高等数学 B

凌怡 理学院

2020.05.28

高等数学 B 2019 春期中试题解答

一、填空题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分）

1. 函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 处的方向导数的最大值是 ______。

解： $\max\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}\right\}=\left|\nabla f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\right|=\left|(2x,2y,2z)|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}\right|=\sqrt{2}$ 。

2. 空间曲线 $\begin{cases}x^2+2y^2+z^2=10,\\ x^2-y^2+z=-2\end{cases}$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切线方程是 ______。

解：在曲线方程两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}2x+4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\ 2x-2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}。$$

代入点 $(1,2,1)$ 到上述方程，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2,1)}=\frac{1}{8},\quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2,1)}=-\frac{3}{2}。$$

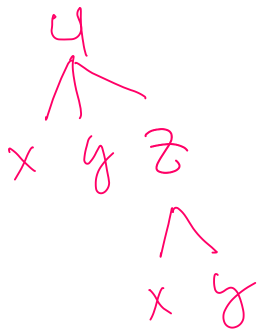
于是，所给曲线在点$(1,2,1)$处的切向量为

$$\vec{T}=\left(1,\frac{1}{8},-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{16}(16,2,-24)=\frac{1}{8}(8,1,-12)。$$

因而，在点$(1,2,1)$处的切线方程是

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-24}\quad 或 \quad \frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-12}。$$

3. 设$u=xy^2z^3$，其中$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2+z^2=3xyz$所确定的隐函数，则$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=$________________。



解： $$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3+xy^2\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)。$$

在方程$x^2+y^2+z^2=3xyz$两边对x求导，得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=3yz+3xy\frac{\partial z}{\partial x}。$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz-2x}{2z-3xy}\Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1。$$

故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\left.\left[y^2z^3+xy^2\left(3z^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\right|_{(1,1,1)}=1-3=-2。$$

4. 设函数$f(x,y)$在点$(1,0)$处连续，且$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{f(x,y)-x+2y-3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，则函数$f(x,y)$在点$(1,0)$处的全微分$\left.\mathrm{d}f\right|_{(1,0)}=$____________________。

$f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点可微

$\Leftrightarrow$ $f(1+\Delta x, \Delta y) - f(1,0)$

$= A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

解：由函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{f(x,y)-x+2y-3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，知

$$f(1,0)=\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=4。$$

这样，有

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y)-f(1,0)-(x-1)+2y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0 \quad 。$$

从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x+1,\Delta y)-f(1,0)-\Delta x+2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0。$$

故

$$f(\Delta x+1,\Delta y)-f(1,0)=\Delta x-2\Delta y+o(\rho)。$$

于是，$\mathrm{d}f\big|_{(1,0)}=\Delta x-2\Delta y$ 或 $\mathrm{d}f\big|_{(1,0)}=\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$。

二、选择题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 处（　　）。

(A) 不取极值；　　(B) 取极小值 e；

(C) 取极大值$-\frac{e}{2}$；　　(D) 取极小值$-\frac{e}{2}$。

解：$f_x=e^{2x}\left(2x+2y^2+4y+1\right),\ f_y=e^{2x}(2y+2)\ \Rightarrow$ 驻点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$。

$f_{xx}=e^{2x}\left(4x+4y^2+8y+4\right),\ f_{xy}=e^{2x}(4y+4),\ f_{yy}=2e^{2x}$。

$A=f_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e,\ B=f_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0,\ C=f_{yy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e$。

$A>0,\ AC-B^2=4e^2>0$。

(D)对。

2. 设$y_1=2e^x+e^{-2x},\ y_2=-xe^x+e^{-2x},\ y_3=3e^x-xe^x+e^{-2x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个特解，则该微分方程是(　　)。

(A) $y''-2y'+y=9e^{-2x}$；　　(B) $y''-2y'+y=e^{-2x}$；

(C) $y''+y'-2y=xe^x$；　　(D) $y''+y'-2y=3e^x$。

解：$y_3-y_2=3e^x$是它对应的齐次微分方程的解。

$\frac{1}{3}\left(3e^x\right)=e^x$，及　$2e^x$是它对应的齐次微分方程的解

$y_2-2e^x=e^{-2x}$是非齐次微分方程的解。　（关键）

$e^{-2x}-y_2=xe^x$是它对应的齐次微分方程的解。

因而$r=1$是它对应的齐次微分方程的特征方程的重根。故特征方程为

$$(r-1)(r-1)=0\ \text{或}\ r^2-2r+1=0。$$

于是该二阶常系数线性非齐次微分方程为

$$y''-2y'+y=f(x)。$$

代入e^{-2x}进上述方程，　得　$f(x)=9e^{-2x}$。从而所求的方程为

$$y''-2y'+y=9e^{-2x}。$$

(A) 对。

3. 设 $I_1=\iint\limits_D\left(e^{-(x^2+y^2)}-1\right)dxdy$，$I_2=\iint\limits_D\cos\left(x^2+y^2\right)^2dxdy$，$I_3=\iint\limits_D(x+2y)^3dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| |x|+|y|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$，则（　　）。

(A) $I_1<I_2<I_3$；　(B) $I_1<I_3<I_2$；　(C) $I_3<I_2<I_1$；　(D) $I_2<I_1<I_3$。

解：$I_1=\iint\limits_D\left(e^{-(x^2+y^2)}-1\right)dxdy\le\iint\limits_D\left(e^{-1}-1\right)dxdy<0$；

$I_2=\iint\limits_D\cos\left(x^2+y^2\right)^2dxdy>0$；

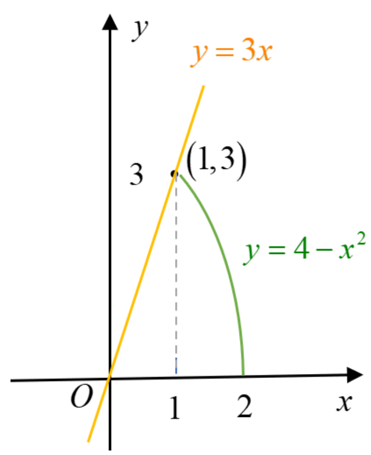
$I_3=\iint\limits_D(x+2y)^3dxdy=\iint\limits_D\left(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3\right)dxdy=0$。

(B) 对。

4. 设 $I=\int_0^1dx\int_0^{3x}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{4-x^2}f(x,y)dy$，则改变积分次序后 $I=$（　）。

(A) $\int_0^3dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y}{3}}f(x,y)dx$；　(B) $\int_0^3dy\int_{3y}^{\sqrt{4+y}}f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^3dy\int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)dx$；　(D) $\int_0^3dy\int_{\sqrt{4-y}}^{\frac{y}{3}}f(x,y)dx$。



解：(C) 对。

三、(5 分) 求微分方程 $y''+3y'+2y=3\sin x$ 的通解。

解：特征方程为 $r^2+3r+2=0$，解得 $r_1=-1,r_2=-2$。所以对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}\text{。}$$

设方程的特解为

$$y^*=a\cos x+b\sin x\text{，}$$

代入原方程得

$$-a\cos x-b\sin x+3(-a\sin x+b\cos x)+2(a\cos x+b\sin x)=3\sin x\text{。}$$

简化得

$$(a+3b)\cos x+(b-3a)\sin x=3\sin x\text{。}$$

比较两边同类项的系数得

$$\begin{cases}a+3b=0\\b-3a=3\end{cases}\text{。}$$

解得 $a=-\dfrac{9}{10}, b=\dfrac{3}{10}$，所以

$$y^*=-\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x\text{。}$$

故方程通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x\text{。}$$

四、(5 分）设 $z=f(x-2y)+g(y+1,\ x\mathrm{e}^y)$，其中 $f(t)$ 具有二阶导数，$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数。求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'+g'_v\cdot\mathrm{e}^y=f'+\mathrm{e}^y g'_v\text{。}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot(-2)+g'_u+g'_v\cdot(x\mathrm{e}^y)=-2f'+g'_u+x\mathrm{e}^y g'_v\text{。}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\cdot(-2)+\mathrm{e}^y g'_v+\mathrm{e}^y[g''_{vu}+g''_{vv}\cdot(x\mathrm{e}^y)]$$

$$=-2f''+\mathrm{e}^y g'_v+\mathrm{e}^y g''_{uv}+x\mathrm{e}^{2y}g''_{vv}\text{。}$$

五、（4 分）在椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$的第一卦限部分上求一点，使椭球面在该点处的切平面在三个坐标上的截距的平方和最小，并写出该点的切平面方程。

解：设切点坐标为(x_0,y_0,z_0)（$x_0>0, y_0>0, z_0>0$），则切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0)=0。$$

注意到$x_0^2+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}=1$，上式化为

$$x_0x+y_0y+\frac{z_0}{4}z=1。$$

所以切平面在x轴，y轴，z轴的截距依次为$\frac{1}{x_0},\frac{1}{y_0},\frac{4}{z_0}$，截距的平方和函数为

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}。$$

于是问题化为求函数$f(x_0,y_0,z_0)$在条件$x_0^2+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}-1=0$下的条件极值问题。设拉格朗日函数

$$F(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}+\lambda\left(x_0^2+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}-1\right)。$$

令

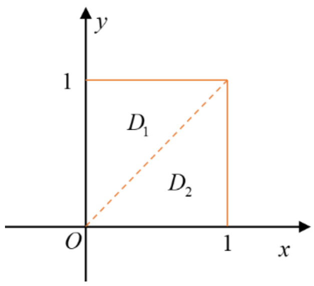
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_0}=-\dfrac{2}{x_0^3}+2\lambda x_0=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y_0}=-\dfrac{2}{y_0^3}+2\lambda y_0=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z_0}=-\dfrac{32}{z_0^3}+\dfrac{\lambda z_0}{2}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_0^2+y_0^2+\dfrac{z_0^2}{4}-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0^2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\\ y_0^2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\\ \dfrac{z_0^2}{4}=\dfrac{2}{\sqrt{\lambda}}\end{cases}$$

解得 $x_0=y_0=\dfrac{1}{2}, z_0=\sqrt{2}$。所以切点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，切平面方程为

$$2x+2y+\sqrt{2}z-4=0\text{。}$$

六、(4 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y^2-xy|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}\text{。}$$



解：用直线 $y=x$ 分成 D_1,D_2 两部分，其中

$$D_1=\{(x,y)|0\le y\le 1,0\le x\le y\};$$

$$D_2=\{(x,y)|0\le y\le 1,y\le x\le 1\}\text{。}$$

则

$$\iint\limits_D \sqrt{|y^2-xy|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\iint\limits_{D_1}\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\sqrt{y}\left[-\frac{2}{3}(y-x)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{9}\text{。}$$

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{y}\left[\frac{2}{3}(x-y)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{x=y}^{x=1}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\sqrt{y}\,(1-y)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^3\theta\left(2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\qquad \text{令}\sqrt{y}=\sin\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^4\theta\ \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4\theta-\cos^6\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^3\right]\ \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{4}\left(1+\cancel{2\cos 2\theta}+\frac{1+\cancel{\cos 4\theta}}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+3\cancel{\cos 2\theta}+3\frac{1+\cancel{\cos 4\theta}}{2}+(1-\sin^2 2\theta)\cos 2\theta\right)\ ]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

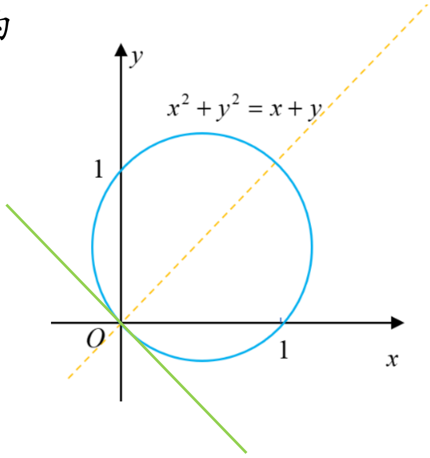
$$=\frac{\pi}{24}\text{。}$$

故

$$\iint\limits_D\sqrt{\left|y^2-xy\right|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{9}+\frac{\pi}{24}\text{。}$$

七、（4 分） 求以 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=x+y$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积。

解：记 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le x+y\right\}$，则曲顶柱体的体积为



$$V=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{8}。$$

注：为决定角的范围，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)}$。

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-2x}{2y-1}$$

$$\therefore\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)}=-1\Rightarrow\tan\theta=-1。$$