

无源 LC 滤波器与滤波级联电路特性分析

学号：190410102 姓名：方尧

（无源滤波器频率响应分析，给出一种利用二端口 A 参数求解频率响应的方法）
摘要：

无源滤波由于其价格优势、且不受硬件限制，广泛用于电力、油田、钢铁、冶金、煤矿、石化、造船、汽车、电铁、新能源等行业；本文介绍了基本无源 LC 滤波器电路的类别，分析并得到了各种 LC 滤波器的频率响应，利用 MATLAB 软件绘制并呈现了相对应的频率响应曲线。本文将无源 LC 滤波器与二端口相结合，利用二端口级联网络传输参数矩阵的性质，以低通和高通滤波器相互级联为例子，求得无源 LC 滤波级联电路的频率响应。本文复现了 LC 滤波器频率响应的求解方法，给出了利用二端口性质求级联频率响应的一种方法。

关键词：无源 LC 滤波器；频率特性；二端口级联； A 参数矩阵

1 引言

利用电路的频率特性，可以实现对信号中不同频率成分的选择，即允许所需频率分量通过电路，拟制不需要的频率信号，实现这一功能的电路称为滤波器。按选择频率的频段分类，滤波器可分为低通、高通、带通和带阻滤波器。

仅由无源元件（如电阻 R 、电感 L 、电容 C 等）组成的滤波器叫做无源滤波器。无源滤波器结构简单，便于搭建^[1]。所用电路理论基础教材选学内容 7.5 节简要介绍了仅由电感 L 与电容 C 组成的 LC 无源滤波器^[2]。本文旨在较为全面透彻地分析 LC 无源滤波器原理并推证其频率特性，分析不同 LC 滤波器的特性及其相互之间的区别。

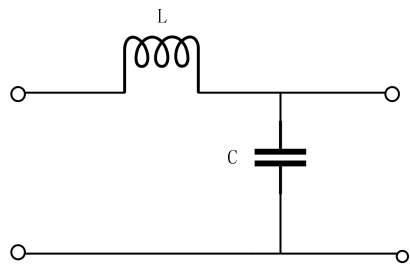


figure 1 LC 低通滤波器

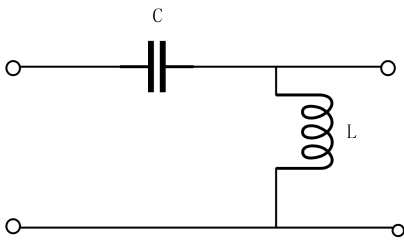


figure 2 LC 高通滤波器

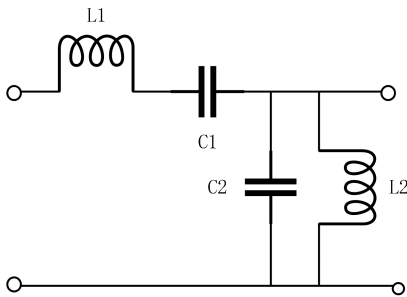


figure 3 LC 带通滤波器

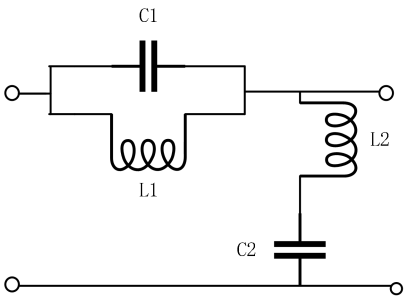


figure 4 LC 带阻滤波器

2 原理

现分析各 LC 滤波器的频率响应。

A. LC 低通滤波器

电路图如图 5 所示。

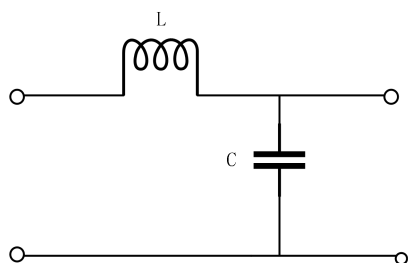


figure 5 LC 低通滤波电路

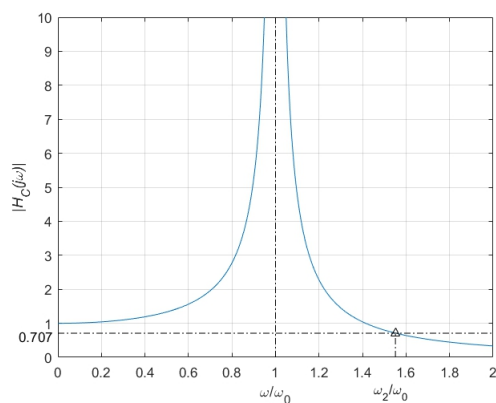


figure 6 LC 低通滤波频率特性

谐振频率 ω_0 满足 $j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$, 推得 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\text{幅频特性 } |H_C(j\omega)| = \left| \frac{U_c}{U} \right| = \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} \right| = \left| \frac{1}{1 - \omega^2 LC} \right| = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right|$$

利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 6 所示。

B. LC 高通滤波器

电路图如图 7 所示。

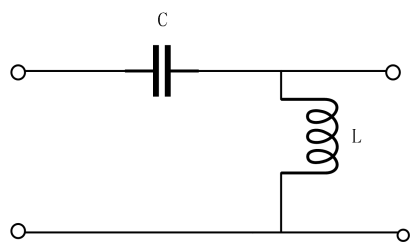


figure 7 LC 高通滤波电路

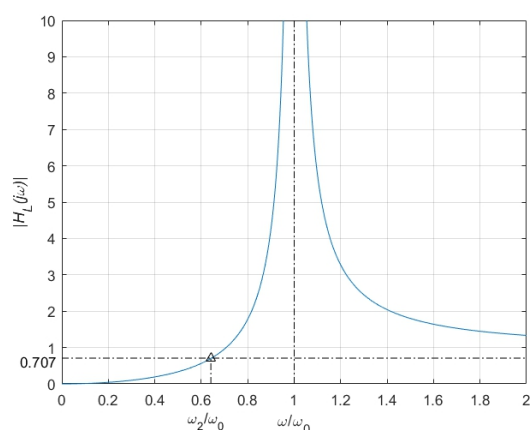


figure 8 LC 高通滤波幅频特性

谐振频率 ω_0 满足 $j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$ 推得 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\text{幅频特性 } |H_c(j\omega)| = \left| \frac{U_L}{U} \right| = \left| \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} \right| = \left| \frac{\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \right| = \left| \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 - 1} \right|$$

利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 8 所示。

C. LC 带通滤波器

电路图如图 9 所示。

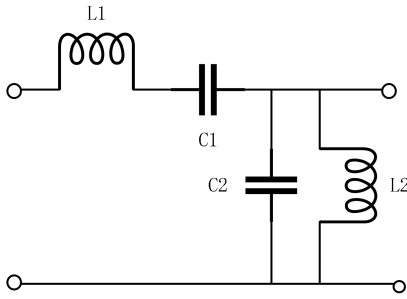


figure 9 LC 带通滤波电路

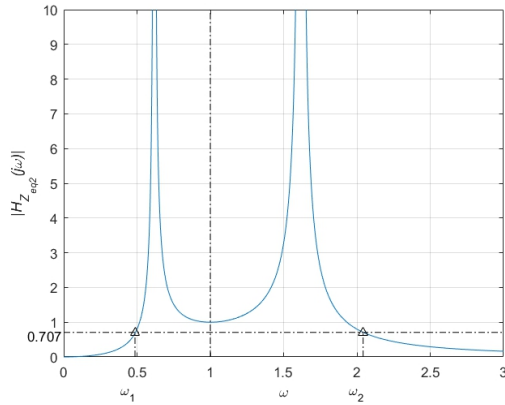


figure 10 LC 带通滤波幅频特性

L_1 与 C_1 串联等效阻抗、 L_2 与 C_2 并联等效阻抗分别为

$$Z_{eq1} = j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}), \quad Z_{eq2} = \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2}$$

L_1 与 C_1 串联谐振频率 $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, L_2 与 C_2 并联谐振频率 $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$

记 $\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}}$, 幅频特性 $|H_{Z_{eq2}}(j\omega)|$ 满足

$$\begin{aligned} |H_{Z_{eq2}}(j\omega)| &= \left| \frac{U_{Z_{eq2}}}{U} \right| = \left| \frac{Z_{eq2}}{Z_{eq1} + Z_{eq2}} \right| = \left| 1 - \frac{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)}{\omega^2 L_2 C_1} \right|^{-1} \\ &= \left| 1 - \frac{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)}{\left(\frac{\omega}{\omega_3} \right)^2} \right|^{-1} \end{aligned}$$

$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |H_{Z_{eq2}}(j\omega)| = 0^+, \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H_{Z_{eq2}}(j\omega)| = 0^+$ 。由于幅频特性曲线与 $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ 取值有关,

不妨观察当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ 时, 利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 10 所示。

D. LC 带阻滤波器

电路图如图 11 所示。

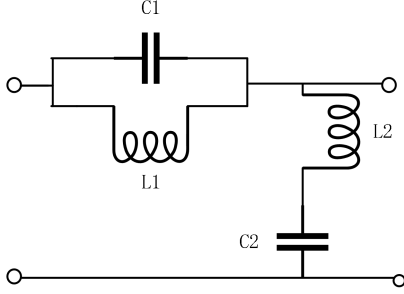


figure 11 LC 带阻滤波电路

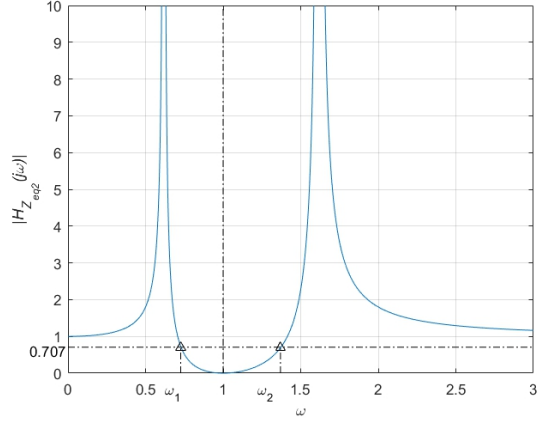


figure 12 LC 带阻滤波幅频特性

L_1 与 C_1 并联等效阻抗、 L_2 与 C_2 串联等效阻抗分别为

$$Z_{eq1} = \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}, \quad Z_{eq2} = j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})$$

L_1 与 C_1 并联谐振频率 $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, L_2 与 C_2 串联谐振频率 $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$

记 $\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$, 幅频特性 $|H_{Z_{eq2}}(j\omega)|$ 满足

$$\begin{aligned} |H_{Z_{eq2}}(j\omega)| &= \left| \frac{U_{Z_{eq2}}}{U} \right| = \left| \frac{Z_{eq2}}{Z_{eq1} + Z_{eq2}} \right| = \left| 1 - \frac{\omega^2 L_1 C_2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \right|^{-1} \\ &= \left| 1 - \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)} \right|^{-1} \end{aligned}$$

$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |H_{Z_{eq2}}(j\omega)| = 1^+, \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H_{Z_{eq2}}(j\omega)| = 1^+$ 。由于幅频特性曲线与 $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ 取值有关, 不妨观察当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ 时, 利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 12 所示。

3 示例

现用 LC 高通滤波电路与 LC 低通滤波电路相互级联探究滤波器级联特性。

二端口 a 与二端口 b 级联，传输参数矩阵 $A^a = \begin{bmatrix} A_{11}^a & A_{12}^a \\ A_{21}^a & A_{22}^a \end{bmatrix}$, $A^b = \begin{bmatrix} A_{11}^b & A_{12}^b \\ A_{21}^b & A_{22}^b \end{bmatrix}$

其整体传输参数矩阵 A 满足 $A = A^a \cdot A^b$

A. 求 LC 低通滤波电路（如图 5）和 LC 高通滤波电路（如图 7）传输参数矩阵 A

1) LC 低通滤波电路传输参数矩阵 A

$$A_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{Z_c + Z_L}{Z_c} = 1 - \omega^2 LC; A_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = G_c = j\omega C;$$

$$A_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = Z_L = j\omega L; A_{22} = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 1$$

$$\text{传输参数矩阵 } A_1(L, C) = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

2) LC 高通滤波电路传输参数矩阵 A

$$A_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{Z_c + Z_L}{Z_L} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC}; A_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = G_L = \frac{1}{j\omega L};$$

$$A_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = Z_C = \frac{1}{j\omega C}; A_{22} = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 1$$

$$\text{传输参数矩阵 } A_2(L, C) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega L} & 1 \end{bmatrix}$$

B. 级联滤波电路的传输特性以及频率特性（下以//表示级联关系）

1) LC 低通滤波电路// LC 低通滤波电路

电路图如图 13 所示

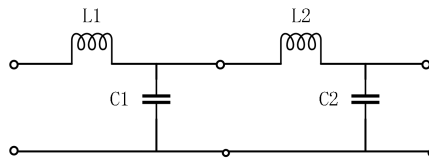


figure 13 LC 低通滤波电路// LC 低通滤波电路

$$A = A_1(L_1, C_1) \cdot A_1(L_2, C_2),$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{U_2^b}{U_1^a} \right| = \left| \frac{1}{A_{11}} \right| = \left| 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right|^{-1}$$

其中 $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$

当 $\omega_1 = \omega_2 = 1$, 利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 14 所示。

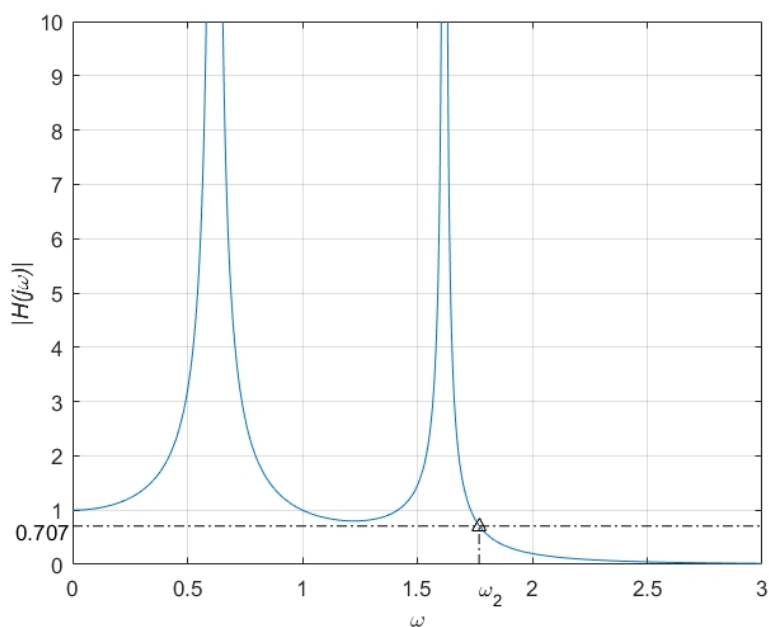


figure 14 LC 低通滤波电路//LC 低通滤波电路频率特性

2) LC 低通滤波电路//LC 高通滤波电路

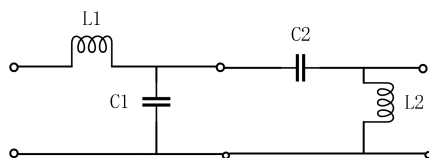


figure 15 LC 低通滤波电路//LC 高通滤波电路

电路图如图 15 所示。

$$A = A_1(L_1, C_1) \cdot A_2(L_2, C_2), |H(j\omega)| = \left| \frac{U_2^b}{U_1^a} \right| = \left| \frac{1}{A_{11}} \right| = \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 + M_1(1 + M_2) \right|^{-1}$$

其中 $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, M_1 = \frac{L_1}{L_2}, M_2 = \frac{C_1}{C_2}$

当 $\omega_1 = 7, \omega_2 = 3, M_1 = M_2 = 1$, 利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 16 所示。

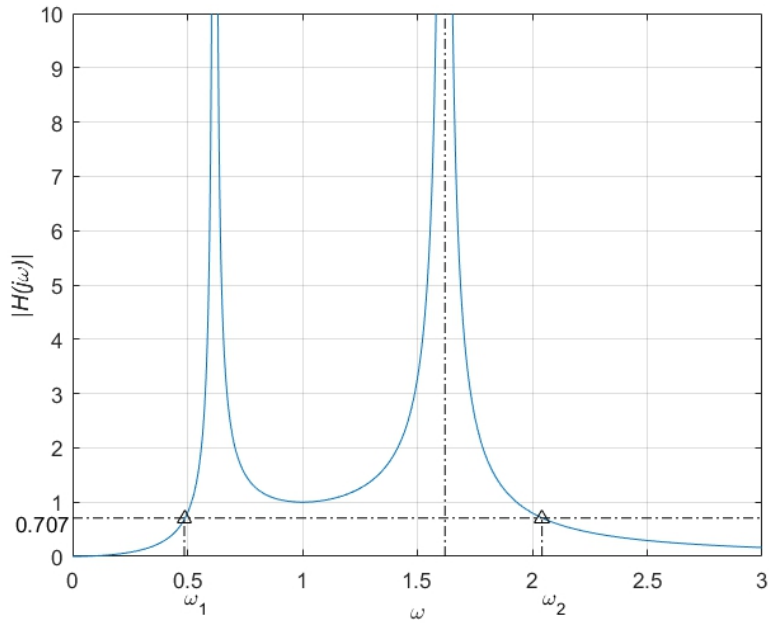


figure 16 LC 低通滤波电路//LC 高通滤波电路频率特性

3) LC 高通滤波电路//LC 低通滤波电路
电路图如图 17 所示。

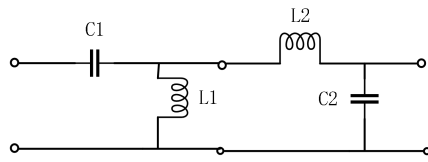


figure 17 LC 高通滤波电路//LC 低通滤波电路

$$A = A_2(L_1, C_1) \cdot A_1(L_2, C_2)$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{U_2^b}{U_1^a} \right| = \left| \frac{1}{A_{11}} \right| = \left| 1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + \frac{1}{M_2} \left(1 + \frac{1}{M_1} \right) \right|^{-1}$$

$$\text{其中 } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, M_1 = \frac{L_1}{L_2}, M_2 = \frac{C_1}{C_2}$$

当 $\omega_1 = \omega_2 = M_1 = M_2 = 1$, 利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 18 所示。

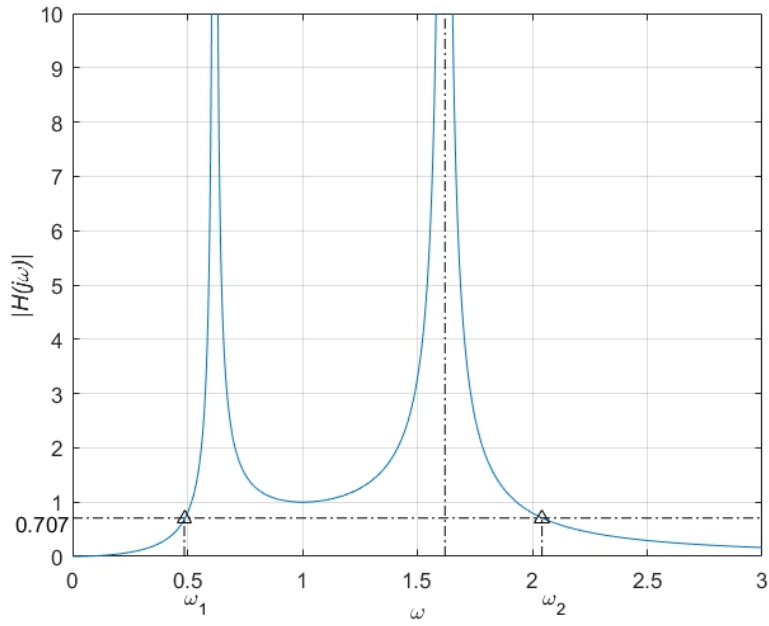


figure 18 LC 高通滤波电路// LC 低通滤波电路频率特性

4) LC 高通滤波电路// LC 高通滤波电路

电路图如图 19 所示。

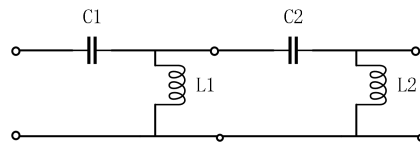


figure 19 LC 高通滤波电路// LC 高通滤波电路频率特性

$$A = A_2(L_1, C_1) \cdot A_2(L_2, C_2)$$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{U_2^b}{U_1^a} \right| = \left| \frac{1}{A_{11}} \right| = \left| 1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{\omega_3}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 \right|^{-1}$$

$$\text{其中 } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_1}}$$

当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$, 利用 MATLAB 作出其幅频特性如图 20 所示。

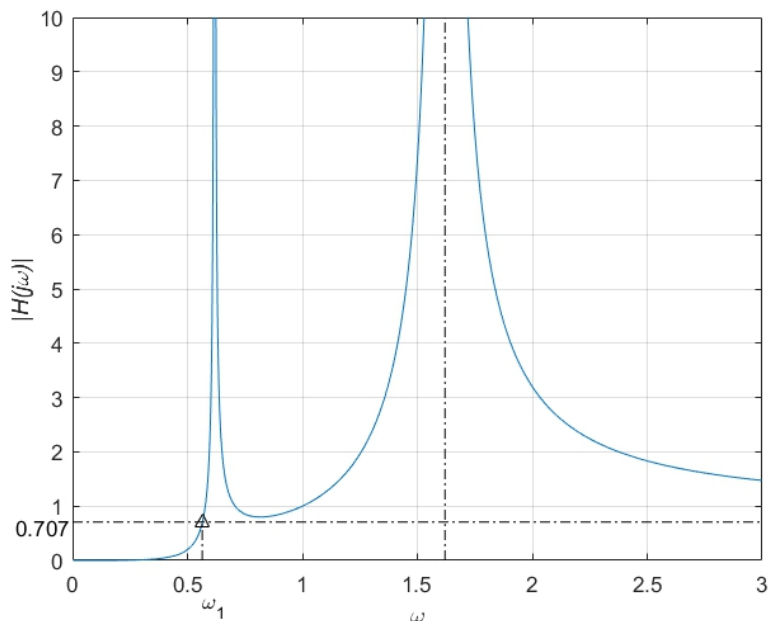


figure 20 LC 高通滤波电路// LC 高通滤波电路频率特性

C. 总结

利用已知滤波器的结构，若需求级联滤波器的频率响应，可通过先求各自分部滤波器元件的 A 参数，再利用级联二端口 A 参数的性质，得到级联后的 A 参数，即可求得级联滤波器的频率响应。

4 结语

本文用电路分压原理分析求得 LC 低通滤波器、 LC 高通滤波器、 LC 带通滤波器和 LC 带阻滤波器的频率响应，通过 MATLAB 绘制出各自频率响应曲线。将无源 LC 滤波器与二端口相结合，利用二端口的级联性质，以低通和高通滤波器相互级联为例子，用二端口的方法求得级联电路的频率响应。本文复现了 LC 滤波器频率响应的求解方法，给出了利用二端口性质求级联频率响应的一种方法。

参考文献

- [1] 牛泽茜,潘俊陶,李晓文.RC 无源带通电路特性及滤波误差分析方法[J].大学物理,2015,34(11):53-56.
- [2] 孙立山, 陈希有, 电路理论基础[M].4 版. 北京: 高等教育出版社, 2013:186-192.