2017 学年秋季学期
概率论与数理统计试题

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设事件A,B满足$P\left(AB\right)=P\left(\overline{A}\overline{B}\right)$，且$P\left(A\right)=p$，则$P\left(B\right)=$______________.

1．设事件A,B满足$P\left(AB\right)=P\left(\overline{A}\overline{B}\right)$，且$P\left(A\right)=p$，则$P\left(B\right)=$________________．

答案：$1-p$

1．设事件A,B满足$P\left(AB\right)=P\left(\overline{A}\overline{B}\right)$，且$P\left(A\right)=p$，则$P\left(B\right)=$______________.

解：因

$$
\begin{aligned}
P\left(AB\right)&=P\left(\overline{A}\overline{B}\right)\\
&=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)\\
&=1-\left[P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)\right],\\
&=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(AB\right)
\end{aligned}
$$

故 $P\left(B\right)=1-P\left(A\right)=1-p$.

2．设二维随机变量(X,Y)的分布列为

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且$P(XY \neq 0) = 0.4$，$P(Y \leq 0 | X \leq 0) = 2/3$，则

$$(a,b,c) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

2．设二维随机变量(X,Y)的分布列为

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且$P(XY \neq 0)=0.4$，$P(Y \leq 0 | X \leq 0)=2/3$则

$(a,b,c)=$______________.

答案：$(a,b,c)=(0.1,0.2,0.1)$

解析：由分布列

$Y \backslash X$	-1	0	1	
-1	a	0	0.2	$a+0.2$
0	0.1	b	0.1	$b+0.2$
1	0	0.2	c	$c+0.2$
	$a+0.1$	$b+0.2$	$c+0.3$	

得

$$a+b+c=0.4.$$

由$P\left(XY \neq 0\right)=0.4$得

$$a+0.2+c=0.4.$$

由$P\left(Y \le 0 \middle| X \le 0\right) = 2/3$得

$$\frac{2}{3} = \frac{P\left(X \le 0, Y \le 0\right)}{P\left(X \le 0\right)},$$

$$= \frac{a+b+0.1}{a+b+0.3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{0.2}{a+b+0.1},$$

即

$$a+b+0.1 = 0.4,$$

从而由

$$\begin{cases} a+b+0.1=0.4 \\ a+b+c=0.4 \\ a+0.2+c=0.4 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a=0.1 \\ b=0.2. \\ c=0.1 \end{cases}$$

3．设随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

则$EXY=$__________**.**

3．设随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

则$EXY=$____________.

答案：$\frac{1}{6}$.

3．设随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

则$EXY=$____________.

解析：由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$得

$$1=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}Ae^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=A\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}e^{-3y}\mathrm{d}y=\frac{A}{6}，A=6.$$

再由随机变量X和Y的联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-2x}\times 3e^{-3y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

得

$$X\sim E(2),\ Y\sim E(3),$$

因此

$$EXY=EXEY=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

4．设随机变量$\left(X,Y\right)$服从正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，其中$\mu_1=1$，$\mu_2=2$，$\sigma_1^2=2$，$\sigma_2^2=8$，$\rho=0.2$，则$X-2Y$亦服从正态分布，且此分布为$N($________,________$)$.

4．设随机变量$\left(X,Y\right)$服从正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，其中$\mu_1=1$，$\mu_2=2$，$\sigma_1^2=2$，$\sigma_2^2=8$，$\rho=0.2$，则$X-2Y$亦服从正态分布，且此分布为$N(\underline{\qquad\qquad},\underline{\qquad\qquad})$.

答案：$N(-3,30.8)$.

4．设随机变量$\left(X,Y\right)$服从正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，其中$\mu_1=1$，$\mu_2=2$，$\sigma_1^2=2$，$\sigma_2^2=8$，$\rho=0.2$，则$X-2Y$亦服从正态分布，且此分布为$N($________,________$)$.

解析：由已知

$$X\sim N(1,2)，Y\sim N(2,8)，\rho_{XY}=0.2，$$

从而

$$\begin{aligned}E\left(X-2Y\right)&=EX-2EY\\&=1-2\times2=-3\end{aligned},$$

$$
\begin{aligned}
D(X-2Y) &= DX + 4DY - 2\operatorname{cov}(X,2Y) \\
&= DX + 4DY - 4\operatorname{cov}(X,Y) \\
&= DX + 4DY - 4\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}\,, \\
&= 2+4\times 8-4\times 0.2\times\sqrt{2}\times\sqrt{8} \\
&= 30.8
\end{aligned}
$$

故

$$
X-2Y \sim N(-3,30.8)\,.
$$

5．某旅行社随机访问了 **25** 名游客，得知其平均消费额$\bar{X}=80$元，样本标准差$s=12$元．若已知旅行者消费额服从正态分布，则平均消费额μ的置信度为 **0.95** 的置信区间为________________．

（$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(25)=1.7081$）

5．某旅行社随机访问了 **25** 名游客，得知其平均消费额 $\bar{X}=80$元，样本标准差$s=12$元．若已知旅行者消费额服从正态分布，则平均消费额μ的置信度为 **0.95** 的置信区间为____________________.

答案：**(75.05，84.95)**

5．某旅行社随机访问了 **25** 名游客，得知其平均消费额 $\bar{X}=80$元，样本标准差$s=12$元．若已知旅行者消费额服从正态分布，则平均消费额μ的置信度为 **0.95** 的置信区间为____________________．

解析：σ未知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\\
&\quad=\left(80-t_{0.05/2}(25-1)\frac{12}{\sqrt{25}},80+t_{0.05/2}(25-1)\frac{12}{\sqrt{25}}\right)\\
&\quad=\left(80-2.0639\times\frac{12}{\sqrt{25}},80+2.0639\times\frac{12}{\sqrt{25}}\right)\\
&\quad=(80-4.95336,80+4.95336)\\
&\quad=(75.04664,84.95336).
\end{aligned}
$$

二、选择题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1．设$0<P(A)<1$，$P(B)>0$，且$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有【　　】

（**A**）$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$.　　（**B**）$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$.

（**C**）$P(AB)=P(A)P(B)$.　　（**D**）$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

1．设$0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，且$P(B|A) = P(B|\overline{A})$，则必有【　　】

（**A**）$P(A|B) = P(\overline{A}|B)$.　　（**B**）$P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$.

（**C**）$P(AB) = P(A)P(B)$.　　（**D**）$P(AB) \neq P(A)P(B)$.

答案：**C**

1．设$0<P(A)<1$，$P(B)>0$，且$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有【　　】

（**A**）$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$.　　（**B**）$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$.

（**C**）$P(AB)=P(A)P(B)$.　　（**D**）$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

解析：由$P(B|A)=P(B|\overline{A})$得

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})},$$
$$=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

从而

$$P(AB)(1-P(A))=P(A)[P(B)-P(AB)],$$

所以

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right),$$

因此选 **C**.

2．下列函数可作为连续型随机变量的概率密度函数的是

（**A**）$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \pi\le x\le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（**B**）$g(x)=\begin{cases}-\sin x, & \pi\le x\le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（**C**）$\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & \pi\le x\le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（**D**）$h(x)=\begin{cases}1-\cos x, & \pi\le x\le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.　　　　【　　】

2．下列函数可作为连续型随机变量的概率密度函数的是

（**A**）$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \pi \le x \le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（**B**）$g(x)=\begin{cases}-\sin x, & \pi \le x \le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（**C**）$\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & \pi \le x \le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

（**D**）$h(x)=\begin{cases}1-\cos x, & \pi \le x \le 3\pi/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$. 【 **B** 】

2．解析：利用概率密度函数的非负性排除 **A** 和 **C**；利用概率密度的规范性排除 **D**，因此选 **B**.

事实上，对于选项 **B**，有 $g(x) \geq 0$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{3\pi/2} -\sin x \mathrm{d}x$$

$$= \cos x \Big|_{\pi}^{3\pi/2} = 1；$$

对于选项 **D**，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{3\pi/2} (1 - \cos x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + 1.$$

3．随机变量X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$，则随着$\sigma$的增大，概率$P\left(\left|X-\mu\right|<\sigma\right)$将【　　】

（**A**）单调增大.　　（**B**）单调减少.

（**C**）保持不变.　　（**D**）增减不定.

3．随机变量X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$，则随着$\sigma$的增大，概率$P\left(\left|X-\mu\right|<\sigma\right)$将【　　】

（**A**）单调增大.　　　（**B**）单调减少.

（**C**）保持不变.　　　（**D**）增减不定.

答案：**C**

3．随机变量X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则随着$\sigma$的增大，概率$P\left(\left|X-\mu\right|<\sigma\right)$将【　　】

（**A**）单调增大.　　（**B**）单调减少.

（**C**）保持不变.　　（**D**）增减不定.

解析：这是因为

$$P\left(\left|X-\mu\right|<\sigma\right)=2\Phi\left(1\right)-1,$$

故选 **C**.

事实上，

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|X-\mu\right|<\sigma\right) &= P\left(-\sigma < X-\mu < \sigma\right) \\
&= P\left(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\right) \\
&= P\left(\mu-\sigma < X \le \mu+\sigma\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(1\right)-\Phi\left(-1\right) \\
&= \Phi\left(1\right)-\left[1-\Phi\left(1\right)\right] \\
&= 2\Phi\left(1\right)-1
\end{aligned}
$$

•

4. 随机变量X服从指数分布，$Y=\begin{cases} X, & 2<X<5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$的分布函数【　　】

（**A**）是连续函数.

（**B**）至少有两个间断点.

（**C**）是阶梯函数.

（**D**）恰好有一个间断点.

4. 随机变量 X 服从指数分布，$Y=\begin{cases} X, & 2<X<5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的分布函数【　　】

（**A**）是连续函数.　　（**B**）至少有两个间断点.

（**C**）是阶梯函数.　　（**D**）恰好有一个间断点.

答案：**D**

4. 随机变量 X 服从指数分布，$Y=\begin{cases} X, & 2<X<5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的分布函数【　　】

（**A**）是连续函数.　　　　（**B**）至少有两个间断点.

（**C**）是阶梯函数.　　　　（**D**）恰好有一个间断点.

解析：因

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - P(2 < X < 5), & 0 \le y < 2, \\ 1 - P(2 < X < 5) + \int_2^y f_X(x)\mathrm{d}x, & 2 \le y < 5 \\ 1, & y \ge 5 \end{cases}$$

故$F_Y(y)$恰好有一个间断点 **0**，因此选 **D**.

5．设总体X服从参数为λ的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，则下列不是参数为λ的无偏估计的是【　　】

（**A**）$\overline{X}$.　　（**B**）$\frac{2}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$.

（**C**）$\frac{1}{2}\overline{X}+\frac{1}{2}S^2$.　　（**D**）$\frac{4}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$.

5．设总体X服从参数为λ的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，则下列不是参数为λ的无偏估计的是【　　】

（**A**）X.　　（**B**）$\frac{2}{3}\bar{X}-\frac{1}{3}S^2$.

（**C**）$\frac{1}{2}\bar{X}+\frac{1}{2}S^2$.　　（**D**）$\frac{4}{3}\bar{X}-\frac{1}{3}S^2$.

答案：**B**

5．设总体X服从参数为λ的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，则下列不是参数为λ的无偏估计的是【　　】

（**A**）X．　　（**B**）$\frac{2}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$．

（**C**）$\frac{1}{2}\overline{X}+\frac{1}{2}S^2$．　　（**D**）$\frac{4}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$．

解析：因$E\overline{X}=EX=\lambda$，$ES^2=DX=\lambda$，故选 **B**．

事实上，由

$$EX=\lambda,$$

$$E\left(\frac{2}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2\right)=\frac{2}{3}E\overline{X}-\frac{1}{3}ES^2=\frac{1}{3}\lambda,$$

$$E\left(\frac{1}{2}\overline{X}+\frac{1}{2}S^2\right)=\frac{1}{2}E\overline{X}+\frac{1}{2}ES^2=\lambda,$$

$$E\left(\frac{4}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2\right)=\frac{4}{3}E\overline{X}-\frac{1}{3}ES^2=\lambda,$$

因此选 **B**.

三、（**8** 分）甲袋中有 **2** 个白球 **3** 个黑球，乙袋中有 **3** 个白球 **2** 个黑球，从甲袋中取出一个球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，若放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的，求放入乙袋的球是黑球的概率**.**

三、（**8** 分）甲袋中有 **2** 个白球 **3** 个黑球，乙袋中有 **3** 个白球 **2** 个黑球，从甲袋中取出一个球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，若放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的，求放入乙袋的球是黑球的概率.

答案：$\dfrac{9}{17}$

三、（8 分）甲袋中有 2 个白球 3 个黑球，乙袋中有 3 个白球 2 个黑球，从甲袋中取出一个球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，若放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的，求放入乙袋的球是黑球的概率.

解析：设

$$A = \text{“放入乙袋的是黑球”},$$

$D =$“放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的”,

则

$$D \subset A + \overline{A},$$

从而

$$P\left(A\middle|D\right)=\frac{P\left(A\right)P\left(D\middle|A\right)}{P\left(A\right)P\left(D\middle|A\right)+P\left(\bar{A}\right)P\left(D\middle|\bar{A}\right)}$$

$$=\frac{\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^1}{C_6^1}}{\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^1}{C_6^1}+\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_4^1}{C_6^1}}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}}=\frac{9}{17}.$$

或：设

$A=$“放入乙袋的是黑球”， $B=$“从乙袋取出的是黑球”，

$D=$“放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的”，

则$D=AB+\overline{A}\overline{B}$，从而

$$
\begin{aligned}
P(D)&=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})\\
&=\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{6},\\
&=\frac{17}{30}
\end{aligned}
$$

因此

$$P\left(A\middle|D\right)=\frac{P(AD)}{P(D)}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(AB+\overline{A}\overline{B})}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}}=\frac{9}{17}.$$

四、（**8** 分）设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（**1**）求在$X=x$的条件下Y的条件概率密度；

（**2**）求$Z=Y-X$的概率密度.

四、（**8** 分）设二维连续型随机变量$\left(X,Y\right)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}.$$

（**1**）求在$X=x$的条件下Y的条件概率密度；

（**2**）求$Z=Y-X$的概率密度. （**3**）求EZ.

答案：（**1**）$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases} e^{-(y-x)}, & y>x \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$

（**2**）$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}.$

四、（**8** 分）设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（**1**）求在$X=x$的条件下Y的条件概率密度；

（**2**）求$Z=Y-X$的概率密度.

解析：（**1**）由

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

得

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故当$x>0$时，在$X=x$的条件下，Y的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{-(y-x)}, & y>x\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

（**2**）因

$$F_Z(z) = P\left(Z \le z\right) = P\left(Y - X \le z\right)$$

$$= \begin{cases} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_x^{x+z} e^{-y} \mathrm{d}y, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases} ,$$

故 $$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}.$$

五、（**8** 分）设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中 G 为坐标轴与直线 $x+y-1=0$ 所围的三角形区域，计算 EX，DX，以及 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

五、（**8** 分）设随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中G为坐标轴与直线$x+y-1=0$所围的三角形区域，计算EX，DX，以及X与Y的相关系数ρ_{XY}.

答案：$EX=\dfrac{2}{5}$，$DX=\dfrac{1}{25}$，$\rho_{XY}=-\dfrac{2}{3}$.

五、（**8** 分）设随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中G为坐标轴与直线$x+y-1=0$所围的三角形区域，计算EX，DX，以及X与Y的相关系数ρ_{XY}.

分析：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

$DX=EX^2-(EX)^2$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy$

解析：因

$$EY=EX=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} x\cdot 24xy\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 12x^2(1-x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(12x^4-24x^3+12x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{12}{5}x^5-6x^4+4x^3\Big|_0^1$$

，

$$=\frac{2}{5}$$

而

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x^2 \cdot 24xy\mathrm{d}y = \int_0^1 12x^3(1-x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(12x^5 - 24x^4 + 12x^3\right)\mathrm{d}x \qquad , \\
&= 2x^6 - \frac{24}{5}x^4 + 3x^4 \Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

故

$$DY = DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

又

$$
\begin{aligned}
EXY &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy \cdot 24xy \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 8x^2 (1-x)^3 \mathrm{d}x \\
&= 8\int_0^1 \left(x^2 - 3x^3 + 3x^5 - x^6\right) \mathrm{d}x \\
&= 8\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

，

故

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$$=\frac{\frac{2}{15}-\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{25}}}=-\frac{2}{3}.$$

六、（**12** 分） 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}3e^{-3(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & 其他\end{cases},$$

其中参数θ未知，$X_1,X_2,\ldots X_n$是来自总体X的简单随机样本**.**

（**1**）求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$与最大似然估计$\hat{\theta}_2$；

（**2**）判断$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$是否为θ的无偏估计，如果不是请分别相应给出修正后的无偏估计；（**3**）比较（**2**）中无偏估计的有效性**.**

六、（**12** 分） 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}3e^{-3(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

其中参数θ未知，$X_1,X_2,\ldots X_n$是来自总体X的简单随机样本.

求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$与最大似然估计$\hat{\theta}_2$.

答案：$\hat{\theta}_1=\bar{X}-\dfrac{1}{3}$，$\hat{\theta}_2=X_{(1)}$；$\hat{\theta}_1$为$\theta$的无偏估计，而$\hat{\theta}_2$不是；$\hat{\theta}_2$的修正$\hat{\theta}_3=\hat{\theta}_2-\dfrac{1}{3n}$为$\theta$的无偏估计；$\hat{\theta}_3$比$\hat{\theta}_1$更有效.

六、（**12** 分） 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}3e^{-3(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & 其他\end{cases},$$

其中参数 θ 未知， $X_1, X_2, \ldots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本**.**

（**1**）求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 与最大似然估计 $\hat{\theta}_2$；

（**2**）判断 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是否为 θ 的无偏估计，如果不是请分别相应给出修正后的无偏估计；（**3**）比较（**2**）中无偏估计的有效性**.**

解析：（1）求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$

$$\mu_1 = EX = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot 3e^{-3(x-\theta)}\mathrm{d}x$$

①因

$$\underline{\underline{t = x-\theta}} \int_{0}^{+\infty} (t+\theta) \cdot 3e^{-3t}\mathrm{d}t$$

$$= \theta\int_{0}^{+\infty} 3e^{-3t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} t \cdot 3e^{-3t}\mathrm{d}t,$$

$$= \theta + \frac{1}{3}$$

②故$\theta = \mu_1 - \dfrac{1}{3}$，③从而$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \dfrac{1}{3}$.

求参数θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2$

似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}3^n\exp\left\{-3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)\right\}, & x_i>\theta, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3^n\exp\left\{-3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)\right\}, & x_{(1)}>\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由最大似然估计的定义得θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2=X_{(1)}$.

（**2**）判断$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$是否为θ的无偏估计，如果不是请分别相应给出修正后的无偏估计；

因

$$E\hat{\theta}_1 = E\left(\bar{X} - \frac{1}{3}\right) = E\bar{X} - \frac{1}{3} = EX - \frac{1}{3}$$

$$= EX - \frac{1}{3} = \theta + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \qquad ,$$

$$= \theta$$

故$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计.

因总体X的分布函数为

$$F(x;\theta)=\int_{-\infty}^{x} f(x;\theta)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x\le\theta\\ \int_{\theta}^{x} 3e^{-3(x-\theta)}\mathrm{d}x, & x>\theta\end{cases},$$

$$=\begin{cases}0, & x\le\theta\\ 1-e^{-3(x-\theta)}, & x>\theta\end{cases}$$

故$\hat{\theta}_2=X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为

$$F_{X_{(1)}}(x;\theta)=\begin{cases}0, & x\le\theta\\ 1-e^{-3n(x-\theta)}, & x>\theta\end{cases},$$

从而$\hat{\theta}_2 = X_{(1)} = \min\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$的概率密度函数为

$$f_{X_{(1)}}\left(x;\theta\right) = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ 3ne^{-3n\left(x-\theta\right)}, & x > \theta \end{cases},$$

因此

$$E\hat{\theta}_2 = EX_{(1)} = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot 3ne^{-3n\left(x-\theta\right)}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{t = x - \theta}} \int_0^{+\infty} \left(t+\theta\right) \cdot 3ne^{-3nt}\mathrm{d}t ,$$

$$= \theta\int_0^{+\infty} 3ne^{-3nt}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t \cdot 3ne^{-3nt}\mathrm{d}t = \theta + \frac{1}{3n}$$

所以$\hat{\theta}_2$不是θ的无偏估计，$\hat{\theta}_2$的修正

$$\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_2 - \frac{1}{3n} = X_{(1)} - \frac{1}{3n}$$

为θ的无偏估计.

（**3**）比较（**2**）中无偏估计的有效性**.**

因

$$EX^2=\int_\theta^{+\infty}x^2\cdot 3e^{-3(x-\theta)}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{t=x-\theta}}\int_0^{+\infty}(t+\theta)^2\cdot 3e^{-3t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}t^2\cdot 3e^{-3t}\mathrm{d}t+2\theta\int_0^{+\infty}t\cdot 3e^{-3t}\mathrm{d}t+\theta^2\int_0^{+\infty}3e^{-3t}\mathrm{d}t,$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+2\theta\times\frac{1}{3}+\theta^2$$

故

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{9},$$

从而

$$D\hat{\theta}_1 = D\left(\bar{X} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= D\bar{X} \qquad .$$

$$= \frac{1}{n} DX = \frac{1}{9n}$$

又

$$EX_{(1)}^2=\int_\theta^{+\infty}x^2\cdot 3ne^{-3n(x-\theta)}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{t=x-\theta}}\int_0^{+\infty}\left(t+\theta\right)^2\cdot 3ne^{-3nt}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}t^2\cdot 3ne^{-3nt}\mathrm{d}t+2\theta\int_0^{+\infty}t\cdot 3ne^{-3nt}\mathrm{d}t+\theta^2\int_0^{+\infty}3ne^{-3nt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\left(3n\right)^2}+\frac{1}{\left(3n\right)^2}+2\theta\times\frac{1}{3n}+\theta^2$$

故

$$DX_{(1)}=EX_{(1)}^2-\left(EX_{(1)}\right)^2=\frac{1}{9n^2},$$

从而

$$D\hat{\theta}_3 = D\left(X_{(1)} - \frac{1}{3n} \right) = DX_{(1)} = \frac{1}{9n^2}.$$

因

$$D\hat{\theta}_1 = \frac{1}{9n} > \frac{1}{9n^2} = D\hat{\theta}_3,$$

故$\hat{\theta}_3$比$\hat{\theta}_1$更有效.

七、**(4 分)**某射手的射击命中率为$3/4$，现对一目标连续射击，直到第二次命中为止，令X表示第二次命中为止所用的射击次数，求X的概率分布，并计算X的期望**.**

七、**(4 分)**某射手的射击命中率为$3/4$，现对一目标连续射击，直到第二次命中为止，令X表示第二次命中为止所用的射击次数，求X的概率分布，并计算X的期望**.**

答案：$\frac{8}{3}$

七、**(4 分)**某射手的射击命中率为$3/4$，现对一目标连续射击，直到第二次命中为止，令X表示第二次命中为止所用的射击次数，求X的概率分布，并计算X的期望**.**

解析：X的概率分布为

$$P(X=k)=C_{k-1}^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}，\quad k=2,3,\cdots.$$

从而X的期望

$$EX=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$$

$$=\frac{9}{16}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}$$

$$=\frac{9}{16}\left(\sum_{k=2}^{\infty}x^{k}\right)''\Bigg|_{x=\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{9}{16}\frac{2}{(1-x)^{3}}\Bigg|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{8}{3} \qquad ,$$

其中

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\right)'' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)''$$

$$= \left(\frac{2x - x^2}{(1-x)^2}\right)'$$

$$= \frac{2(1-x)^2 + 2x(2-x)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

预测：

设二维随机变量$\left(X,Y\right)$的概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$

$$\left.\times[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\right\},$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

求$D\left(X+2Y\right)$?

解：由$\left(X,Y\right)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$知

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)，\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

$$\rho_{XY}=\rho$$

从而

$$\begin{aligned} D\left(X+2Y\right) &= DX+D\left(2Y\right)+2\operatorname{cov}\left(X,2Y\right) \\ &= DX+4DY+4\operatorname{cov}\left(X,Y\right) \\ &= DX+4DY+4\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}. \\ &= \sigma_1^2+4\sigma_2^2+4\rho\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$