HW-1 19041002 自动化1班 方尧

1. 相角裕度 { 几何意义：开环极坐标图与单位圆交点沿单位圆与(-1,0)的远近
物理意义：系统在相角方面离临界稳定状态的远近程度

幅值裕度 { 几何意义：开环极坐标图与负实轴交点离(-1,j0)远近程度
物理意义：系统在幅值方面离临界稳定状态的远近程度

2. 具有正相角裕度的负反馈系统不一定是稳定的.

3. 不一定，因为可能不存在相角裕度

4. 不一定很高

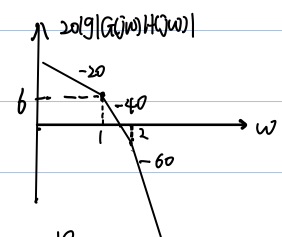
5. 欠阻尼二阶反馈系统不一定存在谐振峰值，
当 $w_r = w_n\sqrt{1-2\xi^2} \geq 0$ 即 $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时存在谐振峰值.
最大值 $M_r = A(w_r)/A(0) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

5. $G(s)H(s) = \frac{ke^{-0.1s}}{s(0.1s+1)(s+1)}$，剪切频率 $w_c = 5\,rad/s$

即 $|G(jw_c)H(jw_c)| = \left|\frac{ke^{-0.1j5}}{j5(0.1\cdot j5+1)(j5+1)}\right| = 1$

解得此时开环增益 $k = \frac{5\sqrt{130}}{2}$

6. $G(s)H(s) = \frac{2e^{-\tau s}}{s(1+s)(1+\frac{s}{2})}$ 过(1, 20lg2) 即(1,6)，斜率 -20dB/dec



$|GH| = \frac{2}{w_c\sqrt{1+w_c^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{w_c}{2})^2}} = 1$

求得剪切频率 $w_c = 1.1432\,rad/s$

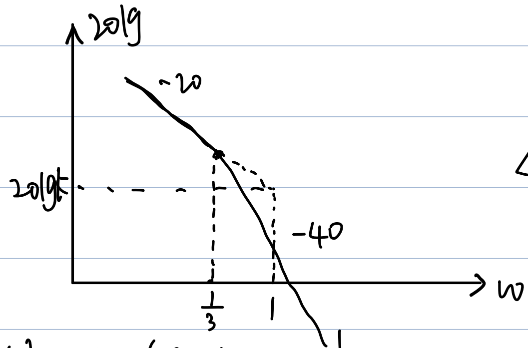
相位裕度 $\gamma = \angle G(jw_c)H(jw_c) + 180° =$

$180° - w_c\tau\frac{180°}{\pi} - 90° - \arctan w_c - \arctan\frac{w_c}{2} > 0$

得 $\tau < 0.1744$ 即 $0 < \tau < 0.1744$

HW-1 19041002 自动化1班 方尧

7. 过$(1, 20\lg K)$ 斜率$-20dB/dec$，转折点 $w=1, \frac{1}{3}$



w_g满足

$\angle G(jw_g)H(jw_g) = -180°$ 得 $w_g = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$$\frac{K}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{3}}\sqrt{1+9\times\frac{1}{3}}} = 1$$

对应幅值裕度 $\left|\frac{1}{G(jw_g)H(jw_g)}\right| = 1$ 得

得临界增益K值为 $K = \frac{4}{3}$

8 $G(s)H(s) = \frac{10(1+\tau s)}{s(s-1)}$ 具有45°相角裕度，即过 $1\angle-135°$

$$1\angle-135° = \frac{10(1+jw_c\tau)}{jw_c(jw_c-1)}$$ 即 $(w_c+w_c^2)j + w_c^2 - w_c = 10\sqrt{2}(1+jw_c\tau)$

对应相等 $\begin{cases} w_c + w_c^2 = 10\sqrt{2}w_c\tau \\ w_c^2 - w_c = 10\sqrt{2} \end{cases}$ 得 $\tau = 0.375$ $w_c = 4.3\ rad/s$

例2.1

幅频特性 $|G(jw)H(jw)| = \frac{K\sqrt{\tau^2w^2+1}}{w^2\sqrt{T^2w^2+1}}$

相频特性 $\angle G(jw)H(jw) = -180° + \arctan\frac{(\tau-T)w}{1+T\tau w^2}$

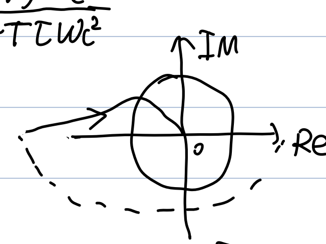
令 $\angle G(jw)H(jw) = -180°$ 得 $w_g = 0$（舍去） $w_g = \infty$

幅值裕度 $20\lg K_g = 20\lg\left|\frac{1}{G(jw_g)H(jw_g)}\right| = \infty > 0$

相位裕度 $\gamma = \angle G(jw_c)H(jw_c) - (-180°) = \arctan\frac{(\tau-T)w_c}{1+T\tau w_c^2}$

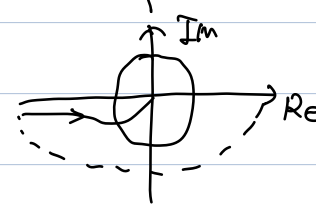
①若 $T > \tau$，相角裕度为负

此时，$P=0, N=-1, Z=P-2N=2>0$，系统不稳定



②若 $T < \tau$，相角裕度为正

此时，$P=0, N=0, Z=0$，系统稳定



HW-1 19041002 自动化1班 方亮

课上要求自行推导二阶系统 ω_c,γ，二阶系统闭环频域特性 ω_r, M_r, ω_b

二阶系统稳定裕度 ω_c,γ，

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\xi\omega_n)}=\frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+4\xi^2\omega_n^2}}\angle\left(-90^\circ-\arctan\frac{\omega}{2\xi\omega_n}\right)$$

令 $\frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega^2+4\xi^2\omega_n^2}}=1$ 即 $\omega_c^4+4\xi^2\omega_n^2\omega_c^2-\omega_n^4=0$

得 $\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}$

$$\gamma=\angle\left(-90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{2\xi\omega_n}\right)-(-180^\circ)$$

$$=90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{2\xi\omega_n}$$

$$=\arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}$$

二阶闭环频域性能 ω_r, M_r, ω_b

$$\Phi(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2j\xi\omega_n\omega+\omega_n^2}$$

$$|\Phi(j\omega)|=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega_n\omega)^2}}=A(\omega),\quad A(0)=1$$

令 $f(\omega)=(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2$

$$=[\omega^2-(1-2\xi^2)\omega_n^2]^2+\omega_n^4(4\xi^2-4\xi^4)$$

当 $1-2\xi^2>0$，即 $\xi\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，存在谐振峰

$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$，$M_r=A(\omega_r)/A(0)=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^4(4\xi^2-4\xi^4)}}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

由 $A(\omega_b)=\frac{\sqrt{2}}{2}A(0)$ 即 $\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_b^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega_b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

即 $\omega_b^4+(4\xi^2\omega_n^2-2\omega_n^2)\omega_b^2-\omega_n^4=0$

求根公式，可以求出 $\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$