自控作业 HW-13　自动化1班　19040102　方尧

1. $G(s)H(s)=\frac{k}{s}\cdot\frac{0.5}{s(0.5s+1)+2\times0.5}=\frac{k}{s(s^2+2s+2)}$

渐近线 $\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}=-\frac{2}{3}$，$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5}{3}\pi$

出射角 $\sum\angle(s-z_j)-\sum\angle(s-p_i)=$

$-\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{2}-\theta=(2k+1)\pi$

得 $\theta=-\frac{\pi}{4}$

虚轴交点 $D(s)=s(s^2+2s+2)+k=0$

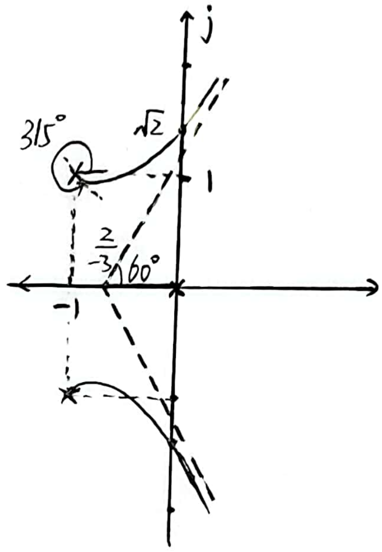
Routh：

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 |
| $s^2$ | 2 | $k$ |
| $s^1$ | $4-k$ | 0 |
| $s^0$ | $k$ | 0 |

令 $k=4$，$2s^2+4=0$

$s=\pm j\sqrt{2}$

虚轴交点 $(0,\pm j\sqrt{2})$，此时 $k=4$



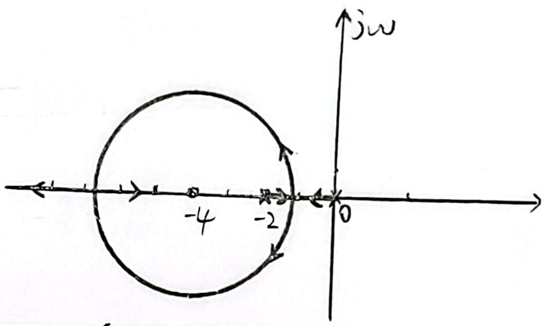

2. 分离点：$\sum\frac{1}{d-p_i}=\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}=\sum\frac{1}{d-z_i}=\frac{1}{d+4}$

得 $d=-4\pm2\sqrt{2}$

无超调量即 $\zeta\geq1$

将两个 $d$ 代入 $G(s)=-1$　$k_2=12-8\sqrt{2}$，$k_1=12+8\sqrt{2}$

故 $k$ 应取值 $(0,12-8\sqrt{2}]\cup[12+8\sqrt{2},+\infty)$




3. 证明：$D(s)=s(s+1)+k(s+2)=0$

由于是求复数根轨迹，用求根公式 $s_{1,2}=\frac{-(k+1)\pm j\sqrt{6k-k^2-1}}{2}$

$s_1$ 到 $(-2,j0)$ 距离 $d^2=(\frac{-(k+1)}{2}+2)^2+(\frac{\sqrt{6k-k^2-1}}{2})^2=2$，故 $s_1$ 到 $(-2,j0)$ 距离为 $\sqrt{2}$。

同理，$s_2$ 到 $(-2,j0)$ 距离也为 $\sqrt{2}$，故复数根轨迹全位于 $(-2,j0)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径圆上，

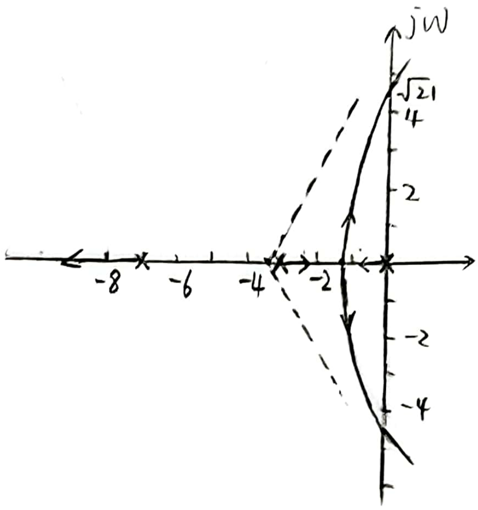
对于 $s_1=\frac{-(k+1)}{2}\pm j\frac{\sqrt{6k-k^2-1}}{2}$ 而言，$k\in(0,\infty)$ 可以满足 $Re[s_1]$ 从 $-2-\sqrt{2}$ 到 $-2+\sqrt{2}$ 变化

故以 $(-2,j0)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径圆上点都为根轨迹

综上所述，复数根轨迹是以 $(-2,j0)$ 为圆心，以 $\sqrt{2}$ 为半径的一个圆。

4. 渐近线：$\sigma_a = \dfrac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = -\dfrac{10}{3}$

$\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5}{3}\pi$





分离点 $\sum \dfrac{1}{d-p_i} = 0$　得 $d = \dfrac{-10+\sqrt{37}}{3}$

和虚轴交点 $D(s) = s^3 + 10s^2 + 21s + k = 0$

Routh：

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 21 |
| $s^2$ | 10 | $k$ |
| $s^1$ | $210-k$ | 0 |
| $s^0$ | $k$ | 0 |

令 $k = 210$，$10s^2 + 210 = 0$

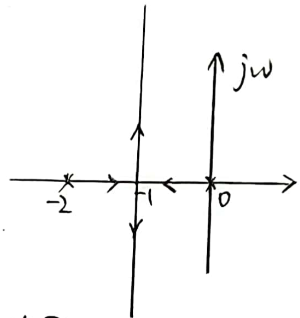
得 $s = \pm j\sqrt{21}$

将 $s = \pm j\sqrt{21}$ 代入 $G(s)$，$G(s) = -\dfrac{1}{210}k = -1$，故 $k = 210$

将 $s = \dfrac{-10+\sqrt{37}}{3}$ 代入 $G(s)$，$G(s) = -0.0738k = -1$，$k = 12.597$

故欠阻尼应满足 $k \in (12.597, 210)$

5. 渐近线 $\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = -1 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$，$s_1 = s_2 = -1$ 时，$k = \dfrac{1}{2}$





根据相角条件，知 $Re(s) = -1$ 线都为根轨迹

$k > 0$，系统均稳定。$k \in (0, \frac{1}{2})$ 过阻尼，$k$ 愈大，$\xi$ 越小，$k = \frac{1}{2}$ 时，临界阻尼，

$k \in (\frac{1}{2}, +\infty)$，$k$ 越大，$\xi$ 越小，$\xi\omega_n$ 保持不变，峰值时间越小，超调越大，

上升时间越小，调节时间基本保持不变.

当 $k = 5$ 时，$\Phi(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)} = \dfrac{10}{s^2+2s+10}$　　$\omega_n = \sqrt{10}$，$\xi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

此时，$\sigma_p = \exp\left(-\dfrac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 35.10\%$　　$t_r = \dfrac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \dfrac{\pi - \arccos\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.6308s$

$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 1.0472s$　$t_s \approx \dfrac{4}{\xi\omega_n} = 4s$ (2%)

6. 构建单位反馈系统，开环传递函数 $G(s)=\frac{k(s+1)}{s^2(s+a)}$

渐近线 $\begin{cases}\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{1-a}{2} \\ \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\end{cases}$

分离点 $\sum\frac{1}{d-p_i}=\sum\frac{1}{d-z_i}$，$2d^2+(a+3)d+2a=0$

得 $d=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{(a-1)(a-9)}}{4}$

$\Delta<0$ 即 $1<a<9$，无交点

$\Delta=0$ 即 $a=1/a=9$ $d=-1/-3$.

$\Delta>0$，$a<1$ 或 $a>9$ 时，

① $-(a+3)+\sqrt{(a-1)(a-9)}<0$，即 $a>0$，有两交点，经检验，$a<1$，有根在 $-1$ 左侧，有根在 $-a$ 右侧，

② $-(a+3)-\sqrt{(a-1)(a-9)}>0$，不存在.

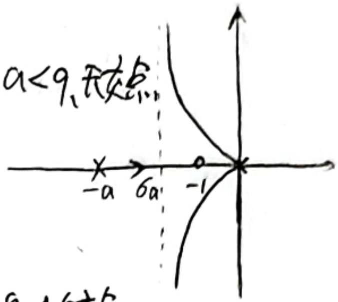
③ $-(a+3)+\sqrt{(a-1)(a-9)}>0$，$-(a+3)-\sqrt{(a-1)(a-9)}<0$

$a<0$，有一交点，但交点不在根轨迹内，故无交点

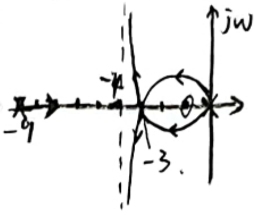
④ $-(a+3)+\sqrt{(a-1)(a-9)}=0$，$a=0$，有一交点，交点为0，在轨迹外 无交点

综合存在情况得出 $\begin{cases}① & a<9，0个交点 \\ ② & a=9，1个交点 \\ ③ & a>9，两个交点\end{cases}$

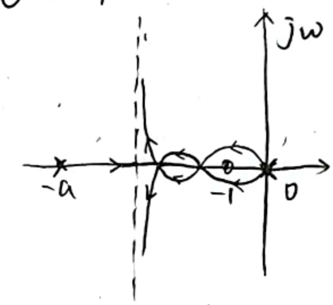
① $a<9$，无交点




② $a=9$，1个交点




③ $a>9$ 两个交点




7. $s_1=-3$、$s_{2,3}=-1\pm j$，$z_1=-2$.

渐近线 $\begin{cases}\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=-\frac{3}{2} \\ \varphi_a=\frac{2k\pi}{n-m}=0,\pi\end{cases}$

出射角 $\sum\angle(s-z_i)-\sum\angle(s-p_i)=\frac{\pi}{4}-(\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta)=2k\pi$ 得 $\theta=-71.57°$

分离点 $\sum\frac{1}{d-p_i}=\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d-(-1+j)}+\frac{1}{d-(-1-j)}=\sum\frac{1}{d-z_i}=\frac{1}{d+2}$

得分离点 $d=-0.803$

分离点对应 $k_d=\left|\frac{(d+3)(d^2+2d+2)}{d+2}\right|=1.9067$

根轨迹如图.