自控A HW-7 自动化1班 190410102 方尧

1.(1) $T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{8}{(s+2)^3}$

(2) $T(s)=\frac{1}{1+\frac{3}{2}s+\frac{3}{4}s^2+\frac{1}{8}s^3}$ 用 $G_L(s)=\frac{1}{1+d_1s+d_2s^2}$ 近似.

$M(s)=1+d_1s+d_2s^2$, $\Delta(s)=1+\frac{3}{2}s+\frac{3}{4}s^2+\frac{1}{8}s^3$

$M^{(0)}(0)=1$, $M^{(1)}(0)=d_1$, $M^{(2)}(0)=2d_2$, $M^{(3)}(0)=0$,

$\Delta^{(0)}(0)=1$, $\Delta^{(1)}(0)=\frac{3}{2}$, $\Delta^{(2)}(0)=\frac{3}{2}$, $\Delta^{(3)}(0)=\frac{3}{4}$

由 $M_{2q}=\sum_{k=0}^{2q}\frac{(-1)^{k+q}M^{(k)}(0)M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}$

$q=1$时 $M_2=d_1^2-2d_2$, $q=2$, $M_4=d_2^2$

类似地, $\Delta_2=\frac{3}{4}$, $\Delta_4=\frac{3}{16}$

令 $\Delta_2=M_2$, $M_4=\Delta_4$. 得到 $d_1=1.271$, $d_2=\frac{\sqrt{3}}{4}=0.433$.

故用 $G_L(s)=\frac{1}{0.433s^2+1.271s+1}$ 近似 $T(s)$

(3) $\boxed{\text{绘出图形在第2页，代码也置于第2页.}}$

分析：近似二阶系统单位阶跃响应：上升更快，上升时间更短，调节时间更短，但有轻微超调 0.083%，但总体而言，两者指标参数十分接近。具体指标如下

参数	原系统	近似系统
T_r/s	2.11	2.1
T_p/s	—	7.97
T_s/s	3.76	3.58
$\sigma\%$	—	0.083%

2. $\boxed{\text{响应曲线在第2页，代码也置于第2页}}$

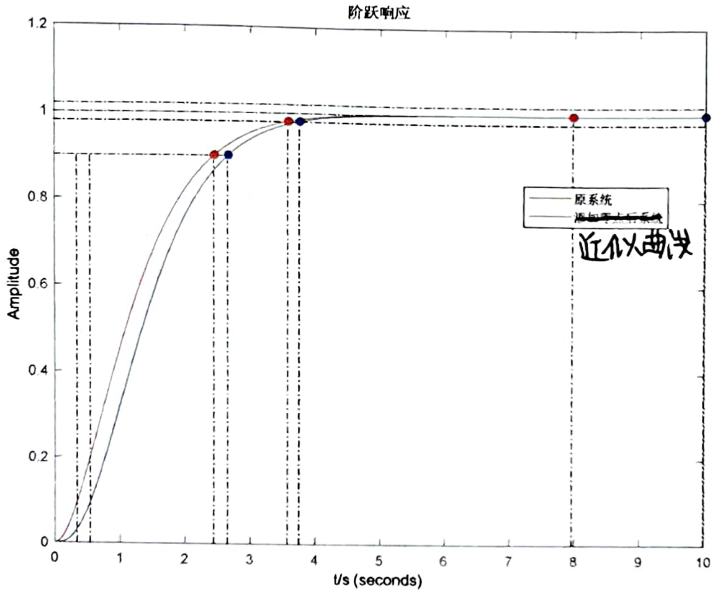
暂态响应：添加零点后系统上升时间，峰值时间，调节时间都更长，超调量更大，

稳态响应：由于添加右半平面零点，最终输出反向，原系统稳态为1，添加零点后稳态为-1.

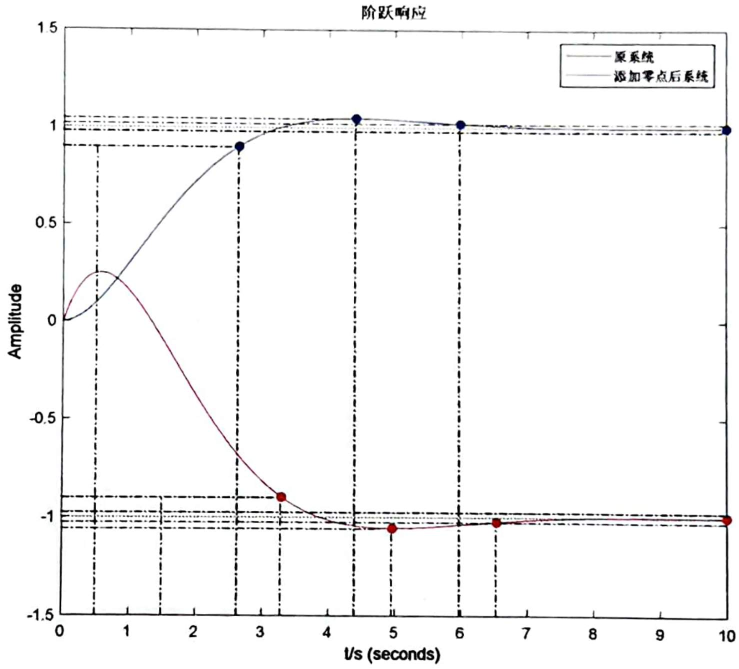
具体指标如下：

参数	原系统	添加零点后.
T_r/s	2.13	3.2865
T_p/s	4.4	4.96
T_s/s	5.98	6.54
$\sigma\%$	4.6%	5.74%

题 1(3)图



题 2 图




```
%hw-7 题 1(3)代码
clc,clear,close all
num1=[0 0 8];
den1=[1 6 12 8];
sys1=tf(num1, den1);
num2=[0 0 1];
den2=[0.433 1.271 1];
sys2=tf(num2, den2);
step(sys1,(0:0.01:10))
hold on,grid on,hold on
step(sys2,(0:0.01:10))
title('阶跃响应'),xlabel('t/s')
legend('原系统','添加零点后系统')
近似曲线
```

```
%hw-7 题 2 代码
clc,clear,close all
num1=[0 0 1];
den1=[1 2*0.7*1 1];
sys1=tf(num1, den1);
num2=[0 1 -1];
den2=[1 2*0.7*1 1];
sys2=tf(num2, den2);
step(sys1,(0:0.01:10))
hold on,grid on,hold on
step(sys2,(0:0.01:10))
title('阶跃响应'),xlabel('t/s')
legend('原系统','添加零点后系统')
```

3. $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2(1+\lambda)+\lambda = 0$ 得 $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

特征方程 $\lambda^3+\lambda^2+\lambda=0$ 特征值 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $\lambda_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

，由于特征值各异，A的约旦标准型为 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}$

4. (1) $e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$, $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

(2) $e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} \\ & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$, $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

(3) $e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+4} & \frac{-1}{s^2+4} \\ \frac{4}{s^2+4} & \frac{s}{s^2+4} \end{bmatrix}$, $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$.

5. 设 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 对应的特征向量为 $p_1 \cdots p_n$, $P = [p_1, p_2, \cdots, p_n]$

$A = PJP^{-1}$，其中 $J = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$

$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots = I + PJP^{-1} + \frac{1}{2!}PJ^2P^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}P\cdot J^kP^{-1} + \cdots$

$= P(I + J + \frac{1}{2!}J^2 + \cdots + \frac{1}{k!}J^k + \cdots)P^{-1}$

可知 $J_F = I + J + \frac{1}{2!}J^2 + \cdots + \frac{1}{k!}J^k$ 为对角阵，$J_F(i,i) = 1 + \lambda_i + \frac{1}{2!}\lambda_i^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\lambda_i^k + \cdots$

$= e^{\lambda_i}$

故 $\det(e^A) = |P||J_F||P^{-1}| = |J_F| = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$

故 $\det(e^A) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$ 得证