自动控制理论 A—作业 7

2021/10/22

（Due: Oct. 28, 2021）

1. (10’)

   给定常数矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，定义以 A 为幂的矩阵指数函数为

   $$E(At) \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$$

   a) 试证明 $E(A(t+\tau)) = E(At)E(A\tau)$， $\forall t,\tau \in \mathbb{R}$

   b) 试证明 $\dfrac{d}{dt}E(At) = AE(At) = E(At)A$

2. (20’)

   试根据下列系统矩阵求连续时间线性时不变系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 的状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

   $$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

3. (20’)

   给定线性时不变系统 $\dot{x} = Ax$，如果当 $x(0) = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ 时，$x(t) = \begin{bmatrix}e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$；当 $x(0) = \begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}^T$ 时， $x(t) = \begin{bmatrix}2e^{-2t} & -e^{-2t}\end{bmatrix}^T$，试求该系统的系统矩阵 A ，以及状态转移矩阵 $\Phi(t)$。

4. (15’)

   给定线性时不变系统 $\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 2 & -1\end{bmatrix}x$，试确定与状态 $x(t) = [2 \quad 5]^T$ 相对应的初始状态 $x(0)$.初始状态为t的函数

5. (10’)

   给定如下线性时不变系统

   $$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -2 & -3\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0 \\ 2\end{bmatrix}u, \qquad x(0) = \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}, \quad t \ge 0$$

   $$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

   当输入为 $u(t) = 1,\ t \ge 0$ 时，求系统的输出 $y(t)$。

6. (10’)

   试求如下状态方程的离散化方程。采样周期为T。离散化方程为T 的函数。

   $$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}u$$

7. (15’)

   设描述线性时不变系统的差分方程为 $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = u(k)$。选取 $x_1(k) = y(k),\ x_2(k) = y(k+1)$ 为一组状态变量，写出该系统的状态方程，并求其单位阶跃响应 $y(k)$。y(0)=0，y(1)=1