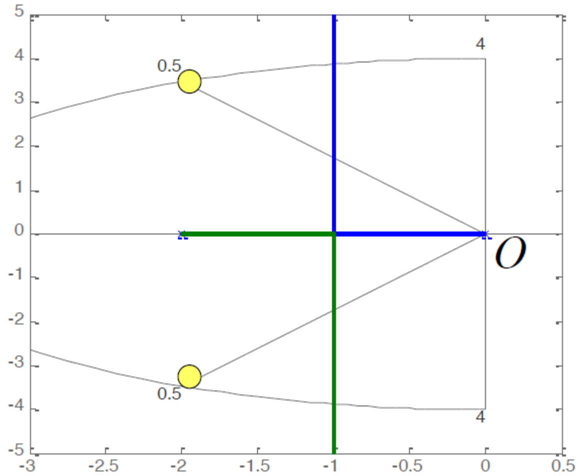

图 1: 例 4.1 原系统根轨迹

例 4.1
某典型二阶系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{4}{s(s+2)}$$

要求性能指标：$\sigma\%\leq 20\%$, $t_s\leq 2s$ 试用根轨迹法确定串联超前矫正装置。
解:
1) 根据性能指标计算闭环主导极点
由

$$\sigma^0\%=\mathrm{e}^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%\leq 20\%$$

可得 $\xi\geq 0.456$, 取 $\xi=0.5$。
由

$$t_s\approx\frac{3.5}{\xi\omega_n}<2s\Rightarrow\omega_n>3.5$$

取 $\omega_n=4$。
期望主导极点

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-2\pm j2\sqrt{3}=-2\pm 3.46j$$

2) 画出原系统的根轨迹，如图 1所示 虚线圆周代表 $\omega_n=4$，直线代表 $\xi=0.5$，直线和圆周的交点即为期望闭环极点，原根轨迹不可能通过期望闭环极点，必须采用超前矫正。
3) 取 $s=-2+j\sqrt{3}$, 则有

$$\angle G_0\left(s_1\right)=-\angle s_1-\angle\left(s_1+2\right)=-120^\circ-90^\circ=-210^\circ$$

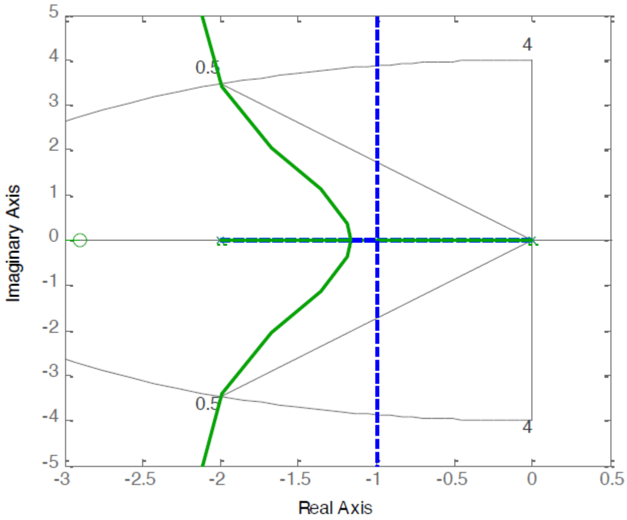

图 2: 例 4.1 矫正后系统根轨迹

于是，超前环节应产生的幅角 ϕ 为

$$\phi=(2l+1)180^{\circ}-\angle G_0\left(s_1\right)=30^{\circ}$$

4) 根据最小极零比法得超前矫正环节的极点为

$$\left\{\begin{array}{l}p_{\mathrm{c}}=-\left|s_1\right| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi-\theta)}{\cos \frac{1}{2}(\theta+\phi)}=-4 \frac{\cos \frac{1}{2}\left(60^{\circ}-30^{\circ}\right)}{\cos \frac{1}{2}\left(60^{\circ}+30^{\circ}\right)}=-5.4 \\ z_{\mathrm{c}}=-\left|s_1\right| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi+\theta)}{\cos \frac{1}{2}(\phi-\theta)}=-4 \frac{\cos \frac{1}{2}\left(60^{\circ}+30^{\circ}\right)}{\cos \frac{1}{2}\left(60^{\circ}-30^{\circ}\right)}=-2.9\end{array}\right.$$

5) 根据根轨迹幅值条件，按照下式确定超前矫正装置的增益 K_c

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{c}} &=\frac{\left|z_{\mathrm{c}}\right|\left|s_1-p_{\mathrm{c}}\right|}{\left|G_0\left(s_1\right)\right|\left|p_{\mathrm{c}}\right|\left|s_1-z_{\mathrm{c}}\right|} \\ &=\frac{2.9|-2+\mathrm{j} 2 \sqrt{3}+5.4||-2+\mathrm{j} 2 \sqrt{3}||-2+\mathrm{j} 2 \sqrt{3}+2|}{4 \times 5.4|-2+\mathrm{j} 2 \sqrt{3}+2.9|} \\ &=2.523 \end{aligned}$$

于是矫正网络的传递函数为

$$G_{\mathrm{c}}=2.52 \frac{5.4}{2.9} \frac{s+2.9}{s+5.4}=4.7 \frac{s+2.9}{s+5.4}$$

从矫正后系统根轨迹图 (2) 后可以看出矫正后的更轨迹经过期望极点。

例 4.3

设单位反馈系统的不可变部分的传递函数为

$$G_0(s)=\frac{k}{s(s+5)(s+20)}$$

要求单位阶跃响应的超调 $\sigma_p \leq 25\%$, 调整时间 $t_S \leq 0.7s(\Delta = 0.02)$，开环增益 $K_v \geq 12s^{-1}$。试确定通过带惯性的 PD 控制器实现的串联超前矫正的参数 T 及 α。

解：

1) 根据指标确定闭环主导极点

由

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \leq 25\%$$

$$t_{\mathrm{s}} = \frac{4}{\zeta\omega_{\mathrm{n}}} \leq 0.7$$

分别求得 $\xi \geq 0.4$, 取 $\xi = 0.4$, $\omega_n \geq 14.2\mathrm{rad/s}$, 取 $\omega_n = 14.3\mathrm{rad/s}$。所以期望主导极点为 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -5.72 \pm j13.1$

2) 确定矫正器参数

根据 $K_v \geq 12s^{-1}$, 求得 $k = 12 \times \frac{5\times 20}{1} = 1200$。

根据

$$M = \frac{|s_1^v| \cdot |s_1 - p_1| \dots |s_1 - p_{n-v}|}{|s_1 - z_1| \dots |s_1 - z_m|}$$

求得

$$M = \frac{|s_1| \cdot |s_1 - p_2| \cdot |s_1 - p_3|}{1} = 14.3 \times 13.12 \times 19.38 = 3636$$

求超前补偿相角 ϕ 为

$$\begin{aligned} \phi = \quad & 180^\circ + \angle s_1 + \angle(s_1 - p_2) + \angle(s_1 - p_3) = \\ & 180^\circ + 113.59^\circ + 93.15^\circ + 42.53^\circ = 429.27^\circ, \quad i = 0 \end{aligned}$$

减去 360°, 最终求得 $\phi = 69.72^\circ$。根据公式

$$\frac{1}{\tan\eta} = \frac{M}{k}\frac{1}{\sin\phi} - \frac{1}{\tan\phi}$$

算得 $\eta = 19.27^\circ$。

$$\theta = \arccos\zeta = 66.42^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - \eta - \theta = 94.31^\circ$$

最后根据

$$|z_{\mathrm{c}}| = \omega_{\mathrm{n}}\frac{\sin\eta}{\sin\delta} = 4.73$$

$$|p_{\mathrm{c}}| = \omega_{\mathrm{n}}\frac{\sin(\phi+\eta)}{\sin(\delta-\delta)} = 33.78$$

所以 $z_c = -4.73, p_c = -33.78$。所以

$$T = \frac{1}{|p_c|} = 0.0296$$

$$a = \frac{p_{\mathrm{c}}}{z_{\mathrm{c}}} = 7.14$$

所以带惯性的 PD 控制器的传递函数为

$$G_{\mathrm{c}}(s)=\frac{1+0.211s}{1+0.0296s}=7.14\frac{s+4.73}{s+33.78}$$

例 4.4

设系统不可变部分的传递函数为

$$G_0(s)=\frac{800K_v}{s(s+4)(s+10)(s+20)}$$

要求满足性能指标

(1) 开环增益 $K_v=12s^{-1}$;

(2) 超调 $\sigma_p<20\%$;

(3) 调整时间 $t_S\leq 2.6s(\delta=0.05)$;

(4) 系统带宽不大于 0 5rad/s。

试确定近似 PI 控制器实现的串联迟后矫正参数。

解:

1) 根据指标确定闭环主导极点

由

$$\sigma_{\mathrm{p}}=\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}\leq 20\%$$
$$t_{\mathrm{s}}=\frac{3}{\zeta\omega_{\mathrm{n}}}\leq 2.6$$

分别求得 $\xi\geq 0.46$, 取 $\xi=0.5$, $\omega_n\geq 2.3\mathrm{rad/s}$, 取 $\omega_n=2.5\mathrm{rad/s}$。所以期望主导极点为 $s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-1.25\pm j2.16$。

将闭环极点 s_1 代入绘制未矫正系统根轨迹的相角条件，求得

$$\angle G_0\left(s_1\right)=-\angle\left(s_1\right)-\angle\left(s_1+4\right)-\angle\left(s_1+10\right)-\angle\left(s_1+20\right)=-178.6^{\circ}\approx-180^{\circ}$$

2) 求取位于未矫正系统根轨迹上的闭环主导极点 $s_1=-1.25+j2.16$ 对应的开环增益为

$$K_0=\frac{|s_1|\cdot|s_1+4|\cdot|s_1+10|\cdot|s_1+20|}{800}\approx 1.85s^{-1}$$

3) 求 z_c,p_c

矫正环节的参数 β 为

$$\beta=\frac{K}{K_0}=\frac{12}{1.85}=6.5$$

因为

$$\frac{z_c}{p_c}=\beta$$

取 $z_c=-0.13,p_c=-0.02$。故矫正转置为

$$G_c(s)=\frac{s+0.13}{s+0.02}$$

例 4.5

已知单位反馈系统原有前向传递函数为

$$G_0(s)=\frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

要求闭环系统满足下列性能指标:

(1) 开环增益 $K_v=5$;

(2) 超调 $\sigma_p\leq 20\%$;

(3) 调整时间 $t_S\leq 10s(\delta=0.05)$。

解:

1) 根据指标确定闭环主导极点

由

$$\sigma_{\mathrm{p}}=\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}\leq 20\%$$

$$t_{\mathrm{s}}=\frac{3}{\zeta\omega_{\mathrm{n}}}\leq 10$$

分别求得 $\xi\geq 0.46$, 取 $\xi=0.46$, $\omega_n\geq 0.65\mathrm{rad/s}$, 取 $\omega_n=0.65\mathrm{rad/s}$。所以期望主导极点为 $s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-0.3\pm j0.58$。

将闭环极点 s_1 代入绘制未矫正系统根轨迹的相角条件，求得

$$\angle G_0\left(s_1\right)=-175.8^\circ\approx -180^\circ$$

2) 求 K_0

$$K_0=\frac{|s_1|\cdot|s_1+1|\cdot|s_1+2|}{2}\approx 0.53s^{-1}$$

3) 求 z_c,p_c

矫正环节的参数 β 为

$$\beta=\frac{K}{K_0}=\frac{5}{0.53}=9.43$$

因为

$$\frac{z_c}{p_c}=\beta$$

取 $z_c=-0.094,p_c=-0.01$。故矫正转置为

$$G_c(s)=0.53\frac{s+0.094}{s+0.01}$$

矫正后的根轨迹如 (3) 所示。

例 4.6

某小功率角度随动系统的未矫正的传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

其中 K 为放大器放大倍数，可以调节。要求系统在单位斜波输入信号作用下，稳态误差 $e_{ss}\leq 0.02$, 超调 $\sigma_p\leq 20\%$, 调节时间 $t_S\leq 1.5s$，设计串联矫正装置。

解:

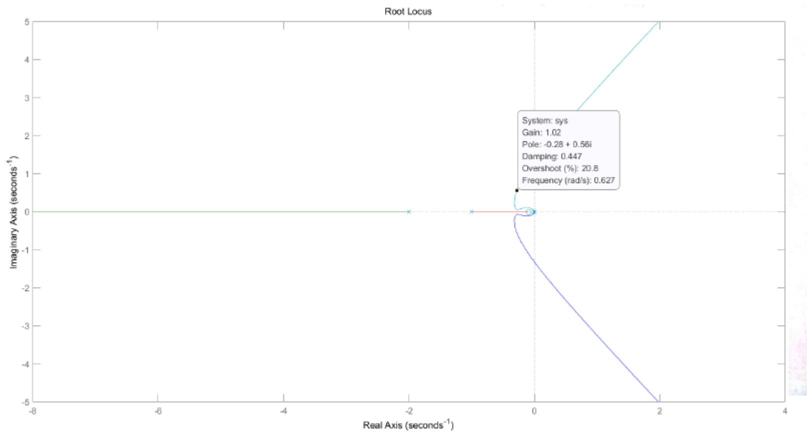

图 3: 例 4.5 矫正后系统根轨迹

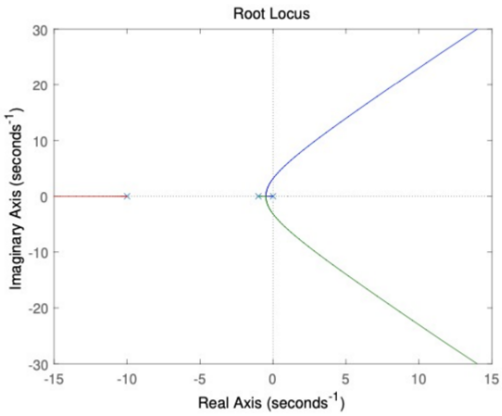

图 4: 例 4.6 未矫正系统根轨迹

1) 确定开环速度静态误差系数。系统为 I 型系统，$K = K_v = \frac{1}{e_{ssr}} \geq 50$，取 $K = 50$。
2) 根据指标确定闭环主导极点
由

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \leq 20\%$$

$$t_{\mathrm{s}} = \frac{3}{\zeta\omega_{\mathrm{n}}} \leq 1.5$$

分别求得 $\xi \geq 0.46$，取 $\xi = 0.5$，$\omega_n \geq 4\mathrm{rad/s}$，取 $\omega_n = 5\mathrm{rad/s}$。所以期望主导极点为 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2.5 \pm j4.3301$。
3) 超前矫正环节设计。从矫正前的根轨迹图 (图 4) 可以看出未矫正前的根轨迹两条分支远离期望极点区域，需要很大的超前相角才能，将其拉回到左边。因此单纯的超前矫正难以满足要求。先设计超前矫正环节。

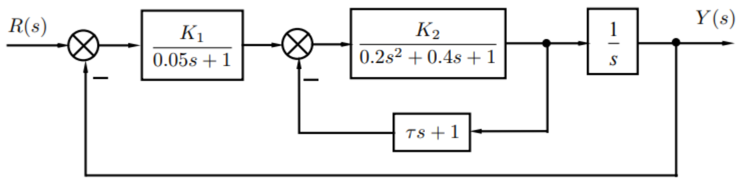

图 5: 例 4.7 控制系统结构图

选择超前矫正环节的极点为 -10, 于是超前矫正部分的传递函数为

$$G_{c1}(S) = 10\frac{s+1}{s+10} = \frac{s+1}{0.1s+1}$$

则经过超前矫正过后的系统传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)^2}$$

4) 迟后矫正环节的设计
根据幅值条件算出 $K_0 = 3.75$, 矫正环节的参数 β 为

$$\beta = \frac{K}{K_0} = \frac{50}{3.75} = 13.33$$

迟后矫正的零极点远离点要非常近，取为 -0.1, 则极点为 $-\frac{0.1}{13.33}$, 于是迟后环节的传递函数为

$$G_{c2}(s) = \frac{s+0.1}{s+\frac{0.1}{13.33}} = 13.33\frac{10s+1}{133s+1}$$

例 4.7 控制系统的结构图如图 5所示，欲采用局部反馈来改善系统的性能，要求大闭环系统的闭环主导极点为 $s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{3}$, 需要确定 K_1, K_2, τ 的值。
解:
1) 未进行局部反馈矫正时，系统有四个开环极点

$$p_1 = 0, p_{2,3} = -1 \pm j2, p_4 = -\frac{1}{0.05} = -20$$

显然，未矫正系统的根轨迹不会通过 $-3 \pm j3$。
2) 画出小闭环的根轨迹，如图 6所示。适当选择小闭环中的增益 K_2, 可以使得小闭环的两个闭环极点都在负实轴上，也就是说可以使大回环的两个开环极点 P_2, P_3 移到负实轴上成为 $\bar{p}_2, \bar{p}_3$。
3) 当大闭环回路的开环极点为 $p_1 = 0, \bar{p}_2, \bar{p}_3, p_4 = -20$ 时，根轨迹为图 7。为了使 $s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{3}$ 成为主导极点，系统的另外两个闭环极点应该在 $s_{1,2}$ 的左边，所以取 $\bar{p}_3 = -15$。
4) 反馈矫正后的各极点位置如图 9所示，为使 $s_1 = -3 + j\sqrt{3}$ 满足根轨迹的幅角条件，应有

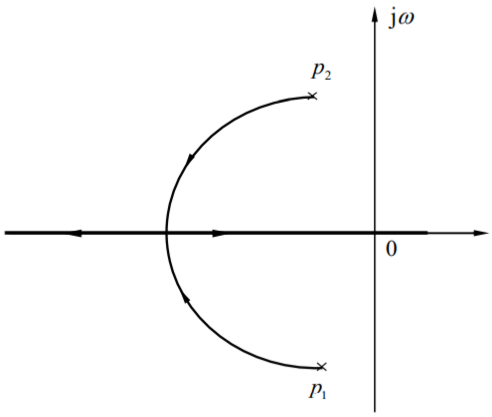

图 6: 例 4.7 小闭环根轨迹

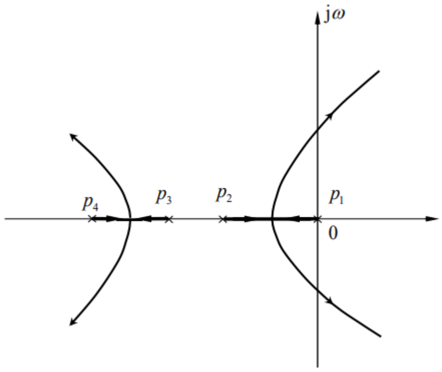

图 7: 例 4.7 大闭环根轨迹

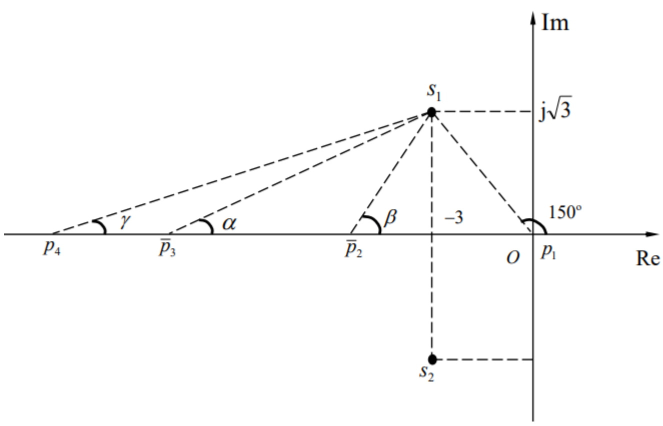

图 8: 例 4.7 矫正后极点位置图

$$\gamma + \alpha + \beta + 150^\circ = 180^\circ$$

$$\gamma = \arctan \frac{\sqrt{3}}{17} = 5.83^\circ$$

$$\alpha = \arctan \frac{\sqrt{3}}{12} = 8.22^\circ$$

所以，$\beta = 15^\circ$, 根据图 8的几何关系可以算得 $\bar{p}_2 = -9.8$。
5) 对于小闭环，其传递函数为

$$\Phi_1(s) = \frac{K_2}{0.2s^2 + (0.4 + K_2\tau)\,s + K_2 + 1}$$

为了使小闭环的两个闭环极点为 $\bar{p}_2, \bar{p}_3$, 应有的特征方程为

$$\begin{aligned} & s2 + 5\,(0.4 + K_2\tau)\,s + 5\,(K_2 + 1) \\ =& (s - \bar{p}_2)\,(s - \bar{p}_3) \\ =&(s + 9.8)(s + 15) \\ =&s^2 + 24.8s + 147 \end{aligned}$$

解出 $K_2 = 29, \tau = 0.155$。
6) 对于大闭环，为使闭环极点 $s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{3}$, 求出 s_1 点对应的参数 k 值为

$$k = |s_1 - p_4| \cdot |s_1 - \bar{p}_3| \cdot |s_1 - \bar{p}_2| \cdot |s_1 - p_1| = 5030$$

则相应的大回路的开环增益为

$$K = k\frac{1}{|p_4|\,|\bar{p}_3|\,|\bar{p}_2|} = 1.7$$

从小回路的闭环传递函数中可以得出，小闭环的增益为

$$\frac{K_2}{1 + K2} = 0.97$$

所以

$$K_1 = \frac{1.7}{0.97} = 1.75$$

综上：$K_1 = 1.75, K_2 = 29, \tau = 1.55$。

例 4.8

图 9为一个力矩电机驱动的低速转台伺服系统，拟采用电流反馈和速度反馈来改进系统的性能，使大回路的闭环主导极点为 $s_{1,2} = -2 \pm j2$, 求电流反馈系数 α, 速度反馈系数 β 和放大器的增益 K_1。
1) 为采用反馈矫正时，系统的开环极点为 $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = -2$, 显然，根轨迹不通过 $s_{1,2} = -2 \pm j2$ 点。
2) 为使 $s_{1,2} = -2 \pm j2$ 点满足根轨迹条件，应该使 p_2, p_3 点向左移为 $\bar{p}_2, \bar{p}_3$, 见图 10，为使 $s_{1,2}$ 满足主导极点的条件，另一闭环极点应在 $s_{1,2}$ 左边，所以取

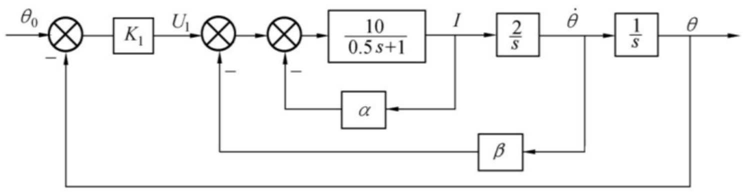

图 9: 例 4.8 系统框图

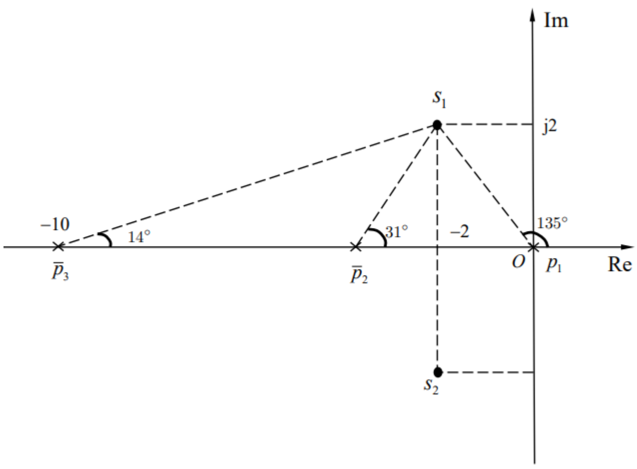

图 10: 例 4.8 系统极点位置图

$\bar{p}_3 = -10$。见图 10的几何关系，为使 $s_1 = -2 + j2$ 满足根轨迹的幅角条件，应有 $\bar{p}_2 = -5.3$。3) 根据图 9，可以求得速度反馈闭环的传递函数

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{\dot{\theta}(3)}{U_1(s)} = \frac{20}{0.5s^2 + (1 + 10\alpha)s + 20\beta}$$

其特征方程为

$$s^2 + 2(1 + 10\alpha)s + 40\beta = 0$$

该方程有两个根：$\bar{p}_2 = -5.3, \bar{p}_3 = -10$, 解出 $\alpha = 0.655, \beta = 1.325$。
4) 对于大回路系统，为使闭环系统的主导极点在 s_1 处，根据幅值条件有

$$k = |s_1 - p_1| \cdot |s_1 - \bar{p}_2| \cdot |s_1 - \bar{p}_3| = 92$$

开环增益为

$$K = k\frac{1}{|\bar{p}_2| \cdot |\bar{p}_3|} = 1.71$$

由于 $\bar{\Phi}(s) = \frac{\dot{\theta}}{U_1(s)}$ 的增益为 $\frac{1}{\beta} = 0.755$, 所以

$$K_1 = \frac{K}{0.755} = 2.26$$

最终结果：$\alpha = 0.665, \quad \beta = 1.325, \quad K_1 = 2.26$。