v,c)]\big) &= [(s,a)][(tv, bc)] = [(s(tv), a(bc)] = [((st)v, (ab)c)] \\ &= [(st, ab)][(v,c)] = \big([(s,a)][(t,b)]\big)[(v,c)]\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A,\cdot)$ es asociativo.

(d) Mostremos que $\cdot$ es distributiva respecto a $+$.

(1) Distributividad por la izquierda:

$$\begin{aligned}[(s,a)]\big([(t,b)] + [(v,c)]\big) &= [(s,a)][(tv, bv + tc)] = [(s(tv), a(tv) + (bv)s + (tc)s)] \\ &= [((st)v, (at)v + (sb)v + (st)c] = [(st, at + sb)][(v,c)] \\ &= \big([(s,a)] + [(t,b)]\big)[(v,c)].\end{aligned}$$

(2) Distributividad por la derecha:

$$\begin{aligned}\big([(s,a)] + [(t,b)]\big)[(v,c)] &= [(st, at + sb)][(v,c)] = [((st)v, (at)v + (sb)v + c(st)] \\ &= [(s(tv), a(tv) + s(bv) + s(ct))] = [(s,a)][(tv, bv + tc)] \\ &= [(s,a)]\big([(t,b)] + [(v,c)]\big).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cdot$ es distributiva respecto a $+$

(e) Finalmente veamos que $(A,\cdot)$ tiene unidad. Tenemos:

$$[(1,1)] \cdot [(s,a) = [(1s, 1a)] = [(s,a)] \quad \text{y} \quad [(s,a)] \cdot [(1,1)] = [(s1, a1)] = [(s,a)]$$

Por lo tanto, $[(1,1)]$ es la unidad en $\left[S^{-1}\right] A$.

De (a), (b), (c), (d) y (e) se concluye que $(A,+,\cdot)$ es un anillo con unidad.

Q.E.D

Proposición 3.1.7. *Sea A anillo conmutativo y S conjunto multiplicativo de A.*

(1) *La función $\varphi : A \longrightarrow [S^{-1}]A$ dada por $\varphi(a) = [(1,a)]$ es un homomorfismo de anillos.*

(2) *Para todo $s \in S$, $\varphi(s)$ es invertible en $[S^{-1}]A$.*

(3) $Nu(\varphi) = \{a \in A : \textit{existe } s \in S \textit{ tal que } sa = 0\}$

Dem.
(1) Sean $a, b \in A$. Tenemos que,

- $\varphi(1) = [(1,1)] = 1$
- $\varphi(a+b) = [(1, a+b)] = [(1,a)] + [(1,b)] = \varphi(a) + \varphi(b)$.
- $\varphi(ab) = [(1, ab)] = [(1,a)] \cdot [(1,b)] = \varphi(a)\varphi(b)$.

Se sigue que φ es un homomorfismos de anillos.

(2) Sea $s \in S$.

$$\begin{aligned}[(s,1)] \cdot \varphi(s) &= [(s,1)] \cdot [(1,s)] = [(s1, 1s)] = [(s,s)] \\ &= [(1s, s1)] = [(1,s)] \cdot [(s,1)] \\ &= \varphi(s) \cdot [(1,s)].\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $s \in S$, $\varphi(s)$ es invertible en $[S^{-1}]A$.

(3) Ahora,

$$\begin{aligned}Nu(\varphi) &= \big\{a \in A : \varphi(a) = [(1,0)]\big\} = \big\{a \in A : [(1,a)] = [(1,0)]\big\} \\ &= \big\{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } s(a1 - 1(0)) = 0\big\} \\ &= \big\{a \in A : \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sa = 0\big\}.\end{aligned}$$

Q.E.D

Observación 3.1.8. *Para cada $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$ se tiene que $[(s,a)] = [(s,1)][(1,a)] = \varphi(s)^{-1}\varphi(a)$.*

Proposición 3.1.9. *Sea A un anillo conmutativo y $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo. $\left[S^{-1}\right] A$ tiene la siguiente propiedad universal:*

Para cada anillo B y cada $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfismo tal que $\psi(S) \subseteq U(B)$, existe un único homomorfismo $\sigma : \left[S^{-1}\right] A \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ \left[S^{-1}\right] A \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Dem.
Sean A, B anillos con A conmutativo, y sea $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo de A y $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfismo, tal que $\psi(S) \subseteq U(B)$.

Consideremos la siguiente operación $\sigma : \left[S^{-1}\right] A \longrightarrow B$ dada por $\sigma([(s,a)]) = \psi(s)^{-1}\psi(a)$, para cada $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$.

Veamos que σ esta bien definida. Para ello, sean $[(s,a)] = [(s',a')]$, tenemos:

$$\begin{aligned}(s,a) \backsim (s',a') &\Leftrightarrow \text{ existe } u \in S \text{ tal que } u(as' - sa') = 0 \\ &\Leftrightarrow \psi(u)\left(\psi(as') - \psi(sa')\right) = 0.\end{aligned}$$

Dado que $\psi(S) \subset B^*$, se sigue que $\psi(a)\phi(s') = \psi(s)\psi(a')$, así;

$$\psi(s)^{-1}\psi(a) = \psi(a')\psi(s')^{-1}$$

Se sigue que $\sigma([(s,a)]) = \sigma([s',a'])$. Por lo tanto, σ esta bien definida.

Veamos que σ es un homomorfismo de anillos. Con este fin, sean $[(s,a)], [(t,b)] \in \left[S^{-1}\right] A$.

- $\sigma([(1,1)]) = \psi(1)^{-1}\psi(1) = 1$

- Por conmutatividad en A y la distributividad en B, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma\left([(s,a)] + [(t,b)]\right) &= \sigma([(st, at+sb)]) = \psi(st)^{-1}\psi(at+sb)\\ &= \psi(ts)^{-1}\psi(at) + \psi(st)^{-1}\psi(sb)\\ &= \psi(s)^{-1}\psi(t)^{-1}\psi(t)\psi(a) + \psi(t)^{-1}\psi(s)^{-1}\psi(s)\psi(b)\\ &= \psi(s)^{-1}\psi(a) + \psi(t)^{-1}\psi(b)\end{aligned}$$

  Se concluye que, $\sigma([(s,a)] + [(t,b)]) = \sigma([(s,a)]) + \sigma([(t,b)])$.

- Por conmutatividad de A y que $\psi(S) \subseteq U(B)$ se sigue;

$$\begin{aligned}\sigma([(s,a)][(t,b)]) &= \sigma([(st,ab)]) = \psi(st)^{-1}\psi(ab) = \psi(st)^{-1}\psi(a)\psi(b)\\ &= \psi(st)^{-1}\psi(a)\psi(t)\psi(t)^{-1}\psi(b) = \psi(st)^{-1}\psi(at)\sigma\left([(t,b)]\right)\\ &= \sigma\left([(st,at)]\right)\sigma\left([(t,b)]\right)\\ &= \sigma\left([(s,a)]\right)\sigma\left([(t,b)]\right), \quad \text{pues,} \quad [(st,at)] = [(s,a)]\end{aligned}$$

  Por tanto, $\sigma([(s,a)][(t,b)]) = \sigma([(s,a)])\sigma([(t,b)])$.

Se sigue que ψ es un homomorfismo. Ahora para cada $a \in A$, tenemos:

$$\sigma(\varphi(a)) = \sigma([(1,a)]) = \psi(1)^{-1}\psi(a) = \psi(a).$$

Es decir, $\sigma \circ \varphi = \psi$.

Finalmente veamos que σ es único, para ello sea $\tau : \left[S^{-1}\right] A \longrightarrow B$ homomorfismo tal que $\tau \circ \varphi = \psi$ y sea $[(s,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$, entonces

$$\begin{aligned}\tau([(s,a)]) &= \tau([(s,1)][(1,a)]) = \tau(\varphi(s)^{-1})\varphi(a) = \left(\tau \circ \varphi(s)\right)^{-1} \tau \circ \varphi(a)\\ &\psi(s)^{-1}\psi(a) = \sigma([(s,a)])\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma = \tau$, es decir, σ es único con dicha propiedad.

Q.E.D

3.1.3. Anillos de fracciones sobre anillos no conmutativos

Hasta aquí hemos expuesto brevemente la generalización de la construcción del campo de fracciones de $\mathbb{Z}$ a anillos conmutativos. Ahora, tratemos de extender esto a anillos no conmutativos. Bajo la última proposición de la sección previa, podemos darnos cuenta que φ juega un papel importante.

Para extender la idea anterior a anillos no conmutativos, fijémonos en las propiedades de φ y su propiedad universal. Entonces siguiendo la idea en la definición el producto tensorial (que es mediante su propiedad universal) definimos un anillo de fracciones (izquierdos) de un anillo A no necesariamente conmutativo.

Definición 3.1.10. *Sea A un anillo y $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativo. Definiremos un anillo de fracciones (izquierdo) de A con respecto a S como un anillo $\mathfrak{A}$ junto con un homomorfismo de anillo $\varphi : A \longrightarrow \mathfrak{A}$ que satisfacen lo siguiente:*

(1) $\varphi\big(S\big) \subseteq U\big(\mathfrak{A}\big)$.

(2) *Cada elemento en $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ con $s \in S$ y $a \in A$.*

(3) $\mathrm{Nu}(\varphi) = \{a \in A : \exists\ s \in S$ *tal que* $sa = 0\}$.

Hemos definido un objeto llamado anillo de fracciones, ahora nos queda ver cuando existe y si existe, ¿es único?

Proposición 3.1.11 (Propiedad Universal). *Sea A anillo y S conjunto multiplicativo. Si existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$, entonces para cada B anillo y $\psi : A \longrightarrow B$ homomorfismo de anillos tal que $\psi(S) \subseteq U\big(B\big)$, existe $\sigma : \mathfrak{A} \longrightarrow B$ homomorfismo de anillos tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Dem.
Supongamos que existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$. Sea B anillo y $\psi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tales que $\psi(S) \subseteq U(B)$. Por el inciso (2) de la definición 3.1.10 se sigue que para cada $x \in \mathfrak{A}$, existe $a_x \in A$, $s_x \in S$ tales que $x = \varphi(s_x)^{-1}\varphi(a_x)$.

Definamos la siguiente operación; $\sigma : \mathfrak{A} \longrightarrow B$ por $\sigma(x) = \psi(s_x)^{-1}\psi(a_x)$, $x \in \mathfrak{A}$.

(a) Veamos que σ esta bien definida:

Sea $x \in \mathfrak{A}$ y supongamos que $x = \varphi(s_x)^{-1}\varphi(a_x) = \varphi(s'_x)^{-1}\varphi(a'_x)$.

Así, tenemos que $\varphi(a_x) = \varphi(s_x)\varphi(s'_x)^{-1}\varphi(a'_x)$. Como $\varphi(s_x)\varphi(s'_x)^{-1} \in \mathfrak{A}$, por el inciso (2) de la definición 3.1.10, se sigue que existen $b_x \in A$ y $t_x \in S$ tales que:

$$\varphi(s_x)\varphi(s'_x)^{-1} = \varphi(t_x)^{-1}\varphi(b_x).$$

Esto implica:

(I) $\varphi(t_x)\varphi(s_x) = \varphi(b_x)\varphi(s'_x)$.

$$\Rightarrow \quad \varphi(t_x s_x - b_x s'_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_x s_x - b_x s'_x \in \mathrm{Nu}(\varphi).$$

Por tanto, existe $\mu_x \in S$ tal que $\mu_x t_x s_x = \mu_x b_x s'_x$.

(II) $\varphi(a_x) = \varphi(t_x)^{-1}\varphi(b_x)\varphi(a'_x)$.

$$\Rightarrow \quad \varphi(t_x)\varphi(a_x) = \varphi(b_x)\varphi(a'_x) \Rightarrow \quad \varphi(t_x a_x - b_x a'_x) = 0 \Rightarrow \quad t_x a_x - b_x a'_x \in \mathrm{Nu}(\varphi)$$

Por tanto, existe $\lambda_x \in S$ tal que $\lambda_x t_x a_x = \lambda_x b_x a'_x$.

De (I) y (II) se sigue que $\psi(\mu_x t_x s_x) = \psi(\mu_x b_x s'_x)$ y $\psi(\lambda_x t_x a_x) = \psi(\lambda_x b_x a'_x)$. Por hipótesis $\psi(S) \subseteq U(B)$, de manera que $\psi(s_x), \psi(s'_x), \psi(t_x), \psi(\mu_x), \psi(\lambda_x)$ son invertibles en B pues, $s_x, s'_x, t_x, \lambda_x, \mu_x \in S$. Así;

$$\begin{aligned} \psi(t_x s_x) = \psi(b_x s'_x) \ \text{ y } \ \psi(t_x a_x) = \psi(b_x a'_x) \\ \Rightarrow \quad & \psi(b_x) = \psi(t_x)\psi(s_x)\psi(s'_x)^{-1} \ \text{ y } \ \psi(t_x)\psi(a_x) = \psi(b_x)\psi(a'_x) \\ \Rightarrow \quad & \psi(t_x)\psi(a_x) = \psi(t_x)\psi(s_x)\psi(s'_x)^{-1}\psi(a'_x) \\ \Rightarrow \quad & \psi(s_x)^{-1}\psi(a_x) = \psi(s'_x)^{-1}\psi(a'_x). \end{aligned}$$

Por tanto, σ esta bien definida.

(b) Veamos que σ es homomorfismo de anillos: con esta finalidad, sean $x, y \in \mathfrak{A}$. Existen $s, s' \in S$ y $a, a' \in A$ tales que $x = \varphi(s)^{-1}\varphi(a)$ y $y = \varphi(s')^{-1}\varphi(a')$. Tenemos:

(1) Tenemos $x + y = \varphi(s)^{-1}\varphi(a) + \varphi(s')^{-1}\varphi(a')$. Por el inciso (2) de la definición 3.1.10 se sigue que existe $t \in S$, $b \in A$ tales que $\varphi(t)^{-1}\varphi(b) = x + y$

$$\Rightarrow \quad \varphi(b) = \varphi(t)\varphi(s)^{-1}\varphi(a) + \varphi(t)\varphi(s')^{-1}\varphi(a').$$

De nuevo, por el inciso (2) de la definición 3.1.10 se sigue que existen $t', t'' \in S$ y $a', a'' \in A$ tale que $\varphi(t')^{-1}\varphi(a') = \varphi(t)\varphi(s)^{-1}$ y $\varphi(t'')^{-1}\varphi(a'') = \varphi(t)\varphi(s')^{-1}$.

Así, existen $\lambda, \mu \in S$ tales que $\lambda a's = \lambda t't$ y $\mu a''s' = \mu t''t$. De manera que $\psi(a')\psi(s) = \psi(t')\psi(t)$ y $\psi(a'')\psi(s') = \psi(t'')\psi(t)$. Esto implica que $\psi(t')^{-1}\psi(a') = \psi(t)\psi(s)^{-1}$ y $\psi(t'')^{-1}\psi(a'') = \psi(t)\psi(s')^{-1}$.

Por otro lado, $\varphi(b) = \varphi(t')^{-1}\varphi(a')\varphi(a) + \varphi(t'')^{-1}\varphi(a'')\varphi(a')$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t')\varphi(b) = \varphi(a')\varphi(a) + \varphi(t')\varphi(t'')^{-1}\varphi(a'')\varphi(a').$$

Existe $t''' \in S$ y $a''' \in A$ tales que $\varphi(t''')^{-1}\varphi(a''') = \varphi(t')\varphi(t'')^{-1}$ se sigue que existe $\eta \in S$, tal que

$$\eta a'''t'' = \eta t'''t' \quad \Rightarrow \quad \psi(a''')\psi(t'') = \psi(t''')\psi(t') \quad \Rightarrow \quad \psi(t''')^{-1}\psi(a''') = \psi(t')\psi(t'')^{-1}.$$

Ademas, $\varphi(t'''t'b) = \varphi(t'''a'a) + \varphi(a'''a''a') = \varphi(t'''a'a + a'''a''a')$, se sigue que existe $\delta \in S$ tal que

$$\delta t'''t'b = \delta(t'''a'a + a'''a''a') \quad \Rightarrow \quad \psi(b) = \psi(t')^{-1}\psi(a')\psi(a) + \psi(t')^{-1}\psi(t''')^{-1}\psi(a''')\psi(a'')\psi(a')$$
$$\Rightarrow \quad \psi(b) = \psi(t)\psi(s)^{-1}\psi(a) + \psi(t)\psi(s')^{-1}\psi(a').$$

Por tanto, $\sigma(x + y) = \psi(t)^{-1}\psi(b) = \psi(s)^{-1}\psi(a) + \psi(s')^{-1}\psi(a') = \sigma(x) + \sigma(y)$.

(2) $xy = \varphi(s)^{-1}\varphi(a)\varphi(s')^{-1}\varphi(a')$, existe $t \in S$, y $b \in A$ tales que $\varphi(a)\varphi(s')^{-1} = \varphi(t)^{-1}\varphi(b)$

$$\Rightarrow \quad \sigma(xy) = \sigma(\varphi(ts)^{-1}\varphi(ba')) = \psi(ts)^{-1}\psi(ba') = \psi(s)^{-1}\psi(t)^{-1}\psi(b)\psi(a')$$

Como $\varphi(t)\varphi(a) = \varphi(b)\varphi(s')$, entonces existe $\lambda \in S$ tal que $\lambda ta = \lambda bs'$, así $\psi(a)\psi(s')^{-1} = \psi(t)^{-1}\psi(b)$. En consecuencia,

$$\sigma(xy) = \psi(s)^{-1}\psi(a)\psi(s')^{-1}\psi(a') = \sigma(x)\sigma(y).$$

(3) Como $1 = \varphi(1)^{-1}\varphi(1)$, entonces $\sigma(1) = \psi(1)^{-1}\psi(1) = 1$.

De (1), (2) y (3) se concluye que σ es un homomorfismos de anillos.

(c) Finalmente veamos que σ es único y $\sigma \circ \varphi = \psi$:

Sea $a \in A$. $\quad \sigma \circ \varphi(a) = \sigma(\varphi(a)) = \sigma(1 \cdot \varphi(a)) = \sigma(\varphi(1)^{-1}\varphi(a)) = \psi(1)^{-1}\psi(a) = \psi(a)$.

Por lo tanto, $\sigma \circ \varphi = \psi$.

De $(a), (b), (c)$ se concluye lo deseado.

Q.E.D

Nota: Debido a la unicidad de la solución de un problema universal se sigue que si existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$, entonces es único salvo isomorfismos. Sin embargo, en esta ocasión vamos a demostrar esta afirmación.

Proposición 3.1.12. *Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo. Si existe un anillo de fracciones $\mathfrak{A}$ (con respecto a S), entonces es único salvo isomorfismos.*

Dem.
Supongamos que existe (A', φ') anillo de fracciones. Sea (A'', φ'') otro anillo de fracciones.

Por la proposicion 3.1.11 se siguen que existen únicos $\sigma' \in \operatorname{Hom}(A', A'')$, $\sigma'' \in \operatorname{Hom}(A'', A')$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "\varphi'"'] & A'' \\ A' \arrow[ur, "\sigma'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi''"'] & A' \\ A'' \arrow[ur, "\sigma''"'] & \end{tikzcd} \tag{I}$$

Ahora, por la proposición 3.1.11, existen únicos $g \in \operatorname{Hom}(A', A')$, $h \in \operatorname{Hom}(A'', A'')$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & A' \arrow[r, "\sigma'"] & A'' \arrow[r, "\sigma''"] & A' \\ A' \arrow[urrr, "g"'] & & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "\varphi''"'] & A'' \arrow[r, "\sigma''"] & A' \arrow[r, "\sigma'"] & A'' \\ A'' \arrow[urrr, "h"'] & & & \end{tikzcd} \tag{II}$$

Así,de (I) se tiene que $\sigma' \circ \varphi' = \varphi''$ y $\sigma'' \circ \varphi'' = \varphi'$. De (II) se tiene que $\sigma'' \circ \sigma' \circ \varphi' = g \circ \varphi'$ y $\sigma' \circ \sigma'' \circ \varphi'' = h \circ \varphi''$.

De las dos primeras igualdades se sigue que $\sigma'' \circ \sigma' \circ \varphi' = \sigma'' \circ (\sigma' \circ \varphi') = \sigma'' \circ \varphi'' = \varphi'$, de manera similar se tiene que $\sigma' \circ \sigma'' \circ \varphi'' = \varphi''$. De manera que tomando $g = \sigma'' \circ \sigma'$, $g = \mathrm{id}_{A'}$ y $h = \sigma' \circ \sigma''$, $h = \mathrm{id}_{A''}$ los diagramas correspondientes en (II) conmutan.

Por la unicidad de g y h, se concluye que $\sigma'' \circ \sigma' = \mathrm{id}_{A'}$ y $\sigma' \circ \sigma'' = \mathrm{id}_{A''}$, en consecuencia $A' \cong A''$.

Q.E.D

En virtud de la proposición 3.1.12, dado un anillo A y S subconjunto multiplicativo de A, denotaremos al anillo de fracciones izquierdo respecto a S como $[S^{-1}]A$ siempre que exista. El siguiente teorema nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes para saber la existencia del anillo de fracciones.

Lema 3.1.13. *Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo de A. Si $\left[S^{-1}\right]A$ existe, entonces S satisface:*

(S_1) $\forall\ a \in A$ *y* $\forall\ s \in S$, *se tiene que* $As \cap Sa \neq \emptyset$

(S_2) $\forall\ a \in A$ *y* $\forall\ s \in S$ *con* $as = 0$, *implica que existe* $t \in S$ *tal que* $ta = 0$.

Dem.
Supongamos que $[S^{-1}]A$ existe. Sea $a \in A$, $s \in S$.

Veamos que se satisface S_1. Tenemos que $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} \in [S^{-1}]A$, pues $\varphi(s)$ tiene inversa. Por (2), de la definición 3.1.10 se sigue que existen $a' \in A$, $s' \in S$ tales que $\varphi(s')^{-1}\varphi(a') = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$.

$$\Rightarrow \quad \varphi(a's) = \varphi(s'a) \qquad \Rightarrow \quad a's - s'a \in Nu(\varphi).$$

Por el inciso (3) de la definición 3.1.10 existe $t \in S$ t.q $(ta')s = (ts')a$, de manera que $As \cap Sa \neq \emptyset$.

Por lo tanto, (S_1) se cumple.

Ahora, veamos que S_2 se cumple. supongamos que $as = 0$, Entonces $\varphi(as) = \varphi(a)\varphi(s) = 0$, así $\varphi(a) = 0$. Por el inciso (3) de la definición 3.1.10 se sigue que existe $t \in S$ tal que $ta = 0$.

Por lo tanto, (S_2) se cumple.

Q.E.D

Definición 3.1.14. *Un conjunto multiplicativo S de A que cumple con S_1 y S_2 se llama* ***conjunto denominador (izquierdo)****.*

A partir de aquí supongamos que S es un conjunto denominador izquierdo. Entonces, definamos en $S \times A$ la siguiente relación:

$$(s,a) \sim (t,b) \iff \text{existen } c,d \in A \quad \text{tal que} \quad cs = dt \in S \quad \text{y} \quad ca = db \in A.$$

Proposición 3.1.15. *$\sim$ es una relación de equivalencia.*

Dem.
Sean $(s,a),(s',a'),(s'',a'') \in S \times A$.

(i) Claramente $\sim$ es reflexiva y simétrica, se sigue de su definición.

(ii) Supongamos que $(s,a) \sim (s',a')$ y $(s',a') \sim (s'',a'')$. Entonces, existen $b,b',c,c' \in A$ tales que:

- $ba = ca' \in A$, $\quad bs = cs' \in S$
- $b'a' = c'a'' \in A$, $\quad b's' = c's'' \in S$.

Dado que S_1 se cumple, entonces $A(cs') \cap S(b's') \neq \emptyset$, esto es, existe $r \in A$ y $t \in S$ tal que $rcs' = tb's'$, esto implica que $(rc - tb')s' = 0$ y por S_2 se sigue que existe $l \in S$ tal que $lrc = ltb'$.

Así, $rbs = r(bs) = r(cs') = tb's' = t(c's'') \in S$, en consecuencia:

- $$\begin{aligned}(lrb)a &= (lr)(ba) = (lr)(ca') = (lrc)a' \\ &= (ltb')a' = (lt)(b'a') = (lt)(c'a'') = (ltc')a'' \in A\end{aligned}$$
- $(lrb)s = l(rbs) = l(tc's'') = (ltc')s'' \in S$.

Por tanto $(s,a) \sim (s'',a'')$, es decir, $\sim$ es transitiva.

De (i) y (ii) se concluye que $\sim$ es relación de equivalencia.

Q.E.D

Observemos que para cada $s \in S$, $[(s,0)] = [(1,0)]$, pues $(1)s = (s)1 \in S$ y $(1)(0) = (s)(0)$, es decir, $(s,0) \sim (1,0)$.Ahora, consideremos $\mathscr{A} := S \times A/\sim$ y definamos en $\mathscr{A}$ las siguientes operaciones:

$$\mathscr{A} \times \mathscr{A} \ni \big([(s,a)],[(t,b)]\big) \xmapsto{\ +\ } [(us, ua + vb)] \in \mathscr{A}, \text{ donde } us = vt \in S$$

$$\mathscr{A} \times \mathscr{A} \ni \big([(s,a)],[(t,b)]\big) \xmapsto{\ \cdot\ } [(ys, xb)] \in \mathscr{A} \text{ donde } xt = ya \text{ y } y \in S$$

La condición S_1 no asegura la existencia de $u,v \in A$ en la suma $(+)$ al igual que la existencia de $\mu \in A$, $\eta \in S$ en el producto $(\cdot)$. Observemos que en la definición de $+$ no estamos exigiendo que v y ni u sean elementos de S.

Lema 3.1.16. *$(\mathscr{A}, +)$ es un grupo conmutativo.*

Dem.
(I) Sea $[(s,a)],[(t,b)] \in \mathscr{A}$ y $u \in A$, $v \in S$ tales que $us = vb$. Veamos primero que $+$ no depende de la elección de u y v. Para ello sean $u,v,u',v' \in A$ tales que $us = vt, u's = v't \in S$.

Por S_1 se tiene que $A(us) \cap S(u's) \neq \emptyset$, por lo que existen $x \in A$, $y \in S$ tales que $x(us) = y(u's) \in S$, se sigue que $(xu - yu')s = 0$ y por S_2 existe $r \in S$ tal que $r(xu - yu') = 0$, o equivalentemente $rxu = ryu'$. Por otro lado, $us = vt, u's = v't$, entonces $x(vt) = x(us) = y(u's) = y(v't)$ lo que implica que $r(xvt) = r(yv't)$, obteniendo así que $(rxv - ryv')t = 0$ y por S_2 existe $l \in S$ tales que $l(rxv - ryv') = 0$ lo que equivale a $lrxv = lryv'$. Resumiendo tenemos la siguientes igualdades:

- $xus = yu's$
- $rxu = ryu'$
- $lrxv = lryv'$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(lrx)(us) &= (lr)(xus) = (lr)(yu's) = (lry)(u's) \in S, \text{ pues } l,r,y,u's \in S.\\
(lrx)(ua+vb) &= (lrx)(ua) + (lrx)(vb) = l(rxu)a + (lrxv)b = l(ryu')a + (lryv')b\\
&= (lry)(u'a) + (lry)(v'b) = (lry)(u'a + v'b)
\end{aligned}$$

Se sigue que $(us, ua+vb) \sim (u's, u'a+v'b)$, es decir $[(us, ua+vb)] = [(u's, u'a+v'b)]$ lo cual prueba lo deseado.

(II) Veamos que $+$ no depende de los representantes de las clases.

Para ello, sean $[(s,a)] = [(s',a')]$, $[(t,b)] = [(t',b')]$ en $\mathscr{A}$ y sean $u,v,c,d \in A$ tales que:

- $us = vt \in S$.
- $ct = dt' \in S$ y $cb = db'$, pues (t,b) esta relacionado con (t',b').
- $es = fs' \in S$ y $ea = fa'$, pues (s,a) esta relacionado con (s',a').

Por (S_1) se tiene que $A(ct) \cap S(us) \neq \emptyset$, es decir, existen $\sigma \in A$, $\tau \in S$ tales que $\sigma(ct) = \tau(us) \in S$, pues $\tau, us \in S$. Dado que $us = vt$ se sigue que $\sigma(ct) = \tau(vt)$ y por (S_2), existe $l \in S$ tales que $l\sigma c = l\tau v$.

Así,

$$\begin{aligned}
l\tau(ua+vb) &= (l\tau)ua + (l\tau)va = (l\tau u)a + (l\tau v)b = (l\tau u)a + (l\sigma c)b\\
&= (l\tau u)a + (l\sigma)(cb) = l\tau u)a + (l\sigma)(db') = (l\tau u)a + (l\sigma d)b' \qquad \text{(i)}
\end{aligned}$$

$$(l\tau u)s = l(\tau us) = l(\sigma ct) = l\sigma(ct) = l\sigma(dt') = (l\sigma d)t' \in S, \text{ pues } l, \tau us \in S \qquad \text{(ii)}$$

Ahora, por S_1 se tiene que $A(es) \cap S(l\tau us) \neq \emptyset$, es decir, existen $\delta \in A$ y $\omega \in S$ tales que

$$\delta(es) = \omega(l\tau us) \in S.$$

Por (ii) se sigue que existe $k \in S$, tales que $k\delta e = k\omega l\tau u$, así,

$$\begin{aligned}
(k\omega l\tau)(ua+vb) &= (k\omega)(l\tau)(ua+vb) = (k\omega)((l\tau u)a + (l\sigma d)b') = (k\omega)(l\tau u)a + (k\omega)(l\sigma d)b'\\
&= (k\omega l\tau u)a + (k\omega l\sigma d)b' = (k\delta e)a + (k\omega l\sigma d)b' = (k\delta)(ea) + (k\omega l\sigma d)b'\\
&= (k\delta)(fa') + (k\omega l\sigma d)b' = (k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b' \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}$$

$$(k\omega l\tau)(us) = (k\omega)(l\tau us) = (k\omega)(l\sigma dt') = (k\omega l\sigma d)t' \in S, \text{ pues } k,\omega \in S \text{ y } (ii) \qquad \text{(iv)}$$

$$(k\omega l\tau)(us) = (k\omega l\tau u)s = (k\delta e)s = (k\delta)(es) = (k\delta)(fs') = (k\delta f)s' \qquad \text{(v)}$$

De (iv), (v) se tiene que $(k\delta f)s' = (k\omega l\sigma d)t'$ y la definición de $+$ se sigue que

$$[(s',a')] + [(t',b')] = \big[\big((k\omega l\sigma d)t', (k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b'\big)\big]$$

Por otro lado, $1, k\omega l\tau \in A$ y cumplen:

- $(k\omega l\tau)(us) = (1)(k\omega l\tau us) \in S$, pues (iv)
- $(k\omega l\tau)(ua+vb) = (1)\big((k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b'\big)$

Por definición de $\sim$ se tienes que $(us, ua+vb) \sim \big((l\omega l\tau us, (k\delta f)a' + (k\omega l\sigma d)b'\big)$, en consecuencia

$$[(s,a)] + [(t,b)] = [(s',a')] + [(t',b')]$$

Por lo tanto, $+$ esta bien definida.

(III) Veamos que $+$ es asociativa. Sean $[(s,a)], [(t,b)], [(r,c)] \in \mathscr{A}$ y sean $u, v \in A$ tal que $us = vt \in S$ y por S_1 se sigue que existen $x \in A$ y $y \in S$ tales que $x(us) = yr \in S$, pues $y, r \in S$ y como $us = vt$ entonces $(xv)t = yr \in S$, por definición de $+$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\Big([(s,a)] + [(t,b)]\Big)[(r,c)] &= [(us, ua+vb)][(r,c)] = [(x(us), x(ua+vb)+yc)] \\ &= [(s,a)] + [(xus, xvb+yc)],\ \text{pues } (xu)s = (1)(xus) \in S \\ &= [(s,a)] + \Big([(t,b)] + [(r,c)]\Big),\ \text{pues } (xv)t = yr \in S\end{aligned}$$

Por lo tanto, $+$ es asociativo.

(IV) Existencia del neutro: Sea $[(s,a)] \in \mathscr{A}$, como $(s)(1) = (1)s \in S$, pues $s \in S$, entonces de la definición de $+$, se sigue que:

$$[(1,0)] + [(s,a)] = [((1)s, (s)0 + (1)a)] = [(s,a)]$$

Similarmente,

$$[(s,a)] + [(1,0)] = [((s)1, (1)a + (s)0)] = [(s,a)]$$

Por lo tanto, $[(1,0)]$ es el neutro en $(\mathscr{A}, +)$.

(V) Veamos que $+$ es cerrado bajo inversos: Sea $[(s,a)] \in \mathscr{A}$, como $(1)s = (1)s \in S$, entonces por la definición de $+$ se obtiene que:

$$[(s,a)] + [(s,-a)] = [(s, (1)a + (1)(-a))] = [(s,0)] = [(1,0)]$$

Igualmente,

$$[(s,-a)] + [(s,a)] = [(s, (1)(-a) + (1)(a))] = [(s,0)] = [(1,0)]$$

Por lo tanto, $+$ es cerrado bajo inversos.

(VI) Veamos que $+$ es conmutativo. Sean $[(s,a)], [(t,b)] \in \mathscr{A}$ y sean $u, v \in A$ tales que $us = vt$, entonces

$$[(s,a)] + [(t,b)] = [(us, ua+vb)] = [(vt, vb+ua)] = [(t,b)] + [(s,a)]$$

Por lo tanto, $+$ es conmutativo.

Se concluye que $(\mathscr{A}, +)$ es un grupo abeliano.

Q.E.D

Lema 3.1.17. $(\mathscr{A}, \cdot)$ *es un monoide.*

Dem.
(I) Veamos que $\cdot$ no depende de la elección de los parámetros. Para ello, sean $[(s,a)], [(t,b)] \in \mathscr{A}$ y sean $x, u \in A$, $y, v \in S$ tales que $xt = ya$ y $ut = va$.

Por $Ay \cap Sv \neq \emptyset$, es decir, existen $\alpha \in A$, $\beta \in S$ tales que $\alpha y = \beta v \in S$, pues $v \in S$, esto implica que $\alpha(xt) = \alpha(ya) = (\alpha y)a = (\beta v)a = \beta(va) = \beta(ut) = (\beta u)t$, así $(\alpha x - \beta u)t = 0$, y por (S_2) existe $\rho \in S$ tal que $\rho\alpha x = \rho\beta u$. En consecuencia tenemos que:

$$(\rho\alpha)(ys) = \rho(\alpha y)s = \rho(\beta v)s = (\rho\beta)(vs) \in S, \text{ pues } \rho, \beta, v, t \in S.$$

$$(\rho\alpha)(xb) = (\rho\alpha x)b = (\rho\beta u)b = (\rho\beta)(ub)$$

Por tanto, $(ys, xb) \sim (vs, ub)$, es decir, $[(ys, xb)] = [(vs, ub)]$ lo prueba cual prueba lo deseado.———

(II) Veamos que $\cdot$ no depende del representante elegido para cada clase. Antes de mostrar esto, probemos la siguiente afirmación:

Afirmación: Sean $[(s,a)], [(t,b)] \in \mathscr{A}$ y sea $x \in A$ tales que $xs \in S$ y $(s,a) \sim (xs, xa)$, entonces $[(s,a)] \cdot (t,b)] = [(xs, xa)] \cdot (t,b)]$.

Prueba.
Sean $p \in A$ y $q \in S$ tales que $pt = qa$, esto se puede hacer por S_1. Por definición de $\cdot$ se tiene que

$$[(s,a)] \cdot (t,b)] = [(qs, pb)]$$

Como $xs \in S$, entonces por S_1 se sigue que $A(qs) \cap S(xs) \neq \emptyset$, es decir, existen $\xi \in A$, $\eta \in S$ tales que $\xi(qs) = \eta(xs)$, equivalentemente $(\xi q - \eta x)s = 0$,entonces por S_2 se sigue que existe $m \in S$ tal que

$$m\xi q = m\eta x$$

Así,

$$(m\eta)(xa) = (m\eta x)a = (m\xi q)a = (m\xi)(qa) = (m\xi)(pt) = (m\xi p)t$$

Como $m, \eta \in S$, entonces $m\eta \in S$ y por definición de $\cdot$ se sigue inmediatamente que

$$[(xs, xa)] \cdot [(t,b)] = [(m\eta xs, m\xi pb)]$$

Observemos lo siguiente:

$$1(m\eta xs) = (m\eta)(xs) = (m\eta x)s = (m\xi q)s = (m\xi)(qs) \in S$$
$$1(m\xi pb) = (m\xi)(pb)$$

Entonces, por definición de $\sim$ se concluye que $(m\eta xs, m\xi pb) \sim (qs, pb)$ y en consecuencia,

$$[(xs, xa)] \cdot [(t,b)] = [(m\eta xs, m\xi pb)] = [(qs, pb)] = [(s,a)] \cdot [(t,b)]$$

Por lo tanto, la afirmación es cierta.

Ahora, supongamos que $[(s,a)] = [(s',a')]$ y $[(t,b)] = [(t',b')]$ en $\mathscr{A}$ y sean $u, c, d, e, f \in A$ y $v \in S$ tales que:

- $ut = va$.
- $cs = ds' \in S$ y $ca = da'$, pues (s,a) esta relacionado con (s',a').
- $et = ft' \in S$ y $eb = fb'$, pues (t,b) esta relacionado con (t',b').

Por definición de $\cdot$ tenemos que:

$$[(s,a)]\cdot[(t,b)] = [(vs,ub)]$$

Por (S_1) tenemos que $A(et)\cap S(va)\neq\emptyset$, es decir, existen $\sigma\in A$, $\tau\in S$ tales que $\sigma(et)=\tau(va)=\tau(ut)$, así $(\sigma e-\tau u)t=0$, entonces por S_2 existe $l\in S$ tal que

$$l\sigma e = l\tau u \tag{1}$$

Ahora,

$$l\tau vs\in S,\ \text{ pues } l,\tau,y,s\in S. \tag{2}$$

$$l\tau ub = (l\sigma e)b = (l\sigma)(eb) = (l\sigma)(fb') = l\sigma fb', \qquad \Big(\text{usando } (1)\Big). \tag{3}$$

$$l\tau va = (l\tau)(va) = (l\tau)(ut) = (l\tau u)t = (l\sigma e)t = (l\sigma)(et) = (l\sigma)(ft') = l\sigma ft', \qquad \Big(\text{usando } (1)\Big). \tag{4}$$

Por (2) y (S_1) se tiene que $A(l\tau vs)\cap S(cs)\neq\emptyset$, es decir, existen $\omega\in A$, $\delta\in S$ tales que $\omega(l\tau vs)=\delta(cs)$, como $\delta, cs\in S$, entonces $\delta(cs)=\omega(l\tau vs)\in S$. De la igualdad se obtiene que $(\delta c-\omega l\tau v)s=0$, por S_2 existe $k\in S$ tal que

$$k\delta c = k\omega l\tau v \tag{5}$$

Tenemos

$$(k\omega l\tau)(vs) = (k\omega l\tau v)s = (k\delta c)s = (k\delta)(cs) = (k\delta)(ds') = k\delta ds'\in S \qquad \Big(\text{usando } (5)\Big) \tag{6}$$

$$(k\omega l\tau)(ub) = (k\omega)(l\tau ub) = (k\omega)(l\sigma fb') = k\omega l\sigma fb', \qquad \Big(\text{usando } (3)\Big). \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(k\omega l\sigma f)t' &= (k\omega)(l\sigma ft') = (k\omega)(l\tau va) = (k\omega l\tau v)a = (k\delta c)a = (k\delta)(ca)\\ &= (k\delta)(da'), \qquad \Big(\text{usando } (4),(5)\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

Como $k,\delta\in S$ por definición de $\cdot$ y (8) se sigue que:

$$[(ds',da')]\cdot[(t',b')] = [(k\delta ds', k\omega l\sigma fb')]$$

De (6), (7) y la definición de $\sim$ se sigue que $(k\delta ft', k\omega l\sigma da')\sim(vs,ub)$, en consecuencia

$$[(ds',da')]\cdot[(t',b')] = [(s,a)]\cdot[(t,b)]$$

Y por la afirmación se concluye que $[(s',a')]\cdot[(t',b')]=[(s,a)]\cdot[(t,b)]$. Por lo tanto, $\cdot$ esta bien definido.

(III) Veamos que $\cdot$ es asociativo. Sean $[(s,a)],[(t,b)],[(r,c)]\in\mathscr{A}$, por S_1 se sigue que existen $u\in A$, $v\in S$ tales que $ur=vb$, por lo que por definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(t,b)]\cdot[(r,c)] = [(vt,uc)]$$

Igualmente, por S_1 existen $\alpha\in A$ y $\beta\in S$ tales que $\alpha(vt)=(\beta)a$ y de la definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(s,a)]\cdot[(vt,uc)] = [(\beta s,\alpha(uc))]$$

Así,

$$[(s,a)]\cdot\Big([(t,b)]\cdot[(r,c)]\Big) = [(\beta s,\alpha uc)] \tag{a}$$

Por otro lado, como $(\alpha v)t = (\beta)a$ y $\beta \in S$, se sigue de la definición de $\cdot$ que

$$[(s,a)] \cdot [(t,b)] = [(\beta s, \alpha v b)] = [(\beta s, \alpha u r)], \text{ pues } ur = vb.$$

Y como $(\alpha u)r = 1(\alpha v b)$ y $1 \in S$, se sigue de la definición de $\cdot$ que

$$[(\beta s, \alpha u r)] \cdot [(r,c)] = [(\beta s, \alpha u c)]$$

Así,

$$\Big([(s,a)] \cdot [(t,b)]\Big) \cdot [(r,c)] = [(\beta s, \alpha u c)] \tag{b}$$

De (a) y (b) se concluye que $\cdot$ es asociativo.

(IV) la unidad es $[(1,1)]$. Sea $[(s,a)] \in \mathscr{A}$, como $1(s) = s(1)$ y $s \in S$ entonces por definición $\cdot$ se tiene que

$$[(1,1)] \cdot [(s,a)] = [((s)1, 1(a))] = [(s,a)]$$

Similarmente, como $(a)1 = 1(a)$, entonces por definición de $\cdot$ se tiene que

$$[(s,a)] \cdot [(1,1)] = [((1)s, a(1))] = [(s,a)]$$

Por lo tanto, $[(1,1)]$ es la unidad de $\mathscr{A}$.

De $(I) - (IV)$ se concluye que $(\mathscr{A}, \cdot)$ es un monoide.

Q.E.D

Teorema 3.1.18. $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ *es un anillo con unidad* $[(1,1)]$*, y neutro* $[(1,0)]$

Dem.
En virtud de los dos lemas previos solo nos resta probar que $\cdot$ es distributiva respecto de $+$. Para ello, sean $[(s,a)], [(t,b)], [(r,c)] \in \mathscr{A}$.

(I) Sean $u, v \in A$ tales que $ut = vr \in S$, entonces por la definición de $+$ se sigue que

$$[(t,b)] + [(r,c)] = [(ut, ub + vc)]$$

Por S_1 existen $\sigma \in A$, $\tau \in S$ tales que $\sigma(ut) = \tau a$, entonces de la definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(s,a)] \cdot [(ut, ub + vc)] = [(\tau s, \sigma(ub) + \sigma(vc))]$$

Así,

$$[(s,a)] \cdot \Big([(t,b)] + [(r,c)]\Big) = [(\tau s, \sigma(ub) + \sigma(vc))] \tag{1}$$

Por otro lado, como $\sigma(ut) = \tau a$ y $ut = vr$, entonces $(\sigma u)t = \tau a$ y $(\sigma v)r = \tau a$ y por la definición de $\cdot$ se sigue que

$$[(s,a)] \cdot [(t,b)] = [(\tau s, \sigma u b)] \quad \text{y} \quad [(s,a)] \cdot [(r,c)] = [(\tau s, \sigma v c)]$$

Como $1(\tau s) = 1(\tau s) \in S$, entonces por definición de suma se tiene que

$$[(s,a)] \cdot [(t,b)] + [(s,a)] \cdot [(r,c)] = [(\tau s, \sigma(ub) + \sigma(vc))]. \tag{2}$$

De (a) y (b) se concluye que

$$[(s,a)]\Big([(t,b)] + [(r,c)]\Big) = [(s,a)] \cdot [(t,b)] + [(s,a)] \cdot [(r,c)].$$

(II) Por S_1 existen $\alpha, \delta \in A$ y $\beta, \omega \in S$ tales que $\alpha r = \beta a$ y $\delta r = \omega b$, por definición de $\cdot$ tenemos que

$$[(s,a)][(r,c)] = [(\beta s, \alpha c)]$$

$$[(t,b)][(r,c)] = [(\omega t, \delta c)]$$

Por S_1 $A(\beta s) \cap S(\omega t) \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in A$ y $y \in S$ tales que $x(\beta s) = y(\omega t) \in S$, pues $y, \omega, r \in S$. Así,

$$[(s,a)] \cdot [(r,c)] + [(t,b)] \cdot [(r,c)] = [(x\beta s, x\alpha c + y\delta c)] \tag{3}$$

Por otro lado, como $(x\beta)s = (y\omega)t \in S$ entonces de la definición de $+$ se sigue que

$$[(s,a)] + [(t,b)] = [(x\beta s, x\beta a + y\omega b)]$$

Dado que $\alpha r = \beta a$ y $\delta r = \omega b$, entonces $x\beta a + y\omega b = (x\alpha)r + (y\delta)r = \Big((x\alpha) + (y\delta)\Big)r$, es decir,

$$\Big((x\alpha) + (y\delta)\Big)r = (1)\Big(x\beta a + y\omega b\Big)$$

y por lo que de la definición de $\cdot$ se obtiene que

$$[(x\beta s, x\beta a + y\omega b)] \cdot [(r,c)] = [(x\beta s, (x\alpha)c + (y\delta)c)]$$

Así,

$$\Big([(s,a)] + [(t,b)]\Big) \cdot [(r,c)] = [(x\beta s, x\alpha c + y\delta c)]. \tag{4}$$

Por lo tanto, de (3) y (4) se concluye que

$$\Big([(s,a)] + [(t,b)]\Big) \cdot [(r,c)] = [(s,a)] \cdot [(r,c)] + [(t,b)] \cdot [(r,c)].$$

De (I) y (II) se tiene que $\cdot$ es distributiva respecto de $+$.

Se concluye que $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ es un anillo con unidad $[(1,1)]$, y neutro $[(1,0)]$.

Q.E.D

Ahora, sea $\phi : A \longrightarrow \mathscr{A}$ definida por $\phi(a) = [(1,a)]$, $\forall\ a \in A$. Veamos que ϕ es un homomorfismo de anillos..

- Sean $a, b \in A$. Como $1 \in S \cap A$ y $1(1) = 1(1)$, por definición de $+$ se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned}\phi(a) + \phi(b) &= [(1,a)] + [(1,b)] = [(1, 1(a) + 1(b)] \\ &= [(1, a+b)] = \phi(a+b).\end{aligned}$$

  Por lo tanto $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$, $\forall\ a, b \in A$.

- Sea $a \in A$, Como $1 \in S$ y $(a)1 = (1)a$, entonces por definición de $\cdot$, se sigue que

$$\begin{aligned}\phi(a)\phi(b) &= [(1,a)][(1,b)] = [((1)1, (a)b)] \\ &= [(1, ab)] = \phi(ab)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, $\forall\ a, b \in A$.

- Finalmente, $\phi(1) = [(1,1)]$, y $[(1,1)]$ es la unidad de $\mathscr{A}$.

Se sigue que ϕ es un homomorfismo de anillos (con unidad).

Proposición 3.1.19. *$\mathscr{A}$ junto con ϕ cumple la definición de anillo de fracciones.*

Dem.
(I) Veamos que se cumple (1) de la definición de anillo de fracciones.
Sea $s \in S$. Por definición de $\cdot$, se sigue inmediatamente que:

$$[(s,1)] \cdot [(1,s)] = [(s,s)] = [(1,1)] = [(1,s)] \cdot [(s,1)], \text{ pues } (1)s = (s)1.$$

Es decir, $[(s,1)] \cdot \phi(s) = [(1,1)] = \phi(s)[(s,1)]$. Por lo que $\phi(s) \in U(\mathscr{A})$ y $\phi(s)^{-1} = [(s,1)]$.

Por lo tanto, $\phi(S) \subset U(\mathscr{A})$.

(II) Para mostrar que la condición (2)de la definición de anillo de fracciones, tomemos $[(s,a)] \in \mathscr{A}$. Dado que $1(1) = 1(1)$, $1 \in A \cap S$ por la definición de $\cdot$ se sigue inmediatamente que:

$$[(s,1)][(1,a)] = [(s,a)].$$

Por lo tanto, $[(s,a)] = \phi(s)^{-1}\phi(a)$

(III) Finalmente, mostremos que se cumple con (3) de la definición de anillos de fracciones.

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Nu}(\phi) \quad &\Leftrightarrow \quad \phi(a) = [(1,a)] = [(1,0)] \\ &\Leftrightarrow \text{ existen } \ c,d \in A \ \text{ tal que } \ c(1) = d(1) \in S \ \text{ y } \ c(a) = d(0) \\ &\Leftrightarrow \text{ existe } \ s \in S \ \text{ tal que } \ sa = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{Nu}(\phi) = \{a \in A : \text{ existe } \ s \in S \ \text{ tal que } \ sa = 0\}$.

De $(I), (II), (III)$ se sigue que $\mathscr{A}$ junto con ϕ es un anillo de fracciones.

Q.E.D

Teorema 3.1.20. *Sea A un anillo y S un subconjunto multiplicativo de A. $\left[S^{-1}\right] A$ existe si y solo si S es un conjunto denominador. Mas aun, $\left[S^{-1}\right] A = \mathscr{A}$*

Dem.
Por el lema 3.1.15, lema 3.1.16, lema 3.1.17, teorema3.1.18 y proposición 3.1.19

Q.E.D

3.2. Módulos de fracciones

Dado un anillo A y un conjunto denominador S, hemos construido su anillo de fracciones $\left[S^{-1}\right] A$ y que ademas por las propiedades que tiene le podemos dar estructura de (A,A)-bimodulo, ahora, A tiene estructura de A-módulo, entonces podemos considerar el A-módulo $\left[S^{-1}\right] A \otimes_A A$ que sabemos es isomorfo a A, con base en esta observación podemos plantearnos y si en lugar tomar solo a A como A-módulo izquierdo consideramos cualquier A-módulo izquierdo, ¿podremos hablar de módulos de fracciones?.

Definición 3.2.1. *Dado S un conjunto denominador (izquierdo) en el anillo A. Para cada $M \in A$-**Mod**, definimos $[S^{-1}]M := [S^{-1}]A \otimes_A M$ con su estructura canónica como A-módulo izquierdo. A $[S^{-1}]M$ se llama módulo de fracciones respecto a S.*

A partir de aquí vamos a tomar A un anillo y S un conjunto denominador (izquierdo) de A.

Proposición 3.2.2. *Dado $M \in A$-**Mod**, el homomorfismo canónico $M \ni m \xmapsto{\mu_M} 1 \otimes m \in [S^{-1}]M$ tiene la siguiente propiedad universal:*

*Para cada $N \in [S^{-1}]A$-**Mod**, $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ existe un único $\sigma \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}([S^{-1}]M, N)$ tal que $\sigma \circ \mu_M = \phi$.*

Dem.
Sean $M \in A$-**Mod**, $N \in [S^{-1}]A$-**Mod**, y $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ (N puede ser considerado como A-módulo). Consideremos la siguiente función:

$$[S^{-1}]A \times M \ni (a, m) \overset{\hat{\sigma}}{\mapsto} x\phi(m) \in N, \qquad \text{donde } [S^{-1}]A \in \textbf{Mod-}A.$$

Veamos que $\hat{\sigma}$ es biaditiva. Con este fin, sean $x, y \in [S^{-1}]A$, $m_1, m_2 \in M$ y $\lambda \in A$.

(i) $\hat{\sigma}(x + y, m_1) = (x + y)\phi(m_1) = x\phi(m_1) + y\phi(m_1) = \hat{\sigma}(x, m_1) + \hat{\sigma}(y, m_1)$

(ii) $\hat{\sigma}(x, m_1 + m_2) = x\phi(m_1 + m_2) = x(\phi(m_1) + \phi(m_2)) = x\phi(m_1) + x\phi(m_2) = \hat{\sigma}(x, m_1) + \hat{\sigma}(x, m_2)$

(iii) $\hat{\sigma}(x\lambda, m_1) = (x\lambda)\phi(m_1) = x(\lambda\phi(m_1)) = x\phi(\lambda m_1) = \hat{\sigma}(x, \lambda m_1)$

De (i), (ii) y (iii) se sigue que $\hat{\sigma}$ es biaditiva. En, consecuencia, por la Propiedad Universal del Producto Tensorial se sigue que, existe un único $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left([S^{-1}]M, N\right)$ tal que siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} {[S^{-1}]A \times M} \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "h"'] & N \\ {[S^{-1}]M} \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd} \quad \text{, donde} \quad [S^{-1}]A \times M \ni (a, x) \overset{h}{\mapsto} a \otimes x \in [S^{-1}]M \tag{1}$$

Ahora, tenemos que $\left[S^{-1}\right] A$ es $\left(\left[S^{-1}\right] A, A\right)$-bimódulo y así $\left[S^{-1}\right] M$ tiene estructura de $\left[S^{-1}\right] A$-**Mod** y esta estructura es mediante la multiplicación siguiente: Para cada $s \in \left[S^{-1}\right] A$ y $x \otimes m \in \left[S^{-1}\right] M$, $s(x \otimes m) := (sx) \otimes m$.

Afirmación: $\sigma \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}\left([S^{-1}]M, N\right)$.

Prueba: Sea $s \in \left[S^{-1}\right] A$ y $x \otimes m \in \left[S^{-1}\right] M$. Tenemos $\sigma(s(x \otimes m)) = \sigma((sx) \otimes m) = \sigma \circ h(sx, m) = \hat{\sigma}(sx, m) = (sx)\phi(m) = s(x\phi(m)) = s\hat{\sigma}(x, m) = s\sigma \circ h(x, m) = s\sigma(x \otimes m)$.

Por lo tanto, $\sigma \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}\left([S^{-1}]M, N\right)$.

Finalmente,por (1) se sigue que para cada $m \in M$, $\sigma \circ \mu_M(m) = \sigma(1 \otimes m) = 1\phi(m) = \phi(m)$.

Por tanto, $\sigma \circ \mu_M = \phi$. Veamos que σ es , para ellos supongamos que existe $\sigma' \in \mathrm{Hom}_{[S^{-1}]A}\left([S^{-1}]M, N\right)$ tales que $\sigma' \circ \mu_M = \phi$. Entonces, para cada $x \otimes m \in \left[S^{-1}\right] M$ tenemos:

$$\sigma'(s \otimes m) = \sigma'(s(1 \otimes m)) = s\sigma'(1 \otimes m) = s\phi(m) = s\sigma(1 \otimes m) = \sigma(s \otimes m).$$

Por lo tanto σ es único.

Q.E.D

Dado, $M \in A$-**Mod**. Consideremos la siguiente relación en $S \times M$:

$$(s, m) \sim (t, n) \text{ en } S \times M \iff \text{existen } c, d \in A \text{ tales que } cs = dt \in S \text{ y } cm = dn.$$

Proposición 3.2.3. *Dado $M \in A$-**Mod**, $\sim$ es relación de equivalencia.*

Sea $\mathcal{M} = S \times M/\sim$

Proposición 3.2.4. *Dado $M \in A$-**Mod**. $S \times M/\sim$ tiene estructura de A-módulo izquierdo con las siguientes operaciones:*

- *Para $[(s,m)], [(t,n)] \in \mathcal{M}$, definimos $(s,m) + (t,n) := (cs, cm + dn)$, para algún $c \in A$, $d \in S$ con $cs = dt \in S$ (usando S_1)*
- *Para cada $[(s,m)] \in \mathcal{M}$, $[(t,a)] \in \left[S^{-1}\right] A$, definimos $(t,a) \cdot (s,m) := (ut, cm)$, para algún $c \in A$, $u \in S$ con $cs = ua$.*

Proposición 3.2.5. *Para cada $M \in A$-**Mod**, $[S^{-1}]M \cong \mathcal{M}$.*

Corolario 3.2.6. *Dado $M \in A$-**Mod**. $\mathrm{Nu}(\mu_M) = \{m \in M :$ existe $s \in S$ tal que $sm = 0\} = \{m \in M : S \cap \mathrm{ann}(m) \neq \emptyset\}$.*

Dem.
Sea $M \in A$-**Mod**, y sea $f \in \mathrm{Hom}_a(\left[S^{-1}\right], \mathcal{M})$ el isomorfismo previo. Tenemos

$$m \in \mathrm{Nu}(\mu_M) \iff 1 \otimes m = \mu_M(m) = 0 \iff [(1,m)] = f(1 \otimes m) = [(1,0)] \text{ (pues } f \text{ es iso).}$$

$$\iff (1,m) \sim (1,0) \iff \text{existen } c, d \in A \text{ tales que } c = c(1) = d(1) = d \in S \text{ y } cm = d(0) = 0$$

Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\mu_M) = \{m \in M : \text{existe } s \in S \text{ tal que } sm = 0\}$.

Q.E.D

Sea $r : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$ dada por $r(M) = \mathrm{Nu}(\mu_M)$.

Proposición 3.2.7. $r \in A$-pr.

Dem.
Claramente, $r(M) \leq M$. Sea $f : M \longrightarrow N$ homomorfismo. Para cada $f(m) \in f(r(M))$ existe $s \in S \cap \mathrm{ann}(m)$ tal que $f(sm) = 0$, implica que $f(m) \in r(N)$.

Por lo tanto, $r \in A$-pr.

Q.E.D

Definición 3.2.8. *Un módulo $M \in A$-**Mod**. Diremos que M es un módulo de S-torsión si $M \in \mathbb{T}_r$ y es un módulo S-libre de torsión si $M \in \mathbb{F}_r$*

Lema 3.2.9. *r es un radical idempotente.*

Dem.
(a) ya sabemos que $r(r(M)) \leq r(M)$. Así, $m \in r(M)$ implica que existe $s \in S$ tal que $sm = 0$, por lo que $m \in r(r(M))$.

Por lo tanto, r es idempotente.

(b) Si $m + r(M) \in r(M/r(M))$, entonces existe $s \in S$ tal que $s(m + r(M)) = r(M)$, por lo que $sm \in r(M)$. Se sigue que existe $s' \in S$ tal que $s'(sm) = 0$, esto implica que $(s's)m = 0$. En consecuencia, $m \in r(M)$.

Por lo tanto, r es radical.

Q.E.D

Así, $(\mathcal{T}_r, \mathcal{F}_r)$ es una teoría de torsión. La asociación $F : A$-**Mod** $\longrightarrow \left[S^{-1}\right] A$-**Mod** que asocia a cada $M \in A$-**Mod** el módulo $\left[S^{-1}\right] M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**. Un hecho básico, es que el funtor es exacto, o en otras palabras:

Proposición 3.2.10. *$\left[S^{-1}\right] A$ es plano como A-módulo derecho.*

Dem.
Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ sucesión exacta. Entonces,

$$\left[S^{-1}\right] A \otimes_A M \xrightarrow{1\otimes f} \left[S^{-1}\right] A \otimes_A N \xrightarrow{1\otimes g} \left[S^{-1}\right] A \otimes_A L \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Veamos que $\left[S^{-1}\right] A \otimes_A M \ni [(s, m)] \xmapsto{1\otimes f = F(f)} [(s, f(m))] \in \left[S^{-1}\right] A \otimes_A N$ es inyectiva.

Supongamos que $F(f)([(s, m)]) = [(1, 0)]$, entonces $[(s, f(m))] = [(1, 0)]$, es decir $(s, f(m)) \sim (1, 0)$. Por tanto, existen $c, d \in A$ tal que $cs = d \in S$ y $cf(m) = 0$.

$f(cm) = 0$ y $cs \in S \Rightarrow cm = 0$, pues f es inyectiva. Se concluye que $(s, m) \sim (1, 0)$.

Por lo tanto, $F(f)$ es inyectivo. Así, $\left[S^{-1}\right] A$ es plano.

Q.E.D

Proposición 3.2.11. *Sea $M \in A$-**Mod**.*

(1) *Si M es S-torsión, entonces $\left[S^{-1}\right] M = 0$.*

(2) *Si M es S-libre de torsión, entonces μ_M es inyectiva.*

Dem.
(1) Supongamos que M es S-torsión. Sea $(s, m) \in \left[S^{-1}\right] M$.

Tenemos por hipótesis que $M = \mathrm{Nu}(\mu_M)$, así, existe $t \in S$ tal que $tm = 0$, se sigue que $(t)s = (ts)1 \in S$, $(t)m = (ts)0$ y $t, ts \in A$. Por tanto $(s, m) \sim (1, 0)$.

Por lo tanto, $\left[S^{-1}\right] M = 0$.

(2) Supongamos que M es S-libre de torsión. Se sigue inmediatamente que μ_M es inyectivo, pues $\mathrm{Nu}(\mu_M) = 0$.

Q.E.D

Corolario 3.2.12. *Si $M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**, entonces μ_M es isomorfismo.*

Dem.
Supongamos que $M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**, y sea $x \otimes m \in \left[S^{-1}\right] M$. Podemos considerar a μ_M como $\left[S^{-1}\right] A$-homomorfismo.

Tenemos que $x \otimes m = x(1 \otimes m) = x\mu_M(m) = \mu_M(xm)$. Por lo tanto μ_M es sobre, se concluye que μ_M es isomorfismo (por (2) de la proposición previa).

Q.E.D

Definición 3.2.13. *Sea $M \in A$-**Mod**.*

(i) M es S-inyectivo si para cada ideal izquierdo I de A tal que $I \cap S \neq \emptyset$ y cada homomorfismo $\alpha : I \longrightarrow M$, existe $x \in M$ tal que $\alpha(a) = ax$, para cada $a \in I$.

(ii) M es S-divisible si $M = sM$, para cada $s \in S$.

Proposición 3.2.14. *Sea $M \in A$-**Mod**. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) $M \cong \left[S^{-1}\right] M$.

(b) M es S-libre de torsión y S-divisible.

(c) M es S-libre de torsión y S-inyectiva.

Dem.
(1) Veamos que $(a) \Rightarrow (b)$. Para ello, supongamos que (a) se cumple, es decir, $M \cong \left[S^{-1}\right] M$.

Sea $m \in \mathrm{Nu}(\mu_M)$, entonces existe $s \in S$ tal que $sm = 0$. Ahora, por hipótesis se sigue que $M \in \left[S^{-1}\right] A$-**Mod**, así $[(s,1)] \cdot (sm) = 0$ esto implica que $([(s,1)] \cdot s)m = ([(s,s)])m = m = 0$.

Por lo tanto, M es S-libre de torsión.

Ahora, para cada $m \in M$ y $s \in S$, $m = [(s,s)] = s[(1,s)]m \in sM$. Se concluye que M es S-divisible.

Por lo tanto, $(a) \Rightarrow (b)$.

(2) Veamos que $(b) \Rightarrow (a)$. Para ello, supongamos que (b) se cumple, es decir, M es S-libre de torsión y S-divisible.

Por ser M, S-libre de torsión, se sigue que μ_M es inyectiva. Ahora, para cada $[(s,a)] \otimes m \in \left[S^{-1}\right] M$ tenemos:

$$[(s,a)] \otimes m = ([(s,1)][(1,a)]) \otimes m = ([(s,1)]a) \otimes m = [(s,1)] \otimes (am).$$

Por ser M, S-dividible, se sigue que existe $m' \in M$ tal que $am = sm'$, se sigue que

$$[(s,a)] \otimes m = [(s,1)] \otimes (sm') = ([(s,1)]s) \otimes m' = [(s,s)] \otimes m' = 1 \otimes m'$$

Por lo tanto, μ_M es sobre. En consecuencia (a) se cumple.

(3) Veamos $(b) \Rightarrow (c)$. Supongamos que M es S-libre de torsión, y S-divisible.

Nos resta mostrar que M es S-inyectiva. Sea I ideal izquierdo de A tal que $I \cap S \neq \emptyset$ y sea $\alpha : I \longrightarrow M$ homomorfismo.

Como M es S-divisible y $I \cap S \neq \emptyset$. Sea $s \in I \cap S$, $\alpha(s) \in M = sM$, se sigue que existe $m \in M$ tal que $\alpha(s) = sm$.

Sea $a \in I$. Por S_1 se tiene que $As \cap Sa \neq \emptyset$, asi, existe $t \in S$, $b \in A$ tales que $bs = ta$, entonces $t\alpha(a) = \alpha(ta) = \alpha(bs) = b\alpha(s) = bsm = tam$. Esto implica que $\alpha(a) - am \in \mathrm{Nu}(\mu_M) = 0$.

Por lo tanto, $\alpha(a) = am$, es decir, M es S-inyectiva.

(4) Veamos $(c) \Rightarrow (b)$. Supongamos que M es S-libre de torsión, y S-inyectiva.

Sea $s \in S$, $m \in M$. Definamos $\alpha : As \longrightarrow M$ por $\alpha(as) = am$. Mostremos que α esta bien definida y es homomorfismo.

Si $as = bs$, entonces existe $t \in S$ tal que $ta = tb$, se sigue que $tam = tbm$, por lo que $am - bm \in \mathrm{Nu}(\mu_M) = 0$. Por lo que, $am = bm$, esto prueba que α esta bien definido y por definición se sigue inmediatamente que α es homomorfismo.

Por se M, S-inyectivo se sigue que existe $m' \in M$ tales que $am = \alpha(as) = (as)m'$, en particular tomando $a = 1$, se tiene $m = sm' \in sM$

Por lo tanto, $M = sM$, es decir, M es S-divisible.

De (1)-(4) se concluye lo deseado.

Q.E.D

Ahora, veamos otra manera de vizualizar un módulo de fracciones. Para ello, observese lo siguiente: para cada $(s, m) \in S \times M$ y consideremos la siguiente asignación

$$As \ni as \xmapsto{\sigma_{(s,m)}} am + r(M) \in M/r(M)$$

Proposición 3.2.15. *Para cada $(s, m) \in S \times M$, $\sigma_{(s,m)}$ es un A-homomorfismo.*

Dem.
Sea $(s, m) \in S \times M$. Veamos que $\sigma_{(s,m)}$ esta bien definida, para ello, sean $as = bs$. Entonces,

$$(a - b)s = 0$$

Por se S conjunto denominador sea se sigue que existe $t \in S$ tal que $ta = tb$. Así,

$$(ta)m = (tb)m \Rightarrow t(am - bm) = 0 \Rightarrow am - bm \in \mathrm{Nu}\,(\mu_M)$$

Se sigue que $\sigma_{(s,m)}(as) = am + r(M) = bm + r(M) = \sigma_{(s,m)}(bs)$, es decir, $\sigma_{(s,m)}$ esta bien definido.

Ahora, sean $a \in A$, $xs, ys \in As$.

$$\begin{aligned} \sigma_{(s,m)}(xs + a(ys)) = \sigma_{(s,m)}((x + (ay))s) &= (x + ay)m + r(M) = xm + (ay)m + r(M) \\ &= xm + r(M) + a(ym) + r(M) = \sigma_{(s,m)}(xs) + a\sigma_{(s,m)}(ys) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma_{(s,m)}$ es A-homomorfismo.

Q.E.D

El resultado anterior nos dice que a cada par $(s, m) \in S \times M$ le podemos asociar un A-homomorfismo, entonces nos cuestionamos; ¿y que pasa con estos homomorfismos si $(s, m) \sim (t, n)$?

Proposición 3.2.16. *$(s, m) \sim (t, n)$ si y solo si exite $u \in S$ tal que $\sigma_{(s,m)} = \sigma_{(t,n)}$ en Au.*

Dem.
Sean $(s, m), (t, n) \in S \times M$ tales que $(s, m) \sim (t, n)$. Entonces existen $c, d \in A$ tales que

(1) $u = cs = dt \in S$

(2) $cm = dn$

Por (1) se tiene que $u \in As \cap At$, entonces $Au \subseteq As \cap At$. Ahora, sea $xu \in Au$, esto es, $xu = (xc)s = (xd)t$

$$\sigma_{(s,m)}(xu) = (xc)m + r(M) = x(cm) + r(M) \quad \text{y} \quad \sigma_{(t,n)}(xu) = (xd)n + r(M) = x(dn) + r(M)$$

Por (2) se sigue que $\sigma_{(s,m)}(xu) = \sigma_{(t,n)}(xu)$, es decir, $\sigma_{(s,m)} = \sigma_{(t,n)}$ en Au. El reciproco es inmediato

Q.E.D

Ahora, sí I es ideal izquierdo y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))$, ¿existe $s \in S$ y $m \in M$ tal que $\sigma_{(s,m)} = f$, en $As \subseteq I$? La respuesta a esta pregunta es afirmativa cuando consideramos ideales izquierdos I con $I \cap S \neq \emptyset$. En este caso, sí $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))$, entonces, existe $s \in I \cap S$, y así $As \subseteq I$. por tanto, para $xs \in As$ tenemos que

$$f(xs) = xf(s) = \sigma_{(s,f(s))}(xs)$$

Esto parece indicar que existe una conexión del módulo de fracciones con limites directos de ciertos homomorfismos, pero claramente primero necesitamos de una familia de ideales adecuado.

Ahora, r es un radical exacto izquierdo, entonces $\mathcal{L}_{\mathbb{T}_r}$ es un filtro de Gabriel, al que denotaremos como $G_\circ$, es decir, $G_\circ = \mathcal{L}_{\mathbb{T}_r}$. Ahora, veamos como es $G_\circ$

$$\begin{aligned} G_\circ &= \{{}_AI : A/I \in \mathbb{T}_r\} = \{I\} = \{I : r(A/I) = A/I\} = \left\{I : \mathrm{Nu}\left(\mu_{A/I}\right) = A/I\right\} \\ &= \{I : \forall\ a \in A,\ S \cap \mathrm{ann}(a+I) \neq \emptyset\} = \{I : \forall\ a \in A,\ (I:a) \cap S \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G_\circ = \{I : \forall\ a \in A,\ (I:a) \cap S \neq \emptyset\}$$

Como para cada $s \in S$, $a \in A$ tenemos que $As \cap Sa \neq \emptyset$, entonces existen $x \in A$, $t \in S$ tales que $ta = xs \in As$, es decir, $t \in (As, a) \cap S$, lo que es lo mismo $As \in G_\circ$. Así, $G_\circ$ es una familia adecuada para considerar un limite directo, para ello consideremos el orden opuesto a la contención directa en $G_\circ$ y la denotaremos mediante $\leq$. Ahora consideremos la familia

$$\{\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))\}_{I \in G_\circ}$$

Y si $I \leq J$ consideramos el morfismo

$$\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M)) \ni f \xmapsto{\alpha_{IJ}} f \restriction_J \in \mathrm{Hom}_A(J, M/r(M))$$

Es fácil comprobar que dicha familia junto con los morfismos dados forman un sistema directo en ${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$, por lo tanto, existe el limite directo, esto es, existe

$$\varinjlim_{I \in G_\circ} \left(\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))\right)$$

Que sabemos que en principio es un grupo abeliano, sin embargo, se puede probar que tiene estructura de A-módulo izquierdo. Hasta aquí hemos construido un A-módulo izquierdo mediante la familia $G_\circ$ y por los resultados previos naturalmente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.17. $\left[S^{-1}\right]M \cong \varinjlim_{I \in G_\circ} \left(\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))\right)$

Dem.
Sea $\left[S^{-1}\right]M \ni [(s,m)] \xmapsto{\varphi} [(\sigma_{(s,m)}, As)] \in \varinjlim_{I \in G_\circ} \left(\mathrm{Hom}_A(I, M/r(M))\right)$. Veamos que φ es A-isomorfismo.

(1) Por la primera proposición φ esta bien definida y es fácil mostrar que es un A-homorfismo.

(2) por la segunda proposición φ es sobre.

(3) mostremos que es inyectiva. Sean $[(s,m)], [(t,n)] \in \left[S^{-1}\right] M$ tales que $\varphi\left([(s,m)]\right) = \varphi\left([(s,n)]\right)$, entonces $[(\sigma_{_{(s,m)}}, As) = [(\sigma_{_{(t,n)}}, At)$, es decir, existe $I \in G_{\circ}$ tales que $\sigma_{_{(s,m)}} = \sigma_{_{(t,n)}}$ en I, es decir, $(s,m) \sim (t,n)$ por la primera proposición.

Q.E.D

3.3. Módulos de Cocientes sobre filtros de Gabriel

Sea A un anillo, $M \in A$-**Mod** y $\mathcal{G}$ filtro de Gabriel. Consideremos la siguiente relación en $\mathcal{G}$:

$$\leq\ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \qquad \text{dada por} \qquad I \leq J \iff J \subset I.$$

Claramente $\leq$ es un orden parcial en $\mathcal{G}$, pues es el orden opuesto de la contención directa.

Proposición 3.3.1. *$\mathcal{G}$ es un copo dirigido.*

Dem.
Sea $I, J \in \mathcal{G}$. Dado que $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel, se sigue que $I \cap J \in \mathcal{G}$ y como $I \cap J \subset I$, $I \cap J \subset J$, entonces

$$I \leq I \cap J \text{ y } J \leq I \cap J$$

Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es un COPO dirigido.

Q.E.D

Recordemos que cada ideal izquierdo I se puede considerar en A-**Mod**, de esta manera tenemos derecho de considerar el conjunto $\mathrm{Hom}_A(I, M) \in \mathbb{Z}$-**Mod**.

Ahora, para cada $I, J \in \mathcal{G}$ con $I \leq J$ consideremos la siguiente asignacion:

$$\mathrm{Hom}_A(I, M) \ni g \xmapsto{\ \alpha_{_{IJ}}\ } g \restriction_J \in \mathrm{Hom}_A(J, M)$$

Proposición 3.3.2. $\left(\mathrm{Hom}_A(I, M), \alpha_{_{IJ}}\right)$ *es un sistema directo.*

Dem.
(1) Sea $I \in \mathcal{G}$. Para cada $g \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$, tenemos $\alpha_{_{II}}(g) = g \restriction_I = g$. Por lo tanto, $\alpha_{_{II}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(I,M)}$.

(2) Sean $I \leq J \leq K$. Para cada $g \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$ se tiene que

$$\alpha_{_{JK}} \circ \alpha_{_{IJ}}(g) = \alpha_{_{JK}}\big(g \restriction_J\big) = \big(g \restriction_J\big) \restriction_K = g \restriction_{J \cap K} = g \restriction_K = \alpha_{_{IK}}(g).$$

Se sigue que $\alpha_{_{JK}} \circ \alpha_{_{IJ}} = \alpha_{_{IK}}$. Así, $\left(\mathrm{Hom}_A(I, M), \alpha_{_{IJ}}\right)$ es un sistema directo en $\mathbb{Z}$-**Mod**.

Q.E.D

Corolario 3.3.3. $\varinjlim_{I \in \mathcal{G}} \mathrm{Hom}_A(I, M)$ *existe y es único.*

Denotaremos al limite directo del corolario anterior como $M_{(\mathcal{G})}$. Del capitulo 2, recuerdese que los elementos de $M_{(\mathcal{G})}$ son de la forma $[(f, I)]$, donde $I \in \mathcal{G}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$, también recordemos que f representa a $[(f, I)]$.

Observación 3.3.4. *Sean* $[(f,I)],[(g,J)] \in M_{(\mathcal{G})}$.

$$[(f,I)] = [(g,J)] \iff f \sim g \iff \alpha_{IK}(f) = \alpha_{JK}(g) \qquad \textit{para algun } K \in \mathcal{G} \textit{ con } I,J \leq K$$
$$f \restriction_K = g \restriction_K \iff \qquad f \textit{ y } g \textit{ coinciden en algun } K \in \mathcal{G} \textit{ con } K \subset I \cap J.$$

Hasta aquí, sabemos que $M_{(\mathcal{G})}$ es un $\mathbb{Z}$-**Mod**. Entonces, el siguiente paso es darle a $A_{(\mathcal{G})}$ estructura de anillo y a $M_{(\mathcal{G})}$ estructura de $A_{\mathcal{G}}$-módulo izquierdo. Para ellos requerimos del siguiente lema.

Lema 3.3.5. *Si* $I, J \in \mathcal{G}$ *y* $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$, *entonces* $\varphi^{-1}(J) \in \mathcal{G}$

Dem.
Sea $a \in I$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\big(\varphi^{-1}(J) : a\big) &= \mathrm{ann}(a + \varphi^{-1}(J)) = \{r \in A : ra \in \varphi^{-1}(J)\} \\
&= \{r \in A : \varphi(ra) \in J\} = \{r \in A : r\varphi(a) \in J\} \\
&= \mathrm{ann}(\varphi(a) + J) = \big(J : \varphi(a)\big)
\end{aligned}$$

Dado que $I \in \mathcal{G}$, entonces $\big(J : \varphi(a)\big) \in \mathcal{G}$, se sigue que $\big(\varphi^{-1}(J) : a\big)$.

Por lo tanto, $\varphi^{-1}(J) \in \mathcal{G}$.

Q.E.D

Ya sabemos que tanto $A_{(\mathcal{G})}$, como $M_{(\mathcal{G})}$ son $\mathbb{Z}$-módulos cuya suma esta dada por:

$$[(f,I)] + [(g,J)] = [(\alpha_{IK}(f) + \alpha_{JK}(g), K)], \qquad \text{para } I, J \leq K.$$

Con el fin de obtener lo deseado, definamos la siguiente operación:

$$\bullet : A_{(\mathcal{G})} \times M_{(\mathcal{G})} \longrightarrow M_{(\mathcal{G})} \qquad \text{dada por}$$

$$a \bullet x = [(\xi_x \circ \lambda_a, \lambda_a^{-1}(J))], \qquad \text{donde } a = [(\lambda_a, I)],\ x = [(\xi_x, J)]$$

Representado en un diagrama es:

$$\begin{tikzcd}
\lambda_a^{-1}(J) \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[rr, bend right, "\xi_x \circ \lambda_a"'] & J \arrow[r, "\xi_x"] & M
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.3.6. $\bullet$ *es biaditiva.*

Dem.
(1) Veamos que $\bullet$ esta bien definida. Para ello, sean $[(\lambda, I)] = [(\lambda', I')] \in A_{(\mathcal{G})}$ y $[(\xi, J)] = [(\xi', J')] \in M_{(\mathcal{G})}$.

Veamos que $[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))] = [(\xi' \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J'))]$. Como $[(\lambda, I)] = [(\lambda', I')]$, entonces existe $K \in \mathcal{G}$ con $K \subseteq I \cap I'$ tal que λ es igual a λ' en K. Similarmente, existe $L \in \mathcal{G}$ con $L \subseteq J \cap J'$ tal que ξ es igual a ξ' en L.

Las siguientes afirmaciones se cumplen trivialmente:

(*i*) $\lambda^{-1}(L) \subseteq \lambda^{-1}(J \cap J') \subseteq \lambda^{-1}(J) \subseteq I$

(*ii*) $\lambda'^{-1}(L) \subseteq \lambda'^{-1}(J \cap J') \subseteq \lambda'^{-1}(J') \subseteq I'$

Se sigue que $\mathcal{G} \ni \lambda^{-1}(L) \cap \lambda'^{-1}(L) \subseteq I \cap I'$, por lo que $K' = K \cap \lambda^{-1}(L) \cap \lambda'^{-1}(L) \in \mathcal{G}$. En consecuencia, para cada $s \in K'$ se obtiene que:

$$\xi \circ \lambda(s) = \xi\left(\lambda'(s)\right) = \xi'\left(\lambda'(s)\right) = \xi' \circ \lambda'(s)$$

Por lo tanto, $[(\xi_x \circ \lambda_a, \lambda_a^{-1}(J))] = [(\xi'_x \circ \lambda'_a, \lambda_a'^{-1}(J'))]$, es decir, $\bullet$ esta bien definida.

(2) Ahora, veamos que $\bullet$ es biaditiva. Sean $[(\lambda, I)], [(\lambda', I')] \in A_{(\mathcal{G})}$ y $[(\xi, J)], [(\xi', J')] \in M_{(\mathcal{G})}$. Tomemos $K = \lambda^{-1}(J) \cap \lambda'^{-1}(J) \in \mathcal{G}$, para cada $a \in K$ tenemos que

$$\lambda(a), \lambda'(a) \in J \Longrightarrow \left(\lambda\restriction_K + \lambda\restriction_K\right)(a) \in J \Longrightarrow a \in \left(\lambda\restriction_K + \lambda\restriction_K\right)^{-1}(J)$$

Es decir,

$$K \subseteq \left(\lambda\restriction_K + \lambda\restriction_K\right)^{-1}(J). \tag{i}$$

(a) Por (i), tenemos que

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet (\xi, J)] + [(\lambda', I')] \bullet (\xi, J)] &= \left[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))\right] + \left[(\xi \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J))\right] = [\xi \circ \lambda\restriction_K + \xi \circ \lambda\restriction_K, K] \\
&= [(\xi \circ (\lambda\restriction_K + \lambda\restriction_K), K)] \\
&= \left[\left(\xi \circ (\lambda\restriction_K + \lambda\restriction_K), (\lambda\restriction_K + \lambda\restriction_K)^{-1}(J)\right)\right] \\
&= [(\lambda\restriction_K + \lambda\restriction_K, K)] \bullet [(\xi, J)] \\
&= ([(\lambda, I)] + [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)]
\end{aligned}$$

Por tanto, $\bullet$ se distribuye por la derecha.

(b) Sea $K = J \cap J'$.

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet ([(\xi, J)] + [(\xi, J')]) &= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi\restriction_K + \xi'\restriction_K, K)] = \left[\left(\xi\restriction_K \circ \lambda + \xi'\restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] \\
&= \left[\left(\xi\restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] + \left[\left(\xi'\restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] \\
&= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi\restriction_K, K)] + [(\lambda, I)] \bullet [(\xi'\restriction_K, K)] \\
&= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi, J)] + [(\lambda, I)] \bullet [(\xi', J')]
\end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye que $\bullet$ es biaditiva.

Q.E.D

Corolario 3.3.7. $(A_{(\mathcal{G})}, +, \bullet)$ *es un anillo y* $(M_{(\mathcal{G})}, +, \bullet)$ *es un* $A_{(\mathcal{G})}$*-módulo.*

Dem.
Nos resta demostrar lo siguiente:

(i) Si $[(\lambda, I)], [(\lambda', I')] \in A_{(\mathcal{G})}$ y $[(\xi, J)] \in M_{(\mathcal{G})}$, entonces

$$[(\lambda, I)] \bullet ([(\lambda', I')] \bullet [(\xi, J)]) = ([(\lambda, I)] \bullet [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)]$$

Mostremos la veracidad de lo afirmado:

$$
\begin{aligned}
([(\lambda,I)]\bullet[(\lambda',I')])\bullet[(\xi,J)] &= \left[\left(\lambda'\circ\lambda\restriction_{\lambda^{-1}(I')},\lambda^{-1}(I')\right)\right]\bullet[(\xi,J)] = \\
&= \left[\left(\xi\circ\left(\lambda'\circ\lambda_{\lambda^{-1}(I')}\right)\restriction_{\left(\lambda'\circ\lambda\restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J)},\left(\lambda'\circ\lambda\restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Como $\left(\lambda'\circ\lambda\restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J)=\lambda\restriction^{-1}_{\lambda^{-1}(I')}\left(\lambda'^{-1}(J)\right)$, entonces

$$
\begin{aligned}
([(\lambda,I)]\bullet[(\lambda',I')])\bullet[(\xi,J)] &= \left[\left(\lambda\restriction_{\lambda^{-1}(I')},\lambda^{-1}(I')\right)\right]\bullet\left[\left(\xi\circ\lambda',\lambda'^{-1}(J)\right)\right] \\
&= [(\lambda,I)]\bullet([(\lambda',I')]\bullet[(\xi,J)])
\end{aligned}
$$

(*ii*) $[(\mathrm{id}_A,A)]$ es la identidad en $A_{(\mathcal{G})}$.

Mostremos la veracidad de lo dicho. Sea $[(\lambda,I)]\in A_{(\mathcal{G})}$.

$$
[(\mathrm{id}_A,A)]\bullet[(\lambda,I)]=[(\lambda\circ\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_A^{-1}(I))]=[(\lambda,I)]=\left[\left(\mathrm{id}_A\circ\lambda,\lambda^{-1}(A)\right)\right]=[(\lambda,I)]\bullet[(\mathrm{id}_A,A)].
$$

Esto prueba lo deseado

(*ii*) Sea $[(\xi,J)]\in M_{(\mathbf{G})}$.

$$
[(\mathrm{id}_A,A)]\bullet[(\xi,J)]=\left[\left(\xi\circ\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_A^{-1}(J)\right)\right]=[(\xi,J)]
$$

De (*i*), (*ii*) y (*iii*) se concluye lo deseado.

Q.E.D

Recordemos que para cada $m\in M$, $A\ni a\xmapsto{f_m}am\in M$ es A-lineal. Más aún, el siguiente morfismo es un isomorfismo (de grupos abelianos)

$$
M\ni m\xmapsto{\Phi}f_m\in\mathrm{Hom}_A(A,M)
$$

Ahora, consideremos la siguiente operación:

$$
M\ni m\xmapsto{\varphi_M}[(f_m,A)]\in M_{(\mathcal{G})}
$$

Proposición 3.3.8. *φ_M es un homomorfismo de grupos, y si $M=A$, entonces φ_A es un homomorfismo de anillos.*

Dem.
Sean $m_1,m_2\in M$.

$$
\begin{aligned}
\varphi_M(m_1+m_2) &= [(f_{m_1+m_2},A)]=[(f_{m_1}+f_{m_2},A)]=[(\alpha_{AA}(f_{m_1})+\alpha_{AA}(f_{m_2}),A)] \\
&= [(f_{m_1},A)]+[(f_{m_2},A)]
\end{aligned}
$$

Por tanto, φ_M es homomorfismo de grupos (abelianos).

Ahora, supongamos que $M=A$ y sean $a,b\in A$. Tenemos que:

$$
\varphi_A(ab)=[(f_{ab},A)]=[(f_b\circ f_a,A)]=[(f_b\circ f_a,f_a^{-1}(A))]=[(f_a,A)]\bullet[(f_b,A)]=\varphi_A(a)\bullet\varphi_A(b)
$$

Q.E.D

De la proposición previa se sigue que a $M_{(\mathcal{G})}$ le podemos dar estructura de A-módulo, cuyo producto esta dado por

$$A \times M_{(\mathcal{G})} \ni (a, [(f, I)]) \stackrel{\cdot}{\longmapsto} \varphi_{A}(a) \bullet [(f, I)] \in M_{(\mathcal{G})}$$

Corolario 3.3.9. *φ_M es A-lineal*

Dem.
Sean $a \in A$, $m, n \in M$.

$$\begin{aligned}\varphi_{M}(m + an) &= [(f_{m+an}, A)] = [(f_m + f_{an}, A)] = [(f_m, A)] + [(f_{an}, A)]\\ &= \varphi_{M}(m) + [(f_n \circ f_a, A)] = \varphi_{M}(m) + [(f_n \circ f_a, f_a^{-1}(A))]\\ &= \varphi_{M}(m) + [(f_a, A)] \bullet [(f_n, A)] = \varphi_{M}(m) + a \cdot [(f_n, A)]\\ &= \varphi_{M}(m) + a \cdot \varphi_{M}(n)\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ_M es A-lineal.

Q.E.D

Ahora, consideremos la siguiente asignación:

Sea $F : A$-**Mod** $\longrightarrow A_{(\mathcal{G})}$-**Mod** dada por

- Para cada M, A-módulo, $\quad F(M) = M_{(\mathcal{G})}$.
- Para cada $f : M \longrightarrow N$, A-lineal, entonces $F(f) = f_{(\mathcal{G})}$, donde

$$f_{(\mathcal{G})} : M_{(\mathcal{G})} \longrightarrow N_{(\mathcal{G})} \qquad \text{esta dada por}$$

$$f_{(\mathcal{G})}([(\varphi, I)]) = [(f \circ \varphi, I)] \qquad \text{para cada } [(\varphi, I)] \in M_{(\mathcal{G})}$$

Ahora, para cada $f : M \longrightarrow N$ A-lineal, veamos que $f_{(\mathcal{G})}$ esta bien definido. Para ello, supongamos que $[(\varphi, I)] = [(\phi, J)]$, entonces existen $K \in \mathcal{G}$ con $I, J \leq K$ tal que $\varphi \restriction_K = \phi \restriction_K$.

Así, $f \circ \Big(\varphi \restriction_K\Big) = f \circ \Big(\phi \restriction_K\Big)$, se sigue que $\big(f \circ \varphi\big) \restriction_K = \big(f \circ \phi\big) \restriction_K$. Por lo tanto, $f_{(\mathcal{G})}$ esta bien definida.

Proposición 3.3.10. *F es un funtor covariante.*

Dem.
(1) Por definición, para cada $M \in A$-**Mod**, $\quad F(M) \in A_{(\mathcal{G})}$-**Mod**.

(2) Sean $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow K$ A-lineales. Para cada $[(\varphi, I)] \in M_{(\mathcal{G})}$, tenemos:

- $F(g \circ f)([(\varphi, I)]) = (g \circ f)_{(\mathcal{G})}([\varphi, I]) = [((g \circ f) \circ \varphi, I)] = [(g \circ (f \circ \varphi), I)]$
  $= g_{(\mathcal{G})}([(f \circ \varphi, I)]) = g_{(\mathcal{G})} \circ f_{(\mathcal{G})}([(\varphi, I)]) = F(g) \circ F(f)([(\varphi, I)])$.

Por lo tanto, $\quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

- $F(\mathrm{id}_{M})([(\varphi, I)]) = [(\mathrm{id}_M \circ \varphi, I)] = [(\varphi, I)] = \mathrm{id}_{M_{(\mathcal{G})}}([(\varphi, I)])$.

  Por lo tanto, $\quad F(\mathrm{id}_{M}) = \mathrm{id}_{M_{(\mathcal{G})}}$.

De (1), (2) se sigue que F es un funtor covariante.

Q.E.D

Proposición 3.3.11. *F es exacto izquierdo.*

Dem.
Sabemos que $\mathrm{Hom}_A(I, \_)$ es exacto izquierdo y $\varinjlim(\_)$ es exacto, se sigue que F es exacto izquierdo.

Q.E.D

Sea $F' : A_{(\mathcal{G})}$-**Mod** $\longrightarrow A$-**Mod** el funtor olvidadizo que manda cada $A_{(\mathcal{G})}$-módulo a si mismo pero considerado con la estructura de A-módulo. Tomemos $L = F' \circ F$.

Sea t el radical izquierdo asociado al filtro de Gabriel, es decir

$$t = \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}} = \mathrm{Rej}_{R(\tau_{\mathcal{G}})}$$

Lema 3.3.12. $\mathrm{Nu}(\varphi_M) = t(M)$.

Dem.
Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nu}(\varphi_M) &= \{m \in M : \varphi_{M}(m) = [(0, A)]\} = \{m \in M : [(f_m, A)] = [(0, A)]\} \\ &= \{m \in M : \text{ existe } I \in \mathcal{G} \text{ tal que } f_m \restriction_{I} = 0\} \\ &= \{m \in M : \text{ existe } I \in \mathcal{G} \text{ tal que } Im = 0\}\end{aligned}$$

($\subseteq$) Sea $m \in \mathrm{Nu}(\varphi_{M})$. Existe $I \in \mathcal{G}$ tal que $Im = 0$, entonces $I \subseteq \mathrm{ann}(m)$. Por ser $\mathcal{G}$ filtro de Gabriel se tiene que $\mathrm{ann}(m) \in \mathcal{G}$, por tanto $\mathrm{Nu}(\varphi_{M}) \in \tau_{\mathcal{G}}$, así, considerando la inclusión $i : Nu(\varphi_{M}) \hookrightarrow M$, se sigue que $\mathrm{Nu}(\varphi_{M}) \leq \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}}(M)$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\varphi_M) \subseteq \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}}(M) = t(M)$

($\supseteq$) Sea $m \in t(M)$. Existen $M_1, \ldots, M_l \in \tau_{\mathcal{G}}$, $f_i : M_i \longrightarrow M$, $i \in \{1, \ldots l\}$, y $m_i \in M_i$ tales que $m = f_1(m_1) + \cdots + f_l(m_l)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$, $\mathrm{ann}(m_i) \in \mathcal{G}$, entonces sea $K = \bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i)$. Así,

$$\forall a \in K, \quad am = \sum_{i=1}^{l} f_i(am_i) = \sum_{i=1}^{l} f_i(0) = 0.$$

Entonces $m \in \mathrm{Nu}(\varphi_M)$. Por lo tanto, $\mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}}(M) \subseteq \mathrm{Nu}(\varphi_{M})$.

Se concluye que $\mathrm{Nu}(\varphi_M) = t(M)$.

Q.E.D

Lema 3.3.13. *$M \in \mathbb{T}_t$ si y solo si $M_{(\mathcal{G})} = 0$.*

Dem.
Recordemos que $t = \mathrm{Tr}_{\tau_{\mathcal{G}}} = \mathrm{Rej}_{R(\tau_{\mathcal{G}})}$

($\Rightarrow$) Supongamos que $M_{(\mathcal{G})} = 0$. Entonces $\varphi_{M} = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}\,\varphi_{M} = M = t(M)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $t(M) = M$. Entonces $\mathrm{Nu}(\varphi_M) = M$, por lo que $\varphi_{_M} = 0$. Sea $x \in M_{(\mathcal{G})}$ y supongamos que es representado por $\xi : I \longrightarrow M$, es decir, $x = [(\xi, I)]$ con $I \in \mathcal{G}$. Afirmamos que $\mathrm{Nu}(\xi) \in \mathcal{G}$, para mostrar la veracidad de esto, sea $a \in I$. Existe $I_a \in \mathcal{G}$ tal que $I_a\xi(a) = 0$. Tomemos $J = \sum_{a\in I} I_a a$, y sea $b \in J$. Existen $a_1, \ldots, a_l \in I$, y $c_i \in I_{a_i}$, $i \in \{1, \ldots, l\}$ tales que $b = c_1a_1 + \cdots + c_la_l$, se sigue que:

$$\xi(b) = \sum_{i=1}^{l} c_i\xi(a_i) = 0 \Rightarrow J \subseteq \mathrm{Nu}(\xi).$$

Mas aún, dado $b \in I_a$, se tiene que $ba \in I_a a \subseteq J$, es decir, para cada $a \in I$, $I_a \subseteq \big(J : a\big)$, por lo que usando el hecho de que $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel se sigue que para toda $a \in I$, $\big(J : a\big) \in \mathcal{G}$, en consecuencia $J \in \mathcal{G}$. Así, $\mathrm{Nu}(\xi) \in \mathcal{G}$. En consecuencia, ξ es cero para algún $K \in \mathcal{G}$, es decir, $x = [(\xi, I)] = [(0, A)]$.

Por lo tanto, $M_{(\mathcal{G})} = 0$.

Q.E.D

Nota: A los elementos de $\mathbb{T}_t$ se llaman $\mathcal{G}$-módulos de torsión.

Proposición 3.3.14. *Si $x \in M_{(\mathcal{G})}$ es representado por $\xi : I \longrightarrow M$ con $I \in \mathcal{G}$, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i_I"] \arrow[d, "\xi"'] & A \arrow[d, "\beta_x"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"'] & M_{(\mathcal{G})} \end{tikzcd}$$

donde $\beta_x(a) = a \cdot x$, $\forall\ a \in A$.

Dem.
Sea $x = [(\xi, I)] \in M_{(\mathcal{G})}$ y $a \in I$.

(1) $\varphi_{_M} \circ \xi(a) = \varphi_M(\xi(a)) = [(f_{\xi(a)}, A)]$

(2) $\beta_x \circ i_I(a) = \beta_x(a) = a \cdot x = \varphi_A(a)[(\xi, I)] = [(f_a, A)][(\xi, I)] = [(\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I))]$

Ahora, para cada $b \in f_a^{-1}(I) \cap I$, tenemos que $f_{\xi(a)}(b) = b\xi(a)$, y $\xi \circ f_a(b) = \xi(ba) = b\xi(a)$. En consecuencia,

$$[(f_{\xi(a)}, A)] = [(\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I))].$$

Por lo tanto, $\varphi_{_M} \circ \xi = \beta_x \circ i_I$, es decir, el diagrama deseado conmuta.

Q.E.D

Lema 3.3.15. $M_{(\mathcal{G})}/\,\mathrm{Im}(\varphi_{_M}) \in \mathbb{T}_t$

Dem.
Sea $\overline{m} = [(\xi, I)] + \mathrm{Im}(\varphi_M) \in M_{(\mathcal{G})}/\,\mathrm{Im}(\varphi_M)$.

$$\mathrm{ann}(\overline{m}) = \Big\{a \in A : a\big([(\xi, I)] + \mathrm{Im}(\varphi_M)\big) = 0\Big\} = \Big\{a \in A : a \cdot [(\xi, I)] \in \mathrm{Im}(\varphi_M)\Big\}$$

Ahora, por la proposición previa, tenemos que para cada $a \in I$, $[(f_{\xi(a)}, A)] = a \cdot [(\xi, I)]$, esto implica $a \cdot [(\xi, I)] \in \mathrm{Im}(\varphi_{_M})$, $\forall\ a \in I$. Se sigue que $I \subseteq \mathrm{ann}(\overline{m})$.

Dado que $I \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel se sigue que $\mathrm{ann}(\overline{m}) \in \mathcal{G}$.

Por lo tanto, $M_{(\mathcal{G})}/\,\mathrm{Im}(\varphi_{_M}) \in \mathbb{T}_t$

Q.E.D

Hasta aquí, a partir de un A-módulo M, hemos construido un nuevo A-módulo $M_{(\mathcal{G})}$, nos preguntamos, ¿ aplicando este procedimiento de manera iterativa obtendremos mas A-módulos diferentes (No isomorfos)? Procedamos a responder esta pregunta. Antes que nada no olvidemos que para $M, N \in A$-**Mod**. Si $M \cong N$, entonces $M_{(\mathcal{G})} = N_{(\mathcal{G})}$, ya que F es un funtor entre A-**Mod** y $A_{(\mathcal{G})}$-**Mod**. Ahora, tomemos $M \in A$-**Mod**, consideremos $L(M) = M_{(\mathcal{G})} \in A$-**Mod**, es esta manera tenemos derecho de aplicar F a $M_{(\mathcal{G})}$, así, $\big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})}$, ¿cómo es este A-módulo? ¿ Qué relación tiene con $\big(A_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})}$

Lema 3.3.16. $\big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})} = (M/t(M))_{(\mathcal{G})}$

Dem.
En virtud del primer teorema de isomorfismo, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M/t(M) \longrightarrow M_{(\mathcal{G})} \longrightarrow M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M) \longrightarrow 0$$

Como F es exacto izquierdo, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \Big(M/t(M)\Big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow \big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow \Big(M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M)\Big)_{(\mathcal{G})}$$

Dado que Conucleo$(\varphi_M) \in \mathbb{T}_t$, entonces $\Big(M_{(\mathcal{G})}/\operatorname{Im}(\varphi_M)\Big)_{(\mathcal{G})} = 0$. Así, se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Big(M/t(M)\Big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow \big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})} \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, $\Big(M_{(\mathcal{G})}\Big)_{(\mathcal{G})} = \Big(M/t(M)\Big)_{(\mathcal{G})}$.

Q.E.D

Ahora, por el lema previo, la proposición anterior, y por ser t radical, tenemos que:

$$\Big[\big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})}\Big]_{(\mathcal{G})} \cong \Big[\big(M/t(M)\big)_{(\mathcal{G})}\Big]_{(\mathcal{G})} \cong \left[\frac{\big(M/t(M)\big)}{t\Big(M/t(M)\Big)}\right]_{(\mathcal{G})} \cong (M/t(M))_{(\mathcal{G})} = \big(M_{(\mathcal{G})}\big)_{(\mathcal{G})}$$

Esto nos dice que a lo mas podemos construir(siguiendo el proceso descrito previamente) 2 módulos cocientes asociados a $\mathcal{G}$. Por esta razón, llamaremos a $M_{\mathcal{G}} := \big(M/t(M)\big)_{(\mathcal{G})}$ el módulo cociente de M asociado a $\mathcal{G}$.

Nos gustaría que $A_{\mathcal{G}}$ sea un anillo y $M_{\mathcal{G}} \in A_{\mathcal{G}}$-**Mod**, para ellos consideremos el siguiente $a = [(\xi, I)] \in A_{\mathcal{G}}$, $[(\eta, J)] \in M_{\mathcal{G}}$ arbitrarios pero fijos.

Para cada $N \in A$-**Mod**, sea $\pi_N : N \longrightarrow N/t(N)$, la proyección natural. Sabemos que t es radical, por lo que $\eta(t(J)) \leq t(M/t(M)) = 0$, por lo que $t(J) \subseteq \operatorname{Nu}(\eta)$.

Por el teorema del factor existe un único $h_\eta : J/t(J) \longrightarrow M/t(M)$ tal que que siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\
J/t(J) \arrow[ur, "h_\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $i : J \hookrightarrow A$ la inclusión. Por ser t exacto izquierdo tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nu}(\varphi_A \circ i) &= \{a \in J : \pi_A \circ i(a) = t(A)\} = \{a \in J : a + t(A) = t(A)\} = \{a \in J : a \in t(A)\} \\
&= J \cap t(A) = t(J)
\end{aligned}$$

Por el teorema del factor, se sigue que existe un unico morfismo $g_J : J/t(J) \longrightarrow A/t(A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\
J/t(J) \arrow[urr, "g_J"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ademas, g_J es monomorfismo, pues $\mathrm{Nu}(g_J \circ \pi_J) = \mathrm{Nu}(g_J)$. Esto quiere decir que existe un submódulo de $A/t(A)$ isomorfo a $J/t(J)$, de hecho, $\mathrm{Im}(g_J) \cong J/t(J)$.

Veamos quien es la imagen de g_J;

$$\mathrm{Im}(g_J) = \{g_J(a + t(J)) : a \in J\} = \{g_J \circ \pi_J(a) : a \in J\} = \{\pi_A \circ i(a) : a \in J\} = \{a + t(A) : a \in J\}$$

$$= \frac{J + t(A)}{t(A)}$$

Ahora, recuerde que tanto $A_{\mathcal{G}}$ como $M_{\mathcal{G}}$, son grupos abelianos con la suma ya antes descrita, con el fin de darles estructura de anillo y módulo, respectivamente. Consideremos el siguiente lema.

Lema 3.3.17. *Para todo $K \in \mathcal{G}$ con $t(A) \subseteq K$, se tiene que; si $\xi : I \longrightarrow A/t(A)$ es morfismo con $I \in \mathcal{G}$, entonces $\xi^{-1}(K/t(A)) \in \mathcal{G}$.*

Dem.
Sea $K \in \mathcal{G}$ con $t(A) \subseteq K$, y $\xi : I \longrightarrow A/t(A)$ es morfismo con $I \in \mathcal{G}$.

Tomemos $a \in K$ arbitraria pero fija.

$$\left(\xi^{-1}\left(K/t(A)\right) : a\right) = \left\{b \in A \mid ba \in \xi^{-1}(K/t(A))\right\} = \{b \in A \mid b\xi(a) \in K/t(A)\}$$

Sea $a' \in A$ tal que $\xi(a) = a' + t(A)$. Entonces por ser $\mathcal{G}$ filtro de Gabriel, se sigue que $K \cap I \in \mathcal{G}$ por lo que $(K \cap I : a') \in \mathcal{G}$.

Para $b \in (K \cap I : a')$, implica que $ba' \in K \cap I \subseteq K$. Entonces

$$ba' + t(A) \in K/t(A) \;\;\Rightarrow\;\; b\xi(a) \in K/t(A) \;\;\Rightarrow\;\; b \in \left(\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) : a\right)$$

Así,

$$(K \cap I : a') \subseteq \left(\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) : a\right) \;\;\Rightarrow\;\; \left(\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) : a\right) \in \mathcal{G}$$

Por la arbitrariedad de a, se concluye que $\xi^{-1}\left(\frac{K}{t(A)}\right) \in \mathcal{G}$.

Q.E.D

Ahora, en nuestro caso $K = J + t(A)$, y por el lema se sigue que $\xi^{-1}(g_J) = \xi^{-1}\left(\frac{J+t(A)}{t(A)}\right) \in \mathcal{G}$, así, definamos la siguiente operación:

$$\bullet : A_{\mathcal{G}} \times M_{\mathcal{G}} \longrightarrow M_{\mathcal{G}} \qquad \text{dada por}$$

$$a \bullet x := \left[\left(h_\eta \circ g_J^{-1} \circ \xi, \xi^{-1}(\mathrm{Im}(g_J))\right)\right] \qquad a = [(\xi, I)] \quad \text{y} \quad x = [(\eta, J)]$$

Proposición 3.3.18. $\bullet$ *esta bien definida.*

Dem.
Supongamos que $a = [(\xi, I)] = [(\xi', I')]$, y $x = [(\eta, J)] = [(\eta', J')]$. Existe $K \in \mathcal{G}$ con $K \subseteq I \cap I'$ tal que $\xi \restriction_K = \xi' \restriction_K$, similarmente existe $L \in \mathcal{G}$ con $L \subseteq J \cap J'$ tal que $\eta \restriction_L = \eta' \restriction_L$.

Tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi_J"'] & M/t(M) \\ J/t(J) \arrow[ur, "h_\eta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\pi_{J'}"'] & M/t(M) \\ J'/t(J') \arrow[ur, "h_{\eta'}"'] & \end{tikzcd}$$

Se sigue que para cada $a \in L$, $h_\eta(a+t(J)) = h_\eta \circ \pi_J(a) = \eta(a) = \eta'(a) = h_{\eta'} \circ \pi_{J'}(a) = h_{J'}(a+t(J'))$.

Por lo tanto, $h_\eta\left(\frac{L+t(J)}{t(J)}\right) = h_{\eta'}\left(\frac{L+t(J')}{t(J')}\right)$.

Igualmente, tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_J"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J/t(J) \arrow[urr, "g_J"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_{J'}"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & A/t(A) \\ J'/t(J') \arrow[urr, "g_{J'}"'] & & \end{tikzcd}$$

Para cada $a \in L$, $g_J(a+t(J)) = g_J \circ \pi_J(a) = \pi_A(a) = g_{J'} \circ \pi_{J'}(a) = g_{J'}(a+t(J'))$.

Por lo tanto, $g_J\left(\frac{L+t(J)}{t(J)}\right) = g_{J'}\left(\frac{L+t(J')}{t(J')}\right)$. Por lo anterior, $g_J, g_{J'}$ son inyectivas, ademas $g_J\left(\frac{L+t(J)}{t(J)}\right) = \frac{L+t(A)}{t(A)} = g_{J'}\left(\frac{L+t(J')}{t(J')}\right)$. Por lo tanto, $\frac{L+t(J)}{t(J)} \cong \frac{L+t(J')}{t(J')}$.

Ahora, tenemos las siguientes sucesiones:

$$\xi^{-1}\left(\frac{J+t(A)}{t(A)}\right) \xrightarrow{\ \xi\ } \frac{J+t(A)}{t(A)} \xrightarrow{g_J^{-1}} \frac{J}{t(J)} \xrightarrow{h_\eta} \frac{M}{t(M)}$$

$$y$$

$$\xi'^{-1}\left(\frac{J'+t(A)}{t(A)}\right) \xrightarrow{\ \xi'\ } \frac{J'+t(A)}{t(A)} \xrightarrow{g_{J'}^{-1}} \frac{J'}{t(J')} \xrightarrow{h_{\eta'}} \frac{M}{t(M)}$$

Sea $S = \xi^{-1}\left(\dfrac{L+t(A)}{t(A)}\right) \cap K \cap \xi'^{-1}\left(\dfrac{L+t(A)}{t(A)}\right)$. Claramente $S \in \mathcal{G}$, se sigue del hecho que $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel y el lema previo. Ahora, para cada $a \in S$, se tiene lo siguiente:

$\xi(a) = \xi'(a) \in \frac{L+t(A)}{t(A)}$, pues $S \subseteq K$. Sea $b \in L$, tal que $b+t(A) = \xi(a) = \xi'(a)$, así $\pi_A(b) = \xi(a) = \xi'(a)$.

Dado que $L \subseteq J \cap J'$, y la conmutatividad de los diagramas previos se sigue que:

- $g_J \circ \pi_J(b) = \pi_A(b)$
- $g_{J'} \circ \pi_{J'}(b) = \pi_A(b)$

se sigue que $g_J \circ \pi_J(b) = g_{J'} \circ \pi_{J'}(b)$, y ademas por la inyectividad de g_J y $g_{J'}$ de se tiene lo siguiente:

- $b + t(J) = g_J^{-1}(\xi(a))$
- $b + t(J') = g_{J'}^{-1}(\xi'(a))$

Ahora, por la conmutatividad de los primeros diagramas y el hecho de que $b \in L$, se sigue que:

$$\begin{aligned} h_\eta \circ g_J^{-1} \circ \xi(a) &= h_\eta(b+t(J)) = h_\eta \circ \pi_J(b) = \eta(b) \\ &= \eta'(b) = h_{\eta'} \circ \pi_{J'}(b) = h_{\eta'}(b+t(J')) = h_{\eta'} \circ g_{J'}^{-1} \circ \xi'(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bullet$ esta bien definida.

Q.E.D

Proposición 3.3.19. *$A_{\mathcal{G}}$ es anillo y $M_{\mathcal{G}} \in A_{\mathcal{G}}$-**Mod**.*

Ahora, consideremos la siguiente asignación:

Sea $q : A$-**Mod** $\longrightarrow A_{\mathcal{G}}$-**Mod** dada por

- Para cada M, A-módulo, $\quad q(M) = M_{\mathcal{G}}$.
- Para cada $f : M \longrightarrow N$, A-lineal, entonces $q(f) = f_{\mathcal{G}}$, donde

$$f_{\mathcal{G}} : M_{\mathcal{G}} \longrightarrow N_{\mathcal{G}} \qquad \text{esta dada por}$$

$$f_{\mathcal{G}}([(\xi, I)]) = [(h_f \circ \xi, I)] \qquad \text{para cada } [(\xi, I)] \in M_{\mathcal{G}}$$

Donde, $h_f : \frac{M}{t(M)} \longrightarrow \frac{N}{t(N)}$ es un morfismo tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[r, "\pi_N"] & \frac{N}{t(N)} \\ \frac{M}{t(M)} \arrow[urr, "h_f"'] & & \end{tikzcd}$$

Ahora, para cada $f : M \longrightarrow N$ A-lineal, veamos que $f_{\mathcal{G}}$ esta bien definido. Primero, observemos que por se $t \in A$-pr, se tiene que $f(t(M)) \leq t(N)$, así $\mathrm{Nu}(\pi_{_M}) = t(M) \subseteq \mathrm{Nu}(\pi_{_N} \circ f) = f^{-1}(t(N))$, y en virtud del Teorema de Factor tenemos la existencia única de h_f.

Supongamos que $[(\xi, I)] = [(\xi', I')]$, entonces existen $K \in \mathcal{G}$ con $I, I' \leq K$ tal que $\xi \restriction_K = \xi' \restriction_K$.

Así, $h_{_f} \circ \left(\xi \restriction_K\right) = h_{_f} \circ \left(\xi' \restriction_K\right)$, se sigue que $\left(h_{_f} \circ \xi\right) \restriction_K = \left(h_{_f} \circ \xi'\right) \restriction_K$. Por lo tanto, $f_{\mathcal{G}}$ esta bien definida.

Proposición 3.3.20. *q es un funtor covariante.*

Dem.
(1) Por definición, para cada $M \in A$-**Mod**, $\quad q(M) \in A_{_\mathcal{G}}$-**Mod**.

(2) Sean $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow K$ A-lineales. Para cada $[(\xi, I)] \in M_{_\mathcal{G}}$, tenemos que:

- Los cuadrados del siguiente diagrama conmuta, al igual que el exterior del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_N"'] & K \arrow[d, "\pi_K"'] \\
\frac{M}{t(M)} \arrow[r, "h_f"] \arrow[rr, bend right, "h_{g\circ f}"'] & \frac{N}{t(N)} \arrow[r, "h_g"] & \frac{K}{t(K)}
\end{tikzcd}$$

  Por la unicidad, se sigue que $h_{g \circ f} = h_g \circ h_f$, así, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
q(g \circ f)([(\xi, I)]) &= [((h_{g\circ f}) \circ \xi, I)] = [((h_g \circ h_f) \circ \xi, I)] = [h_g \circ (h_f \circ \xi), I] \\
&= q(g)\left([(h_f \circ \xi, I)]\right) = q(g) \circ q(f)([(\xi, I)])
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, $\quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

- Para $f = \mathrm{id}_{_M}$. Claramente $\pi_{_M} \circ \mathrm{id}_{_M} = \pi_{_M} \circ \mathrm{id}_{\frac{M}{t(M)}}$, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\pi_M"'] & M \arrow[r, "\pi_M"] & \frac{M}{t(M)} \\
\frac{M}{t(M)} \arrow[urr, "\mathrm{id}_{\frac{M}{t(M)}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

  Así, $q\left(\mathrm{id}_{_M}\right)([(\xi, I)]) = \left[\left(\mathrm{id}_{\frac{M}{t(M)}} \circ \xi, I\right)\right] = [(\xi, I)]$.

  Por lo tanto, $q\left(\mathrm{id}_{_M}\right) = \mathrm{id}_{M_{\mathcal{G}}}$

De (1), (2) se sigue que F es un funtor covariante.

Q.E.D

Hay un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulo, $M \ni m \xmapsto{\Psi_M} [(\xi_m, I)] \in M_{_\mathcal{G}}$, donde $A \ni a \xmapsto{\xi_m} am + t(M) \in \frac{M}{t(M)}$

Lema 3.3.21. *Para cada $m \in M$, ξ_m es $A-$lineal. Ademas, para $m, m' \in M$ se tiene que $\xi_{m+m'} = \xi_m + \xi_{m'}$*

Dem.
Sea $m \in M$ y $r, a, b \in A$.

$$\begin{aligned}\xi_m(a+rb) &= (a+rb)m + t(M) = am + r(bm) + t(M)\\ &= (am + t(M)) + r\,(bm + t(M)) = \xi_m(a) + r\xi_m(b)\end{aligned}$$

Por lo tanto, ξ_m es A-lineal.

Finalmente,

$$\xi_{m+m'}(a) = a(m+m') + t(M) = am + am' + t(M) = (am + t(M)) + (am' + t(M)) \quad = \xi_m(a) + \xi_{m'}(a)$$

Por lo tanto, $\xi_{m+m'} = \xi_m + \xi_{m'}$.

Q.E.D

Proposición 3.3.22. *$\Psi_{_M}$ es morfismo de grupos abelianos. Si $M = A$, entonces $\Psi_{_A}$ es morfismo de anillos*

Dem.
Sean $m, m' \in M$, Entonces,

$$\begin{aligned}\Psi_{_M}(m+m') &= [(\xi_{m+m'}, A)] = [(\xi_m + \xi_{m'}, A)] = [(\xi_m, A)] + [(\xi_{m'}, A)]\\ &= \Psi_{_M}(m) + \Psi_{_M}(m')\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Psi_{_M}$ es morfismo de grupos abelianos.

Ahora, supongamos que $M = A$, tenemos lo siguiente:

- Por definición $\Psi_{_A}(1) = [(\xi_1, A)] = [(\pi_A, A)]$, este ultimo es la identidad en $A_{\mathcal{G}}$.
- Por definición $\Psi_{_A}(ab) = [(\xi_{ab}, A)]$. Por otro lado tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\xi_b"] \arrow[d, "\pi_A"'] & \frac{A}{t(A)} \\ \frac{A}{t(A)} \arrow[ur, "h_{\xi_b}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_A"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & \frac{A}{t(A)} \\ \frac{A}{t(A)} \arrow[urr, "g_A = \mathrm{id}_{\frac{A}{t(A)}}"'] & & \end{tikzcd}$$

Por definición del producto en $A_{\mathcal{G}}$, se sigue inmediatamente que

$$[(\xi_a, A)] \bullet [(\xi_b, A)] = [(h_{\xi_b} \circ \xi_a, A)], \qquad \text{pues, } g = \mathrm{id}_{A/t(A)}.$$

Ahora, para todo $x \in A$, tenemos

$$h_{\xi_b} \circ \xi_a(x) = h_{\xi_b}(ax + t(A)) = (xa)b + t(A) = x(ab) + t(A) = \xi_{ab}(x).$$

Se sigue que, $[(h_{\xi_b} \circ \xi_a, A)] = [(\xi_{ab}, A)]$, es decir, $[(\xi_a, A)] \bullet (\xi_b, A)] = [(\xi_{ab}, A)]$

En consecuencia, $\Psi_{_A}(ab) = \Psi_{_A}(a)\Psi_{_A}(b)$.

Por lo tanto, $\Psi_{_A}$ es morfismo de anillos.

Q.E.D

Del resultado anterior, se sigue que a $M_{_\mathcal{G}}$ le podemos dar estructura de A-módulo, cuyo producto esta dado por

$$A \times M_{_\mathcal{G}} \ni (a, x) \overset{\cdot}{\longmapsto} \Psi_{_A}(a) \bullet x.$$

Lema 3.3.23. $\mathrm{Nu}(\Psi_{_M}) = t(M)$.

Dem.
Tenemos $\mathrm{Nu}(\Psi_{_M}) = \{m \in M|\ \text{ existe } \ K \in \mathcal{G} \ \text{ tal que } \ Km \subseteq t(M)\}$.

($\supseteq$) Para cada $m \in t(M)$, $Am \subseteq t(M)$, por lo que $m \in \mathrm{Nu}(\Psi_{_M})$.

Por lo tanto, $t(M) \subseteq \mathrm{Nu}(\Psi_{_M})$.

($\subseteq$) Sea $m \in \mathrm{Nu}(\Psi_{_M})$, existe $K_m \in \mathcal{G}$ tal que $K_m m \subseteq t(M)$.

Tomemos $x \in K$, entonces $xm \in t(M)$, existen $N_1, \ldots, N_l \in \mathbb{T}_{_\mathcal{G}}$ tales que $am = m_1 + \ldots m_l$, donde $m_i \in \mathrm{Im}(f_i : N_i \longrightarrow M)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, esto es por definición de $\mathbb{T}_{_\mathcal{G}}$.

Se sigue que para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$ tenemos que $\mathrm{ann}(m_i)$, así $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i) \in \mathbb{T}_{_\mathcal{G}}$, pues $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel.

Para cada $a \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i)$, $0 = a(xm) = (ax)m$, implica que $ax \in \mathrm{ann}(m)$, por lo que $a \in (\mathrm{ann}(m) : x)$. En consecuencia,

$$\bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{ann}(m_i) \subseteq (\mathrm{ann}(m) : x) \qquad \Rightarrow \qquad (\mathrm{ann}(m) : x) \in \mathcal{G}$$

Dado que esto se puede hacer para cada $x \in K$, se sigue que para todo $x \in K$, $(\mathrm{ann}(m) : x) \in \mathcal{G}$, y dado que $\mathcal{G}$ es filtro de Gabriel, $\mathrm{ann}(m) \in \mathcal{G}$.

Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\Psi_{_M}) \in \mathbb{T}_{_\mathcal{G}}$, entonces $\mathrm{Nu}(\Psi_{_M}) \subseteq t(M)$.

Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(\Psi_{_M}) = t(M)$.

Q.E.D

Lema 3.3.24. $\mathrm{Conucleo}(\Psi_{_M}) \in \mathbb{T}_t = \mathbb{T}_\mathcal{G}$

Dem.
Sea $[(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_{_M}) \in \mathrm{Conucleo}(\Psi_{_M})$. Veamos que $\mathrm{ann}\left([(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_{_M}) \in \mathcal{G}\right.$. Con esta finalidad, sea $a \in I$, y $b \in (\mathrm{ann}\left([(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_{_M}) : a\right)$, tenemos;

$$ba \in \mathrm{ann}\left([(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_{_M})\right. \qquad \Rightarrow \qquad (ab) \cdot [(f, I)] \in \mathrm{Im}(\psi_{_M})$$

Sea $x \in I$, veamos quien es $(xa) \cdot [(f, I)]$ explicitamente .Recordemos que tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_I"'] & \frac{M}{t(M)} \\ \frac{I}{t(I)} \arrow[ur, "h_f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_I"'] & A \arrow[r, "\pi_A"] & \frac{A}{t(A)} \\ \frac{I}{t(I)} \arrow[urr, "g_I"'] & & \end{tikzcd}$$

$(xa) \cdot [(f, I)] = [(h_f \circ g_I \circ \xi_{xa}, J)]$, donde $J = \xi_{xa}^{-1}\left(\frac{I+t(A)}{t(A)}\right)$. Ahora, sea $r \in J$, tenemos;

$$\begin{aligned} h_f \circ g_I^{-1}\xi_{xa}(r) &= h_f \circ g_I^{-1}(r(xa) + t(A)) = h_f(r(xa) + t(I)) = h_f \circ \pi_I(r(xa)) \\ &= f(r(xa)) = rf(xa). \end{aligned}$$

Supongamos que $f(xa) = m_{xa} + t(M)$, entonces $h_f \circ g_I^{-1} \circ \xi_{xa}(r) = rm_{xa} + t(M) = \xi_{m_{xa}}(r)$. Por lo tanto, $h_f \circ g_I^{-1} \circ \xi_{xa} = \xi_{m_{xa}}$.

Se sigue que $(xa) \cdot [(f, I)] \in \mathrm{Im}(\Psi_M)$, esto implica que $x \in (\mathrm{ann}\,([(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_M) : a)$, por lo que $I \subseteq (\mathrm{ann}([(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_M)) : a)$, así $(\mathrm{ann}([(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_M)) : a) \in \mathcal{G}$.

En consecuencia, $\mathrm{ann}([(f, I)] + \mathrm{Im}(\Psi_M)) \in \mathcal{G}$, y por lo tanto $Coker(Psi_M) \in \mathbb{T}_t$.

Q.E.D

Sea $\chi : \mathrm{id} \longrightarrow q$, dada para cada $M \in A$-**Mod**, $\chi_A = \Psi_M$. Afirmamos que χ es una transformación natural.

Sea $f : M \longrightarrow N$ en A-**Mod**. Entonces, para cada $m \in M$, tenemos:

- $\Psi_N \circ f(m) = \Psi_N(f(m)) = [(\xi_{f(m)}, A)]$
- $f_{\mathcal{G}} \circ \Psi_M(m) = f_{\mathcal{G}}([(\xi_m, A)])$, en este caso recordemos que debemos considerar el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[r, "\pi_N"] & \frac{N}{t(N)} \\ \frac{M}{t(M)} \arrow[urr, "h_f"'] & & \end{tikzcd}$$

Así, $f_{\mathcal{G}} \circ \Psi_M(m) = [(h_f \circ \xi_m, A)]$. Por otro lado, para cada $a \in A$,

$$\begin{aligned} h_f \circ \xi_m(a) &= h_f(am + t(M)) = h_m \circ \pi_M(am) = \pi_N \circ f(am) \\ &= f(am) + t(N) = af(m) + t(M) = \xi_{f(m)}(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_{\mathcal{G}} \circ \Psi_M(m) = [(\xi_{f(m)}, A)] = \Psi_M(f(m)) = \Psi_N(f(m)) = \Psi_N \circ f(m)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_M"'] & N \arrow[d, "\Psi_N"] \\ M_{\mathcal{G}} \arrow[r, "f_{\mathcal{G}}"'] & N_{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, χ es una transformación natural.

Definición 3.3.25. *t es estable, si $\mathbb{T}_t$ es cerrado bajo capsulas inyectivas.*

Proposición 3.3.26. *Cuando la teoria de torsion es estable, tenemos que $M_{\mathcal{G}} = M_{(\mathcal{G})}$.*

Dem.
Sea $M \in A$-**Mod**, y sea E la capsula inyectiva de $t(M)$ y supongamos que t es estable.

Por ser E inyectivo, se sigue que existe $g : M \longrightarrow E$ A-lineal tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & t(M) \arrow[u, "i_E"] \arrow[r, "i_M"'] & M \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd} \tag{I}$$

Por otro lado,

$$\mathrm{Nu}\left(M \xrightarrow{g} E \xrightarrow{\pi_E} \frac{E}{t(M)}\right) = \left(\pi_E \circ g\right)^{-1}\left(t(M)\right) = g^{-1} \circ \pi_E^{-1}(t(M)) = g^{-1}(t(M)) \supseteq t(M)$$

Dado que $\mathrm{Nu}\left(M \xrightarrow{\pi_M} \frac{M}{t(M)}\right)$, entonces por el teorema del factor se sigue que existe $h : \frac{M}{t(M)} \longrightarrow \frac{E}{t(M)}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_M"'] & E \arrow[r, "\pi_E"] & \frac{E}{t(M)} \\ \frac{M}{t(M)} \arrow[urr, "h"'] & & \end{tikzcd} \tag{II}$$

Más aún, $\mathrm{Nu}(h) = \pi_M\left(\mathrm{Nu}(\pi_E) \circ g\right)$, y $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}\left(\pi_E \circ g\right)$. De I, II se sigue que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & t(M) \arrow[r, hook, "i_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{t(M)}"'] & M \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "g"'] & \frac{M}{t(M)} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & t(M) \arrow[r, "i_E"'] & E \arrow[r, "\pi_E"'] & \frac{E}{t(M)} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como las sucesiones cortas superiores e inferiores son exactas, entonces por el lema de la serpiente el siguiente diagrama conmuta y las sucesiones de tanto de filas como columnas son exactas:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Nu}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right) \arrow[r, "\overline{i_M}"] \arrow[d, "i_1"'] & \mathrm{Nu}(g) \arrow[r, "\overline{\pi_M}"] \arrow[d, "i_2"'] & \mathrm{Nu}(h) \arrow[d, "i_3"'] & \\
0 \arrow[r] & t(M) \arrow[r, hook, "i_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{t(M)}"'] & M \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "g"'] & \frac{M}{t(M)} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & t(M) \arrow[r, "i_E"] \arrow[d, "\pi_1"] & E \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "\pi_2"] & \frac{E}{t(M)} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] & 0 \\
 & \mathrm{Conucleo}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right) \arrow[r, "\overline{i_E}"] \arrow[d] & \mathrm{Conucleo}(g) \arrow[r, "\overline{\pi_E}"] \arrow[d] & \mathrm{Conucleo}(h) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

y existe $\delta : \mathrm{Nu}(h) \longrightarrow \mathrm{Conucleo}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right)$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$
\mathrm{Nu}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right) \overset{\overline{i_M}}{\rightarrowtail} \mathrm{Nu}(g) \xrightarrow{\overline{\pi_M}} \mathrm{Nu}(h) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Conucleo}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right) \xrightarrow{\overline{i_E}} \mathrm{Conucleo}(g) \overset{\overline{\pi_E}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Conucleo}(h)
$$

Donde, i_1, i_2, i_3 son inclusiones y π_1, π_2, π_3 son proyecciones canónicos, y

$$
\overline{i_E}(x + t(M)) = i_E(x) + \mathrm{Im}(g) \qquad \text{y} \qquad \overline{\pi_E}(x + \mathrm{Im}(g)) = \pi_E(x) + \mathrm{Im}(h)
$$

$$
\overline{i_M} = i_M \restriction_{\mathrm{Nu}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right)} \qquad \text{y} \qquad \overline{\pi_M} = \pi_M \restriction_{\mathrm{Nu}(g)}
$$

Ahora, $\mathrm{Nu}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right) = 0$ y $\mathrm{Conucleo}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right) = \frac{t(M)}{\mathrm{Im}\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right)} = 0$. En consecuencia, $\overline{\pi_M}$ es sobre y $\overline{\pi_E}$ es inyectivo, de hecho son biyecciones. Así, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo cuyas filas y columnas son exactas:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Nu}(g) \arrow[r, "\overline{\pi_M}"] \arrow[d, "i_2"'] & \mathrm{Nu}(h) \arrow[r] \arrow[d, "i_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & t(M) \arrow[r, hook, "i_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{t(M)}"'] & M \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "g"'] & \frac{M}{t(M)} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & t(M) \arrow[r, "i_E"] \arrow[d] & E \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "\pi_2"] & \frac{E}{t(M)} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r, "\overline{i_E}"] & \mathrm{Conucleo}(g) \arrow[r, "\overline{\pi_E}"] \arrow[d] & \mathrm{Conucleo}(h) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Sea $I \in \mathcal{G}$ arbitrario pero fijo, apliquemos el funtor exacto izquierdo F (el primer funtor descrito en este capitulo)al diagrama previo, y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas y columnas son exactas (es facil ver que F preserva isomorfismos)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & F\left(\mathrm{Nu}(g)\right) \arrow[r, "F\left(\overline{\pi_M}\right)"] \arrow[d, "F(i_2)"'] & F\left(\mathrm{Nu}(h)\right) \arrow[r] \arrow[d, "F(i_3)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F\left(t(M)\right) \arrow[r, hook, "F\left(i_M\right)"] \arrow[d, "F\left(\mathrm{id}_{t(M)}\right)"'] & F\left(M\right) \arrow[r, "F\left(\pi_E\right)"] \arrow[d, "F(g)"'] & F\left(\frac{M}{t(M)}\right) \arrow[d, "F(h)"'] & \\
0 \arrow[r] & F\left(t(M)\right) \arrow[r, "F\left(i_E\right)"] \arrow[d] & F(E) \arrow[r, "F\left(\pi_E\right)"] \arrow[d, "F(\pi_2)"] & F\left(\frac{E}{t(M)}\right) \arrow[d, "F(\pi_3)"] & \\
 & 0 \arrow[r, "F\left(\overline{i_E}\right)"] & \mathrm{Conucleo}(g) \arrow[r, "F\left(\overline{\pi_E}\right)"] & F\left(\mathrm{Conucleo}(h)\right) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenemos $t(M), E \in \mathbb{T}_t$. Ahora, $t(M) \leq E$, implica $t(M) = t(t(M)) \leq t(E) = E$, entonces $t\left(\frac{E}{t(M)}\right) = \frac{t(E)}{t(M)} = \frac{E}{t(M)}$, por tanto, también $\frac{E}{t(M)} \in \mathbb{T}_t$. Entonces, tenemos las verdades:

- $0 = F(t(M)) = t(M)_{(\mathcal{G})}$
- $0 = F(E) = E_{(\mathcal{G})}$.
- $0 = F\left(\frac{E}{t(M)}\right) = \left(\frac{E}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}$

Así, del ultimo diagrama se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F\left(\mathrm{Nu}(g)\right) \arrow[r, "F\left(\overline{\pi_M}\right)"] \arrow[d, "F(i_2)"'] & F\left(\mathrm{Nu}(h)\right) \arrow[r] \arrow[d, "F(i_3)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F\left(M\right) \arrow[r, "F\left(\pi_E\right)"] \arrow[d] & F\left(\frac{M}{t(M)}\right) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dado que $F\left(\overline{\pi_M}\right), F\left(i_2\right), F\left(i_3\right)$ son isomorfismos, se concluye que $F\left(\pi_E\right)$ es isomorfismo.

Por lo tanto, $M_{(\mathcal{G})} = \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})} = M_{\mathcal{G}}$

Q.E.D

Definición 3.3.27. *Un A-módulo M es $\mathcal{G}$-cerrado (resp. $\mathcal{G}$-inyectivo) si para cada $I \in \mathcal{G}$ el morfismo canónico*

$$M \ni m \xmapsto{\Phi_I} f_m \restriction_I \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$$

es isomorfismo (resp. epimorfismo)

Proposición 3.3.28. *M es $\mathcal{G}$-cerrado, si y solo si $M \in \mathbb{T}_t$ y M es $\mathcal{G}$-inyectivo.*

Dem.
($\Rightarrow$) Supongamos que M es $\mathcal{G}$-cerrado. En particular es $\mathcal{G}$-inyectivo.

Veamos que $M \in \mathcal{F}_t$. Sea $m \in t(M)$, como $t(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_{_M})$, entonces existe $K \in \mathcal{G}$ tal que $f_m \restriction_K = 0$, es decir, $Km = 0$. Como $\Phi_{_K}$ es biyectivo, se sigue que $f_m = 0$, en consecuencia $m = 0$.

$t(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M) = 0$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{F}_t$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $M \in \mathcal{F}_t$ y M es $\mathcal{G}$-inyectivo. Es decir, $0 = t(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_{_M})$, y para cada $I \in \mathcal{G}$, $\Phi_{_I} : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(I, M)$.

Sea $m \in \mathrm{Nu}\,(\Psi_{_I})$, entonces $\Phi_{_I}(m) = f_m \restriction_{_I}$, implica que $[(f_m, A)] = [(0, A)]$, se sigue que $m \in \mathrm{Nu}(\varphi_{_M})$ y por hipótesis $m = 0$.

Por lo tanto, $\Phi_{_I}$ es inyectiva. Así, $\Phi_{_I}$ es biyectiva, y por lo tanto M es $\mathcal{G}$-cerrado.

Q.E.D

Corolario 3.3.29. *Si M es $\mathcal{G}$-cerrado, entonces $\Psi_{_M}$ es isomorfismo.*

Dem.
Dado que M es $\mathcal{G}$-cerrado, en particular $M \in \mathcal{F}_t$, es decir $0 = t(M) = \mathrm{Nu}\,(\Psi_{_M})$. Por lo tanto, $\Psi_{_M}$ es inyectiva. Ademas $M/t(M) \cong M$, pues $t(M) = 0$, y obviamente $M/t(M) \ni m + \{0\} \overset{\delta}{\longmapsto} m \in M$ es isomorfismo.

Sea $[(f, I)] \in M_{_\mathcal{G}}$ $(f : I \longrightarrow M/t(M))$. Tenemos que $\delta \circ f : I \longrightarrow M$, y como M es $\mathcal{G}$-cerrado, en particular $\Phi_{_I}$ es sobre, se sigue que existe $m \in M$ tal que $\delta \circ f = \Phi_{_I}(m) = f_m \restriction_{_I}$, se sigue que $f = \delta^{-1} \circ f_m \restriction_{_I} = \xi_m \restriction_{_I}$.

$\Psi_{_M}(m) = [(\xi_m, A)] = [(\xi_m, I)] = [(f, I)]$, es decir, $\Psi_{_M}$ es sobre. Asi, $\Psi_{_M}$ es biyectiva.

Por lo tanto, $\Psi_{_M}$ es isomorfismo.

Q.E.D

Lema 3.3.30. *Si $M \in \mathcal{F}_t$, entonces $M_{_{(\mathcal{G})}} \in \mathcal{F}_t$.*

Dem.
Supongamos que $M \in \mathcal{G}$. Sea $x \in M_{_\mathcal{G}}$ y $\xi : I \longrightarrow M$ representante de x. Sabemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\xi"'] & A \arrow[d, "\beta_x(a)=a\cdot x"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"'] & M_{(\mathcal{G})} \end{tikzcd}$$

Así que $\varphi_{_M} \circ \xi = \beta_x \circ i$. Consideremos a $x \in \mathrm{Nu}\left(\varphi_{M_{(\mathcal{G})}}\right)$, entonces existe $K \in \mathcal{G}$ tal que $Kx = 0$, en otras palabras $\beta_x \restriction_K = 0$.

Se sigue que $\varphi_{_M} \circ \xi \restriction_{_{K \cap I}} = 0$, esto implica que $\xi \restriction_{_{K \cap I}} = 0$, pues por hipótesis $\mathrm{Nu}(\varphi_{_M}) = t(M) = 0$, es decir $\varphi_{_M}$ es inyectiva.

En consecuencia, $x = [(\xi, I)] = [(0, A)]$, es decir, $0 = \mathrm{Nu}\left(\varphi_{M_{(\mathcal{G})}}\right) = t\left(M_{(\mathcal{G})}\right)$.

Por lo tanto, $M_{(\mathcal{G})} \in \mathcal{F}_t$.

Q.E.D

Lema 3.3.31. *Sea $J \subseteq I$ en $\mathcal{G}$ y $M \in \mathcal{F}_t$. Supongamos que $f, g : I \longrightarrow M$ son A-lineales tales que $f \restriction_J = g \restriction_J$, entonces $f = g$.*

Dem.
Tenemos $(f - g) \restriction_J = 0$, se sigue que $J \subseteq \mathrm{Nu}(f - g)$.

Asi,por el teorema del factor, existe $h : I/J \longrightarrow M$ morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f-g"] \arrow[d, "P_I"'] & M \\ I/J \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Donde P_I es la proyección natural. Ahora, como $J \in \mathcal{G}$, entonces para todo $a \in A$, $(J : a) \in \mathcal{G}$, en particular cuando $a \in I$, así para todo $a \in I$, $\mathrm{ann}(a + J) \in \mathcal{G}$. Es decir, $I/J \in \mathbb{T}_t$.

Asi, $h\,(t(I/J)) = h\,(I/J) \leq t(M) = 0$, implica $h = 0$.

Por lo tanto, $f - g = 0$, es decir, $f = g$.

Q.E.D

Proposición 3.3.32. *$M_{\mathcal{G}}$ es un $\mathcal{G}$-cerrado, para cada A-módulo M.*

Dem.
Sea $M \in A$-**Mod**. Recordemos que $M_{\mathcal{G}} \cong (M/t(M))_{(\mathcal{G})}$ y $M/t(M) \in \mathcal{F}_t$

Por lo tanto, $(M/t(M))_{(\mathcal{G})} \in \mathcal{F}_t$, entonces $M_{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}_t$. Ahora, veamos que $M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-inyectivo.

Con este fin, sea $I \in \mathcal{G}$ arbitrario pero fijo, y sea $f : I \longrightarrow M_{\mathcal{G}}$.

Consideremos $\frac{M}{t(M)} \times I$ que sabemos es un A-módulo. Y sea

$$N = \left\{ (m + t(M), r) \in \frac{M}{t(M)} \times I : \varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) = f(r) \right\}$$

Veamos que N es subgrupo de $\frac{M}{t(M)} \times I$. Con este fin, sea $(m + t(M), r), (m' + t(M), r') \in n$, tenemos:

$$\varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) = f(r), \qquad \varphi_{M/t(M)}(m' + t(M)) = f(r')$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned} f(r - r') = f(r) - f(r') &= \varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) - \varphi_{M/t(M)}(m + t(M)) \\ &= \varphi_{M/t(M)}\big((m + t(M)) + (m' + t(M))\big). \end{aligned}$$

Se sigue que $\big(m + t(M), r\big) - \big(m' + t(M), r'\big) \in N$. Por tanto, N es subgrupo de $M/t(M) \times I$.

Sea $\delta_1 = \pi_1 \restriction_N$, y $\delta_2 = \pi_2 \restriction_N$, donde

$$\pi_1 : M/t(M) \times I \longrightarrow M/t(M) \quad \text{ y } \quad \pi_2 : M/t(M) \times I \longrightarrow I$$

Así, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\delta_1"'] & I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \frac{I}{\delta_2(N)} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{M}{t(M)} \arrow[r, "\varphi_{\frac{M}{t(M)}}"'] & \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})} \arrow[r, "P"'] & \text{Conucleo}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) \arrow[r] & o
\end{tikzcd}$$

Donde , P es la proyección canónica. Veamos que el cuadrado conmuta y que δ_2 es inyectiva.

Sea $(x, y) = (m + t(M), r) \in \text{Nu}(\delta_2)$, entonces $\delta_2(x, y) = \delta_2(m + t(M), r) = r = 0$, entonces

$$0 = f(r) = \varphi_{\frac{M}{t(M)}}(m + t(M)) \quad \text{implica} \quad m + t(M) = t(M)$$

pues, $\frac{M}{t(M)} \in \mathcal{F}_t$, por lo que $\text{Nu}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) = 0$, es decir, $\varphi_{\frac{M}{t(M)}}$ es inyectiva. Por lo tanto, $\text{Nu}(\delta_2) = 0$, esto es δ_2 inyectiva.

Ahora, sea $(m + t(M), r) \in N$, entonces $f(r) = \varphi_{\frac{M}{t(M)}}(m + t(M))$, se sigue que

$$f \circ \delta_2(m + t(M), r) = \varphi_{\frac{M}{t(M)}} \circ \delta_1(m + t(M), r).$$

Por lo tanto, el cuadrado conmuta.

Más aún, $\text{Nu}(\pi) = \delta_2(N)$ y $\text{Nu}(P \circ f) = f^{-1}\left(P^{-1}(\text{Im}(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}))\right) = f^{-1}\left(\text{Im}(\varphi_{\frac{M}{t(M)}})\right)$, y como $f \circ \delta_2 = \varphi_{\frac{M}{t(M)}} \circ \delta_1$, se sigue que $f(\delta_2(N)) \leq \text{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$. Así, $\delta_2(N) \leq f^{-1}\left(\text{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)\right)$.

Por el teorema del factor existe $h : \frac{I}{\delta_2(N)} \longrightarrow \text{Conucleo}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$ tal que $h \circ \pi = P \circ f$, sabemos que π es epimorfismo.

Observación 3.3.33. *h es inyectivo. Sea $a + \delta_2(N) \in \text{Nu}(h)$, entonces $h \circ \pi(a) = \text{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$, esto implica que $P \circ f(a) = \text{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$, implica que $f(a) + \text{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) = \text{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$.*

Asi, $f(a) \in \text{Im}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$, lo cual implica existe un único $m + t(M) \in \frac{M}{t(M)}$ tal que $\varphi_{\frac{M}{t(M)}}(m + t(M)) = f(a)$, se sigue que $(m + t(M), a) \in N$, entonces $\delta_2(m + t(M), a) = a \in \text{Im}(\delta_2)$, implica $a + \delta_2(N) = \delta_2(N)$. Por lo tanto, h es inyectivo.

Por lo que, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\delta_1"'] & I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \frac{I}{\delta_2(N)} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{M}{t(M)} \arrow[r, "\varphi_{\frac{M}{t(M)}}"'] & \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})} \arrow[r, "P"'] & \text{Conucleo}\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por lo visto antes, sabemos que Conucleo $\left(\varphi_{\frac{M}{t(M)}}\right)$ y por ser t exacto izquierdo, se sigue que $\frac{I}{\delta_2(N)} \in \mathbb{T}_t$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \text{para cada} \quad a + \delta_2(N) \in \frac{I}{\delta_2(N)}, \quad \operatorname{ann}(a + \delta_2(N)) \in \mathcal{G}. \\
&\Rightarrow (\delta_2(N) : a) \in \mathcal{G}, \quad \text{para cada} \;\; a \in I \\
&\Rightarrow J = \delta_2(N) \in \mathcal{G}
\end{aligned}
$$

Sea $x = \left[(\delta_1 \circ \delta_2^{-1}, I)\right] \in \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}$, un lema vista anteriormente nos dice que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, hook] \arrow[d, "\delta_1 \circ \delta_2^{-1}"'] & A \arrow[d, "\beta_x"] \\
\frac{M}{t(M)} \arrow[r, "\varphi_{\frac{M}{t(M)}}"'] & \left(\frac{M}{t(M)}\right)_{(\mathcal{G})}
\end{tikzcd}
$$

Por la conmutatividad del diagrama, se sigue que $\beta_x \restriction_J = \varphi_{\frac{M}{t(M)}} \circ \delta_1 \circ \delta_2^{-1} = f \restriction_J$, y así por un lema antes probado se sigue que $\beta_x = f$ en I.

Recordemos que $\beta_x(a) = a \cdot x = \varphi_{\frac{A}{t(A)}} \bullet [(\delta_1 \circ \delta_2^{-1}, I)]$. Con esto hemos probado que $\Phi_I(x) = f$, es decir, hemos probado que Φ_I es suprayectiva, esto implica que $M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-inyectiva.

$M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-cerrado.

Q.E.D

Sea $\mathcal{A} = (Obj(\mathcal{A}), Mor(\mathcal{A}))$, donde

- $Obj(\mathcal{A}) = \{M_{\mathcal{G}} : M \in A\text{-}\mathbf{Mod}\} \subseteq A_{\mathcal{G}}\text{-}\mathbf{Mod}$.
- $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M_{\mathcal{G}}, N_{\mathcal{G}}) = \operatorname{Hom}_{A_{\mathcal{G}}}(M_{\mathcal{G}}, N_{\mathcal{G}})$

Por definición de una full-subcategoría, $\mathcal{A}$ lo es. Similarmente,

$$(A, \mathcal{G})\text{-}\mathbf{Mod} = (Obj\,(A, \mathcal{G})\,, Mor\,(A, \mathcal{G}))$$

donde;

- $Obj\,(A, \mathcal{G}) = \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} : M \text{ es } \mathcal{G}\text{-cerrado}\}$
- $\operatorname{Hom}_{(A,\mathcal{G})}(M, N) = \operatorname{Hom}_A(M, N)$

Obviamente también $(A, \mathcal{G})$-**Mod** es una full-subcategoria de A-**Mod**.

Corolario 3.3.34. *$\mathcal{A}$ y $(A, \mathcal{G})$ - **Mod** son equivalentes.*

Dem.
Consideremos el siguiente par $\langle L, R\rangle : \mathcal{G} \rightleftarrows (A, \mathcal{G})\text{-}\mathbf{Mod}$, donde F esta definida como sigue:

- Para cada $M_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$, $L(M_{\mathcal{G}}) = M_{\mathcal{G}}$, visto como A-**Mod**.

- Para cada $f : M_{\mathcal{G}} \longrightarrow N_{\mathcal{G}}$, $L(f) = f$ visto como A-morfirmo

Claramente L es un funtor. R esta definida como sigue:

- Para cada $M \in Obj\,(A, \mathcal{G})$, $R\,(M) = M_{\mathcal{G}}$.
- Para cada $g : M \longrightarrow N$ en $Mor(A, \mathcal{G})$, $R(g) = g_{\mathcal{G}}$ visto como A-morfirmo

También R es funtor. Ahora, para cada $M \in Obj(A, \mathcal{G})$, $LR(M) = L(M_{\mathcal{G}}) = M_{\mathcal{G}}$. $\xi_{M} := \mathrm{id}_{M_{\mathcal{G}}}$ es isomorfismo. Esto implica que $\xi : LR \longrightarrow \mathrm{id}_{(A,\mathcal{G})\text{-}\mathbf{Mod}}$ es un isomorfismo natural. Tambien, para cada $M_{\mathcal{G}} \in Obj(\mathcal{A})$, $LR(M_{\mathcal{G}}) = L(M_{\mathcal{G}}) = (M_{\mathcal{G}})_{\mathcal{G}} \cong_{\Psi^{-1}_{M_{\mathcal{G}}}} M_{\mathcal{G}}$, (pues para cada $M \in A$- $\mathbf{Mod}$, $M_{\mathcal{G}}$ es $\mathcal{G}$-cerrado), por tanto, $\eta_{M_{\mathcal{G}}} := \Psi_{M_{\mathcal{G}}}$ es isomorfismo. Veamos que $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow RL$ es isomorfismo natural. Anteriormente, para cada $f : M_{\mathcal{G}} \longrightarrow N_{\mathcal{G}}$ ya habíamos probado la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\Psi_{M_{\mathcal{G}}}"] \arrow[d, "f"'] & RL(M_{\mathcal{G}}) \arrow[d, "f_{\mathcal{G}}"] \\
N_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\Psi_{N_{\mathcal{G}}}"'] & RL\,(N_{\mathcal{G}}) = (N_{\mathcal{G}})_{(\mathcal{G})}
\end{tikzcd}$$

Esto prueba lo deseado.

Q.E.D

En la practica usualmente no se hace distinción entre las categorías $\mathcal{A}$ y $(A, \mathcal{G})$ - $\mathbf{Mod}$. Es importante notar que con esta convencion, cada A-morfismo entre modulos $\mathcal{G}$-cerrados se convierten automaticamente en un $A_{\mathcal{G}}$-morfismo.

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A\text{ - }\mathbf{Mod} \arrow[rr, shift left=3, "q"] \arrow[rr, shift right=3, "\Psi^*"'] \arrow[dr, shift left, "a"] & & A_{\mathcal{G}}\text{ - }\mathbf{Mod} \arrow[ll, "\Psi_*"'] \\
& (A, \mathcal{G})\text{ - }\mathbf{Mod} \arrow[ul, shift left, "i"] \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde $\Psi_{*}(M) = \mathrm{Hom}_{A_{\mathcal{G}}}(A_{\mathcal{G}}, M) \cong M$, es el funtor olvidadizo, y Ψ^{*} es el funtor $A_{\mathcal{G}} \otimes_{A} -$. q es el funtor antes descrito, i es el funtor inclusión, a es el funtor L y $j = R$, de la demostración previa. En otras palabras $ia(M) = M_{\mathcal{G}} = \Psi_{*}q(M) = \Psi_{*}\,(M_{\mathcal{G}}) = M_{\mathcal{G}} \in A$-$\mathbf{Mod}$. Recuérdese que q es exacto izquierdo.

También notemos que hay una transformación natural $\Theta : \Psi^{*} \longrightarrow q$ con $\Theta_{M} : A_{\mathcal{G}} \otimes M \longrightarrow M_{\mathcal{G}}$ dadas por $\Theta_{M}(x \otimes m) = x\Psi_{M}(m)$.

Capítulo 4

Módulos de cocientes sobre filtros de continuidad

Una vez explorado la categoría de módulos cocientes, uno se plantea la siguiente cuestión, ¿Se puede generalizar más la categoría de módulos cocientes? La respuesta es satisfactoria. Sin embargo, para ello se requiere de un estudio previo a una nueva familia de objetos que hemos llamado filtros de continuidad. Al igual que en los capítulos previos, en este seguiremos trabajando en anillo con unidad A.

4.1. Filtros de continuidad

Definición 4.1.1. *Sea $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$. Diremos que ζ es **filtro de continuidad** en A si cumple:*

(1) $A \in \zeta$

(2) *Si $I, J \in \zeta$ y $f \in \operatorname{Hom}_A(I, A)$, entonces $f^{-1}(J) \in \zeta$*

Las siguientes dos propiedades las cuales se satisfacen en filtros lineales también se satisfacen en filtros de continuidad.

Teorema 4.1.2. *Sea ζ un filtro de continuidad en A.Si $I, J \in \zeta$, entonces*

(i) $I \cap J \in \zeta$

(ii) *Para cada $a \in A$, $(I : a) \in \zeta$*

Dem.
Sea $I, J \in \zeta$.

(i) Consideremos la inclusión $I \overset{\iota}{\hookrightarrow} A$, sabemos que $\iota \in \operatorname{Hom}_A(I, A)$, así $I \cap J = \iota^{-1}(J) \in \zeta$

(ii) Sea $a \in A$ y consideremos el A-homomorfismo $A \ni b \xmapsto{f_a} ba \in A$, entonces $f_a^{-1}(I) \in \zeta$.

Ahora,

$$b \in f_a^{-1}(I) \quad \Leftrightarrow \quad ba \in I \quad \Leftrightarrow \quad b \in (I : a)$$

Por tanto, $(I : a) \in \zeta$.

Q.E.D

Notemos que un filtro de continuidad es casi un filtro lineal, pero ciertamente no hay relación de implicación entre ellos, como los siguientes ejemplos lo muestran. El siguiente ejemplo, muestra que un filtro de continuidad no tiene por que ser un filtro de Gabriel.

■ **Ejemplo 4.1.3.** *Consideremos* $A = \mathbb{Z}_{12} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\right\}$ *y* $\zeta_1 = \left\{\left\langle\overline{1}\right\rangle, \left\langle\overline{2}\right\rangle, \left\langle\overline{3}\right\rangle, \left\langle\overline{6}\right\rangle\right\}$.

Veamos que ζ_1 *es filtro de continuidad. Para ello, sean* $I, J \in \zeta_1$ *y* $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$*. Usando el hecho que* f *es* A*-homomorfismo, se sigue que para todo* $x \in A$*,* $f(x) = xf(\overline{1})$*, es decir,* $\mathrm{Im}(f) = \left\langle f(\overline{1})\right\rangle$.

Para $I = A = \left\langle\overline{1}\right\rangle$ *tenemos la siguiente tabla que define todos los* A*-homomorfismo* f*:*

$f(\overline{1})$ $f(x)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{1}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$f\left(\overline{2}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$f\left(\overline{3}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$f\left(\overline{4}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$f\left(\overline{5}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{7}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$f\left(\overline{8}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$f\left(\overline{9}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$f\left(\overline{10}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$f\left(\overline{11}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Sea $I = \left\langle\overline{2}\right\rangle$*. Como* $\overline{0} = \overline{6}f(\overline{2})$*, entonces* $f(\overline{2}) \in \left\langle\overline{2}\right\rangle$*. De esta manera, todos los* A*-homomorfismo* f *son plasmados en la siguiente tabla:*

$f(\overline{2})$ $f(x)$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{2}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$f\left(\overline{4}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{8}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$f\left(\overline{10}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$

Sea $I = \left\langle\overline{3}\right\rangle$*. Como* $\overline{0} = \overline{4}f(\overline{3})$*, entonces* $f(\overline{3}) \in \left\langle\overline{3}\right\rangle$*. Así, todos los* A*-homomorfismo* f *son descritos en la siguiente tabla:*

$f(\overline{3})$ $f(x)$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{3}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{9}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$

Si $I = \langle \overline{6} \rangle$ y como $\overline{0} = \overline{2}f(\overline{6})$, entonces $f(\overline{6}) \in \langle \overline{6} \rangle$. Por lo que todos los A-homomorfismos f son únicamente dos:

$f(x)$ \ $f(\overline{6})$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$f\left(\overline{0}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$f\left(\overline{6}\right)$	$\overline{0}$	$\overline{6}$

Con base a las tablas anteriores se concluye que $f^{-1}(J) \in \zeta_1$, para cada $J \in \zeta_1$.

Por lo tanto, ζ_1 es un filtro de continuidad. Sin embargo, ζ_1 no es filtro de Gabriel. Verifiquemos esta última afirmación, sea $K = \langle \overline{4} \rangle$ y $a \in \langle \overline{6} \rangle$, tenemos:

- *Para $a = \overline{0}$, $\left(K : \overline{0}\right) = A$.*
- *Para $a = \overline{6}$, $\left(K : \overline{6}\right) = \left\{x \in A : x\overline{6} \in K\right\} = \langle \overline{2} \rangle$.*

Por tanto, para cada $a \in \langle \overline{6} \rangle$, $(K : a) \in \zeta_1$, pero $K \notin \zeta_1$, es decir, ζ_1 no es un filtro de Gabriel.

Obsérvese que el filtro de continuidad del ejemplo previo si que cumple con la definición de filtro lineal, es decir, es un ejemplo de filtro de continuidad que es filtro lineal, pero no es filtro de Gabriel. El siguiente ejemplo nos proporciona un filtro de continuidad que no es filtro lineal.

■ **Ejemplo 4.1.4.** *Sea A un dominio entero y $\zeta = \{0, A\}$, claramente ζ no es un filtro lineal. Veamos que ζ si es un filtro de continuidad.*

- *$A \in \zeta$.*
- *Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(0, A)$, entonces $\varphi = 0$. Por tanto, para cada $J \in \zeta$, $0 = \varphi^{-1}(J)$.*

  Ahora, sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, A)$. Si $\varphi = 0$, entonces para cada $J \in \zeta$, $\varphi^{-1}(J) = A \in \zeta$. Supongamos que $\varphi \neq 0$, es decir $\varphi(1) \neq 0$.

  φ es inyectiva, para verificar esto sean $a, b \in A$ tal que $\varphi(a) = \varphi(b)$, entonces $a\varphi(1) = b\varphi(1)$, implica que $a = b$, pues $\varphi(1) \neq 0$ y A es dominio entero, así $\varphi^{-1}(0) = 0$. Y claramente $\varphi^{-1}(A) = A$

Los puntos anteriores muestran que ζ es un filtro de continuidad, pero no un filtro lineal.

Ya tenemos ejemplos de filtros de continuidad que no son filtros de Gabriel o filtros de lineales, pero ¿habrá filtros lineales que no sea filtros de continuidad? El siguiente ejemplo da respuesta afirmativa a esta cuestión.

■ **Ejemplo 4.1.5.** *Sea $p \in \mathbb{N}$ número primo. Consideremos $\zeta = \{\mathbb{Z}, p\mathbb{Z}\}$. Veamos que ζ es filtro lineal:*

(1) *$p\mathbb{Z}$ es ideal máximo en $\mathbb{Z}$ por lo tanto, si $J \in \mathcal{I}(\mathbb{Z})$ tal que $p\mathbb{Z} \subseteq J$, entones $J \in \{p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\} = \zeta$,*

(2) *$p\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z} \in \zeta$,*

(3) *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $(\mathbb{Z} : n) = \mathbb{Z}$ y*

$$\begin{aligned}(p\mathbb{Z} : n) &= \{x \in \mathbb{Z} : xn \in p\mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} : p|xn\} = \{x \in \mathbb{Z} : p|x \ o \ p|n\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z} & si \quad p|n \\ p\mathbb{Z} & si \quad p \nmid n \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto, de $(1)-(3)$ *se tiene que* ζ *es filtro lineal. Ahora, veamos que no es filtro de continuidad, para ello consideremos* $q \in \mathbb{N}$ *tal que* $\operatorname{mcd}(p,q)=1$ *y el siguiente* $\mathbb{Z}$*-homomorfismo;*

$$p\mathbb{Z} \ni px \overset{h}{\longmapsto} qx \in \mathbb{Z}$$

Ahora, $h^{-1}(p\mathbb{Z}) = \{px \in p\mathbb{Z} : h(px) \in p\mathbb{Z}\} = \{px \in \mathbb{Z} : qx \in p\mathbb{Z}\} = \{px \in \mathbb{Z} : p|x\} = p^2\mathbb{Z}$.

Por lo tanto, ζ *no es filtro de continuidad.*

Ahora bien, tenemos una implicación entre filtros de Gabriel y filtros de continuidad.

Proposición 4.1.6. *Si* $\mathcal{G}$ *un filtro de Gabriel en* A*, entonces* $\mathcal{G}$ *es un filtro de continuidad.*

Dem.
Sea $\mathcal{G}$ un filtro de Gabriel. Entonces,

(1) Obviamente $A \in \mathcal{G}$.

(2) Sean $I, J \in \mathcal{G}$ y $f \in \operatorname{Hom}_A(I,A)$. Para cada $a \in I$, tenemos

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(J):a\right) &= \left\{b \in A : ba \in f^{-1}(J)\right\} = \{b \in A : f(ba) \in J\} = \{b \in A : bf(a) \in J\} \\ &= (J : f(a))\end{aligned}$$

Y dado que $J \in \mathcal{G}$, entonces del inciso (1) de la definición 2.2.6 se tiene que para cada $a \in I$, $\left(f^{-1}(J):a\right) = (J:f(a)) \in \mathcal{G}$ y por el inciso (2) se concluye que $f^{-1}(J) \in \mathcal{G}$.

Por lo tanto, $\mathcal{G}$ es un filtro de continuidad.

Q.E.D

Por la proposición 4.1.6 sabemos que todo filtro de Gabriel es filtro de continuidad, sin embargo los ejemplos 4.1.3, 4.1.4 y 4.1.5 prueban que eso no ocurre para los filtros lineales, esto es, que un filtro lineal no tiene por que ser filtro de continuidad y viceversa, es decir, hemos obtenido un tercer tipo de filtro (que contiene a los de Gabriel). En este punto surge la siguientes preguntas:

Pregunta 4.1.7. *¿Hay anillos en las que un filtro de continuidad equivale a un filtro de Gabriel?*

Pregunta 4.1.8. *¿Hay anillos en las que un filtro de continuidad equivale a un filtro lineal?*

Bien, a continuación tendremos dos ejemplos que dan respuesta parcial a las preguntas planteadas previamente.

■ **Ejemplos 4.1.9.** (1) *Sea* A *un anillo auto-inyectivo. Si* $\mathcal{L}$ *es un filtro lineal, entonces* $\mathcal{L}$ *es filtro de continuidad: Claramente* $A \in \mathcal{L}$*, así que veamos que si* $I, J \in \mathcal{L}$ *y* $f \in \operatorname{Hom}_A(I,A)$*, entonces* $f^{-1}(J) \in \mathcal{L}$*. Existe* $\hat{f} : A \longrightarrow A$ *tal que* $\hat{f} \circ \iota_I = f$*, donde* ι_I *es el* A*-homomorfismo inclusión de* I *a* A*, se sigue que*

$$f^{-1}(J) = \iota_I^{-1}\left(\hat{f}^{-1}(J)\right) = I \cap \left(J : \hat{f}(1)\right) \in \mathcal{L},$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}$ *es un filtro de continuidad.*

(2) *Sea* A *un anillo semisimple. Aquí los filtros lineales, de Gabriel y de continuidad coinciden. Ya sabemos que los filtros lineales y de Gabriel coinciden en estos anillos, así que solo mostraremos que los filtros de continuidad también. Por lo dicho previamente y de la proposición 4.1.6 es suficiente con mostrar que cada filtro de continuidad es filtro lineal. Sea* ζ *un filtro de continuidad de* A*,* $I \in \zeta$ *tales que* $I \leq J$*. Por se* A *semisimple, existe* $K \in \mathcal{I}(A)$ *tal que* $J \bigoplus K = A$ *, así que* $\pi_K^{-1}(I) = J$*, donde* $J \bigoplus K \ni j+k \overset{\pi_K}{\longmapsto} k \in J \bigoplus K$ *. Esto implica que* $J \in \zeta$*, es decir,* ζ *es un filtro lineal.*

El siguiente resultado muestra que cada intersección de filtros de continuidad es un filtro de continuidad (como la intersección de filtros lineales es filtro lineal). Más aún, nos muestra que dado un filtro de continuidad podemos describir el filtro lineal más pequeño que lo contiene.

Proposición 4.1.10. *Para un anillo A, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) *Sea $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia no vacía de filtros de continuidad de A. Entonces $\bigcap_{\alpha\in\Delta}\zeta_\alpha$ es un filtro de continuidad.*

(2) $\mathcal{L}(\zeta) := \bigcup_{I\in\zeta}\{J : I\subseteq J\}$ *es el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ.*

Dem.
Sea A un anillo.

(1) Sea $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de filtros de continuidad no vacia de A. Para todo $\alpha\in\Delta$, $A\in\zeta_\alpha$ entonces $A\in\bigcap_{\alpha\in\Delta}\zeta_\alpha$. Ahora, sea $I,J\in\bigcap_{\alpha\in\Delta}\zeta_\alpha$ f $f\in \mathrm{Hom}_A(I,A)$. Tenemos que $\alpha\in\Delta$, $I,J\in\zeta_\alpha$, implica que $f^{-1}(J)\in\zeta_\alpha$, así $f^{-1}(J)\in\bigcap_{\alpha\in\Delta}\zeta_\alpha$.

    Por lo tanto, $\bigcap_{\alpha\in\Delta}\zeta_\alpha$ es un filtro de continuidad.

(2) Veamos que $\mathcal{L}(\zeta)$ es un filtro lineal.

    (i) Si $I\in\mathcal{L}(\zeta)$ y $J\in\mathcal{I}(J)$ tales que $I\subseteq J$, entonces $J\in\{I : I\subseteq J\}$, así que $J\in\mathcal{L}(\zeta)$.

    (ii) Si $I,J\in\mathcal{L}(\zeta)$, entonces existen $I',J'\in\zeta$ tales que $I'\subseteq I$ y $J'\subseteq J$, esto implica que $I'\cap J'\subseteq I\cap J$. Así que $I'\cap J'\in\zeta$ por el teorema 4.1.3 item (i), por lo tanto $I\cap J\in\mathcal{L}(\zeta)$.

    (iii) Sea $J\in\mathcal{L}(\zeta)$, existe $I\in\zeta$ such that $I\subseteq J$. Sea $a\in A$, tenemos que $(I:a)\in\zeta$ por el teorema 4.1.3 inciso (ii). Ahora, si $r\in(I:a)$, entonces $ra\in I\subseteq J$; esto implica que $r\,(J:a)$. Se sigue que $(I:a)\subseteq(J:a)$, por lo tanto $(J:a)\in\mathcal{L}(\zeta)$.

    De (i)-(iii) se sigue que $\mathcal{L}(\zeta)$ es un filtro lineal. Por lo tanto, es el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ por construcción, ya que si $\mathcal{L}$ es un filtro lineal tal que $\zeta\subseteq\mathcal{L}$, entonces

$$\{J : I\subseteq J\}\subseteq\mathcal{L},\ \text{para cada } I\in\zeta.$$

Q.E.D

4.2. Filtros lineales, de Gabriel y de continuidad en dominio de ideales principales (DIPs)

En esta sección abordaremos la clasificación de filtros lineales, de Gabriel y de continuidad con la finalidad de tener sobre la mesa las diferencias o similitudes de estos tres conceptos.

4.2.1. Clasificación de los filtros lineales en DIPs

Sea A un DIP, Ω un conjunto elementos primos de A no asociados dos a dos y que para cualquier otro primo es asociado a algún elemento de Ω (Esto lo podemos hacer pues ser asociado es una relación de equivalencia). Sea $\mathcal{Q}\subseteq\Omega$ y $f\in{\mathbb{N}^*}^{\mathcal{Q}}$, donde $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Si $\mathcal{Q}\neq\emptyset$ definimos la siguiente familia de ideales

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} := \left\{\langle p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}\rangle : p_j\in\mathcal{Q}\quad\text{y}\quad 0\le n_j\le f(p_j)\quad\text{donde}\quad ,j\in\{1,\ldots,k\}\ \text{ y }\ n_j,k\in\mathbb{N}\right\}.$$

Si $\mathcal{Q} = \emptyset$, entonces definimos

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} := \{A\}, \text{ donde } f \text{ es la función vacía.}$$

Proposición 4.2.1. *Sea A un DIP. Para cada $\mathcal{Q} \subseteq \Omega$ y $f \in (\mathbb{N}^*)^{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$ es un filtro lineal.*

Dem.
Si $\mathcal{Q} = \emptyset$, entonces no hay nada que hacer, pues $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} = \{A\}$ es un filtro lineal. Supongamos ahora que $\mathcal{Q} \neq \emptyset$.

(*i*) Sea $\langle a \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$. Si $\langle a \rangle = A$, entonces la condición (1) de la definición 2.2.1 se cumple trivialmente.

Supongamos que $\langle a \rangle \neq A$. Existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{Q}$ distintos, $n_1, \ldots, n_k$ con $1 \leq n_j \leq f(p_j)$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $\langle a \rangle = \langle p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \rangle$. Ahora, sea $\langle b \rangle \in \mathcal{I}(A)$ tal que $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$, esto es

$$\langle p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \rangle \leq \langle b \rangle \quad \Rightarrow \quad b \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \tag{4.1}$$

Dado que A es un DFU, entonces existen únicos $q_1, \ldots, q_s$ elementos primos distintos no asociados y $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$ tales que

$$b = q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s} \quad \Rightarrow \quad q_j^{r_j} \mid b, \text{ con } 1 \leq r_j \leq m_j \text{ y } j \in \{1, \ldots, s\} \tag{4.2}$$

Ahora, de 4.1 y 4.2 se sigue que $q_j \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ y $q_j^{m_j} \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$ tenemos que existe $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $q_j \mid p_{i_j}$ y como ambos son primos, entonces son asociados, esto es, existe $u_j \in \mathrm{U}(A)$ tal que $u_j p_{i_j} = q_j$.

Los p_i no son asociados, en particular cualquiera dos distintos son primos relativos y como para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$ se tiene que $q_j^{m_j} \mid p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, entonces

$$\langle a \rangle \leq \left\langle q_j^{m_j} \right\rangle = \left\langle u_j^{m_j} p_{i_j}^{m_j} \right\rangle = \left\langle p_{i_j}^{m_j} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad p_{i_j}^{m_j} \mid a \quad \Rightarrow \quad p_{i_j}^{m_j} \mid p_{i_j}^{n_{i_j}}$$

se sigue que $m_j \leq n_{i_j} \leq f(p_{i_j})$ y ademas

$$\langle b \rangle = \langle q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s} \rangle = \left\langle u_1^{m_1} \cdots u_s^{m_s} p_{i_1}^{m_1} \cdots q_{i_s}^{m_s} \right\rangle = \left\langle p_{i_1}^{m_1} \cdots q_{i_s}^{m_s} \right\rangle$$

. En consecuencia, $\langle b \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$.

(*ii*) Sean $\langle a \rangle, \langle b \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$. Entonces

(*I*) Existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{Q}$ distintos, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq n_j \leq f(p_j)$, $j \in \{1, \ldots k\}$ tales que

$$\langle a \rangle = \langle p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_k} \rangle$$

(*II*) Existen $q_1, \ldots, q_l \in \mathcal{Q}$ distintos, $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ con $1 \leq m_i \leq f(p_i)$, $i \in \{1, \ldots l\}$ tales que

$$\langle a \rangle = \langle q_1^{m_1} \cdots q_l^{m_l} \rangle$$

Consideremos el conjunto $\{p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots q_l\}$ y $w_1, \ldots, w_r \in \mathcal{Q}$ distintos tales que

$$\{p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots q_l\} = \{w_1, \ldots, w_r\}$$

esto lo podemos hacer, pues podemos volver a etiquetarlos. Ahora, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$ sean $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}_\circ$ definidas como

$$\alpha_j = \begin{cases} n_i & \text{si } w_j = p_i \\ 0 & w_j \notin \{p_1, \ldots, p_k\} \end{cases} \quad y \quad \beta_j = \begin{cases} m_i & \text{si } w_j = q_i \\ 0 & w_j \notin \{q_1, \ldots, q_k\} \end{cases}$$

Así, $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} = w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}$ y $q_1^{m_1} \cdots q_l^{m_l} = w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r}$. Ahora,

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r} \rangle \cap \left\langle w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right\rangle = \left\langle \operatorname{mcm}\left(w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}, w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right) \right\rangle.$$

Afirmación: $\operatorname{mcm}\left(w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}, w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right) = w_1^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r, \beta_r\}}$

Claramente $w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}$ y $w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r}$ dividen a $\displaystyle\prod_{j=1}^{r} w_1^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}}$. Sea $d \in A$, tal que $w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}$ y $w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r}$ lo dividen, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$ $w_j^{\alpha_j}$ y $w_j^{\beta_j}$ lo dividen, así que $w_j^{\text{máx}\{\alpha_j, \beta_j\}}$ lo divide, esto implica que

$$w_1^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r, \beta_r\}} \mid d$$

Por lo tanto, $\operatorname{mcm}\left(w_1^{\alpha_1} \cdots w_r^{\alpha_r}, w_1^{\beta_1} \cdots w_r^{\beta_r} \right) = w_1^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r, \beta_r\}}$.

De la afirmación se sigue que:

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \left\langle w_1^{\text{máx}\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots w_r^{\text{máx}\{\alpha_r, \beta_r\}} \right\rangle.$$

Y como $0 \leq \alpha_j, \beta_j \leq f(w_j)$ para $j \in \{1, \ldots r\}$, entonces $0 \leq \text{máx}\{\alpha_j, \beta_j\} \leq f(w_j)$ para $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Por lo tanto, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q}, f)}$

(iii) Sean $\langle a \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q}, f)}$ y $b \in A$. Por la proposición 1.1.24 inciso (c), se sigue que

$$(\langle a \rangle : b) = \langle a' \rangle, \quad \text{donde } a = a' \operatorname{mcd}(a, b)$$

De modo que $a' \mid a$, en otras palabras $\langle a \rangle \leq \langle a' \rangle = (\langle a \rangle : b)$, por (i) se concluye que $(\langle a \rangle : b) \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q}, f)}$.

De (i), (ii) y (iii) se sigue que $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q}, f)}$ es un filtro lineal.

Q.E.D

Teorema 4.2.2. *Sea A un DIP. Cada filtro lineal de A es de la forma $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$ para algún $\mathcal{Q} \subseteq \Omega$ y $f \in {\mathbb{N}^*}^{\mathcal{Q}}$.*

Dem.
Sea $\mathcal{L}$ un filtro lineal de A. Sea $\mathcal{Q}$ los elementos primos $p \in \Omega$ tal que $\langle p \rangle \in \mathcal{L}$. Si $\mathcal{Q} = \emptyset$, entonces $\mathcal{L} = \{A\}$, por lo que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(\emptyset,f)}$, donde f es la función vacía.

Supongamos que $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Definamos la siguiente función $f : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ dada por

$$f(p) = \begin{cases} \text{máx}\{k \in \mathbb{N} : \left\langle p^k \right\rangle \in \mathcal{L}\} & \text{si existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left\langle p^k \right\rangle \in \mathcal{L} \text{ y } \left\langle p^{k+1} \right\rangle \notin \mathcal{L} \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$.

($\subseteq$) Sea $\langle a \rangle \in \mathcal{L}$. Por ser A DFU, entonces existen únicos $p_1, \ldots, p_k$ elementos primos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$a = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \quad \Rightarrow \quad \langle a \rangle \leq \left\langle p_j^{\lambda_j} \right\rangle \text{ donde } 1 \leq \lambda_j \leq n_j,\ j \in \{1, \ldots, k\}$$

Por ser $\mathcal{L}$ filtro lineal se sigue que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $\left\langle p_j^{\lambda_j} \right\rangle \in \mathcal{L}$. En particular, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $\langle p_j \rangle , \left\langle p_j^{n_j} \right\rangle \in \mathcal{L}$. Ahora, como cada p_j es elemento primo, entonces existe $q_j \in \Omega$ asociado a p_j, esto es, existe $u_j \in \mathrm{U}(A)$ tales que $p_j = u_j q_j$, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos

$$\langle q_j \rangle = \langle u_j q_j \rangle = \langle p_j \rangle \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad q_j \in \mathcal{Q}. \tag{4.3}$$

$$\left\langle q_j^{n_j} \right\rangle = \left\langle u_j^{n_j} q_j^{n_j} \right\rangle = \left\langle p_j^{n_j} \right\rangle \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad n_j \leq f(q_j). \tag{4.4}$$

De 4.3 y 4.4 Se sigue que:

$$\langle a \rangle = \langle p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \rangle = \langle u_1^{n_1} \cdots u_k^{n_k} q_1^{n_1} \cdots q_k^{n_k} \rangle = \langle q_1^{n_1} \cdots q_k^{n_k} \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$.

($\supseteq$) Sea $\langle b \rangle \in \mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$. Existen $q_1, \ldots, q_r \in \mathcal{Q}$ distintos, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ tales que $\langle b \rangle = \langle q_1^{n_1} \cdots q_r^{n_r} \rangle$ y para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, $1 \leq m_j \leq f(q_j)$.

Por definición de $\mathcal{Q}$ y f se sigue que para cada $j \in \{1, \ldots r\}$ se tiene que $\left\langle q_j^{m_r} \right\rangle \in \mathcal{L}$. Ahora, dado que los p_j son distintos y no son asociados dos a dos (esto último es porque están en Ω), entonces son primos relativos dos a dos, en consecuencia,

$$\langle b \rangle = \langle b \rangle = \langle q_1^{n_1} \cdots q_r^{n_r} \rangle = \langle \mathrm{mcm}(q_1^{n_r}, \ldots, q_r^{n_r}) \rangle \tag{4.6}$$

Por ser $\mathcal{L}$ filtro de continuidad, se tiene que

$$\langle \mathrm{mcm}(q_1^{n_r}, \ldots, q_r^{n_r}) \rangle = \bigcap_{j=1}^{r} \left\langle q_j^{n_j} \right\rangle \in \mathcal{L} \tag{4.7}$$

De 4.6 y 4.7 se concluye que $\langle b \rangle \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} \subseteq \mathcal{L}$

Se concluye que $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)} = \mathcal{L}$.

Q.E.D

La proposición 4.2.1 y el teorema 4.2.2 nos dicen como son exactamente los filtros lineales en un DIP. Ahora, una pequeña observación que en realidad es la respuesta a la siguiente pregunta, ¿Y como son los filtros lineales de cardinalidad finita? La respuesta es muy simple y es que quedan totalmente determinados por un elemento $a \in A$.

Sea $a \in A$. Definamos $\mathcal{L}_a = \{\langle d\rangle : d \mid a\}$. Observemos que $\mathcal{L}_a$ es de cardinalidad finita, pues A es DFU y ademas si $a \in \mathrm{U}(A)$, entonces $\mathcal{L}_a = \{A\}$.

Proposición 4.2.3. *$\mathcal{L}_a$ es filtro lineal.*

Dem.
(i) Sea $\langle d\rangle \in \mathcal{L}_a$ y $\langle d\rangle \leq \langle d'\rangle$. Se tiene que $d' \mid d$ y por definición de $\mathcal{L}_a$ se cumple que $d \mid a$, entonces por transitividad $d' \mid a$, por lo tanto, $\langle d'\rangle \in \mathcal{L}_a$

(ii) Sean $\langle d_1\rangle, \langle d_2\rangle \in \mathcal{L}_a$. Entonces, $d_1 \mid a$ y $d_2 \mid a$ por lo que $\mathrm{mcm}(d_1, d_2) \mid a$ (definición de mínimo común múltiplo), se sigue que
$$\langle d_1\rangle \cap \langle d_2\rangle = \langle \mathrm{mcm}(d_1, d_2)\rangle \in \mathcal{L}_a$$
.

(iii) Sea $\langle d\rangle \in \mathcal{L}_a$ y $b \in A$. Por la proposición 1.1.24 inciso (c) se sigue que

$$\big(\langle d\rangle : b\big) = \langle d'\rangle\,, \text{ donde } d = d' \,\mathrm{mcd}(d, b)$$

Es decir, $d' \mid d$ y $d \mid a$, por lo que $d' \mid a$, entonces $\big(\langle d\rangle : b\big) \in \mathcal{L}_a$.

De (i), (ii) y (iii) se concluye que $\mathcal{L}_a$ es un filtro lineal.

Q.E.D

Corolario 4.2.4. *Sea A un DIP y $\mathcal{L}$ un filtro lineal de cardinalidad finita, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a$.*

Dem.
Sea $\mathcal{L}$ un filtro lineal de cardinalidad finita y digamos que $\mathcal{L} = \{\langle a_1\rangle, \ldots, \langle a_k\rangle\}$. Sea $a = \mathrm{mcm}\,(a_1, \ldots, a_k)$.

Afirmación: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a$.

Por definición de $\mathcal{L}_a$ y que $\mathcal{L}$ es filtro lineal, entonces $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \langle a_j\rangle = \langle \mathrm{mcm}\,(a_1, \ldots, a_k)\rangle = \langle a\rangle \in \mathcal{L}_a \cap \mathcal{L}$. Ahora,

$(\subseteq)$ Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que $\langle a_j\rangle \in \mathcal{L}_a$, pues $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} \langle a_j\rangle \leq \langle a_j\rangle$.

Por lo tanto, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_a$.

$(\supseteq)$ Sea $d \in A$ tal que $d \mid a$, entonces $\langle a\rangle \leq \langle d\rangle$ y por ser $\mathcal{L}$ filtro lineal, se sigue que $\langle d\rangle \in \mathcal{L}$

Por lo tanto, $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{L}$.

Por lo tanto, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a$.

Q.E.D

4.2.2. Clasificación de los filtros de Gabriel en DIPs

Sabemos que los filtros de Gabriel en un DIP ya esta clasificados (de hecho, la clasificación es mucho más general), lo cual describiremos enseguida.

Dado un anillo conmutativo A su espectro se define como

$$\mathrm{Spec}(A) := \{P \in \mathcal{I}(A) : P \text{ es ideal primo}\}$$

Para cada $I \in \mathcal{I}(A)$, se define el siguiente conjunto

$$V(I) := \{P \in \mathrm{Spec}(A) : I \subseteq P\}$$

Ahora, consideremos A un DIP. Los filtros de Gabriel en A son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mathscr{P}} &:= \{\langle a\rangle : V(\langle a\rangle) \cap \mathscr{P} = \emptyset\} \\ &= \{\langle a\rangle : \forall p \in A \text{ irreducible tal que } p|r, \text{ entonces } \langle p\rangle \notin \mathscr{P}\}.\end{aligned}$$

Donde $\mathscr{P} \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ no vacío.

4.2.3. Clasificación de los filtros de continuidad en DIPs

Lema 4.2.5. *Sea A un DIP y $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$. ζ es un filtro de continuidad si y sólo si se cumplen:*

(i) $A \in \zeta$.

(ii) *Para cada $a, b, k \in A$ tales que $\langle a\rangle, \langle b\rangle \in \zeta$ se tiene que $\langle b'a\rangle \in \zeta$, donde $b = \mathrm{mcd}(b,k)b'$.*

Dem.
$(\Rightarrow)$ Supongamos que ζ es un filtro de continuidad, en particular $A \in \zeta$, es decir, (i) se cumple. Para mostrar la veracidad de (ii) sean $a, b, k \in A$ tales que $\langle a\rangle, \langle b\rangle \in \zeta$ y sea $b' \in A$ tal que $b = \mathrm{mcd}(b,k)b'$.

Si $a = 0$, entonces no hay nada que hacer, por lo que supondremos que $a \neq 0$. Consideremos la siguiente asignación $\langle a\rangle \ni ra \xmapsto{\varphi} rk \in A$. Veamos $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\langle a\rangle, A)$, si $ra = sa$, entonces $r = s$ por ser A un DIP, ahora, sean $ra, sa \in \langle a\rangle$ y $\lambda \in A$. Tenemos

- $\varphi(ra + \lambda(sa)) = \varphi((r + \lambda s)a) = (r + \lambda s)k = rk + \lambda(sk) = \varphi(ra) + \lambda\varphi(sa)$.

Por tanto, φ es A-homomorfismo. Como ζ es filtro de continuidad se sigue que $\varphi^{-1}(\langle b\rangle) \in \zeta$.

Ahora,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\langle b\rangle) \ni ra \quad &\Leftrightarrow \quad rk = \varphi(ra) \in \langle b\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad r \in (\langle b\rangle : k) = \langle b'\rangle, \quad \text{por inciso } (c) \text{ del lema 1.1.24}\end{aligned}$$

Se sigue que $\varphi^{-1}(\langle b\rangle) = \{ra : r \in \langle b'\rangle\} = \langle b'\rangle a = \langle b'a\rangle$, esta última igualdad es en virtud del inciso (3) del lema 1.1.23. Por lo tanto, $\langle b'a\rangle \in \zeta$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que se cumplen (i) y (ii). Veamos que ζ es filtro de continuidad, por (i) tenemos que $A \in \zeta$, nos resta mostrar que se cumple el inciso (2) de la definición 4.1.1. Sean $\langle a\rangle, \langle b\rangle \in \zeta$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(\langle a\rangle, A)$. Verifiquemos que $f^{-1}(\langle b\rangle) \in \zeta$, tenemos:

$$\begin{aligned}f^{-1}(\langle b\rangle) \ni ra \quad &\Leftrightarrow \quad rf(a) = f(ra) \in \langle b\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad r \in (\langle b\rangle : f(a)).\end{aligned}$$

Sea $b' \in A$ tal que $b = \mathrm{mcd}(b, f(a))b'$, entonces por el inciso (c) de lema 1.1.24 tenemos que $\langle b'\rangle = (\langle b\rangle : f(a))$ y por el inciso (3) del lema 1.1.23 y (ii) se sigue que

$$f^{-1}(\langle b\rangle) = \{ra : r \in \langle b'\rangle\} = \langle b'\rangle a = \langle b'a\rangle \in \zeta$$

Por lo tanto, ζ es un filtro de continuidad.

Q.E.D

El lema 4.2.5 nos da otra manera de describir un filtro de continuidad en un DIP. Por otro lado, el siguiente resultado nos permite afirmar que en un DIP los filtros de continuidad que no tienen al ideal cero son filtros lineales.

Teorema 4.2.6. *Sea A un DIP y $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$ no vacia, tal que $0 \notin \zeta$. Las siguientes condiciones son equivalente:*

(a) *ζ es un filtro de continuidad.*

(b) *Las siguientes propiedades se cumplen para ζ:*

  (1) *Si $I \in \zeta$ y $J \in \mathcal{I}(A)$ tal que $I \leq J$ entonces $J \in \zeta$.*

  (2) *Si $I, J \in \zeta$, entonces $IJ \in \zeta$.*

(c) *ζ es un filtro de Gabriel.*

Dem.
$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que ζ es un filtro de continuidad y sean $I = \langle a \rangle, J = \langle b \rangle \in \mathcal{I}(A)$. Veamos que se cumplen las propiedades (1) y (2):

(1) Supongamos que $I \leq J$ con $I \in \zeta$. Como $0 \notin \zeta$, entonces existe $\lambda \in A \setminus \{0\}$ tal que $a = \lambda b$. Consideremos el A-homomorfismo $A \ni x \overset{f_\lambda}{\longmapsto} x\lambda \in A$. Entonces $J = f_\lambda^{-1}(I)$, veamos que dicha afirmación es verdadera:

  ($\supseteq$) Sea $x \in f_\lambda^{-1}(I)$. Tenemos que $x\lambda = f_\lambda(x) \in I$. Existe $\alpha \in A$, tal que $x\lambda = \alpha a = \alpha(\lambda b)$

$$\Rightarrow \lambda(x - \alpha b) = 0 \Rightarrow x = \alpha b, \text{ pues } \lambda \neq 0 \Rightarrow x \in J = \langle b \rangle.$$

  Por lo tanto, $J \supseteq f_\lambda^{-1}(I)$.

  ($\subseteq$) Sea $x \in J$. Entonces $x = \beta b$, para algún $\beta \in A$. Tenemos

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(\beta b) = \lambda(\beta b) = \beta(\lambda b) = \beta a \in I \Rightarrow x \in f_\lambda^{-1}(I).$$

  Por lo tanto, $J \subseteq f_\lambda^{-1}(I)$.

  Lo previo muestra lo deseado.

(2) Supongamos que $I, J \in \zeta$ y considerando $k = 1$ en lema 4.2.5 y del inciso (2) del lema 1.1.23 se sigue inmediatamente $IJ = \langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle \in \zeta$.

Por lo tanto, se cumplen (1) y (2).

$(b) \Rightarrow (c)$ Supongamos que ζ cumple con (1) y (2). Veamos que ζ es un filtro de Gabriel, para ello mostremos que ζ cumple con los incisos (i) y (ii) de la definición 2.2.6.

(i) Sea $I = \langle a \rangle \in \zeta$ y $x \in A$. Por el lema 1.1.24 inciso (c), se sigue que $\left\langle \frac{a}{\text{mcd}(a,x)} \right\rangle = (I : x)$ y dado que $I \leq \left\langle \frac{a}{\text{mcd}(a,x)} \right\rangle$ entonces de (1) obtenemos que $(I : x) \in \zeta$.

(ii) Sean $I = \langle a \rangle, J = \langle b \rangle \in \mathcal{I}(A)$ tales que $I \in \zeta$ y para cada $x \in I$, $(J : x) \in \zeta$. En particular, $(J : a) \in \zeta$ y por el lema 1.1.24 inciso (c) se tiene que $\left\langle \frac{b}{\text{mcd}(b,a)} \right\rangle = (J : a)$ y dado que $I \leq \langle \text{mcd}(a,b) \rangle$, entonces por (1) se obtiene que $J = \left\langle \frac{b}{\text{mcd}(b,a)} \right\rangle \langle \text{mcd}(a,b) \rangle \in \zeta$.

Por lo tanto, de (i) y (ii) se concluye que ζ es un filtro de Gabriel.

$(c) \Rightarrow (a)$ Esta es la proposición 4.1.6.

Q.E.D

El teorema previo nos da la clasificación de los filtros de continuidad en un DIP que no tienen al ideal cero y concretamente nos dice que son los filtros de Gabriel que no tienen al ideal cero. Entonces, en un DIP, ¿qué relación hay entre los filtro de continuidad que tienen al ideal cero y los que no?

Proposición 4.2.7. *Sea A un DIP y ζ un filtro de continuidad en A.*

(a) *Si $0 \in \zeta$, entonces $\zeta \setminus \{0\}$ es un filtro de continuidad, de hecho es filtro lineal.*

(b) *Si $0 \notin \zeta$, entonces $\zeta \cup \{0\}$ es filtro de continuidad.*

Dem.
(a) Supongamos que $0 \in \zeta$. Obviamente $A \in \zeta \setminus \{0\}$. Veamos que se cumple el inciso (2) de la definición 4.1.1, para ello sean $I, J \in \zeta \setminus \{0\}$ y $g \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$.

Verifiquemos que $g^{-1}(J) \in \zeta \setminus \{0\}$. Ya sabemos que $g^{-1}(J) \in \zeta$, así

- Si $g = 0$, entonces $g^{-1}(J) = I \in \zeta \setminus \{0\}$.
- Si $g \neq 0$, entonces por el inciso (1) del lema 1.1.23, se sigue que g es inyectiva, en particular, $\mathrm{Im}(g) \neq 0$, y dado que $J \neq 0$, entonces $0 \neq \mathrm{Im}(g) \cdot J \subseteq \mathrm{Im}(g) \cap J$, así que $\mathrm{Im}(g) \cap J \neq 0$, por lo tanto, $0 \neq g^{-1}(J)$, es decir, $g^{-1}(J) \in \zeta \setminus \{0\}$.

Por lo tanto, $\zeta \setminus \{0\}$ es un filtro de continuidad que por la proposición anterior es filtro lineal.

(b) Supongamos que $0 \notin \zeta$. Claramente $A \in \zeta \cup \{0\}$, por lo que nos resta verificar el inciso (2) de la definición 4.1.1, para ello sean $I, J \in \zeta \cup \{0\}$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, A)$.

Veamos que $f^{-1}(J) \in \zeta \cup \{0\}$. Ya sabemos que $f^{-1}(J) \in \zeta$, así

- Si $I, J \notin \{0\}$, entonces $f^{-1}(J) \in \zeta \cup \{0\}$.
- Si $I = 0$, entonces $f^{-1}(J) = 0 \in \zeta \cup \{0\}$.
- Si $I \neq 0$ y $J = 0$, entonces por el inciso (1) del lema 1.1.23 se sigue que f es inyectiva, de manera que $f^{-1}(0) = 0 \in \zeta \cup \{0\}$.

Por lo tanto, $\zeta \cup \{0\}$ es filtro de continuidad.

Q.E.D

La proposición 4.2.7 nos dice que para estudiar los filtros de continuidad en un DIP basta con estudiar a los filtros de continuidad que no tienen al ideal cero.

Corolario 4.2.8. *Sea A un DIP y $\zeta \subseteq \mathcal{I}(A)$. Entonces ζ es un filtro de continuidad si y solo si una de las siguientes condiciones se cumplen:*

(1) *ζ es un filtro de Gabriel.*

(2) *$\zeta = \mathcal{G} \cup \{0\}$, donde $\mathcal{G}$ es un filtro de Gabriel.*

Dem.
Aplicar el teorema 4.2.6 y la proposición 4.2.7

Q.E.D

En conclusión, en un DIP la proposición 4.2.1 y el teorema 4.2.2 nos dicen que todos los filtros lineal son de la forma $\mathcal{L}_{(\mathcal{Q},f)}$, además un filtro de continuidad es un filtro de Gabriel o es un filtro de Gabriel unión el ideal cero, y por todo lo discutido en esta sección se deduce que tanto los filtros de Gabriel (ver clasificación) como los de continuidad deben tener cardinalidad infinita, en contra parte el corolario 4.2.4 nos dice que los filtros lineales pueden ser de cardinalidad finita y hay tantos como elementos del anillo. Todo lo anterior responde parte de las preguntas planteadas sobre los tres conceptos de filtros (lineales, de continuidad y de Gabriel) en un DIP.

4.3. Clasificación de filtros de continuidad de productos finitos de anillos

En esta sección consideraremos un numero finito de anillos $A_1, \ldots, A_n$ con unidad. Nuestra meta principal es caracterizar los filtros de continuidad en el anillo producto $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$. A continuación presentaremos funciones que usaremos durante todo el proceso de caracterización.

- Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $a \in A_i$, consideremos la siguiente función:

$$\delta_{(i,a)}(j) := \begin{cases} a & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

  Claramente $\delta_{(i,a)} \in A$.

- Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ la proyección canónica sobre la i-ésima componente esta dada por:

$$A \ni f \xmapsto{\pi_i} f(i) \in A_i$$

- Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ la inclusión en la i-ésima componente esta dada por:

$$A_i \ni a \xmapsto{\iota_i} \delta_{(i,a)} \in A$$

Sabemos que cada π_i es un homomorfismo de anillos y además para cada A_i-módulo izquierdo M se puede considerar como A módulo izquierdo con el siguiente producto: Para cada $f \in A$ y $m \in M$,

$$f \bullet m := \pi_i(f)m = f(i)m$$

Ahora, iniciemos preparando el terreno para llegar a nuestra meta, para ello comenzaremos con usa serie de afirmaciones básicas pero vitales para el desenlace algunas con su prueba correspondiente y otras sin prueba pues ya son muy conocidas.

Proposición 4.3.1. *Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(1) *π_i es A-homomorfismo.*

(2) *ι_i es A-homomorfismo.*

(3) *Si I es ideal izquierdo de A, entonces $\pi_i(I)$ es ideal izquierdo de A_i.*

(4) *Para K ideal izquierdo de A_i y considerando ambos como A-módulos. Si $f \in \mathrm{Hom}_A(K, A_i)$, entonces $f \in \mathrm{Hom}_{A_i}(K, A_i)$*

Dem.
Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $\tau \in A$, $g, h \in A$ y $x, y \in A_i$.

(1) $\pi_i(g + fh) = (g + \tau h)(i) = \pi_i(g) + \tau(i)g(i) = \pi_i(g) + \pi_i(\tau)\pi_i(h) = \pi_i(g) + \tau \bullet \pi_i(h)$
   Por lo tanto, π_i es A-homomorfismo.

(2) Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que:

$$(\iota_i(x) + \tau\iota_i(y))\,(j) = \left(\delta_{(i,x)} + \tau\delta_{(i,y)}\right)(j) = \delta_{(i,x)}(j) + \tau(j)\delta_{(i,y)}(j)$$

Si $j \neq i$, entonces

$$(\iota_i(x) + \tau\iota_i(y))\,(j) = 0 + \tau(j)0 = 0$$

Si $j = i$, entonces

$$(\iota_i(x) + \tau\iota_i(y))\,(j) = x + \tau(i)y = x + \tau \bullet y$$

Se sigue que $\iota_i\left(x + \tau \bullet y\right) = \iota_i(x) + \tau\iota_i(y)$. Por lo tanto, ι_i es A-homomorfismo.

(3) Sea I un ideal izquierdo de A. Por (1) se sigue que $\pi_i(I)$ es A-submódulo izquierdo de A_i, en particular, es grupo abeliano con la suma de A_i. Ahora, sean $a \in A_i$ y $x \in \pi_i(I)$. Existe $f \in I$, tal que $f(i) = \pi_i(f) = x$. Como I es ideal izquierdo de A, entonces $\delta_{(i,a)}f \in I$, se sigue que:

$$ax = \delta_{(i,x)}(i)f(i) = \pi_i(\delta_{(i,x)}f) \in \pi_i(I).$$

Por lo tanto, $\pi_i(I)$ es ideal izquierdo de A_i.

(4) Sea K ideal izquierdo de A_i y $f \in \mathrm{Hom}_A(K, A_i)$. Veamos que $f \in \mathrm{Hom}_{A_i}(K, A_i)$, para ello, sean $a \in A_i$, $x, y \in K$.

$$\begin{aligned}
f(x + ay) &= f(x) + f(ay) = f(x) + f\left(\delta_{(i,a)}(i)y\right) = f(x) + f\left(\pi_i(\delta_{(1,a)})y\right) \\
&= f(x) + f\left(\delta_{(1,a)} \bullet y\right) = f(x) + \delta_{(1,a)} \bullet f(y) = f(x) + \pi_i(\delta_{(i,a)})f(y) \\
&= f(x) + af(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que $f \in \mathrm{Hom}_{A_i}(K, A_i)$.

Q.E.D

El siguiente resultado previo a la demostración del teorema principal es importante.

Lema 4.3.2. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ anillos noetherianos, $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ y sea ζ es un filtro de continuidad en A.*

Si $I \in \zeta$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $I_i = \prod_{j=1}^{n} K_j \in \zeta$, donde $K_j = A_j$ si $j = i$ y $K_i = \pi_i(I)$.

Dem.
Sea $I \in \zeta$ y $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el teorema 1.1.3, se tiene que $I = \prod_{i=1}^{n} \pi_i(I)$. La función $\xi_i := \iota_i \circ \pi_i$ es A-homomorfismo, pues por los incisos (1) y (2) de la proposición 4.3.1 ι_i y π_i son A-homomorfismos. Dado que ζ es filtro de continuidad en A, se sigue que

$$\xi_i^{-1}(I) \in \zeta.$$

Afirmación: $\xi_i^{-1}(I) = \prod_{j=1}^{n} K_j$.

Prueba.

($\subseteq$) Sea $f \in \xi_i^{-1}(I)$. Tenemos que $\delta_{(i,f(i))} = \iota_i \circ \pi_i(f) = \xi_i(f) \in I$. Por lo que $f(i) = \delta_{(i,f(i))}(i) \in \pi_i(I)$

$$\Rightarrow \quad f \in \prod_{j=1}^{n} K_j$$

Por lo tanto, $\xi_i^{-1}(I) \subseteq \prod_{j=1}^{n} K_j$.

($\supseteq$) Sea $g \in \prod_{j=1}^{n} K_j$, $\xi_i(g) = \iota_i \circ \pi_i(g) = \delta_{(i,g(i))} \in I$, pues $g(i) \in K_i = \pi_i(I)$.

Por lo tanto, $\prod_{j=1}^{n} K_j \subseteq \xi_i^{-1}(I)$.

Se sigue que la afirmación es verdadera, por lo tanto $\prod_{j=1}^{n} K_j \in \zeta$.

Q.E.D

Teorema 4.3.3. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ con unidad, $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ y ζ una familia de ideales izquierdos de A. ζ es un filtro de continuidad de A si y solo si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existen ζ_i filtros de continuidad de A_j tales que $\zeta = \prod_{j=1}^{n} \zeta_j := \left\{ \prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j \right\}$*

Dem.
En esta demostración consideraremos los siguientes A-homomorfismos: la proyección canónica $\pi_i : A \longrightarrow A_i$ y la inyección canónica $\iota_i : A_i \longrightarrow A$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que ζ es filtro de continuidad en A. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. En virtud de la proposición 4.3.1 incisos (c), podemos afirmar que la siguiente familia de A-módulos izquierdos es también de ideales izquierdos de A_i:

$$\zeta_i = \{\pi_i(I) : I \in \zeta\}$$

Veamos que ζ_i es filtro de continuidad en A_i.

(i) Como $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, se sigue que $A_i = \pi_i(A) \in \zeta_i$. Por lo tanto, $A_i \in \zeta_i$.

(ii) Sean $\pi_i(I), \pi_i(J) \in \zeta_i$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(\pi_i(I), A_i)$. Veamos que $\varphi^{-1}(\pi_i(J)) \in \zeta_i$.

Por el teorema 4.3.1 inciso (2), se sigue que $I = \prod_{i=1}^{n} \pi_i(I)$. Para cada i definamos $\rho_i : I \ni x \mapsto \pi_i(x) \in \pi_i(I)$ y $h_i := \iota_i \restriction_I$. Ahora, para $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ consideramos el A-homomorfismo $g_j = h_j \circ \rho_j$ y para i consideramos el A-homomorfismo $g_i = \varphi \circ \rho_i$, entonces por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único A-homomorfismo $\hat{\varphi}_i : I \longrightarrow A$ tales que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que: $\pi_j \circ \hat{\varphi}_j = g_j$; esto es, si $f \in I$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\hat{\varphi}_i(f)(j) = \begin{cases} f(j) & \text{si } j \neq i \\ \varphi(f(i)) & \text{si } j = i \end{cases}$$

Ahora, como $J \in \zeta$ y ζ es filtro de continuidad en A, entonces por el lema 4.3.2 se sigue que $\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i) \in \zeta$, donde $J_i = \prod_{j=1}^{n} K_j$, $K_j = A_j$ si $j \neq i$ y $K_i = \pi_i(J)$. Por definición de ζ_i se sigue que $\pi_i\left(\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i)\right) \in \zeta_i$.

Afirmo que $\pi_i\left(\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right)$. Veamos quien es $\hat{\varphi}_i^{-1}\left(J_i\right)$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}_i^{-1}\left(J_i\right) \ni f \quad &\Leftrightarrow \quad f \in I = \prod_{j=1}^{n} \pi_j(I) \quad \text{y} \quad \hat{\varphi}_i(f) \in J_i \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, f(j) \in \pi_j(I) \quad \text{y} \quad \hat{\varphi}_i(f)(j) \in K_j \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}, f(j) \in \pi_j(I) \quad \text{y} \quad f(j) = \hat{\varphi}_i(f)(j) \in A_j \\
&\qquad \text{para } j = i, f(i) \in \pi_i(I) \quad \text{y} \quad \varphi(f(i)) \in \pi_i(J). \\
&\Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}, f(j) \in \pi_j(I) \quad \text{y} \quad f(i) \in \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad f \in \prod_{j=1}^{n} L_j \quad \text{donde} \quad L_j = \pi_j(I) \text{ si } j \neq i \quad \text{y} \quad L_i = \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right).
\end{aligned}
$$

Esto es, $\hat{\varphi}_i^{-1}\left(J_i\right) = \prod_{j=1}^{n} L_j$. Por lo tanto, $\pi_i\left(\hat{\varphi}_i^{-1}(J_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\pi_i(J)\right) \in \zeta_i$.

De (i) y (ii) se concluye que ζ_i es un filtro de continuidad. Más aún, $\zeta = \prod_{j=1}^{n} \zeta_j = \left\{\prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j\right\}$. Veamos que esto último se satisface. Por construcción se sigue inmediatamente que $\zeta \subseteq \left\{\prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j\right\}$. Nos resta probar la otra contención, sean $I_i \in \zeta_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Veamos que $\prod_{i=1}^{n} I_j \in \zeta$. Por definición de los $\zeta_i's$, se sigue que existen $K_1, \ldots, K_n \in \zeta$ tales que $\pi_i\left(K_i\right) = I_i$ y por el lema 4.3.2 se sigue que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ el ideal $\prod_{j=i}^{n} K_j^i \in \zeta$ donde $K_j^i = A_j$ si $j = i$ y $K_i^i = \pi_i(K_i) = I_i$. En consecuencia,

$$
\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} \left[\prod_{j^1}^{n} K_j^i\right] \in \zeta
$$

Por lo tanto, la afirmación es cierta.

$(\Leftarrow)$ Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, ζ_i es un filtro de continuidad en A_i y $\zeta = \left\{\prod_{j=1}^{n} I_j : I_j \in \zeta_j\right\}$. Veamos que ζ es un filtro de continuidad de A.

(I) Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i \in \zeta_i$, pues ζ_i es filtro de continuidad, se sigue que $A = \prod_{i=1}^{n} A_i \in \zeta$.

(II) Sean $I = \prod_{i}^{n} I_i, J = \prod_{j=1}^{n} J_j \in \zeta$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(I, A)$. Veamos que $\varphi^{-1}(J) \in \zeta$.

Observación 1: Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, y cada $W \in \mathcal{I}(A_i)$, se tiene que $\pi_i^{-1}(W) = \prod_{j=1}^{n} K_j$, donde $K_j = A_j$ si $j \neq i$ y $K_i = W$. Verificación:

$$
\pi_i^{-1}(W) \ni g \quad \Leftrightarrow \quad \pi_i(g) = g(i) \in W \quad \Leftrightarrow \quad g \in \prod_{j=1}^{n} K_j
$$

Observación 2: $\varphi^{-1}(J) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right)$. Verificación:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}(J) \ni f \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(f) \in J \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \pi_i\left(\varphi(f)\right) \in J_i \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \varphi(f) \in \pi_i^{-1}\left(J_i\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(f) \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(J_i\right) \\
&\Leftrightarrow \quad f \in \varphi^{-1}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}\left(J_i\right)\right] = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}\left(J_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

Veamos que $\varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) \in \zeta$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para ello, mostremos que $\mathrm{Nu}\left(\rho_i\right) \subseteq \mathrm{Nu}\left(\pi_i \circ \varphi\right)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por la observación 1, se sigue que:

$$
\mathrm{Nu}(\rho_i) = I \cap \mathrm{Nu}(\pi_i) = \prod_{j=1}^{n} M_j, \text{ donde } M_j = I_j \text{ si } j \neq i \text{ y } M_i = \{0\}
$$

$$
\mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi) = \varphi^{-1}\left(\mathrm{Nu}(\pi_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n} N_j\right), \text{ donde } N_j = A_j \text{ si } j \neq i \text{ y } N_i = \{0\}
$$

Sea $f \in \mathrm{Nu}(\rho_i)$, entonces $0 = \rho_i(f) = f(i)$. Veamos que $f \in \mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi)$. Si $f = 0$, entonces no hay nada que hacer $f \in \mathrm{Nu}(\pi_i \circ \varphi)$, por lo que supondremos que $f \neq 0$, es decir, existe $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ tal que $0 \neq f(j) = \pi_j(f) \in I_j$.

Consideremos el siguiente elemento de A:

$$
\delta_k(j) := \begin{cases} 1 & \text{si } k \neq j \\ 0 & \text{si } k = j \end{cases}
$$

Así, $f = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \delta_k f$. Ya que φ es A-homomorfismo, se sigue que $\varphi(f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \delta_k \varphi(f)$, en particular $\varphi(f)(i) = 0$, esto es, $\rho_i \circ \varphi(f) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Nu}\left(\rho_i\right) \subseteq \mathrm{Nu}\left(\pi_i \circ \varphi\right)$. En virtud del teorema del factor existe $f_i : I_i \longrightarrow A_i$ A-homomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_i"'] & A \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\
I_i \arrow[urr, "f_i"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Como I_i es ideal izquierdo de A_i y f_i es A-homomorfismo, entonces por la proposición 4.3.1 inciso (d) se sigue que f_i es A_i-homomorfismo. Dado que ζ_i es filtro de continuidad de A_i, entonces

$$
f^{-1}(J_i) \in \zeta_i
$$

Por la conmutatividad del diagrama previo, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
f_i \circ \rho_i = \pi_i \circ \varphi \quad &\Rightarrow \quad \rho_i^{-1}\left(f_i^{-1}(J_i)\right) = \left(f_i \circ \rho_i\right)^{-1}\left(J_i\right) = \left(\pi_i \circ \varphi\right)^{-1}\left(J_i\right) = \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) \\
&\Rightarrow \quad I \cap \pi_i^{-1}\left(f_i^{-1}(J_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right)
\end{aligned}
$$

Por la observación 1 se sigue que $\left(f_i \circ \rho_i\right)^{-1}\left(J_i\right) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{(i)}$, donde $K_j^{(i)} = I_j$ si $j \neq i$ y $K_i^{(i)} = f_i^{-1}(J_i)$.

En consecuencia,

$$\varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{(i)}$$

.

Ahora, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, ζ_j es filtro de continuidad de A_j y comos $K_j^{(i)} \in \zeta_j$, se concluye que $\varphi^{-1}\left(\pi_i^{-1}(J_i)\right) \in \zeta$, por definición de ζ. Por la observación 2, se sigue que

$$\varphi^{-1}(J) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}\left(\pi^{-1}(J_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} K_j^{(i)}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_j^{(i)}\right) \in \zeta$$

Por lo tanto, ζ es filtro de continuidad

Q.E.D

Como corolario de teorema 4.3.3 tenemos clasificar los filtros de continuidad de los anillos principales conmutativos, en particular, los $\mathbb{Z}_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Pero antes de esto, veamos la clasificación de los filtros de continuidad en un anillo principal especial (no necesariamente conmutativos).

Lema 4.3.4. *Sea A un anillo local uniserial con ideal máximo $M = \langle a \rangle$ y $\mathcal{I}(A) = \left\{M^j\right\}_{j=0}^{r}$. Los únicos filtros de continuidad de A son:*

$$\zeta_k^{(M)} := \left\{M^j\right\}_{j=0}^{k} \ \textit{con } k \in \{0, \ldots, r\}, \textit{ donde } M^0 = A, M^r = 0.$$

Más aún, los filtros de continuidad son los filtros lineales.

Dem.
Veamos primero que para $k \in \{0, \ldots, r\}$, $\zeta_k^{(M)} := \left\{M^j\right\}_{j=0}^{k}$ es filtro de continuidad.

(1) $A \in \zeta_k^{(M)}$, pues $A = M^0 = \left\langle a^0 \right\rangle \in \zeta_k^{(M)}$.

(2) Sean $M^i, M^j \in \zeta_k^{(M)}$ con $i, j \in \{0, \ldots, k\}$ y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A\left(M^i, A\right)$. Veamos que

$$\varphi^{-1}\left(M^j\right) \in \zeta_k^{(M)}$$

.

Por la proposición 1.1.32 se sigue que todos los ideales izquierdos de A son bilaterales, entonces son totalmente invariantes. Así, $\varphi\left(M^k\right) \subseteq M^k$ y como $M^k \subseteq M^j$, se sigue que

$$\varphi\left(M^k\right) \subseteq M^j \Longrightarrow M^k \subseteq \varphi^{-1}\left(\varphi(M^k)\right) \subseteq \varphi^{-1}\left(M^j\right)$$

Se concluye que $\varphi^{-1}\left(M^j\right) \in \zeta_k^{(M)}$.

De (1), (2) y la definición de filtro de continuidad se concluye que $\zeta_k^{(M)}$ es filtro de continuidad. Más aún es filtro lineal, pues solo falta verificar que si $I, J \in \zeta_k^{(M)}$ con $I \subseteq J$, entonces $J \in \zeta_k^{(M)}$, pero eso se cumple trivialmente, y por esta condición, se observa claramente que todo filtro lineal en A. Ahora, veamos que si ζ un filtro de continuidad de A, entonces ζ es de la forma anterior. Para ello, sea $k_0 = \max\left\{j \in \{0, \ldots, r\} : \left\langle a^j \right\rangle \in \zeta\right\}$. Veamos que $\zeta = \zeta_{k_0}^{(M)}$, la primera contención es obvia, por lo que solo falta verificar la contención $\zeta_{k_0}^{(M)} \subseteq \zeta$. Sea $l \in \{0, \ldots, k_0\}$. Tomamos $\omega = k_0 - l$. Como ζ es filtro de continuidad, entonces $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) \in \zeta$, esto último es por el teorema 4.1.2 inciso (ii). Afirmamos que $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) = M^l$. Mostremos la veracidad de esto último; tenemos que $a^l \in \left(M^{k_0} : a^\omega\right)$ pues $a^l a^\omega = a^{k_0}$, por lo que, $M^l \subseteq \left(M^{k_0} : a^\omega\right)$. Ahora, $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) = M^i$ para algún $i \leq l$. Supongamos que $0 \leq i < l$, entonces en particular $a^i a^\omega = a^{i+k_0-l} \in M^{k_0}$, se sigue que $M^{i+k_0-l} \subseteq M^{k_0}$ lo cual no es posible, pues $i + k_0 - l < k_0$. Por lo tanto $i = l$, es decir , $\left(M^{k_0} : a^\omega\right) = M^l$. En consecuencias, $\zeta_{k_0}^{(M)} \subseteq \zeta$. Por lo tanto, $\zeta_{k_0}^{(M)} = \zeta$.

Q.E.D

■ **Ejemplo 4.3.5.** *Para $p, r \in \mathbb{N}$ con p número primo se tiene que los únicos filtros de continuidad de $\mathbb{Z}_{p^r}$ son:*

$$\zeta_k^{(p)} := \left\{ \left\langle \overline{p^j} \right\rangle \right\}_{j=0}^{k} \quad con\ k \in \{0, 1, \ldots, r\}.$$

Sabemos que $\mathbb{Z}_{p^r}$ es local uniserial, y sus ideales son:

$$\left\{ \left\langle \overline{p^i} \right\rangle \right\}_{i=0}^{r}.$$

Verifiquemos esto último; recordemos que $\mathbb{Z}_{p^r}$, lo podemos ver como $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Ahora, por el teorema de correspondencia, sabemos que cada ideal de $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ están en correspondencia biunívoca con los ideales de $\mathbb{Z}$ que contienen a $p^r\mathbb{Z}$ y los ideales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $m\mathbb{Z}$ con $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$p^r\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \iff m|p^r \iff m \in \left\{p^i : i = 0, \ldots, r\right\}$$

Por lo que el conjunto de ideales en $\mathbb{Z}$ que contienen a $p^r\mathbb{Z}$ es $\left\{p^i\mathbb{Z} : i = 0, \ldots, r\right\}$, en consecuencia, el conjunto de todos los ideales de $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ es:

$$\left\{p^i\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} : i = 0, \ldots, r\right\}.$$

Que en $\mathbb{Z}_{p^r}$ equivale a:

$$\left\{ \left\langle \overline{p^i} \right\rangle : i = 0, \ldots, r \right\}.$$

Por lo tanto, del lema 4.3.4 se concluye lo deseado.

Teorema 4.3.6. *Sea A un **AIP** conmutativo con $A = \prod_{i=1}^{n} D_i \times \prod_{j=1}^{m} E_j$ donde cada D_i es un **DIP** y cada E_j es un **AIP especial**. Sea ζ un filtro de continuidad de A, entonces*

$$\zeta = \prod_{i=1}^{n} \zeta_i \times \prod_{j=1}^{m} \xi_j$$

Donde ζ_i es filtro de continuidad de D_i de acuerdo al corolario 4.2.8 y ξ_j es filtro de continuidad de E_j de acuerdo con el lema 4.3.4

Dem.
Todo en en virtud de los teoremas 4.3.3, 1.1.33, el corolario 4.2.8 y el lema 4.3.4.

Q.E.D

■ **Ejemplo 4.3.7.** *Para $n \in \mathbb{N}$ con $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{r_i}$ donde p_i es número primo y $r_i \in \mathbb{N}$. Si ζ es un filtro de continuidad de $\mathbb{Z}_n$, entonces*

$$\zeta = \prod_{i=1}^{m} \zeta_{k_i}^{(p_i)}$$

Para ciertos $k_i \in \{0, \ldots, r_i\}$ con $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se sigue de los teoremas 1.1.34 y 4.3.6.

Si bien los filtros de continuidad coinciden con los filtros lineales y de Gabriel en los anillos semisimples, y en un **DIP** un filtro de continuidad y un filtro de Gabriel no distan mucho, resulta que en un producto ya se ve mas la diferencia entre estos, el ejemplo que tenemos a la mano es $\mathbb{Z}_n$. Para mostrar lo afirmado, recordemos que los filtros de Gabriel en $\mathbb{Z}_n$ son de la forma:

$$\mathcal{G}_{\mathscr{P}} = \left\{ \langle \bar{i} \rangle : V(\langle \bar{i} \rangle) \cap \mathscr{P} = \emptyset \right\}, \text{ donde } \mathscr{P} \subseteq \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)$$

En virtud de teorema fundamental de la aritmética existen $p_1, \ldots, p_r$ números primos únicos y existen $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{n_j}$. Si n es primo, entonces $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n) = \{0\}$, en consecuencia, los únicos fitros de Gabriel son $\{0, \mathbb{Z}_n\}$, $\{\mathbb{Z}_n\}$ que son los mismo para filtros de continuidad. Ahora, si n no es primo, entonces $r \geq 2$ y el ideal cero no es primo, de modo que $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n) = \{\langle \overline{p_1} \rangle, \ldots, \langle \overline{p_r} \rangle\}$, esto quiere decir que hay $2^{|\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)|} = 2^r$ filtros de gabriel, pues por cada subconjunto de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ le corresponde un filtro de Gabriel y hay $\prod_{j=1}^{r}(n_1 + 1)$ filtros de continuidad, observese que $\prod_{j=1}^{r}(n_1 + 1) \geq 2^r$ y la igualdad solo se cumple si $n_1 = \cdots = n_r = 1$. por tanto, en general un filtro de continuidad no equivale a un filtro de Gabriel, pero en este caso un filtro lineal es lo mismo que un filtro de continuidad, es decir, coinciden en $\mathbb{Z}_n$, pero en general no tiene por que ser iguales, como lo muestra el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 4.3.8.** *Es facil verificar que $\zeta = \{n\mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$ es un filtro de continuidad en $\mathbb{Z}$. Por lo tanto $\zeta \times \zeta$ es un filtro de continuidad en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pero no es filtro lineal, ya que $\{0\} \times \{0\} \in \zeta \times \zeta$, pero si m es impar, entonces $m\mathbb{Z} \notin \zeta$, por lo que $\{0\} \times m\mathbb{Z} \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pero $\{0\} \times \{0\} \subseteq \{0\} \times m\mathbb{Z}$.*

4.4. Módulos Cocientes Sobre Filtros de Continuidad

En esta sección, A denotará un anillo con unidad y ζ denotará un filtro de continuidad sobre A. Consideremos la siguiente relación en ζ

$$\leq\ : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \qquad \text{dada por} \qquad I \leq J \iff J \subseteq I.$$

Claramente $\leq$ es un orden parcial en ζ, pues es el orden opuesto de la contención directa.

Proposición 4.4.1. *$\mathcal{G}$ es un copo dirigido.*

Dem.
Sea $I, J \in \zeta$. Dado que ζ es filtro de continuidad, se sigue que $I \cap J \in \zeta$ y como $I \cap J \subset I$, $I \cap J \subset J$, entonces

$$I \leq I \cap J \text{ y } J \leq I \cap J$$

Por lo tanto, ζ es un COPO dirigido.

Q.E.D

Recordemos que cada ideal izquierdo I se puede considerar en A-**Mod**, de esta manera tenemos derecho de considerar el conjunto $\operatorname{Hom}_A(I, M) \in \mathbb{Z}$-**Mod**.

Ahora, para cada $I, J \in \zeta$ con $I \leq J$ consideremos la siguiente asignación:

$$\operatorname{Hom}_A(I, M) \ni g \xmapsto{\alpha_{IJ}} g \restriction_J \in \operatorname{Hom}_A(J, M)$$

Proposición 4.4.2. $\left(\operatorname{Hom}_A(I, M), \alpha_{IJ}\right)$ *es un sistema directo.*

Dem.
(1) Sea $I \in \mathcal{G}$. Para cada $g \in \operatorname{Hom}_A(I, M)$, tenemos $\alpha_{II}(g) = g \restriction_I = g$. Por lo tanto, $\alpha_{II} = \operatorname{id}_{\operatorname{Hom}_A(I,M)}$.

(2) Sean $I \leq J \leq K$. Para cada $g \in \operatorname{Hom}_A(I, M)$ se tiene que

$$\alpha_{JK} \circ \alpha_{IJ}(g) = \alpha_{JK}(g \restriction_J) = (g \restriction_J) \restriction_K = g \restriction_{J \cap K} = g \restriction_K = \alpha_{IK}(g).$$

Se sigue que $\alpha_{JK} \circ \alpha_{IJ} = \alpha_{IK}$. Así, $\big(\mathrm{Hom}_A(I, M), \alpha_{IJ}\big)$ es un sistema directo en $\mathbb{Z}$-**Mod**.

Q.E.D

Corolario 4.4.3. $\varinjlim\limits_{I \in \zeta} \mathrm{Hom}_A(I, M)$ *existe y es único.*

Denotaremos al limite directo del corolario anterior como $M_{(\zeta)}$, los elementos del límite directo $M_{(\zeta)}$ son de la forma $[(f, I)]$, donde $I \in \zeta$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$.

Observaciones 4.4.4. *Sean* $[(f, I)], [(g, J)] \in M_{(\zeta)}$.

(a) *Tenemos que:*

$$\begin{aligned} [(f,I)] = [(g,J)] &\iff (f,I) \sim (g,J) \iff \alpha_{IK}(f) = \alpha_{JK}(g) \qquad \textit{para algun } K \in \zeta \textit{ con } I, J \leq K \\ &\iff \quad f \textit{ y } g \textit{ coinciden en algun } K \in \zeta \textit{ con } K \subseteq I \cap J. \end{aligned}$$

(b) *Si* $0 \in \zeta$, *entonces* $M_{(\zeta)} = 0$, *pues para todo* $I \in \zeta$ *y* $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$ *se cumple que* $f = 0$ *en el ideal izquierdo* 0, *es decir,* $[(f, I)] = [(0, A)]$ *(por el inciso previo de esta observación* (a)*).*

Hasta aquí, sabemos que $M_{(\zeta)} \in \mathbb{Z}$-**Mod**. Entonces, el siguiente paso es darle a $A_{(\zeta)}$ estructura de anillo y a $M_{(\zeta)}$ estructura de $A_{(\zeta)}$-módulo izquierdo. Y en virtud del inciso (b) de 4.4.4 a partir de aquí solo consideraremos filtros de continuidad que no tengan al ideal cero como elemento. Ya sabemos que tanto $A_{(\zeta)}$, como $M_{(\zeta)}$ son $\mathbb{Z}$-módulos cuya suma esta dada por:

$$[(f, I)] + [(g, J)] = [(\alpha_{IK}(f) + \alpha_{JK}(g), K)], \qquad \text{para } I, J \leq K.$$

Con el fin de obtener lo deseado, definamos la siguiente operación:

$$A_{(\zeta)} \times M_{(\zeta)} \ni \big([(\lambda, I)], [(\xi, J)]\big) \xmapsto{\ \bullet\ } \big[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))\big] \in M_{(\zeta)}$$

Representado en un diagrama es:

$$\begin{tikzcd} \lambda^{-1}(J) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[rr, bend right, "\xi\circ\lambda"'] & J \arrow[r, "\xi"] & M \end{tikzcd}$$

Proposición 4.4.5. $\bullet$ *es biaditiva.*

Dem.
(1) Veamos que $\bullet$ esta bien definida. Para ello, sean $[(\lambda, I)] = [(\lambda', I')] \in A_{(\zeta)}$ y $[(\xi, J)] = [(\xi', J')] \in M_{(\zeta)}$.

Veamos que $\big[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))\big] = \big[\xi' \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J'))\big]$. Como $[(\lambda, I)] = [(\lambda', I')]$, entonces existe $K \in \zeta$ con $K \subseteq I \cap I'$ tal que λ es igual a λ' en K. Similarmente, existe $L \in \zeta$ con $L \subseteq J \cap J'$ tal que ξ es igual a ξ' en L.

Las siguientes afirmaciones se cumplen trivialmente:

(i) $\lambda^{-1}(L) \subseteq \lambda^{-1}(J \cap J') \subseteq \lambda^{-1}(J) \subseteq I$

(ii) $\lambda'^{-1}(L) \subseteq \lambda'^{-1}(J \cap J') \subseteq \lambda'^{-1}(J') \subseteq I'$

Se sigue que $\zeta \ni \lambda^{-1}(L) \cap \lambda'^{-1}(L) \subseteq I \cap I'$, por lo que $K' = K \cap \lambda^{-1}(L) \cap \lambda'^{-1}(L) \in \zeta$. En consecuencia, para cada $s \in K'$ se obtiene que:

$$\xi \circ \lambda(s) = \xi\left(\lambda'(s)\right) = \xi'\left(\lambda'(s)\right) = \xi' \circ \lambda'(s)$$

Por lo tanto, $[(\xi_x \circ \lambda_a, \lambda_a^{-1}(J))] = [(\xi'_x \circ \lambda'_a, \lambda_a'^{-1}(J'))]$, es decir, $\bullet$ esta bien definida.

(2) Ahora, veamos que $\bullet$ es biaditiva. Sean $[(\lambda, I)], [(\lambda', I')] \in A_{(\zeta)}$ y $[(\xi, J)], [(\xi', J')] \in M_{(\zeta)}$. Tomemos $K = \lambda^{-1}(J) \cap \lambda'^{-1}(J) \in \zeta$, para cada $a \in K$ tenemos que

$$\lambda(a), \lambda'(a) \in J \Longrightarrow \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right)(a) \in J \Longrightarrow a \in \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right)^{-1}(J)$$

Es decir,

$$K \subseteq \left(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K\right)^{-1}(J). \tag{i}$$

(a) Por (i), tenemos que

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet (\xi, J)] + [(\lambda', I')] \bullet (\xi, J)] &= \left[(\xi \circ \lambda, \lambda^{-1}(J))\right] + \left[(\xi \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J))\right] \\
&= [\xi \circ \lambda \restriction_K + \xi \circ \lambda' \restriction_K, K] \\
&= [(\xi \circ (\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K), K)] \\
&= \left[\left(\xi \circ (\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K), (\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K)^{-1}(J)\right)\right] \\
&= [(\lambda \restriction_K + \lambda' \restriction_K, K)] \bullet [(\xi, J)] \\
&= ([(\lambda, I)] + [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)]
\end{aligned}$$

Por tanto, $\bullet$ se distribuye por la derecha.

(b) Sea $K = J \cap J' \in \zeta$.

$$\begin{aligned}
[(\lambda, I)] \bullet ([(\xi, J)] + [(\xi', J')]) &= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi \restriction_K + \xi' \restriction_K, K)] \\
&= \left[\left(\xi \restriction_K \circ \lambda + \xi' \restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] \\
&= \left[\left(\xi \restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] + \left[\left(\xi' \restriction_K \circ \lambda, \lambda^{-1}(K)\right)\right] \\
&= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi \restriction_K, K)] + [(\lambda, I)] \bullet [(\xi' \restriction_K, K)] \\
&= [(\lambda, I)] \bullet [(\xi, J)] + [(\lambda, I)] \bullet [(\xi', J')]
\end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye que $\bullet$ es biaditiva.

Q.E.D

Corolario 4.4.6. $(A_{(\zeta)}, +, \bullet)$ *es un anillo y* $(M_{(\zeta)}, +, \bullet)$ *es un* $A_{(\zeta)}$*-módulo.*

Dem.
Nos resta demostrar lo siguiente:

(i) Si $[(\lambda, I)], [(\lambda', I')] \in A_{(\zeta)}$ y $[(\xi, J)] \in M_{(\zeta)}$, entonces

$$[(\lambda, I)] \bullet ([(\lambda', I')] \bullet [(\xi, J)]) = ([(\lambda, I)] \bullet [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)]$$

Mostremos la veracidad de lo afirmado:

$$\begin{aligned}([(\lambda, I)] \bullet [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)] &= \left[\left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}, \lambda^{-1}(I')\right)\right] \bullet [(\xi, J)] = \\ &= \left[\left(\xi \circ \left(\lambda' \circ \lambda_{\lambda^{-1}(I')}\right) \restriction_{\left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J)}, \left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J)\right)\right]\end{aligned}$$

Como $\left(\lambda' \circ \lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}\right)^{-1}(J) = \lambda \restriction^{-1}_{\lambda^{-1}(I')} \left(\lambda'^{-1}(J)\right)$, entonces

$$\begin{aligned}([(\lambda, I)] \bullet [(\lambda', I')]) \bullet [(\xi, J)] &= \left[\left(\lambda \restriction_{\lambda^{-1}(I')}, \lambda^{-1}(I')\right)\right] \bullet \left[\left(\xi \circ \lambda', \lambda'^{-1}(J)\right)\right] \\ &= [(\lambda, I)] \bullet ([(\lambda', I')] \bullet [(\xi, J)])\end{aligned}$$

(*ii*) $[(\mathrm{id}_A, A)]$ es la identidad en $A_{(\zeta)}$.

Mostremos la veracidad de lo dicho. Sea $[(\lambda, I)] \in A_{(\zeta)}$.

$$[(\mathrm{id}_A, A)] \bullet [(\lambda, I)] = [(\lambda \circ \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A^{-1}(I))] = [(\lambda, I)] = \left[\left(\mathrm{id}_A \circ \lambda, \lambda^{-1}(A)\right)\right] = [(\lambda, I)] \bullet [(\mathrm{id}_A, A)] .$$

Esto prueba lo deseado

(*ii*) Sea $[(\xi, J)] \in M_{(\zeta)}$.

$$[(\mathrm{id}_A, A)] \bullet [(\xi, J)] = \left[\left(\xi \circ \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A^{-1}(J)\right)\right] = [(\xi, J)]$$

De (*i*), (*ii*) y (*iii*) se concluye lo deseado.

Q.E.D

Recordemos que para cada $m \in M$, $A \ni a \xmapsto{f_m} am \in M$ es A-homomorfismo. Más aún, el siguiente morfismo es un isomorfismo (de grupos abelianos)

$$M \ni m \xmapsto{\Phi} f_m \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$$

Ahora, consideremos la siguiente operación:

$$M \ni m \xmapsto{\varphi_M} [(f_m, A)] \in M_{(\zeta)}$$

Proposición 4.4.7. *φ_M es un homomorfismo de grupos, y si $M = A$, entonces φ_A es un homomorfismo de anillos.*

Dem.
Sean $m_1, m_2 \in M$.

$$\begin{aligned}\varphi_M(m_1 + m_2) &= [(f_{m_1+m_2}, A)] = [(f_{m_1} + f_{m_2}, A)] = [(\alpha_{AA}(f_{m_1}) + \alpha_{AA}(f_{m_2}), A)] \\ &= [(f_{m_1}, A)] + [(f_{m_2}, A)] = \varphi_M(m_1) + \varphi_M(m_2)\end{aligned}$$

Por tanto, φ_M es homomorfismo de grupos (abelianos).

Ahora, supongamos que $M = A$ y sean $a, b \in A$. Tenemos que:

$$\varphi_{_A}(ab) = [(f_{ab}, A)] = [(f_b \circ f_a, A)] = [(f_b \circ f_a, f_a^{-1}(A))] = [(f_a, A)] \bullet [(f_b, A)] = \varphi_{_A}(a) \bullet \varphi_{_A}(b)$$

Q.E.D

De la proposición previa se sigue que a $M_{_{(\zeta)}}$ le podemos dar estructura de A-módulo, cuyo producto esta dado por

$$A \times M_{_{(\zeta)}} \ni (a, [(f, I)]) \overset{\cdot}{\longmapsto} \varphi_{_A}(a) \bullet [(f, I)] \in M_{_{(\zeta)}}$$

Corolario 4.4.8. *φ_M es A-homomorfismo*

Dem.
Sean $a \in A$, $m, n \in M$.

$$\begin{aligned}\varphi_{_M}(m + an) &= [(f_{m+an}, A)] = [(f_m + f_{an}, A)] = [(f_m, A)] + [(f_{an}, A)] \\ &= \varphi_{_M}(m) + [(f_n \circ f_a, A)] = \varphi_{_M}(m) + [(f_n \circ f_a, f_a^{-1}(A))] \\ &= \varphi_{_M}(m) + [(f_a, A)] \bullet [(f_n, A)] = \varphi_{_M}(m) + a \cdot [(f_n, A)] \\ &= \varphi_{_M}(m) + a \cdot \varphi_{_M}(n)\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ_M es A-homomorfismo.

Q.E.D

Ahora, consideremos la siguiente asignación: $F_\zeta : A$-**Mod** $\longrightarrow A_{(\zeta)}$-**Mod** dada por

- Para cada $M \in \text{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $F_\zeta(M) = M_{_{(\zeta)}}$.
- Para cada $f \in \text{Hom}_A(M, N)$, $F_\zeta(f) = f_{_{(\zeta)}}$, donde

$$\begin{aligned}f_{_{(\zeta)}} : M_{_{(\zeta)}} &\longrightarrow N_{_{(\zeta)}} \qquad \text{esta dada por} \\ f_{_{(\zeta)}}([(\varphi, I)]) &= [(f \circ \varphi, I)] \qquad \text{para cada } [(\varphi, I)] \in M_{_{(\zeta)}}\end{aligned}$$

Ahora, veamos que si $f \in \text{Hom}_A(M, N)$, entonces $f_{_{(\zeta)}}$ esta bien definido. Para ello, supongamos que $[(\varphi, I)] = [(\phi, J)]$, entonces existen $K \in \zeta$ con $I, J \leq K$ tal que $\varphi \restriction_K = \phi \restriction_K$.

Así, $f \circ \left(\varphi \restriction_K\right) = f \circ \left(\phi \restriction_K\right)$, se sigue que $\left(f \circ \varphi\right) \restriction_K = \left(f \circ \phi\right) \restriction_K$. Por lo tanto, $f_{_{(\zeta)}}$ esta bien definida.

Proposición 4.4.9. *F_ζ es un funtor covariante.*

Dem.
(1) Por definición, para cada $M \in \text{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $F_\zeta(M) \in A_{_{(\zeta)}}$-**Mod**.

(2) Sean $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ y $g \in \text{Hom}_A(N, K)$. Para cada $[(\varphi, I)] \in M_{_{(\zeta)}}$, tenemos:

- $F_\zeta(g \circ f)([(\varphi, I)]) = (g \circ f)_{_{(\zeta)}}([\varphi, I]) = [((g \circ f) \circ \varphi, I)] = [(g \circ (f \circ \varphi), I)]$
  $= g_{_{(\zeta)}}([(f \circ \varphi, I)]) = g_{_{(\zeta)}} \circ f_{_{(\zeta)}}([(\varphi, I)]) = F_\zeta(g) \circ F_\zeta(f)([(\varphi, I)])$.

Por lo tanto, $\quad F_\zeta(g \circ f) = F_\zeta(g) \circ F_\zeta(f)$.

- $F_\zeta(\mathrm{id}_M)([(\varphi, I)]) = [(\mathrm{id}_M \circ \varphi, I)] = [(\varphi, I)] = \mathrm{id}_{M_{(\zeta)}}([(\varphi, I)])$.

  Por lo tanto, $\quad F_\zeta(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{M_{(\zeta)}}$.

De (1), (2) se sigue que F_ζ es un funtor covariante.

Q.E.D

Proposición 4.4.10. *F_ζ es exacto izquierdo.*

Dem.
Sabemos que $\mathrm{Hom}_A(I, \_)$ es exacto izquierdo y $\varinjlim(\_)$ es exacto, se sigue que F_ζ es exacto izquierdo.

Q.E.D

Sea $F'_\zeta : A_{(\zeta)}$-**Mod** $\longrightarrow$ A-**Mod** el funtor olvidadizo que manda cada $A_{(\zeta)}$-módulo a si mismo pero considerado con la estructura de A-módulo. Tomemos $L_\zeta = F'_\zeta \circ F_\zeta$.

Proposición 4.4.11. *La clase $\{\varphi_M\}_{M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})}$ conforma una transformación natural $\varphi : \mathrm{id}_{A\text{-}\boldsymbol{Mod}} \longrightarrow L_\zeta$.*

Dem.
Sea $g : M \longrightarrow N$ en A-**Mod**. Entonces, para cada $m \in M$, tenemos:

- $\varphi_N \circ g(m) = \varphi_N(g(m)) = [(f_{g(m)}, A)]$
- $g_{(\zeta)} \circ \varphi_M(m) = g_{(\zeta)}([(f_m, A)]) = [(g \circ f_m, A)]$.

Ahora, para cada $a \in A$, $g \circ f_m(a) = g(am) = ag(m) = f_{g(m)}(a)$, se sigue que $g \circ f_m = f_{g(m)}$.

Por lo tanto, $g_{(\zeta)} \circ \varphi_M(m) = \varphi_N \circ g(m)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & N \\ {\scriptstyle \varphi_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_N} \\ M_{(\zeta)} & \xrightarrow[g_{(\zeta)}]{} & N_{(\zeta)} \end{array}$$

Por lo tanto, φ es una transformación natural.

Q.E.D

Si consideramos dos filtros de continuidad de A ζ_1, ζ_2 tal que $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$ y para todo $M \in A$-**Mod**, consideremos la siguiente operación:

$$M_{(\zeta_1)} \ni [(f, I)]_1 \xmapsto{\eta_M^{1,2}} [(f, I)]_2 \in M_{(\zeta_2)}.$$

Proposición 4.4.12. *Para todo $M \in A$-**Mod**, $\eta_M^{1,2}$ es un A-homomorfismo.*

Dem.
$\eta_M^{1,2}$ es una función, porque si $[(f, I)]_1 = [(g, J)]_1 \in M_{(\zeta_1)}$, entonces existe $K \in \zeta_1 \subseteq \zeta_2$ tal que $f = g$ en

K. por lo tanto, $[(f,I)]_2 = [(g,J)]_2$ en $M_{(\zeta_2)}$. Ahora, veamos que $\eta_M^{1,2}$ es un A-homomorfismo; para ello, sean $[(f,I)]_1, [(g,J)]_1 \in M_{(\zeta_1)}$ y $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \eta_M^{1,2}\left([(f,I)]_1 + a[(g,J)]_1\right) &= \eta_M^{1,2}\left([(f,I)]_1 + [(f_a,A)]_1\,[(g,J)]_1\right) = \eta_M^{1,2}\left([(f,I)]_1 + \left[\left(g\circ f_a, f_a^{-1}(J)\right)\right]_1\right) \\ &= \eta_M^{1,2}\left([(f\restriction_K, g\circ f_a\restriction_K, K)]_1\right), \text{ p. a. } K\in\zeta_1\subseteq\zeta_2 \text{ tal que} K\subseteq I\cap f_a^{-1}(J). \\ &= [(f\restriction_K, g\circ f_a\restriction_K, K)]_2 = [(f,I)]_2 + a[(g,J)]_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eta_M^{1,2}$ es un A-homomorfismo.

Q.E.D

De hecho, la proposición 4.4.12 nos dice de manera casi inmediata que tenemos una transformación natural entre los funtores correspondientes L_1 y L_2, como se describe abajo.

Proposición 4.4.13. *Sean ζ_1, ζ_2 filtros de continuidad tales que $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$ y sean $F_1 : A$-**Mod** $\longrightarrow A_{(\zeta_1)}$-**Mod** y $F_2 : A$-**Mod** $\longrightarrow A_{(\zeta_2)}$-**Mod** los funtores dados por $F_1 : M \mapsto M_{(\zeta_1)}$ y $F_2 : M \mapsto m_{(\zeta_2)}$. Sean F_1' y F_2' los funtores olvidadizos, respectivamente, y $L_1 = F_1'\circ F_1$, $L_2 = F_2'\circ F_2$. Entonces, $\left\{\eta_M^{1,2} : M \in A\text{-}\boldsymbol{Mod}\right\}$ conforma una transformación natural $\eta^{1,2} : L_1 \longrightarrow L_2$, tal que si φ_1 y φ_2 son las transformaciones naturales correspondientes presentadas en la proposición 4.4.11, entonces $\eta^{1,2}\circ\varphi_1 = \varphi_2$.*

Dem.
Sea $g : M \longrightarrow N$ un A-homomorfismo. Ya que para todo $[(h,K)]_1 \in M_{(\zeta_1)}$ tenemos que

$$g_{(\zeta_2)} \circ \zeta_M^{1,2}([(h,K)]_1) = g_{(\zeta_2)}([(h,K)]_2) = [(g\circ h, K)]_2 = \eta_N^{1,2}([(f\circ h,K)]_1) = \eta_N^{1,2}\circ g_{(\zeta_1)}([(h,k)]_1).$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M_{(\zeta_1)} \arrow[r, "\eta_M^{1,2}"] \arrow[d, "g_{(\zeta_1)}"'] & M_{(\zeta_2)} \arrow[d, "g_{(\zeta_2)}"] \\ N_{(\zeta_1)} \arrow[r, "\eta_N^{1,2}"'] & = N_{(\zeta_2)} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\eta^{1,2}$ es una transformación natural. Por definición. es claro que $\eta^{1,2}\circ\varphi_1 = \varphi_2$

Q.E.D

Ahora, para cada filtro de continuidad ζ existe un preradical asociado r_ζ, el cual es definido como;

$$r_\zeta(M) = \mathrm{Nu}(\varphi_M^\zeta) = \{m \in M : \text{ existe } I\in\zeta \text{ tal que } Im = 0\}, \text{ con } M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod}).$$

En otras palabras, $r_\zeta = \mathrm{Nu}(\varphi^\zeta)$, donde $\varphi^\zeta : \mathrm{id}_{A\text{-}\mathbf{Mod}} \longrightarrow L_\zeta$ es la transformación natural asociado a ζ como en la proposición 4.4.11, veamos que efectivamente $r_\zeta \in A\text{-}\mathrm{pr}$.

Observación 4.4.14. $M \in \mathbb{T}_{r_\zeta} \iff$ *Para todo $m \in M$, existe $K(m)\in\zeta$ tal que $K(m) \subseteq \mathrm{ann}(m)$.*

Proposición 4.4.15. *$r_\zeta \in A$-pr y para cada $M \in A$-**Mod** y todo $N \leq M$ se tiene que $r_\zeta(N) = N\cap r_\zeta(M)$.*

Dem.
(1) Veamos primero que $r_\zeta \in A$-pr, para ello, sean $M, N \in A$-**Mod** y $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

- Claramente $r_\zeta(M) \leq M$.
- Sea $m \in r_\zeta(M)$, existe $I_m \in \zeta$ tal que $I_m m = 0$, así, para todo $a \in I_m, af(m) = f(am) = f(0) = 0$, esto implica que $I_m f(m) = 0$, es decir, $f(m) \in r_\zeta(N)$. Por lo tanto, $f(r_\zeta(M)) \leq r_\zeta(N)$

(2) Sea $M, N \in A$-**Mod** con $N \leq M$, veamos que $r_\zeta(N) = N \cap r_\zeta(M)$.

($\subseteq$) Sea $n \in r_\zeta(N)$, existe $I \in \zeta$ tal que $In = 0$, esto implica que $n \in r_\zeta(M)$, pues $N \leq M$.

Por lo tanto, $r_\zeta(N) \subseteq N \cap r_\zeta(M)$.

($\supseteq$) Sea $n \in N \cap r_\zeta(M)$, entonces $n \in N$ y $n \in r_\zeta(M)$, implica que existe $J \in \zeta$ tal que $Jn = 0$, $n \in N$, Se sigue que $n \in r_\zeta(N)$.

Por lo tanto, $r_\zeta(N) \supseteq N \cap r_\zeta(M)$.

Se concluye que $r_\zeta(N) = N \cap r_\zeta(M)$.

Q.E.D

Corolario 4.4.16. *r_ζ es exacto izquierdo, idempotente y $\mathbb{T}_{r_\zeta}$ es cerrado bajo monomorfismos.*

Los siguientes dos resultados son presentados en [10, Chapter IX, Lemma 1.3, Lemma 1.4]

Proposición 4.4.17. *Sea $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, si $x = [(\xi, I)] \in M_{(\zeta)}$, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\iota_I"] \arrow[d, "\xi"'] & A \arrow[d, "\beta_x"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"'] & M_{(\zeta)} \end{tikzcd}$$

donde $\beta_x(a) = ax$ para cada $a \in A$.

Dem.
Sea $a \in I$, tenemos que;

(1) $\varphi \circ \xi\,(a) = \big[(f_{\xi(a)}, A)\big]$,

(2) $\beta_x \circ \iota_I(a) = \beta_x(a) = \varphi_A(a)x = [(f_a, A)]\,[(\xi, I)] = \big[(\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I))\big]$.

Ahora, $I \in \zeta$ y $f_a^{-1}(I) \in \zeta$, entonces $I \cap f_a^{-1}(I) \in \zeta$. Así que para todo $b \in I \cap f_a^{-1}(I)$,

$$(\xi \circ f_a)\,(b) = \xi(ba) = b\xi(a) = f_{\xi(a)}(b).$$

Entonces, $\big[(f_{\xi(a),A})\big] = \big[\xi \circ f_a, f_a^{-1}(I)\big]$. Por lo tanto, $\varphi_M \circ \xi = \beta_x \circ \iota_I$.

Q.E.D

Recordemos que cada preradical r, denotamos como $\mathbb{T}_r$ a la clase de todos los A-módulos tal que $r(M) = M$, y esta es una clase que es cerrada bajo suma directas y epimorfismos. Ya que r_ζ es exacto izquierdo, por tanto idempotente, entonces $\mathbb{T}_{r_\zeta}$ es también cerrado bajo monomorfismos.

Proposición 4.4.18. *Sea $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ y $\varphi = \varphi^\zeta$ la transformación natural asociado a ζ. Entonces, $M_{(\zeta)}/\,\mathrm{Im}\,(\varphi_M) \in \mathbb{T}_r$.*

Dem.
Sea $\overline{m} = [(\xi, I)] + \operatorname{Im}(\varphi_M) \in M_{(\zeta)}$. Tenemos que

$$\operatorname{ann}(\overline{m}) = \{a \in R : a\,[(\xi, I)] \in \operatorname{Im}(\varphi_M)\}.$$

Por la proposición 4.4.17 $a\,[(\xi, I)] = \left[\left(f_{\xi(a)}, A\right)\right]$, entonces para todo $a \in I$, $a\,[(\xi, I)] \in \operatorname{Im}(\varphi_M)$. Así, $I \subseteq \operatorname{ann}(\overline{m})$. Por la observación 4.4.14, $M_{(\zeta)} / \operatorname{Im}(\varphi_M) \in \mathbb{T}_r$.

Q.E.D

Siendo r_ζ un preradical exacto izquierdo, su correspondiente filtro lineal asociado es:

$$\mathcal{L}_{r_\zeta} = \left\{I \in \mathcal{I}(A) : A/I \in \mathbb{T}_{r_\zeta}\right\}$$

Proposición 4.4.19. *$\mathcal{L}_{r_\zeta}$ es el filtro lineal menor que contiene a ζ. En otras palabras, $\mathcal{L}_{r_\zeta} = \mathcal{L}(\zeta)$, en concordancia con la notación de la Proposición 4.1.10*

Dem.
Veamos primero que $\zeta \subseteq \mathcal{L}_{r_\zeta}$, para ellos describamos de manera más explícitamente $\mathcal{L}_{r_\zeta}$. Como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_r &= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid r(M) = M\} = \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \operatorname{Nu}(\varphi_M) = M\}\\
&= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \text{ para todo } m \in M,\ [(f_m, A)] = [(0, A)]\}\\
&= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \text{ para todo } m \in M, \text{ existe } J_m \in \zeta \text{ tal que } J_m m = 0\}\\
&= \{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \mid \text{ para todo } m \in M, \text{ existe } J_m \in \zeta \text{ tal que } J_m \subseteq \operatorname{ann}(m)\}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{r_\zeta} &= \{I \in \mathcal{I}(A) \mid \text{ para todo } a \in A, \text{ existe } J_a \in \zeta \text{ tal que } J_a(a + I) = I\}\\
&= \{I \in \mathcal{I}(A) \mid \text{ para todo } a \in A, \text{ existe } J_a \in \zeta \text{ tal que } J_a \subseteq (I : a)\}
\end{aligned}$$

Ahora, por el teorema 4.1.2 inciso (ii) se tiene que para cada $J \in \zeta$ y $a \in A$, $(J : a) \in \zeta$, esto es, $\zeta \subseteq \mathcal{L}_{r_\zeta}$. Por último, mostremos que $\mathcal{L}_{r_\zeta}$ es el mínimo con esa propiedad; para ello, sea $\mathcal{L}$ el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ, esto es, si $\mathcal{L}'$ es filtro lineal tal que $\zeta \subseteq \mathcal{L}'$, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. En particular, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{r_\zeta}$, para mostrar la otra contención consideremos $I \in \mathcal{L}_{r_\zeta}$, se sigue que para todo $a \in A$, existe $J_a \in \zeta$ tal que $J_a \subseteq (I : a)$, en particular, para $a = 1$ existe $J_1 \in \zeta$ tal que $J_1 \subseteq (I : 1) = I$. Dado que $\zeta \subseteq \mathcal{L}$, entonces $J_1 \in \mathcal{L}$, en consecuencia, $I \in \mathcal{L}$. Por lo tanto, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{r_\zeta}$, es decir, $\mathcal{L}_{r_\zeta}$ es el filtro lineal más pequeño que contiene a ζ.

Q.E.D

Note que un filtro de continuidad ζ es un filtro lineal si y solo si $\zeta = \mathcal{L}_{r_\zeta}$. Este es el caso, por ejemplo, de los filtros de continuidad en anillo principal especial (ver Lema 4.3.4).

Proposición 4.4.20. *Sean $A_1, \ldots, A_r$ anillos con unidad y $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ filtros de continuidad en $A_1, \ldots, A_r$ respectivamente. Si $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ son filtros lineales, entonces $\mathcal{L} = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_r$ también es filtro lineal en $A = A_1 \times \cdot \times A_r$.*

Dem.
Ya sabemos que $\mathcal{L}$ es filtro de continuidad en A, entonces para ver que es filtro lineal nos resta mostrar que si $I = I_1 \times \cdots \times I_r \in \mathcal{L}$ y $J = J_1 \times \cdots \times J_r \in \mathcal{I}(A)$ tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathcal{L}$. Pero que $I \subseteq J$ significa que $I_k \subseteq J_k$, pero como cada ζ_k es filtro lineal y $I_k \in \zeta_k$, entonces $J_k \in \zeta_k$, se sigue inmediatamente que $J \in \mathcal{L}$, es decir, $\mathcal{L}$ es filtro lineal.

Q.E.D

Esto nos dice que el producto directo de filtros de continuidad de **AIP**'s especiales son lineales, y además con elemento mínimo. En particular, los filtros de continuidad de $\mathbb{Z}_n$ son lineales con elemento mínimo.

4.5. Filtros de continuidad con elemento menor

Claramente en $\mathbb{Z}_n$ los filtros de continuidad ζ tienen la particularidad que $\cap\zeta \in \zeta$, e.d., ζ tiene elemento mínimo. En general, podemos describir los módulos de cocientes sobre filtros de continuidad con elemento mínimo.

Proposición 4.5.1. *Para cada anillo A, sea ζ un filtro de continuidad de A tal que $\cap\zeta \in \zeta$. Entonces, $\cap\zeta$ es un ideal de A.*

Dem.
Sabemos que $\cap\zeta \in \mathcal{I}(A)$. Veamos que entonces $\cap\zeta$ es un ideal derecho; para ello, consideremos $a \in A$ y $A \ni x \xmapsto{h_a} xa \in A$ que claramente es un A-homomorfismo, entonces $h_a^{-1}(\cap\zeta) \in \zeta$, de modo que $\cap\zeta \subseteq h_a^{-1}(\cap\zeta)$

$$\Longrightarrow \cap\zeta a = h_a(\cap\zeta) \subseteq h_a\left(h_a^{-1}(\cap\zeta)\right) = \cap\zeta.$$

Por lo tanto, $\cap\zeta$ es ideal bilateral.

Q.E.D

Como consecuencia, $\cap\zeta$ es un (A, A)-bimódulo. Por lo tanto, podemos considerar el producto tensorial $T_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \cap\zeta$, el cual es un (A, A)-bimódulo. Podemos usar este bimódulo para describir como A-módulos a los módulos iterados de cocientes en filtros de continuidad con elemento mínimo.

Para cada filtro de continuidad ζ y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el A-homomorfismo $M_{(n)}$ como sigue:

- $M_{_{(1)}} := M_{_{(\zeta)}}$, si $n = 1$
- $M_{_{(n)}} := \left[M_{_{(n-1)}}\right]_{_{(\zeta)}}$, si $n > 1$.

Proposición 4.5.2. *Para cada anillo A, y cada filtro de continuidad ζ con $\bigcap\zeta \in \zeta$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$ y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$, tenemos que $M_{_{(n)}} \cong \mathrm{Hom}_{_A}(T_n, M) \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$.*

Dem.
Sea $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, $I \in \zeta$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(I, M)$, como $\bigcap\zeta \in \zeta$, entonces $\left[\left(f \restriction_{\bigcap\zeta}, \cap\zeta\right)\right] = [(f, I)]$ en $M_{_{(\zeta)}}$.

Ya que por la Proposición 4.5.1 sabemos que $\cap\zeta$ es (A, A)-bimódulo, entonces $\mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M)$ tiene una estructura de A-módulo izquierdo, así

$$M_{(1)} = M_{(\zeta)} = \{[(f, \cap\zeta)] : f \in \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M)\} \cong \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M) = \mathrm{Hom}_A(T_1, M)$$

. Ahora supongamos que el isomorfismo existe para $n - 1$. Entonces:

$$M_{(n)} = \left[M_{(n-1)}\right]_{(\zeta)} \cong \mathrm{Hom}_A(T_{n-1}, M)_{(\zeta)} \cong \mathrm{Hom}_A(T_1, \mathrm{Hom}_A(T_{n-1}, M)) \cong \mathrm{Hom}_A(T_n, M)$$

.

En virtud del principio de inducción matemática se obtiene lo que se desea.

Q.E.D

En particular podemos observar dos cosas, la primera es que todo filtro de continuidad ζ en $\mathbb{Z}_n$ cumple con la proposición 4.5.2, es decir, en $\mathbb{Z}_n$ podemos describir los módulos iterados de cocientes sobre cualquiera de sus filtro de continuidad mediante su elemento mínimo y la segunda es que tenemos que para cada $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ su módulo de cociente sobre un filtro de continuidad ζ con elemento mínimo es descrito como $M_{(\zeta)} = \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M)$. Por lo tanto, en este caso, hablaremos de módulos de cocientes que conmutan con productos.

Corolario 4.5.3. *Para cada anillo A, sea ζ un filtro de continuidad de A con elemento mínimo $\cap\zeta$. Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una familia de A-módulos izquierdos. Entonces:*

$$\left(\prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right)_{(\zeta)} = \prod_{\lambda\in\Delta} (M_\lambda)_{(\zeta)}.$$

Dem.
Como ζ tiene elemento mínimo, entonces:

$$\left(\prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right)_{(\zeta)} \cong \mathrm{Hom}_A\left(\cap\zeta, \prod_{\lambda\in\Delta} M_\lambda\right) \cong \prod_{\lambda\in\Delta} \mathrm{Hom}_A(\cap\zeta, M_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Delta} (M_\lambda)_{(\zeta)}.$$

Q.E.D

Note que si ζ es un filtro de continuidad con elemento mínimo y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, entonces $\mathrm{Nu}\,(\varphi_M) = \{m \in M : (\cap\zeta)\, m = 0\}$. En particular, podemos describir los anillos cocientes sobre cada filtro de continuidad de un **AIP especial**. Recordemos que estos filtros de continuidad están completamente descritos en el Lema 4.3.4.

Proposición 4.5.4. *Sea A un anillo local uniserial de longitud de composición n, e.d., $J^{n-1} \neq 0$ y $J^n = 0$, donde $J = \langle a\rangle$ es su ideal máximo. Sea $\zeta = \left\{J^j\right\}_{j=0}^{k}$ filtro de continuidad de A, con $0 \leq k \leq n$. Entonces $A_{(\zeta)} \cong A/J^{n-k}$*

Dem.
Afirmamos que el isomorfismo es justo $A \ni a \xmapsto{\varphi_A} [(f_a, A)] \in A_{(\zeta)}$. Mostremos que φ_A es sobre: sea $[(f, J^k)]$. Ya que A es local uniserial, es injectivo como A-módulo, así que existe $g : A \longrightarrow A$ tal que $f = g$ en J^k. Por lo tanto, $\varphi_a(g(1)) = \left[f_{g(1)}, A\right] = [(g, A)] = [(f, J^k)]$, esto muestra que φ es sobreyectiva. Por el primer teorema de isomorfismo se sigue que $A/\,\mathrm{Nu}(\varphi_A) \cong A_{(\zeta)}$. Finalmente veamos que $J^{n-k} = \mathrm{Nu}(\varphi_A)$; sabemos que $\mathrm{Nu}(\varphi_A) \in \mathcal{I}(A)$, es decir, $\mathrm{Nu}(\varphi_A) = J^l = \left\langle a^l\right\rangle$ para algún $l \in \{0, 1 \ldots, n\}$. Entonces, $a^{k+l} = a^k a^l = 0$. Ahora, para cada $xa^{n-k} \in J^{n-k}$, tenemos que $a^k\left(xa^{n-k}\right) = 0$, y recordando que los ideales en A son bilaterales, se sigue que existe $y \in A$ tale que $a^k x = ya^k$, así $a^k\left(xa^{n-k}\right) = ya^k a^{n-k} = ya^n = 0$. Por lo tanto, $J^{n-k} \subseteq \mathrm{Nu}(\varphi_A) = J^l$, es decir, $l \leq n-k$. Ahora, si $l < n-k$, entonces $l+k < n$, es decir, $a^{l+k} \neq 0$, lo cual no es posible, pues $a^{l+k} = 0$. En consecuencia, $J^{n-k} = \mathrm{Nu}(\varphi_A)$.

Q.E.D

De hecho, cuando consideramos filtros de continuidad con un elemento mínimo sobre cualquier anillo auto inyectivo, el módulo de cocientes de cualquier ideal también es un ideal. Primero recordamos un lema útil sobre módulos cuasi-inyectivos. Para más información ver [2], Chapter 5, Sections 16 and 17.

Lema 4.5.5. *Sea A un anillo y $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\boldsymbol{Mod})$ cuasi-inyectivo. Sea $K \leq N \leq M$. Si K es un submódulo totalmente invariante (t.i) de M, entonces es un submódulo totalmente invariante de N.*

Dem.
Sea $M \in \mathrm{Obj}(A\text{-}\mathbf{Mod})$ cuasi-inyectivo y supongamos que $K \leq_{t.i} M$. Sea $f \in \mathrm{Hom}_A(N, N)$. Dado que M es cuasi-inyectivo, entonces existe $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$ que extiende a f. Por lo tanto, $f(K) = \overline{f}(K) \leq K$.

Q.E.D

Proposición 4.5.6. *Sea A un anillo auto inyectivo y ζ un filtro de continuidad en A con elemento mínimo $K = \cap\zeta$. Si L es un ideal de A, entonces $L_{(\zeta)}$ es isomorfo a un ideal de $A_{(\zeta)}$.*

Dem.
Ya que F_ζ es un funtor exacto izquierdo (ver la Proposición 4.4.10), entonces $F_\zeta(\iota) : L_{(\zeta)} \to R_{(\zeta)}$, el cual esta dado por $[(f,K)] \mapsto [(\iota \circ f, K)]$, es un monomorfismo de $R_{(\zeta)}$-módulos, donde $\iota : L \hookrightarrow R$ es la inclusión. Por lo tanto, $W = F_{(\zeta)}(\iota)\left(L_{(\zeta)}\right) \cong L_{(\zeta)}$ es un ideal izquierdo de $R_{(\zeta)}$. Veamos que W es también un ideal derecho. Sea $[(\lambda, K)] \in R_{(\zeta)}$ y $[(g,K)] \in W$, existe $[(f,K)] \in L_{(\zeta)}$ tal que $[(\iota \circ f, K)] = [(g,K)]$. Notemos que cada homomorfismo $\xi : K \to R$ satisface $\xi^{-1}(K) = K$, ya que $\xi^{-1}(K) \in \zeta$ y K es el elemento mínimo de ζ. En particular, $f^{-1}(L \cap K) = (\iota \circ f)^{-1}(K) = K$, así $\mathrm{Im}(f) \leq L \cap K$. También $\lambda^{-1}(K) = K$, entonces $\mathrm{Im}(\lambda) \leq K$. Por lo tanto $[(g,K)] \bullet [(\lambda,K)] = [(\iota \circ f, K)] \bullet [(\lambda, K)] = [(\lambda \circ h, K)]$, donde $h : K \to K$ es tal que $x \mapsto \ f(x)$. Dado que L y K son ideales, entonces $L \cap K$ es un ideal, e.d., es un submódulo totalmente invariante de R. Como R es auto-inyectivo, por el Lema 4.5.5, $L \cap K$ es un submódulo totalmente invariante de K. Por lo tanto, $\lambda_1(L \cap K) \leq L \cap K$, donde $\lambda_1 : K \to K$ es tal que $x \mapsto \lambda(x)$. Así que existe un homomorfismo $k : K \to L$ tal que $x \mapsto \lambda(f(x))$, así que $\lambda \circ h = \iota \circ k$. Concluimos que $[(g,K)] \bullet [(\lambda, K)] = [(\iota \circ k, K)] \in W$, por tanto W es un ideal de $R_{(\zeta)}$.

Q.E.D

Capítulo 5

Perspectivas de investigación

Una de las cosas que nos podemos dar cuenta es que dado que los cocientes iterativos no necesariamente se estacionan, entonces podemos general módulos de cocientes con un solo A-módulo izquierdo. Por ello, enseguida coloco el contexto y posteriormente se plantean las preguntas abiertas: Sean A un anillo, $M \in \mathrm{Obj}\,(A\text{-}\mathbf{Mod})$. Sabemos que $A_{(\zeta)}$ es un anillo y $M_{(\zeta)}$ es un $A_{(\zeta)}$-módulo izquierdo y también es A-módulo izquierdo, de hecho tenemos el funtor exacto izquierdo $F_\zeta : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_{(\zeta)}\text{-}\mathbf{Mod}$

y sea $n \in \mathbb{N}_0$, definamos lo siguiente:

(a)

(b)

Proposición 5.0.1. *Sea* $\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_n \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$ *una sucesión de homomorfismos de anillos conmutativos. Entonces* $\varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} A_i \in \mathbb{Z}\text{-}\boldsymbol{Mod}$ *tiene estructura de anillo, con el siguiente producto: Para cada* $[(x_i,i)],[(x_j,j)] \in \varinjlim A_i$

$$[(x_i,i)] * [(x_j,j)] = [(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j),k)] \ \text{donde } i \le k \text{ y } j \le k$$

Dem.
Sea $\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_n \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$ una sucesión de homomorfismos de anillos conmutativos. En particular, es una sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos izquierdos, es decir, el limite directo asociado $A := \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ existe y es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo.

(1) Veamos que $*$ esta bien definida: sean $[(x_i,i)],[(x_j,j)] \in A$, $k,l \in \mathbb{N}$ tales que $k,l \ge i,j$ y sea $\delta = \text{máx}\{k,l\}$, entonces

$$f_{k,\delta}\left(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j)\right) = f_{i,\delta}(x_i)f_{j,\delta}(x_j) = f_{l,\delta}\left(f_{i,l}(x_i)f_{j,l}(x_j)\right)$$

así $[(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j),k)] = [(f_{i,l}(x_i)f_{j,l}(x_j),l)]$, por lo que no importa el valor de l mientras se cumple que $l \ge i,j$. Ahora, supongamos que $[(x_i,i)] = [(x_{i'},i')]$ y $[(x_j,j)] = [(x_{j'},j')]$, entonces existe $i'',j'' \in \mathbb{N}$ tales que $i,i' \le i''$, $j,j' \le j''$ y cumplen que $f_{i,i''}(x_i) = f_{i',i''}(x_{i'})$ y $f_{j,j''}(x_j) = f_{j',j''}(x_{j'})$. Sean $k \ge i,j$, $k' \ge i',j'$ y $\delta = \text{máx}\{k,k',i'',j''\}$. Dado que $f_{i,i''}(x_i) = f_{i',i''}(x_{i'})$ y $f_{j,j''}(x_j) = f_{j',j''}(x_{j'})$, entonces

$$f_{i,\delta}(x_i) = f_{i',\delta}(x_{i'}) \tag{5.1}$$
$$f_{j,\delta}(x_j) = f_{j',\delta}(x_{j'}) \tag{5.2}$$

Por definición:

$$[(x_i,i)] * [(x_j,j)] = [(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j),k)] \ \text{ y } [(x_{i'},i')] * [(x_{j'},j')] = [(f_{i',k'}(x_{i'})f_{j',k'}(x_{j'}),k')]\,.$$

Mostremos que los productos $f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j)$ y $f_{i',k'}(x_{i'})f_{j',k'}(x_{j'})$ están relacionados. Dado que $k, k' \leq \delta$, entonces:

$$f_{k,\delta}\left(f_{i,k}(x_i)f_{j,k}(x_j)\right) = f_{i,\delta}(x_i)f_{j,\delta}(x_j) \tag{5.3}$$

$$f_{k',\delta}\left(f_{i',k'}(x_{i'})f_{j',k'}(x_{j'})\right) = f_{i',\delta}(x_{i'})f_{j',\delta}(x_{j'}) \tag{5.4}$$

Combinando 1.1, 1.2 con 1.3 y 1.4, se concluye que $*$ esta bien definido.

(2) Veamos que $*$ es asociativa: sean $[(a_i,i)],[(a_j,j)],[(a_k,k)] \in A$ y $w \geq i,j,k$, entonces

$$\begin{aligned}[(a_i,i)] * ([(a_j,j)] * [(a_k,k)]) &= [(a_i,i)] * [(f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{w,w}\left(f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k)\right),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}([(a_i,i)] * [(a_j,j)]) * [(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j),w)] * [(a_k,k)] \\ &= [(f_{w,w}\left(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)\right)f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

Por lo tanto, $*$ es asociativo.

(3) $[(1,1)]$ es la unidad de A, pues si $[(a_i,i)] \in A$ y $k \geq 1, i$ entonces

$$\begin{aligned}[(1,1)] * [(a_i,i)] &= [(f_{1,k}(1)f_{i,k}(a_i),k)] = [(f_{i,k}(a_{i,k}),k)] = [(a_i,i)], \\ [(a_i,i)] * [(1,1)] &= [(f_{i,k}(a_i)f_{i,k}(1),k)] = [(f_{i,k}(a_{i,k}),k)] = [(a_i,i)]\end{aligned}$$

(4) Veamos que $*$ es distributiva por la izquierda. Sean $[(a_i,i)],[(a_j,j)],[(a_k,k)] \in A$ y $w \geq i,j,k$ entonces

$$\begin{aligned}[(a_i,i)] * ([(a_j,j)] + [(a_k,k)]) &= [(a_i,i)] * [(f_{j,w}(a_j) + f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{w,w}\left(f_{j,w}(a_j) + f_{k,w}(a_k)\right),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j) + f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[(a_i,i)] * [(a_j,j)] + [(a_i,i)] * [(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j),w)] + [(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{j,w}(a_j) + f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

Por lo tanto, $*$ es distributivo por la izquierda.

(5) Veamos que $*$ es distributiva por la izquierda. Sean $[(a_i,i)],[(a_j,j)],[(a_k,k)] \in A$ y $w \geq i,j,k$ entonces

$$\begin{aligned}([(a_i,i)] + [(a_j,j)]) * [(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i) + f_{j,w}(a_j),w)] * [(a_k,k)] \\ &= [(f_{w,w}\left(f_{i,w}(a_i) + f_{j,w}(a_j)\right)f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k) + f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[(a_i,i)] * [(a_k,k)] + [(a_j,j)] * [(a_k,k)] &= [(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k),w)] + [(f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)] \\ &= [(f_{i,w}(a_i)f_{k,w}(a_k) + f_{j,w}(a_j)f_{k,w}(a_k),w)]\end{aligned}$$

Por lo tanto, $*$ es distributivo por la derecha.

Se concluye de (1)-(5) que $A = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ es un anillo.

Q.E.D

Bibliografía

[1] Adámek, J., Herrlich, H. and Strecker,G.E. (1990). *Abstract and Concrete Categories.* London, GB: John Wiley and Sons.

[2] F. Anderson and K. Fuller, *Rings and Categories of Modules* (Springer-Verlag, 1992).

[3] Fernández-Alonso, R., Magaña, J. (2016). *Galois connections between lattices of preradicals induced by adjoint pairs between categories of modules.* Appl Categor Struct 24, 241–268.

[4] Fernández-Alonso, R., Magaña, J. (2019). *Galois connections between lattices of preradicals induced by ring epimorphisms.* Journal of Algebra and Its Applications.

[5] R. Férnandez-Alonso, F. Raggi, H. Rincón, J. Ríos and C. Signoret, *The lattice structure of preradicals,* Comm. Algebra. **30**(3) (2002) 1533-1544.

[6] J. Golan, *Torsion Theories* (Longman Scientific Technical, John Wiley and Sons, 1986).

[7] Carl Faith, *On Köthe Rings* (Math. Annalen 164, 207-212, 1966).

[8] Janeth Anabelle Magaña Zapata. (2016) *Morfismos entre retículas de prerradicales asociados a funtores entre categorías de módulos.* México: Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

[9] Joseph J. Rotman. (2008) *An Introduction to Homological Algebra.* Springer.

[10] B. Stenström, *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory* (Springer-Verlag, 1975).

[11] J. Dauns. (1994). *Modules and Rings.* Cambrige University Press.

[12] Mac Lane, Saunders. (1998). *Categories for the Working Mathematician.* Springer.

[13] Robert Wisbauer. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory: A Handbook for Study and Research.* University of Dusseldorf.

[14] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra, Volume I* (D. Van Nostrand Company, 1958).