1. 证明：任意 n 个连续的整数中($n \geq 1$)，有且仅有一个数被 n 整除。

2. 设n, k 是正整数，证明：n^k, n^{k+4}的 10 进制展开的个位数相同。

3. 证明：若（a, b）=1, 则（a+b, a-b）=1 或 2

4. 用辗转相除法求 $a = 288, b = 158$ 的最大公因数和 m, n 使 $ma + nb = (a, b)$

思考题：

1. 调研扩展欧几里得除法
2. 编程实现欧几里得除法和扩展欧几里得除法

1. 设a,b是正整数，证明：$(a+b)[a,b]=a[b,a+b]$

2. 证明：若$n>0, a^n|b^n$ 则 $a|b$

3. 设$n>2$，证明在n和$n!$之间一定有一个素数。

4. 证明：形如 $6n+5$ 的素数有无穷多。

思考题：

1. 求第 1000000 个素数

2. 求$n!+1$的最小素因子，n 为整数且$n\leq 20$

1. 设$m > 1, m|(m-1)!+1$，证明：m 是素数.

2. 求$176x-162y=2$的所有整数解.

3. 求 $2x+3y+4z=5$的所有整数解.

1．若n是整数，证明$13|4^{2n+1}+3^{n+2}$

2．证明：对于任意整数 x，$\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$为整数

思考题

1. 寻找一个合数n，和一个整数b, 满足$b^n \equiv b \pmod{n}$
2. 寻找一个合数n，对所有与之互素的整数b，满足$b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$
3. 调研素性判定方法

1．求解同余式$111x \equiv 75 \pmod{321}$

2．解同余方程$58x \equiv 87 \pmod{47}$

3．求解同余式$256x \equiv 179 \pmod{337}$

4．设整数$n \geq 2$，证明：$\sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ (i,n)=1}} i \equiv 0$（$\bmod n$）

5．证明 Wilson 定理的逆命题成立。

6．证明：若 p 是奇素数，$N = 1 + 2 + \cdots + (p-1)$，则

$$(p-1)! \equiv p-1 \pmod{N}。$$

1. 设整数 $n \ge 2$，证明：$\sum\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ (i,n)=1}} i = \frac{1}{2} n\varphi(n)$，即在数列 $1,2,\dots,n$ 中与 n 互素的整数之和是 $\frac{1}{2} n\varphi(n)$

2. 证明：若 $2p+1$ 是奇素数，则 $(p!)^2 + (-1)^p \equiv 0 \pmod{2p+1}$.

3. 解同余式组

   $x \equiv 1 \pmod 7,\ x \equiv 3 \pmod 5,\ x \equiv 5 \pmod 9$

4. 解同余式组

   $4x \equiv 3 \pmod{25} \quad 3x \equiv 8 \pmod{20}$

5. 解同余式组：$x \equiv 8 \pmod{15},\ x \equiv 5 \pmod 8,\ x \equiv 13 \pmod{25}$.

1. 证明：$61!+1\equiv 0\pmod{71}$

2. 证明：对任意给定的$n>1$，存在$m>0$，使得同余式
$$x^2\equiv 1\pmod{m}$$
的解的个数大于n

1、设 p 是奇素数，证明：模 p 的两个二次剩余的乘积是二次剩余；两个二次非剩余的乘积是二次剩余；一个二次剩余和一个二次非剩余的乘积是二次非剩余。

2、设 p 是奇素数，证明：模 p 的所有二次剩余的乘积与 $(-1)^{\frac{p+1}{2}}$ 对模 p 同余。

1、 设素数 $p\equiv 3\pmod 4$, $\left(\frac{n}{p}\right)=1$，证明：$x\equiv \pm n^{\frac{p+1}{4}}\pmod p$ 是同余方程 $x^2\equiv n\pmod p$ 的解。

2、 证明：对于任意的奇素数 p，总存在整数 n，使得

$$p\mid\left(n^2+1\right)\left(n^2+2\right)\left(n^2-2\right)$$

3、 求 $\left(\frac{323}{41}\right)$ 的值

1. 已知 563 是素数，判定方程 $x^2 \equiv 429 \pmod{563}$ 是否有解

2. 证明：3 是所有大于 3 的梅森素数（形如 $2^q - 1$，q 是素数）的一个非平方剩余。

3. 利用雅可比符号性质计算 $\left(\frac{51}{71}\right)$

1. 证明：如果正整数 n 满足 $n = 2\varphi(n)$，那么存在一个正整数 j，使得 $n = 2^j$

2. 证明：正整数 n 是合数当且仅当 $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$

3. 设 n 为任给的正整数，求 $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3)$ 的值。

1. 证明：如果 a 对奇素数 p 的阶是奇数，则同余式 $a^x+1\equiv 0\left(\bmod p\right)$ 没有解.
2. 设 m 为正整数，若对模 m 存在某个整数 a 次数为 $m-1$，则 m 为素数.
3. 若 x 模 m 的次数为 a， y 模 m 的次数为 b ,并且 $\left(a,b\right)=1$，则 xy 对模 m 的次数为 ab .

1．设$m\geq 3$，g_1和g_2都是模m的原根，则$g=g_1g_2$不是模m的原根。

2．设g是奇素数p的一个原根，证明：当$p\equiv 1\pmod 4$时，$-g$也是p的一个原根；当$p\equiv 3\pmod 4$时，$-g$对p的次数为$\frac{p-1}{2}$.

3. 素数 71 有一个原根 7，求出 71 的所有原根以及求出71^2和2×71^2的一个原根。

1、设 p 是奇素数，证明：当且仅当 $p-1$ 不整除 n 时，有

$$1^n+2^n+\cdots+(p-1)^n\equiv 0\pmod{p}$$

2、计算 2 模 465 的次数；5 模 2^{15} 的次数.

1、已知 3 是模 17 的原根，构造指数表，解同余式 $6x^{12} \equiv 11 \pmod{17}$

2. 假设 p 是一个奇素数，证明同余方程 $x^4 \equiv -1 \pmod{p}$ 有解当且仅当 p 形如 $8k+1$