一、填空题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1. 若事件 A、B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$____________.

2. 随机向量 (X,Y) 的分布列为

Y \ X	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且 $P(XY\neq 0)=0.4$，$P(Y\leq 0|X\leq 0)=\dfrac{2}{3}$，则其中未知参数

$(a,b,c)=$______________.

3. 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则 $E(XY)=$____________.

4. 设随机向量 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，其中 μ_1=1，μ_2=2，

σ_1^2=2，σ_2^2=8，ρ=0.2， 则有 X-2Y 亦服从正态分布，为 N (_______，_______)

5. 某旅行社随机访问了 25 名游客，得知其平均消费额 $\bar{x}=80$ 元，样本标准差 $s=12$ 元，若已知旅行者消费额服从正态分布，则评价消费额 μ 的 95%置信区间为____________.

($t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$；$t_{0.05}(25)=1.7081$)

n 75.05n 84.95n

二、选择题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1. 设 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，且 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有（　　）

（A）$P(A|B)=P(\bar{A}|B)$；　　（B）$P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$；

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$；　　（D）$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

2. 下列函数可作为连续型随机变量的概率密度（　　）.

（A）$f(x)=\begin{cases}\sin x & \pi\leq x\leq \frac{3}{2}\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；　　（B）$g(x)=\begin{cases}-\sin x & \pi\leq x\leq \frac{3}{2}\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；

（C）$\varphi(x)=\begin{cases}\cos x & \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi \\ 0 & 其他\end{cases}$；　　（D）$h(x)=\begin{cases}1-\cos x & \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi \\ 0 & 其他\end{cases}$.

3. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$ 将（　　）

（A）单调增大；　　（B）单调减少；

（C）保持不变；　　（D）增减不定.

4. 假设随机变量 X 服从指数分布，$Y=\begin{cases}X, & 2<X<5 \\ 0, & 其它\end{cases}$ 的分布函数（　　）

（A）是连续函数；　　（B）至少有两个间断点；

（C）是阶梯函数；　　（D）恰好有一个间断点.

5. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，下列不是无偏估计的是（　　）

（A）$\overline{X}$；　　（B）$\frac{2}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$；　　（C）$\frac{1}{2}\overline{X}+\frac{1}{2}S^2$；　　（D）$\frac{4}{3}\overline{X}-\frac{1}{3}S^2$.

三、（8 分）甲袋中有 2 个白球 3 个黑球，乙袋中有 3 个白球 2 个黑球，从甲袋中取出一个放入乙袋，再从乙袋中任取一个，若放入乙袋的球和从乙袋中取出的球是同色的，求放入乙袋的是黑球的概率.

四、（8 分）设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y; \\ 0, & 其它，\end{cases}$$

求（1）在 $X=x$ 条件下，Y 的条件概率密度函数；（2）在 $0<X<1$ 条件下，Y 的条件分布函数；（3）$Z=Y-X$ 的概率密度函数.

五、（8 分）设随机变量 X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & (x,y)\in G; \\ 0, & 其他，\end{cases}$$

其中 G 为坐标轴与直线 $x+y-1=0$ 所围的三角形区域，计算 $E(X)$，$D(X)$，以及 X 与 Y 的相关系数 ρ.

六、（12 分）设总体的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}3e^{-3(x-\theta)}, & x>\theta; \\ 0, & x\le\theta,\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自此总体的样本，求 1）θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 与最大似然估计 $\hat{\theta}_2$；2）判断 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 是否为无偏估计，如果不是请相应给出修正后的无偏估计；（3）比较（2）中无偏估计的有效性.

七、（4 分）某射手的射击命中率为 3/4， 现对一目标连续射击，直到第二次命中为止，令 X 表示第二次为止所用的射击次数，求 X 的概率分布，并计算 X 的期望.

答案：

一、填空题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1. 1-p； 2. (0.1, 0.2, 0.1)； 3. $\frac{1}{6}$； 4. (-3, 30.8)； 5. n 75.05n 84.95n

二、填空题（每小题 **3** 分，共 **5** 小题，满分 **15** 分）

1. C； 2. B； 3. C； 4. D； 5. B

三、（8 分）解：设 $A=\{$从甲袋取的是黑球$\}$； $B=\{$从乙袋取的是黑球$\}$；

$D=\{$乙袋放入和取出的是同色球$\}$

有 $P(A|D)=\dfrac{P(AD)}{P(D)}=\dfrac{P(AB)}{P(AB+\bar{A}\bar{B})}=\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}}=\dfrac{9}{17}$

四、（8 分）

解：（1）当 $X\le 0$ 时， $f_X(x)=0$；

当 $X>0$ 时， $f_X(x)=\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$；

因此 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

当 $Y\le 0$ 时， $f_Y(y)=0$；

当 $Y>0$ 时， $f_X(x)=\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y}$；

因此 $f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$。

最终，对 $x>0$，有 $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} e^{-(y-x)}, & y>x \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

对 $y>0$，有 $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 0<x<y \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

（2）$F_{Y|X}(y\,|\,0<x<1)=\dfrac{P(0<x<1, Y\le y)}{P(0<x<1)}$

$$P(0<x<1,Y\le y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ 1-e^{-y}-ye^{-y} & 0\le y<1 \\ 1-e^{-1}-e^{-y} & y\ge 1 \end{cases}$$

$P(0<x<1)$=1-e^{-1}

$$F_{Y|X}(y\,|\,0<x<1)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ \dfrac{1-e^{-y}-ye^{-y}}{1\text{-}e^{-1}} & 0\le y<1 \\ \dfrac{1-e^{-1}-e^{-y}}{1-e^{-1}} & y\ge 1 \end{cases}$$

（3）$F_z(z)=P(Y-X\le z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{x+z} e^{-y}dy\right)dx & z>0 \end{cases}=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ 1\text{-}e^{-z} & z>0 \end{cases}$

$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$。

五、（12 分）解：$EX=\int_0^1\left(\int_0^{1-x} x\cdot 24xydy\right)dx=\dfrac{2}{5}, EX^2=\dfrac{1}{5}, DX=\dfrac{1}{25}$,

$EX=EY; EX^2=EY^2, EXY=\dfrac{2}{15}$

$\operatorname{cov}(X,Y)=-\dfrac{2}{75}, \rho=-\dfrac{2}{3}$

六、（8 分）解：

（1）矩估计：由 $E(X)=\int_\theta^{+\infty} x\cdot 3e^{-3(x-\theta)}dx=\dfrac{1}{3}+\theta\approx\bar{X}$，故 $\hat{\theta}_1=\bar{X}-\dfrac{1}{3}$.

MLE：似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=3^n e^{-3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$，　　$x_{(1)}\ge\theta$.

故 MLE 为 $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$.

（2）矩估计：$E(\hat{\theta}_1) = E(\bar{X}) - \dfrac{1}{3} = E(X) - \dfrac{1}{3} = \theta$，故 $\hat{\theta}_1$ 为无偏估计.

MLE：$x_{(1)}$ 的概率密度函数为 $f(x;\theta) = \begin{cases} 3ne^{-3n(x-\theta)}, & x > \theta; \\ 0, & x \le \theta, \end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2) = E(X_{(1)}) = \theta + \dfrac{1}{3n}$, $\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计，而 $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_2 - \dfrac{1}{3n} = X_{(1)} - \dfrac{1}{3n}$ 为无偏估计.

（3）$D(\hat{\theta}_1) = \dfrac{1}{9n}, D(\hat{\theta}_3) = \dfrac{1}{9n^2}$，后者更有效.

七、（4 分）解：$P(X = k) = C_{k-1}^{1}(1/4)^{k-2}(3/4)^2 = (k-1)(1/4)^{k-2}(3/4)^2, \quad k = 2, 3, \cdots$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1/4)^{k-2}(3/4)^2,$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}p^2 \quad (\text{令} p = 3/4)$$

$$= p^2\left(\sum_{k=2}^{+\infty} q^k\right)'' = \frac{2}{p} = \frac{8}{3}$$