1. （每题4分，共8分）选择题（多选题）

(a) 设X, Y, Z均为离散随机变量，则以下不等式正确的是 （ ）

(A) $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \le H(X, Z) - H(X)$
(B) $I(X, Y) \ge I(X, Y|Z)$
(C) $H(X) < H(3X)$
(D) $I(X; Y, Z) \ge I(X; Y)$

(b) 以下编码不可能是二元哈夫曼编码的是 （ ）

(A) $\{0, 10, 11\}$ (B) $\{00, 01, 10, 110\}$
(C) $\{01, 10\}$ (D) $\{1, 01, 10\}$

2. （每题4分，共8分）判断题（若判断为对，简要说明或证明；若判断为错，简要说明或举出反例）

a) 存在码长分别为1,2,2,2,2,2,3,3,3,3的三元即时码。

一个方差为非零有限值的连续随机变量的微分熵总

2. （每题4分，共8分）判断题（若判断为对，简要说明或证明；若判断为错，简要说明或举出反例）

(a) 存在码长分别为1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3的三元即时码。

(b) 一个方差为非零有限值的连续随机变量的微分熵总是有限的。

3. （每题4分，共8分）填空题

(a) 有三个二元离散随机变量X,Y,Z，若要使得$I(X;Y)=0bit$, $I(X;Y|Z)=1bit$，则X,Y,Z的联合概率分布为________。（给出一个满足条件的例子即可）

(b) 由四个子信道构成的独立并联高斯信道的各子信道的噪声方差分别为1,2,4,8，总功率限制为$P=6$，则总信道容量为$C=$________。（只需给出最佳功率分配后的信道容量表达式，可以不计算信道容量的具体数值）

4. （10分）给定一概率分布$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$和一正整数m，

3. （每题4分，共8分）填空题

(a) 有三个二元离散随机变量X, Y, Z，若要使得$I(X;Y) = 0bit$, $I(X;Y|Z) = 1bit$，则X, Y, Z的联合概率分布为________。（给出一个满足条件的例子即可）

(b) 由四个子信道构成的独立并联高斯信道的各子信道的噪声方差分别为1, 2, 4, 8，总功率限制为$P = 6$，则总信道容量为$C =$________。（只需给出最佳功率分配后的信道容量表达式，可以不计算信道容量的具体数值）

4. （10分）给定一概率分布$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$和一正整数m，$0 \le m < n$，定义$q_m = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_j$，证明$H(p_1, p_2, \cdots, p_n) \le H(p_1, p_2, \cdots, p_m, q_m) + q_m \log(n-m)$并给出等号成立条件。

4. （10分）给定一概率分布$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$和一正整数m，$0 \le m < n$，定义$q_m = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_j$，证明$H(p_1,p_2,\cdots,p_n) \le H(p_1,p_2,\cdots,p_m,q_m) + q_m \log(n-m)$并给出等号成立条件。

5. （12分）设$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4$构成马尔科夫链，证明：$I(X_1;X_3) + I(X_2;X_4) \le I(X_1;X_4) + I(X_2;X_3)$。

6. （10分）设$\{X_i, i = 1,2\cdots\}$为时间不变的马尔可夫链，初始状态概率分布为$P(X_1 = 1) = 0.5$，$P(X_1 = 2) = 0.25$，$P(X_1 = 3) = 0.25$，状态概率转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

5. （12分）设$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4$构成马尔科夫链，证明：$I(X_1;X_3) + I(X_2;X_4) \le I(X_1;X_4) + I(X_2;X_3)$。

6. （10分）设$\{X_i, i = 1,2\cdots\}$为时间不变的马尔可夫链，初始状态概率分布为$P(X_1 = 1) = 0.5$，$P(X_1 = 2) = 0.25$，$P(X_1 = 3) = 0.25$，状态概率转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

请计算：

(a) 联合熵$H(X_1, X_2, X_3)$；

(b) 该马尔科夫链的熵率。

（10分）设一离散信源的概率分布为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

6. （10分）设$\{X_i, i=1,2\cdots\}$为时间不变的马尔可夫链，初始状态概率分布为$P(X_1=1)=0.5$，$P(X_1=2)=0.25$，$P(X_1=3)=0.25$，状态概率转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

请计算：

(a) 联合熵$H(X_1, X_2, X_3)$；

(b) 该马尔科夫链的熵率。

7. （10分）设一离散信源的概率分布为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

请给出该信源的三元哈夫曼编码并计算平均码长。要求给出两种方案，这两种方案具有相同的平均码长，但码长的方

7. （10分）设一离散信源的概率分布为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

请给出该信源的三元哈夫曼编码并计算平均码长。要求给出两种编码方案，这两种方案具有相同的平均码长，但码长的方差不同。

8. （10分）如图1所示的信号和噪声模型，输入信号X、噪声Z_1和Z_2都是均值为0，方差为σ^2的高斯分布连续随机变量，且X与Z_1和Z_2独立，Z_1和Z_2相关系数为ρ，求：

(a) X的微分熵$h(X)$；

(b) 随机变量Z_1+Z_2的方差；

(c) 输出信号Y的微分熵$h(Y)$；

(d) 互信息$I(X;Y)$。

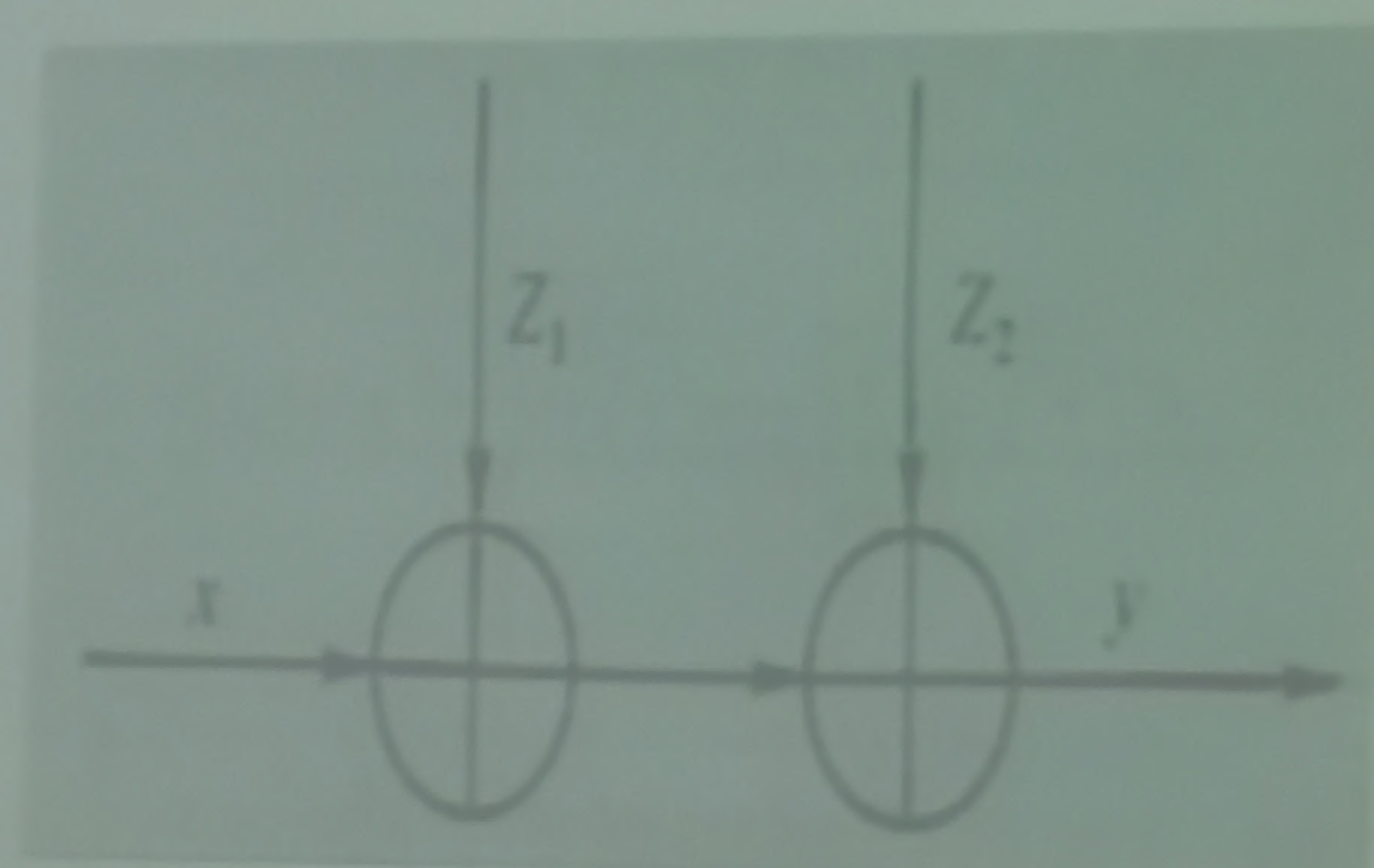
8. （10分）如图1所示的信号和噪声模型，输入信号X、噪声Z_1和Z_2都是均值为0，方差为σ^2的高斯分布连续随机变量，且X与Z_1和Z_2独立，Z_1和Z_2相关系数为ρ，求：

(a) X的微分熵$h(X)$；

(b) 随机变量Z_1+Z_2的方差；

(c) 输出信号Y的微分熵$h(Y)$；

(d) 互信息$I(X;Y)$。



9. （9分）一通信系统通过带宽有限信道传输信息，信道受功率谱密度$N_0/2 = 0.5 \times 10^{-8}$瓦特/赫兹的加性高斯白噪声干扰，信号功率为$P = 1$瓦特，

(a) 若信道带宽为3000赫兹，求信道容量；

(b) 若信道无带宽限制，求信道容量；

(c) 若信道带宽变为1×10^5赫兹，为保持与(a)相同的信道容量，此时的信号功率应为多少瓦特？

10. （15分）设一二维二元信源$\mathbf{X} = (X_1, X_2)$由两个独立的伯努利分布的二元信源X_1, X_2构成，其中X_1的概率分布为$p_0 = 3/4, p_1 = 1/4$，X_2的概率分布为$q_0 = 5/8, q_1 = 3/8$。每个二元信源的失真度量都是汉明失

限制为总的失真限制，即$Ed(X_1, \hat{X}_1) + Ed(X_2, \hat{X}_2) \leq D$，

10. （15分）设一二维二元信源$\mathbf{X} = (X_1, X_2)$由两个独立的伯努利分布的二元信源X_1, X_2构成，其中X_1的概率分布为$p_0 = 3/4, p_1 = 1/4$，X_2的概率分布为$q_0 = 5/8, q_1 = 3/8$。每个二元信源的失真度量都是汉明失真度量。失真限制为总的失真限制，即$Ed(X_1, \hat{X}_1) + Ed(X_2, \hat{X}_2) \le D$，求该二维二元信源的率失真函数。