MATRICES

Matrices y determinantes

Concepto Básico de Matriz

- **Una matriz es un arreglo de elementos en ordenamientos horizontales denominadas filas y en ordenamientos verticales denominadas columnas.**
- **Si la matriz posee igual número de filas que de columnas, se dice que se tiene una matriz cuadrada. Si posee 3 filas por 3 columnas, se dice que es de orden 3 x 3, o también se dice que es de orden 3.**
- Las matrices se suelen designar mediante letras mayúsculas y los elementos de la matriz se suelen encerrar entre corchetes y denotarse por letras minúsculas, tal como se muestra a continuación. Sea la matriz A de orden 3 x 3, o simplemente de orden 3, definida por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- ✓ El elemento a_{11} es el elemento que ocupa la fila 1 y la columna 1
- ✓ El elemento a_{12} es el elemento que ocupa la fila 1 y la columna 2
- ✓ El elemento a_{13} es el elemento que ocupa la fila 1 y la columna 3
- ✓ El elemento a_{21} es el elemento que ocupa la fila 2 y la columna 1
- ✓ El elemento a_{22} es el elemento que ocupa la fila 2 y la columna 2
- ✓ El elemento a_{23} es el elemento que ocupa la fila 2 y la columna 3
- ✓ El elemento a_{31} es el elemento que ocupa la fila 3 y la columna 1
- ✓ El elemento a_{32} es el elemento que ocupa la fila 3 y la columna 2
- ✓ El elemento a_{33} es el elemento que ocupa la fila 3 y la columna 3

Ejemplo .

- Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

✓ El elemento b_{11} es el número – 1
✓ El elemento b_{12} es el número 0
✓ El elemento b_{13} es el número 9
✓ El elemento b_{21} es el número 4
✓ El elemento b_{22} es el número 6
✓ El elemento b_{23} es el número – 2
✓ El elemento b_{31} es el número 3
✓ El elemento b_{32} es el número 5
✓ El elemento b_{33} es el número 7

Matrices

Definición:
En general, se tiene que Si m y n son enteros positivos entonces una matriz $m \times n$ es un arreglo rectangular.

$$\textbf{m-filas}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\textbf{n-columnas}}\right.$$

En el cual el elemento a_{ij} de la matriz es un número. Si $m = n$, la matriz recibe el nombre de **matriz cuadrada** de orden n.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 5 & \mathbf{-2} & 4 \\ 3 & 5 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

Ejemplo:

En la universidad se encuentran tres amigos con gustos, edades y carreras diferentes. María tiene 20 años, estudia Arquitectura y su pasatiempo favorito es jugar basketball. Roberto estudia medicina, tiene 25 años y practica Futbol desde que tiene memoria y Yanira practica Volleyball, tiene 23 años y estudia enfermería. ¿Cómo ordenar los datos utilizando los conceptos anteriores?

DATOS:

María | 20 | Arquitectura | Basketball

Roberto | Futbol | 25 | Medicina

Yanira | Volleyball | Enfermería | 23

MATRIZ

	Edad	Carrera	Deporte
María			
Roberto			
Yanira			

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \textbf{Edad} & \textbf{carrera} & \textbf{deporte} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{María} \\ \text{Roberto} \\ \text{Yanira} \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & \text{Arquitectura} & \text{Basquet Ball} \\ 25 & \text{Medicina} & \text{Fútboll} \\ 23 & \text{Enfermería} & \text{Volleyball} \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrices

Las matrices se pueden representar en alguna de las siguientes formas:

- Una matriz puede denotarse por una letra mayúscula como A, B, C, etc.

- Una matriz puede denotarse por un elemento representativo escrito entre corchetes como $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$, $[c_{ij}]$, etc.

- Una matriz puede denotarse mediante un arreglo rectangular de números.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Se denominan elementos correspondientes a aquellos que ocupan la misma posición en diferentes matrices. Es decir $a_{ij}\ y\ b_{ij}$ son elementos correspondientes.

Igualdad de matrices

Dos matrices $A = [\,a_{ij}\,]$ y $B = [\,b_{ij}\,]$ son iguales si son del mismo orden $m \times n$ y $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Es decir que dos matrices son iguales , si son del mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplo:

Dadas $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, se puede establecer que $A \neq B$.

Operaciones con matrices

Suma de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de orden $m \times n$, entonces su suma es la matriz de orden $m \times n$ definida por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Ejemplo:

Dadas $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

entonces $A + B = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 0+0 \\ 1+(-1) & -1-1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo:
En la cafetería de la universidad venden tres tipos de postres: donas, tartaletas y galletas, en dos clasificaciones, grande y pequeño. Las siguientes matrices muestran las ventas de postres en los primeros dos meses del año. Indique el tipo de postre más solicitado.

PRIMER MES

$$\begin{array}{c} \\ \textbf{Grande} \\ \textbf{Pequeño} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Donas} & \textbf{Tartaletas} & \textbf{Galletas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 150 & 180 & 190 \end{bmatrix} \end{array}$$

SEGUNDO MES

$$\begin{array}{c} \\ \textbf{Grande} \\ \textbf{Pequeño} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{Donas} & \textbf{Tartaletas} & \textbf{Galletas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 230 & 250 \\ 180 & 150 & 150 \end{bmatrix} \end{array}$$

PRIMER MES

	Donas	Tartaletas	Galletas
G	100	200	150
P	150	180	190

SEGUNDO MES

	Donas	Tartaletas	Galletas
G	200	230	250
P	180	150	150

VENTA TOTAL

	Donas	Tartaletas	Galletas
Grande	300	430	400
Pequeño	330	330	340
	630	760	740

R// EL POSTRE MÁS SOLICITADO ES LA TARTALETA

Operaciones con matrices

Multiplicación de un escalar por una matriz

Si $A = [\, a_{ij} \,]$ es una matriz de orden $m \times n$ y c es un escalar, entonces el múltiplo escalar de c por A es la matriz definida por $cA = \left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$

Ejemplo:

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Encontrar:

a) $3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $-B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

c) $3A - B = 3A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Propiedades de la suma y multiplicación de un escalar por una matriz

Propiedades de la suma de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz

Sean A, B y C matrices de orden "$m \times n$" y "c" y "d" escalares, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

- $Propiedad\ Conmutativa$: $A + B = B + A$
- $Proiedad\ Asociativa$: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $1 * A = A$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $(c + d)A = cA + dA$

Ejemplo: Despeje x,$y \wedge z$ en la ecuación matricial

$4\begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$. Solución: $x = 3$, $y = 2 \wedge z = 1$

Propiedades de la suma y multiplicación de un escalar por una matriz

Ejemplo: Despeje x,y y z en la ecuación matricial

$4\begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$. Solución: $x = 3$, $y = 2$ y $z = 1$

$$\begin{bmatrix} 4x & 4y \\ 4z & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ -2x & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 2x \\ 10 & -2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x & 4y \\ 4z & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+8 & 2z+2x \\ -2x+10 & 2-2x \end{bmatrix}$$

$4x = 2y + 8$
$4 * 3 = 2 * 2 + 8$
$12 = 4 + 8$
$12 = 12$

$4y = 2z + 2x$
$4y = 2 * 1 + 2 * 3$
$4y = 2 + 6$
$4y = 8$
$y = 8/4$
$y = 2$

$4z = -2x + 10$
$4z = -2 * 3 + 10$
$4z = -6 + 10$
$4z = 4$
$z = 4/4$
$z = 1$

$-4 = 2 - 2x$
$2x = 4 + 2$
$2x = 6$
$x = 6/2$
$x = 3$

Operaciones con matrices

Multiplicación de matrices
"Dos matrices son conformes o compatibles para su producto si el número de columnas del primer factor matricial es igual al número de filas del segundo factor matricial".

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times \mathbf{n}$ y $B = [b_{ij}]$ es una matriz $\mathbf{n} \times p$, entonces el producto de AB es una matriz de orden $\mathbf{m} \times \mathbf{p}$ **. Es decir:**
C= $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$.

$$AB = [c_{ij}]_{m \times p} \rightarrow A_{m \times \underline{n}} * B_{\underline{n} \times p} = C_{m \times p}$$

Donde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots a_{in} \cdot b_{nj}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \ldots \end{bmatrix}$ ... $B = [-1 \quad 3 \quad -2]$ ... AB

Operaciones con matrices

Multiplicación de matrices

$AB = [c_{ij}]_{m \times p} \rightarrow \ A_{m \times \underline{n}} * B_{\underline{n} \times p} = C_{m \times p}$

Donde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \ a_{i1} \cdot b_{1j} + \ a_{i2} \cdot b_{2j} + \ a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots a_{in} \cdot b_{nj}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$; entonces $AB =$ $\begin{bmatrix} 7 & 34 & 14 \\ 8 & 53 & \mathbf{16} \\ 5 & \mathbf{7} & 10 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} b_{k3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} = 6 * -2 + 7 * 4 = 16$$

Para encontrar el valor de c_{23} en la practica lo que se hace es multiplicar los elementos de la fila dos de A por los elementos de la columna tres de B

Matrices especiales

Matriz nula ($\underline{0}$)

Una matriz nula es aquella en la cual todos sus elementos son 0.

Ejemplos: a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Propiedades de la matriz nula

Si A es una matriz de orden $m \times n$, entones se cumple lo siguiente.

- ❖ $A + 0_{\text{mxn}} = A$
- ❖ $A + (-A) = 0_{\text{mxn}}$
- ❖ Si $cA = 0_{mxn}$, entonces $c = 0$ ó $A = 0_{mxn}$

Propiedades de la multiplicación de matrices

Si A, B y C son matrices (con órdenes tales que los productos matriciales dados están definidos) y “c” es un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $(A * B) \neq (B * A)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
- En general, si AC = BC NO IMPLICA QUE A = B
- En general, si A B = $\underline{0}$ ESTO NO IMPLICA QUE A=$\underline{0}$ o QUE B=$\underline{0}$

Matriz triangular inferior: es una matriz cuadrada A_n, cuyos elementos a_{ij} son cero si "$i < j$"; es decir: "A_n es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$".

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Matrices especiales

Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada se denomina matriz diagonal si todos los elementos fuera de la diagonal principal son nulos o ceros.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}_n$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

Note que el producto de dos matrices diagonales da como resultado otra matriz diagonal.

Matrices especiales

Matriz Escalar

Es una matriz cuadrada en la cual los elementos en la diagonal principal son " c " y los elementos fuera de la diagonal principal son 0.

Es decir que la matriz escalar es una matriz diagonal, en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo: $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Matriz Identidad

Es una matriz cuadrada en la cual los elementos en la diagonal principal son 1 y los elementos fuera de la diagonal principal son 0.

Ejemplo: $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propiedades de la matriz identidad

Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces se cumple lo siguiente.

✓$A \cdot I_{n}. = A$

✓$I_m \cdot A = A$

Matrices especiales

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$AI = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que A * I = A

Ejemplo. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$I * A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices especiales

Matriz transpuesta

La transpuesta de una matriz A es aquella que se forma a partir de A, mediante el intercambio de filas por columnas. Se denota por A^T

Ejemplo:

Si $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $B^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Propiedades de las matrices transpuestas

Si A y B son matrices (con órdenes tales que las operaciones matriciales proporcionadas están definidas) y c es un escalar, entonces cumple lo siguiente:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = cA^T$

MATRIZ PERIÓDICA DE PERÍODO "p"

A_n es periódica, de período "p" si se cumple que: A_n^{p+1}= A , donde p ∈ $\mathbb{Z}^+$, siendo "p" el menor entero positivo para el que se cumple la definición.

Ejemplo. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Determine si la matriz es periódica, si lo es determine su período.

						A	
	1	-2	-6		1	-2	-6
A	-3	2	9		-3	2	9
	2	0	-3		2	0	-3
		A al cuadrado				A al cubo	A^2*A
	-5	-6	-6		1	-2	-6
	9	10	9		-3	2	9
	-4	-4	-3		2	0	-3
	A es una matriz periódica de período p=2, ya que A^(2+1)=A						

Matrices especiales

Matriz idempotente

Una matriz cuadrada A se denomina **idempotente** si y solo si $A^2 = A$.
Note que la matriz idempotente es una matriz periódica de período p=1 , ya que
$A_n{}^{1+1} = A_n$

Ejemplo:

Demostrar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es idempotente.

Debemos demostrar que $A^2 = A$.

$$A^2 = A * A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices especiales

Matriz nilpotente o nulipotente

Una matriz cuadrada A se denomina **nilpotente o nulipotente de índice "r"**, si $\boldsymbol{r}$ es el menor entero positivo tal que $\boldsymbol{A^r} = \underline{\boldsymbol{O}}$**.**

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Demostrar que A es nilpotente de índice 3.

Debemos demostrar de $A^3 = \underline{O}$.

$$A^3 = A * A * A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices especiales

Matriz involutiva

Una matriz cuadrada A se denomina **involutiva** si y solo si $\boldsymbol{A^2 = I}$.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Demostrar que A es involutiva.

Debemos demostrar de $A^2 = I$.

$$A^2 = A * A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices especiales

Matriz transpuesta

La transpuesta de una matriz A es aquella que se forma a partir de A, mediante el intercambio de filas por columnas. Se denota por A^T

Ejemplo:

Si $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, entonces $B^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Propiedades de las matrices transpuestas

Si A y B son matrices (con órdenes tales que las operaciones matriciales proporcionadas están definidas) y c es un escalar, entonces cumple lo siguiente:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = cA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Matrices especiales

Matriz Simétrica

Cuando una matriz cuadrada es igual a su transpuesta, ésta recibe el nombre de matriz simétrica.

Ejemplos:

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix};\ M^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$M+M^T=\begin{bmatrix}2 & 6 & 1\\ 6 & 4 & 8\\ 1 & 8 & 0\end{bmatrix};\ (M+M^T)^T=\begin{bmatrix}2 & 6 & 1\\ 6 & 4 & 8\\ 1 & 8 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \text{Matriz simétrica}$$

Matriz Antisimétrica

Toda matriz cuadrada que es igual a la inversa aditiva de su transpuesta se llama antisimétrica.

$$M-M^T=\begin{bmatrix}0 & -2 & 5\\ 2 & 0 & 2\\ -5 & -2 & 0\end{bmatrix};\ (M-M^T)^T=\begin{bmatrix}0 & 2 & -5\\ -2 & 0 & -2\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & -2 & 5\\ 2 & 0 & 2\\ -5 & -2 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \text{Matriz antisimétrica}$$

Note que:

$$(M + M^T) + (M - M^T) = M + M^T + M - M^T$$

$$(M + M^T) + (M - M^T) = (M + M) + (M^T - M^T)$$

$$(M + M^T) + (M - M^T) = 2M + \underline{O}$$

$$(M + M^T) + (M - M^T) = 2M$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos lados de la ecuación:

$$\frac{1}{2}[(M + M^T) + (M - M^T)] = \frac{1}{2}(2M)$$

$$\frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = \left(\frac{1}{2}\ (2)\right)M$$

$$\frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = (1)M$$

$$\frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M$$

$$M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$$

- Note que: $(M + M^T)$ $ES\ UNA\ MATRIZ\ SIMÉTRICA$

- $(M - M^T)$ $ES\ UNA\ MATRIZ\ ANTI\ SIMÉTRICA$

- $\frac{1}{2}(M + M^T)$ $ES\ UNA\ MATRIZ\ SIMÉTRICA$

- $\frac{1}{2}(M - M^T)$ $ES\ UNA\ MATRIZ\ ANTI\ SIMÉTRICA$

- POR LO QUE SE HA EXPRESADO LA MATRIZ **"M"**COMO LA SUMA DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA MÁS OTRA MATRIZ ANTISIMÉTRICA

Teorema: **Toda matriz cuadrada se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.**

Escriba la matriz M = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ como la suma de una matriz simétrica más una antisimétrica.

Solución.

$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow M^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ Luego: $\mathrm{R} = M + M^t = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Observe que R es una matriz simétrica

Ya que se cumple que $\mathrm{R} = R^t$

$\frac{1}{2}$ R = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix}$ Observe que $\frac{1}{2}$ R es una matriz simétrica ya que se verifica que $\frac{1}{2}$ R $=\left(\frac{1}{2}\ \mathrm{R}\right)^t$

$C = M - M^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e cumple que C es una matriz antisimétrica ya que se verifica que $C^t = -C$

$\frac{1}{2}$ C = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$ Observe que $\frac{1}{2}$ C es una matriz anti simétrica ya que se verifica que $\left(\frac{1}{2}\right.$ $\left.C\right)^t = -\frac{1}{2}$ C

Conclusión: $\frac{1}{2}$ **R es una matriz simétrica y** $\frac{1}{2}$ **C es una matriz anti simétrica**

$$\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Conclusión: $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}C = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

M = Matriz simétrica + Matriz antisimétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Habiendo verificado que: $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1/2 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ COMPLEJA

Es toda matriz formada con elementos que son números complejos.

Así: $A = [a_{ij} + jb_{ij}]$, **en donde** $a_{ij} + jb_{ij} \in \mathbb{C}$

Observamos que por la suma de matrices y el producto de escalar por matriz, tenemos:

$$A = [a_{ij} + jb_{ij}] \rightarrow A = [a_{ij}] + j[b_{ij}]$$

lo que nos dice que toda matriz compleja puede expresarse como la suma de una matriz real más una matriz imaginaria; donde la matriz imaginaria es toda matriz real multiplicada por la unidad imaginaria *i*

EJEMPLO

$$\begin{bmatrix} 5+3j & 2-j & -1+j \\ -4j & 5 & 2+6j \\ -11+3j & -1-j & -4-2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -11 & -1 & -4 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LA REFLEXIÓN DE UNA MATRIZ O LA MATRIZ REFLEXIÓN

Sea A una matriz compleja, entonces llamamos matriz reflexión de A, a otra matriz compleja $\overline{A}$, formada con las reflexiones de los elementos de A.

Así: $$\boldsymbol{A = [a_{ij} + jb_{ij}] \rightarrow \exists\ \overline{A} = [a_{ij} - jb_{ij}]}$$

A la transpuesta de ésta matriz $\overline{A}$ le llamamos "transconjugada de A" y la denotamos por A^*

EJEMPLO

Hallar A^* ***para*** $$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 7-4j & -j & 2+2j \\ 9+j & 2-2j & 5-8j \\ 3 & 11+j & 3-6j \end{bmatrix}}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 7+4j & j & 2-2j \\ 9-j & 2+2j & 5+8j \\ 3 & 11-j & 3+6j \end{bmatrix}$$

$$A^* = (\overline{A})^t = \begin{bmatrix} 7+4j & 9-j & 3 \\ j & 2+2j & 11-j \\ 2-2j & 5+8j & 3+6j \end{bmatrix}$$

MATRIZ HERMITIANA Y MATRIZ ANTIHERMITIANA

Llamamos *matriz hermitiana*, a toda matriz compleja y cuadrada, para la cual su matriz transconjugada es igual a la matriz original. Es decir

$$\boldsymbol{A_n = \rightarrow (\overline{A})^t = A_n}, \text{ luego } \boldsymbol{A_n = A_n^*}$$

Llamamos *matriz antihermitiana, a toda matriz compleja y cuadrada, para la cual su matriz transconjugada es igual a menos la matriz original. Es decir:*

$$\boldsymbol{A = \left[a_{ij} + jb_{ij}\right]_n \rightarrow (\overline{A})^t = -A_n}$$

$$\boldsymbol{A_n = -(\overline{A})^t}, \text{ luego } \boldsymbol{A_n^* = -A_n}$$

Ejemplos.
Sean las matrices:

$$a)P = \begin{bmatrix} 5 & 5+\mathrm{j} & -3+7\mathrm{j} \\ 5-\mathrm{j} & 7 & -5\mathrm{j} \\ -3-7\mathrm{j} & 5\mathrm{j} & 12 \end{bmatrix}$$

$$b)S = \begin{bmatrix} j & 4-\mathrm{j} & 9+3\mathrm{j} \\ -4-\mathrm{j} & -j & 5-14\mathrm{j} \\ -9+3\mathrm{j} & -5-14\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$$

son hermitianas, antihermitianas o ninguna de las dos.

a)

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 5+j & -3+7j \\ 5-j & 7 & -5j \\ -3-7j & 5j & 12 \end{bmatrix} \qquad \overline{P} = \begin{bmatrix} 5 & 5-j & -3-7j \\ 5+j & 7 & 5j \\ -3+7j & -5j & 12 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{P})^t = \begin{bmatrix} 5 & 5+j & -3+7j \\ 5-j & 7 & -5j \\ -3-7j & 5j & 12 \end{bmatrix}$$

P es una matriz hermitiana ya que $(\overline{P})^t = P$

b)

$$S = \begin{bmatrix} j & 4-j & 9+3j \\ -4-j & -j & 5-14j \\ -9+3j & -5-14j & 0 \end{bmatrix} \qquad -S = \begin{bmatrix} -j & -4+j & -9-3j \\ 4+j & j & -5+14j \\ 9-3j & 5+14j & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} -j & 4+j & 9-3j \\ -4+j & j & 5+14j \\ -9-3j & -5+14j & 0 \end{bmatrix} \qquad (\overline{S})^t = \begin{bmatrix} -j & -4+j & -9-3j \\ 4+j & j & -5+14j \\ 9-3j & 5+14j & 0 \end{bmatrix}$$

S es una matriz antihermitiana ya que $(\overline{S})^t = -S$

Principios fundamentales

a)Toda matriz hermitiana, se pude expresar como la suma de la matriz simétrica real mas una matriz antisimétrica imaginaria.

b)Toda matriz antihermitiana, se puede expresar como la suma de una matriz anti simétrica real mas una matriz simétrica imaginaria

Ejemplo. Verifique si la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2+j & -3+3j \\ 2-j & 7 & -5j \\ -3-3j & 5j & 12 \end{bmatrix}$ es hermitiana.

SOLUCIÓN: $\overline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2-j & -3-3j \\ 2+j & 7 & 5j \\ -3+3j & -5j & 12 \end{bmatrix}$ $\quad (\overline{A})^t = \begin{bmatrix} 5 & 2+j & -3+3j \\ 2-j & 7 & -5j \\ -3-3j & 5j & 12 \end{bmatrix}$

Conclusión. La matriz A es hermitiana ya que cumple que $(\overline{A})^t = A$

Note que $A = \begin{bmatrix} 5 & 2+j & -3+3j \\ 2-j & 7 & -5j \\ -3-3j & 5j & 12 \end{bmatrix}$ es una matriz hermitiana y puede escribirse de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j & 3j \\ -j & 0 & -5j \\ -3j & 5j & 0 \end{bmatrix} \to A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ SIMÉTRICA REAL + MATRIZ ANTISIMÉTRICA IMAGINARIA

La matriz C= $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica real, ya que C^t= C

La matriz D= $j\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz antisimétrica imaginaria, ya que D^t= –D

– D= $j\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$; $D^t = j\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo. Verifique si la matriz $B = \begin{bmatrix} j & 4-\mathrm{j} & 6+3\mathrm{j} \\ -4-\mathrm{j} & -j & 5-7\mathrm{j} \\ -6+3\mathrm{j} & -5-7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$ es antihermitiana.

SOLUCIÓN: $\overline{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} -j & 4+\mathrm{j} & 6-3\mathrm{j} \\ -4+\mathrm{j} & j & 5+7\mathrm{j} \\ -6-3\mathrm{j} & -5+7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$ $(\overline{\mathrm{B}})^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} -j & -4+\mathrm{j} & -6-3\mathrm{j} \\ 4+\mathrm{j} & j & -5+7\mathrm{j} \\ 6-3\mathrm{j} & 5+7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$

- Note que: $\mathrm{B} \begin{bmatrix} j & 4-\mathrm{j} & 6+3\mathrm{j} \\ -4-\mathrm{j} & -j & 5-7\mathrm{j} \\ -6+3\mathrm{j} & -5-7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow -\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -j & -4+\mathrm{j} & -6-3\mathrm{j} \\ 4+\mathrm{j} & j & -5+7\mathrm{j} \\ 6-3\mathrm{j} & 5+7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$

Conclusión. La matriz B es antihermitiana ya que cumple que $(\overline{B})^{\mathrm{t}} = -\mathrm{B}$

- La matriz $B = \begin{bmatrix} j & 4-\mathrm{j} & 6+3\mathrm{j} \\ -4-\mathrm{j} & -j & 5-7\mathrm{j} \\ -6+3\mathrm{j} & -5-7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz antihermitiana.

$$-\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -j & -4+\mathrm{j} & -6-3\mathrm{j} \\ 4+\mathrm{j} & j & -5+7\mathrm{j} \\ 6-3\mathrm{j} & 5+7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} -j & 4+\mathrm{j} & 6-3\mathrm{j} \\ -4+\mathrm{j} & j & 5+7\mathrm{j} \\ -6-3\mathrm{j} & -5+7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix} \qquad (\overline{B})^t = \begin{bmatrix} -j & -4+\mathrm{j} & -6-3\mathrm{j} \\ 4+\mathrm{j} & j & -5+7\mathrm{j} \\ 6-3\mathrm{j} & 5+7\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$$

$(\overline{B})^t =- \mathrm{B}$; luego B es una matriz antihermitiana

- La matriz $B = \begin{bmatrix} j & 4-j & 6+3j \\ -4-j & -j & 5-7j \\ -6+3j & -5-7j & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz antihermitiana.

Note que es $B = \begin{bmatrix} j & 4-j & 6+3j \\ -4-j & -j & 5-7j \\ -6+3j & -5-7j & 0 \end{bmatrix}$ una matriz antihermitiana y puede escribirse de la siguiente manera:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -6 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & -j & 3j \\ -j & -j & -7j \\ 3j & -7j & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -6 & -5 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -7 \\ 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA REAL MATRIZ SIMÉTRICA IMAGINARIA

La matriz $L=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 5 \\ -6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz Antisimétrica real, ya que $L^t = -L$

$L^t=\begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 4 & 0 & -5 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$; $-L=\begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 4 & 0 & -5 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

La matriz $M= j\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -7 \\ 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica imaginaria, ya que $M^t = M$

Principios fundamentales

a) Toda matriz compleja y cuadrada sumada con su transconjugada produce una matriz hermitiana

b) Toda matriz compleja y conjugada menos su transconjugada produce una matriz antihermitiana

Ejemplo.

$$D = \begin{bmatrix} j & -5+j & 10-j \\ 3+2j & -j & 4+j \\ -5-3j & 8+j & -6-7j \end{bmatrix} \quad \overline{D} = \begin{bmatrix} -j & -5-j & 10+j \\ 3-2j & j & 4-j \\ -5+3j & 8-j & -6+7j \end{bmatrix}$$

$$(\overline{D})^t = \begin{bmatrix} -j & 3-2j & -5+3j \\ -5-j & j & 8-j \\ 10+j & 4-j & -6+7j \end{bmatrix}$$

$$W = D + (\overline{D})^t = \begin{bmatrix} 0 & -2-j & 5+2j \\ -2+j & 0 & 12 \\ 5-2j & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -2-j & 5+2j \\ -2+j & 0 & 12 \\ 5-2j & 12 & -12 \end{bmatrix} \qquad \overline{W} = \begin{bmatrix} 0 & -2+j & 5-2j \\ -2-j & 0 & 12 \\ 5+2j & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$$(\overline{W})^t = \begin{bmatrix} 0 & -2-j & 5+2j \\ -2+j & 0 & 12 \\ 5-2j & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$W = D + (\overline{D})^t$ Note que W es una matriz hermitiana

Principios fundamentales

Toda matriz compleja y cuadrada sumada con su transconjugada produce una matriz hermitiana y toda matriz compleja y conjugada menos su transconjugada produce una matriz antihermitiana.

Ejemplo.

$$D = \begin{bmatrix} j & -5+j & 10-j \\ 3+2j & -j & 4+j \\ -5-3j & 8+j & -6-7j \end{bmatrix} \qquad \overline{D} = \begin{bmatrix} -j & -5-j & 10+j \\ 3-2j & j & 4-j \\ -5+3j & 8-j & -6+7j \end{bmatrix}$$

$$(\overline{D})^t = \begin{bmatrix} -j & 3-2j & -5+3j \\ -5-j & j & 8-j \\ 10+j & 4-j & -6+7j \end{bmatrix}$$

$$T = D - (\overline{D})^t = \begin{bmatrix} 2j & -8+3j & 15-4j \\ 8+3j & -2j & -4+2j \\ -15-4j & 4+2j & -14j \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $T = \begin{bmatrix} 2j & -8+3j & 15-4j \\ 8+3j & -2j & -4+2j \\ -15-4j & 4+2j & -14j \end{bmatrix}$ es una matriz antihermitiana

$$-T = \begin{bmatrix} -2j & 8-3j & -15+4j \\ -8-3j & 2j & 4-2j \\ 15+4j & -4-2j & 14j \end{bmatrix}$$

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} -2j & -8-3j & 15+4j \\ 8-3j & 2j & -4-2j \\ -15+4j & 4-2j & 14j \end{bmatrix} \qquad (\overline{T})^t = \begin{bmatrix} -2j & 8-3j & -15+4j \\ -8-3j & 2j & 4-2j \\ 15+4j & -4-2j & 14j \end{bmatrix}$$

$(\overline{T})^t = -T$; luego T es una matriz antihermitiana

$W = D + (\overline{D})^t$; W es una matriz hermitiana

$T = D - (\overline{D})^t$; T es una matriz antihermitiana

$$W + T = D + D + (\overline{D})^t - (\overline{D})^t$$

$$W + T = (D + D) + ((\overline{D})^t - (\overline{D})^t)$$

$$W + T = (2D) + \underline{0}$$

$$W + T = 2D \quad \longrightarrow \quad D = \frac{W + T}{2} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{D = \frac{1}{2} W + \frac{1}{2} T}$$

"Toda matriz compleja y cuadrada se puede escribir como la suma de una matriz hermitiana más otra matriz antihermitiana".

Ejemplo. Escribir $D = \begin{bmatrix} j & -5+j & 10-j \\ 3+2j & -j & 4+j \\ -5-3j & 8+j & -6-7j \end{bmatrix}$ como la suma de una matriz hermitiana más otra antihermitiana.

$W = D + (\overline{D})^t$; W es una matriz hermitiana

$T = D - (\overline{D})^t$; T es una matriz antihermitiana

$$\boldsymbol{D = \frac{1}{2} W + \frac{1}{2} T}$$

$$D = \frac{1}{2} W + \boldsymbol{\frac{1}{2} T}$$

$$D = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & -2-j & 5+2j \\ -2+j & 0 & 12 \\ 5-2j & 12 & -12 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2j & -8+3j & 15-4j \\ 8+3j & -2j & -4+2j \\ -15-4j & 4+2j & -14j \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1-\frac{1}{2}j & \frac{5}{2}+j \\ -1+\frac{1}{2}j & 0 & 6 \\ \frac{5}{2}-j & 6 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & -4+\frac{3}{2}j & \frac{15}{2}-2j \\ 4+\frac{3}{2}j & -j & -2+j \\ -\frac{15}{2}-2j & 2+j & -7j \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} j & -5+j & 10-j \\ 3+2j & -j & 4+j \\ -5-3j & 8+j & -6-7j \end{bmatrix}$$