**第 1 题**

相位裕度和幅值裕度的几何意义和物理意义。

答：

相位裕度

几何意义：系统开环频率特性曲线与单位圆的交点 A 与原点 O 所在直线 OA，相位裕度即为负实轴与 OA 的夹角，逆时针为正。

物理意义：相位裕度表示开环极坐标图与单位圆的交点沿单位圆与（-1，j0）的远近程度。若系统剪切频率 $\omega_c$ 处的相位再减小 $\gamma$，则 $\varphi(\omega_c) = -180°$，Nyquist 曲线过（-1,0），系统将处于临界稳定状态。

幅值裕度

几何意义：系统开环频率特性曲线与负实轴交点到原点的距离的倒数。

物理意义：幅值裕度表示开环极坐标图与负实轴的交点离（-1，j0）的远近程度。若系统的开环增益增大到原来的 $K_g$ 倍，则 $A(\omega_g) = 1$,Nyquist 曲线过（-1，0），系统将处于临界稳定状态。

**第 2 题**

具有正相位裕度的负反馈系统一定是稳定的吗？

答：不一定。对于包含不稳定惯性环节的非最小相位系统，只有当相位裕度为正，幅值裕度为负时，闭环系统才是稳定的。

**第 3 题**

如果一个最小相位负反馈系统是稳定的，则它一定有正相角裕度吗？

答：不一定。可能不存在剪切频率。

**第 4 题**

如果一个最小相位负反馈系统具有最大的相角裕度，则它的稳定程度一定很高吗？

答：不一定。要结合幅值裕度判断。相角裕度很大，幅值裕度可能较小，系统的稳定程度也不高。

**第 5 题**

欠阻尼二阶反馈系统一定存在谐振峰值吗？试给出欠阻尼二阶系统闭环幅频特性的最大值。

答：不一定。由 $\omega_\mathrm{r} = \omega_\mathrm{n}\sqrt{1-2\xi^2}$ 可知，二阶系统存在谐振峰值的条件是 $\xi < \sqrt{2}/2$。对于欠阻尼二阶系统，$0 < \xi < 1$。当 $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$M_\mathrm{r} = A(\omega_\mathrm{r})/A(0) = \frac{\omega_\mathrm{n}^2}{\sqrt{\omega_\mathrm{n}^4(4\xi^2-4\xi^4)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ 当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$ 时,$M_\mathrm{r} \to 1$，没有谐振峰值。

**第 6 题**

设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K\mathrm{e}^{-0.1s}}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_\mathrm{c} = 5\mathrm{rad/s}$ 时的开环增益 K。

答：

$$
\begin{aligned}
&\left|G\left(j\omega_c\right)H\left(j\omega_c\right)\right|=\frac{K}{\omega_c\sqrt{1+0.0/\omega_c^2}\sqrt{1+\omega_c^2}}=1\\
&k=\omega c\sqrt{\left(\omega c^2+1\right)\left(0.0/\omega c^2+1\right)}=5\sqrt{\left(5^2+1\right)\left(0.01\times 5^2+1\right)}\\
&=5\sqrt{2b\times 1.25}=5\sqrt{32.5}\approx 28.5
\end{aligned}
$$

**第 7 题**

根据系统的开环传递函数

$$
G(s)H(s)=\frac{2\mathrm{e}^{-\tau s}}{s(1+s)(1+0.5s)}
$$

绘制系统的 Bode 图，并确定能使系统稳定值最大 $\tau$ 值范围。

答：系统的开环频率特性：$G(jw)H(jw)=\frac{2e^{-\tau j\omega}}{jw(1+jw)\left(1+\frac{jw}{2}\right)}$

幅频特性：$|G(jw)H(jw)|=\frac{2}{w\sqrt{1+w^2}\sqrt{1+\left(\frac{w}{2}\right)^2}}$

$$
L(w)=\begin{cases}20(\lg 2-\lg w) & w<1\\ 20(\lg 2-\lg w-\lg w) & 1<w<2\\ 20\left(\lg 2-\lg w-\lg w-\lg\frac{w}{2}\right) & w>2\end{cases}
$$

基准线: $20\lg\left|\frac{2}{w}\right|$.

相频特性：$\angle G(j\omega)H(j\omega)=(-\tau\omega)-90^\circ-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}$

$$
\varphi(\omega)=-90^\circ-\tau\omega-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}
$$

剪切频率:$|G(jw)H(jw)|=1$

$$
\Rightarrow {w_c}^2\left(1+{w_c}^2\right)\left(1+\frac{w_c^2}{4}\right)=4
$$

$$
\Rightarrow\quad w_c\approx 1.1432\mathrm{rad/s}
$$

穿越频率：$\angle G\left(jw_g\right)H\left(jw_g\right)=-180^\circ$

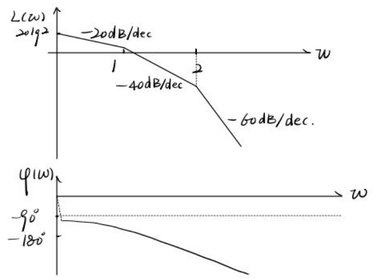
$$
\begin{aligned}
\Rightarrow -90^\circ-\tau\omega_g-\arctan\omega_g-\arctan\tfrac{\omega_g}{2}&=-180^\circ\\
\Rightarrow \tau\omega_g+\arctan\omega_g+\arctan\tfrac{\omega_g}{2}&=90^\circ
\end{aligned}
$$

临界稳定，有 $\omega_g=\omega_c=1.1432\mathrm{rad/s}$

$$
\Rightarrow 1.1432\tau+\arctan 1.1432+\arctan\frac{1.1432}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tau=0.1744
$$

所以 $0<\tau<0.1744$

Bode 图：




**第 8 题**

已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(1+s)(1+3s)}$$

试用 Bode 图方法确定系统稳定的临界增益 K 值。

答：系统的开环频率特性：$G(jw)H(jw)=\frac{K}{jw(1+jw)(1+3jw)}$

穿越频率：

$$\begin{aligned}
&\angle G\left(j\omega_g\right)H\left(j\omega_g\right)=-180^{\circ}\\
&\Rightarrow -90^{\circ}-\arctan\omega_g-\arctan 3\omega_g=-180^{\circ}\\
&\quad \arctan\omega_g+\arctan 3\omega_g=90^{\circ}\\
&\Rightarrow \quad \left|\frac{4\omega_g}{1-3\omega_g^2}\right|\rightarrow\infty\\
&\Rightarrow \quad 3\omega_g^2=1
\end{aligned}$$

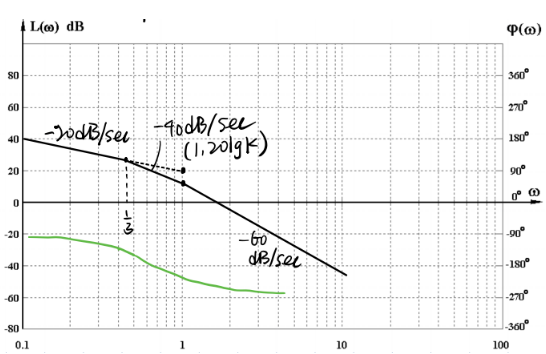
剪切频率 $\omega_c$：

$$\begin{gathered}
\left|G\left(j\omega_c\right)H\left(j\omega_c\right)\right|=1\\
\Rightarrow \frac{k}{\omega_c\cdot\sqrt{1+w_c^2}\sqrt{1+9\omega_c^2}}\quad=1\\
k=w_c\sqrt{1+w_c^2}\sqrt{1+9\omega_c^2}
\end{gathered}$$

$\because$ 系统临界稳定，从 Bode 图上看，应有 $\omega_c=\omega_g$

$\therefore k=wg\sqrt{1+w_g^2}\sqrt{1+9\omega_g^2}=\frac{4}{3}$

Bode 图：



**第 9 题**

设负反馈系统前向通道及反馈通道的传递函数分别为

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)}$$
$$H(s) = 1 + \tau s$$

要求该系统具有 $45^\circ$ 的相角裕度，试确定参数 $\tau$。

答：系统的开环频率特性：$G(jw)H(jw) = \frac{10(1+\tau jw)}{jw(jw-1)}$

剪切频率:

$$|G(jw_c)H(jw_c)| = 1$$
$$\frac{10\sqrt{1+\tau^2 w_c^2}}{w_c\sqrt{1+w_c^2}} = 1$$
$$\Rightarrow 100 + 100\tau^2\omega_c^2 = w_c^2 + w_c^4$$

相角裕度：

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ + \angle G\left(j\omega_c\right) H\left(j\omega_c\right) \\ &= 180^\circ - 90^\circ + \arctan\tau\omega_\mathrm{c} - \left(180^\circ - \arctan\omega_c\right) \\ &= -90^\circ + \arctan\tau\omega_c + \arctan\omega_c = 45^\circ \\ &\Rightarrow \frac{(\tau+1)\omega_c}{1-\tau\omega_c^2} = -1\end{aligned}$$

联立求得:$\tau = 0.3743$

**例 2.1**

最小相位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$$

其中 $K>0, T\neq\tau$ 。分析稳定裕度与稳定性的关系。

答：

幅频特性：$|G(jw)H(j\omega)| = \frac{k\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}{\omega^2\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}$

相频特性：

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega)H(\omega) &= -180^\circ + \arctan\tau\omega - \arctan T\omega \\ &= -180^\circ + \arctan\frac{(\tau-T)\omega}{1+T\tau\omega^2}\end{aligned}$$

剪切频率：

$$\mid G(jw)H(jw) \mid = 1$$
$$\Rightarrow k^2\left(\tau^2 w_c^2+1\right) = w_c^4\left(T^2 w_c^2+1\right)$$

穿越频率：令 $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(\tau j\omega+1)}{-\omega^2(Tj\omega+1)}$ 虚部为 0

$$\Rightarrow \because T\neq\tau \quad \therefore w_g = 0(\text{舍})\text{或} w_g = \infty$$

幅值裕度：$k_g=\frac{1}{|(G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}=\infty$

相位裕度：

$$\begin{aligned}\gamma&=180^\circ+\angle G\left(j\omega_c\right)H\left(j\omega_c\right)\\&=\arctan\frac{(\tau-T)\omega_c}{1+T\tau\omega_c^2}\end{aligned}$$

当 T>$\tau$, 相位裕度为负，闭环系统不稳定；

当 T<$\tau$, 相位裕度为正，闭环系统稳定。

**推导二阶系统的性能指标：**

标准二阶系统的开环传递函数为：$G_o(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$

剪切频率 $\omega_c$:

$$\begin{aligned}&\left|G\left(jw_c\right)H\left(jw_c\right)\right|=1\\&\Rightarrow\frac{w_n^2}{w_c\sqrt{w_c^2+4\xi^2w_n^2}}=1\\&w_n^4=w_c^2\left(w_c^2+4\xi^2w_n^2\right)\\&w_c^4+4\xi^2w_n^2w_c^2-w_n^4=0\\&\left(w_c^2+2\xi^2w_n^2\right)^2=w_n^4+4\xi^4w_n^4\\&\Rightarrow w_c^2=w_n^2\left(\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2\right)\\&\because w_c>0\\&\therefore w_c=w_n\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}\end{aligned}$$

相角裕度 $\gamma$:

$$\begin{aligned}\gamma&=180^\circ+\angle G\left(jw_c\right)H\left(j\omega_c\right)\\&=90^\circ-\arctan\frac{w_c}{2\xi w_n}\\&=\arctan\frac{2\xi\omega_n}{w_c}\\&=\arctan\frac{2\xi\omega_n}{w_n\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}}\end{aligned}$$

穿越频率 $\omega_g$:

$$\begin{aligned}&\angle G_o\left(j\omega_g\right)=-180^\circ\\&\Rightarrow 0^\circ-90^\circ-\arctan\frac{\omega_g}{2\xi\omega_n}=-180^\circ\\&\Rightarrow\arctan\frac{2\xi\omega_n}{\omega_g}=0\\&\Rightarrow\omega_g=+\infty\end{aligned}$$

幅值裕度 $k_g$:

$$k_g=\frac{1}{\left|G\left(j\omega_g\right)\right|}=\frac{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+4\xi^2\omega_n^2}}{\omega_n^2}=+\infty$$

标准二阶系统的闭环传递函数：$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

零频幅值:$A(0)=|G(j0)|=\frac{w_n^2}{w_n^2}=1$

截止频率 $\omega_{\mathrm{b}}$：

$$
\begin{aligned}
&|G(j\omega_b)| = \tfrac{\sqrt{2}}{2}A(0) \Rightarrow \tfrac{\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega_b^2\right)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega_b^2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Rightarrow 2\omega_n^4 = \left(\omega_n^2-\omega_b^2\right)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega_b^2 \\
&\Rightarrow \omega_b^4 + \left(4\xi_\xi^2\omega_n^2 - 2\omega_n^2\right)\omega_b^2 - \omega_n^4 = 0 \\
&\Rightarrow \omega_b^2 = \tfrac{2w_n^2-4\xi^2w_n^2+2\omega_n^2\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}{2} \\
&\Rightarrow \omega_b^2 = \omega_n^2\left(1-2\xi^2+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}\right) \\
&\Rightarrow \omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}
\end{aligned}
$$

谐振频率 $\omega_{\mathrm{r}}$:
二阶系统 $A(w) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(w_n^2-w^2)^2+4\xi^2w_n^2\omega^2}} = \frac{w_n^2}{\sqrt{f(w)}}$
$f(w)$ 取最小值时，$A(w)$ 最大

令$f'(w) = \left(w^4-2w_n^2w^2+w_n^4+4\xi^2w_n^2w^2\right)' = 4w^3-4w_n^2w+8\xi^2w_n^2w$
令$f'(w) = 0 \Rightarrow w = 0$ (舍) or $w_r = w_n\sqrt{1-2\xi^2}(0<\xi<\sqrt{2})$

相对谐振峰值 $M_r$:

$$
\begin{aligned}
M_r &= A\left(\omega_r\right)/A(0) \\
&= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_r^4+2\omega_n^2\left(2\xi^2-1\right)\omega_r^2+\omega_n^4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-2\xi^2\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\xi^2-4\xi^4}} \\
M_r &= \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}
\end{aligned}
$$