

HW-3 19040102 自动化一班 方亮

3-1 设甲 X_1 , 乙 X_2 , $y = \begin{cases} 0 & \text{车运} \\ 1 & \text{船运} \end{cases}$

$$\min S = (1-y)(100X_1 + 150X_2) + y(200X_1 + 300X_2)$$

$$\begin{cases} 7X_1 + 8X_2 \leq 35 + yM \\ 20X_1 + 15X_2 \leq 500 + yM \\ 80X_1 + 75X_2 \leq 85 + (1-y)M \\ 35X_1 + 42X_2 \leq 250 + (1-y)M \\ X_1, X_2 \geq 0 \text{ 且为整数, } y \text{ 为 } 0-1 \text{ 变量, } M \text{ 为一足够的大数} \end{cases}$$

3-2(1) $\max Z = 40X_1 + 90X_2$

$$\begin{cases} 9X_1 + 7X_2 \leq 56 \\ 7X_1 + 20X_2 \leq 70 \\ X_1, X_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

A点为(4.81, 1.82)

原伴随规划最优解在A点取到

以 X_2 为界分为 $X_2 \geq 2$, $X_2 \leq 1$

① $X_2 \geq 2$ 时, 约束转为

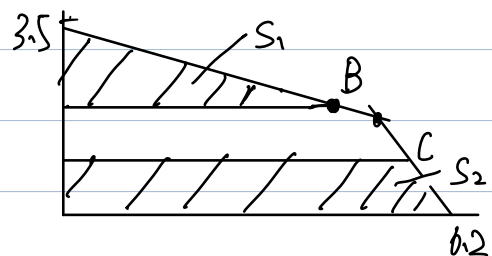
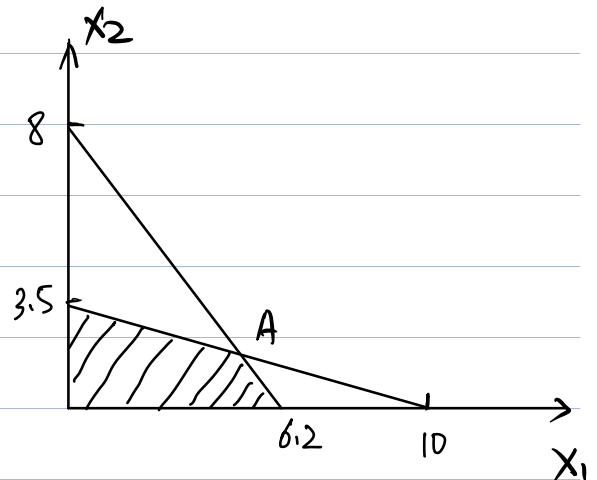
$$S_1 \begin{cases} 7X_1 + 20X_2 \leq 70 \\ X_2 \geq 2 \\ X_1 \geq 0, \text{ 且 } X_1, X_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

得B点(4.3, 2), $Z_1 = 352$

② $X_2 \leq 1$ 时, 转为

$$S_2 \begin{cases} 9X_1 + 7X_2 \leq 56 \\ X_2 \leq 1 \\ X_1 \geq 0 \text{ 且 } X_1, X_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

得C点(5.4, 1) $Z_2 = 306$



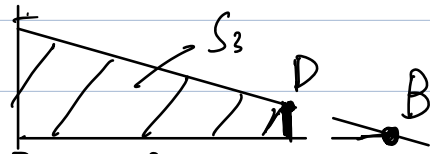
HW-3 19040102 自动化一班 方亮

$z_1 > z_2$, 先分解 S_1

由于 $x_B = 4.3$, $x_A = 4.8$, S_1 转为

$$S_3 \begin{cases} 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ 0 \leq x_1 \leq 4, x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

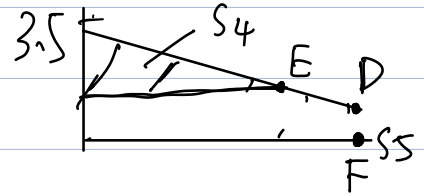
得 $D(4, 2.1)$ $z_3 = 349$



按 $x_2 \geq 3$ 和 $x_2 = 2$ 分

$$S_4 \begin{cases} 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, \text{ 且为整数} \end{cases}$$

$$S_5 \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 4 \\ x_2 = 2 \\ x_1 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$



$E(1.43, 3)$ $z_4 = 327$ $F(4, 2)$ $z_5 = 340 > z_2$

故 F 点为最优解, 为 $x = (4, 2)^T$, $z = 340$

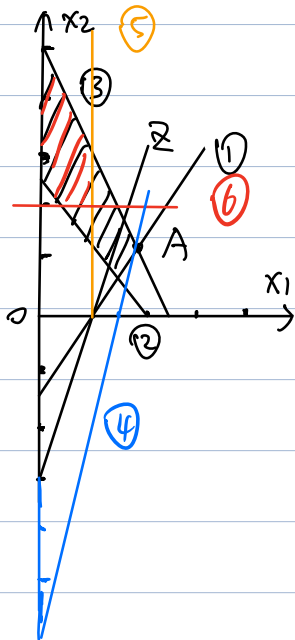
3-3(2) $\max z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 3 & ① \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10 & ② \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 & ③ \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \Rightarrow$$

线性规划 $\max z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + u_1 = 3 & ① \\ -5x_1 - 4x_2 + u_2 = -10 & ② \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 5 & ③ \end{cases}$$

$A(\frac{13}{7}, \frac{9}{7})$ $z_1 = \frac{30}{7}$ 非整数解



$$\begin{cases} ① \quad ③ \Rightarrow x_1 = \frac{13}{7} - \frac{1}{7}u_1 - \frac{2}{7}u_3 \\ x_2 = \frac{9}{7} + \frac{2}{7}u_1 - \frac{3}{7}u_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6u_1 + 5u_3 \geq 1 \\ 2u_1 + 4u_3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 6 & ④ \\ x_1 \leq 1.5 & ⑤ \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq 1$$

HW-3 19040102 自动化1班 方亮

$$\textcircled{5} \text{ 和 } \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10 \end{cases} \Rightarrow x_2 \geq \frac{5}{4} \text{ 即 } x_2 \geq 2 \quad \textcircled{6}$$

可得最优解为 $x = (1, 2)^T$, $z = 1$ 为最优值

3-6(2) $\min z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0 & \textcircled{1} \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 4 & \textcircled{2} \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 1 & \textcircled{3} \\ x_1 - x_4 \quad 0-1 \text{ 变量} \end{cases}$$

(x_1, x_2, x_3, x_4)	z	$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$	是否可行	(x_1, x_2, x_3, x_4)	z	$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$	是否可行
0 0 0 0	0			1 0 0 0	2	X X V	
0 0 0 1	4	V V V	$z \leq 4$	1 0 0 1	6		
0 0 1 0	3	V X X		1 0 1 0	5		
0 0 1 1	7			1 0 1 1	9		
0 1 0 0	5			1 1 0 0	7		
0 1 0 1	9			1 1 0 1	11		
0 1 1 0	8			1 1 1 0	10		
0 1 1 1	12			1 1 1 1	14		

故最优解为 $x = (0, 0, 0, 1)^T$, $\min z = 4$

HW-3 19040102 自动化班 方亮

3-5 得 $\max\{C_{ij}\} = 17$

$C'_{ij} = \max\{C_{ij}\} - C_{ij}$ 转化为最小化问题

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 8 & 10 & 8 \\ 9 & 8 & 11 & 11 & 11 \\ 10 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 11 & 11 & 7 \\ 13 & 7 & 10 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

匈牙利方法

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{0} & 10 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & \textcircled{0} & 2 & \emptyset \\ 10 & \textcircled{0} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 1 & 4 & 6 & \textcircled{0} \\ 9 & 3 & 1 & \textcircled{0} & 2 \end{bmatrix}$$

故 $x_{11} = x_{23} = x_{32} = x_{45} = x_{54} = 1$ 其余为0

即 I-A, II-C, III-B, IV-E, V-D, 可获得最好经济效益

HW-3 190410102 自动化1班 方亮

作业(选做)

作业(选作)

从A、B、C、D、E等5人中挑选4人去完成4项工作，已知每人完成各项工作的时间如下表所示，规定每项工作只能由其中一人单独完成，而每个人最多只能承担其中一项任务。又假定A必须保证分配一项任务，D由于某种原因决定不同意承担第4项任务。在上述条件下，应如何分配工作，使完成这4项任务所需的总时间最少？

人员 任务	A	B	C	D	E
I	10	2	3	15	9
II	5	10	15	2	4
III	15	5	14	7	15
IV	20	15	13	6	8

由于D不做IV，故对应价值系数为M，M足够的大，

新增一虚拟任务，由于A必须保证分配，故虚拟任务对应A价格系数为M，

M足够的大，其余为0，

$$C' = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 & 15 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 2 & 4 \\ 15 & 5 & 14 & 7 & 15 \\ 20 & 15 & 13 & M & 8 \\ M & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

匈牙利
方法

$$C' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 12 & 7 \\ 0 & 8 & 13 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 9 & 2 & 10 \\ 9 & 7 & 5 & M & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

min = 1

$$\Rightarrow C' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 9 & 13 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 8 & 1 & 9 \\ 9 & 8 & 5 & M & 0 \\ M & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故得到最优解

$x_{13} = x_{21} = x_{32} = x_{45} = x_{54} = 1$, 其余为0

即 A-II, B-III, C-I,
D空闲, E-IV

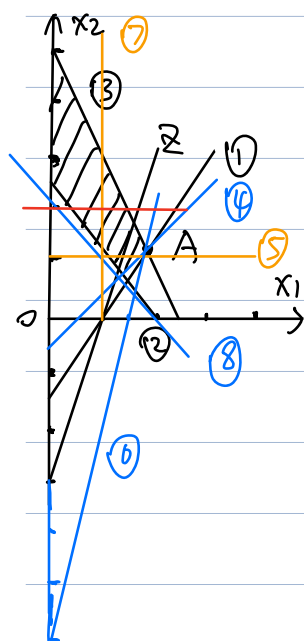
3-3(2) $\max Z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 3 & ① \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10 & ② \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 & ③ \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases} \Rightarrow$$

线性规划 $\max Z = 3x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + u_1 = 3 & ① \\ -5x_1 - 4x_2 + u_2 = -10 & ② \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 5 & ③ \end{cases}$$

$A(\frac{13}{7}, \frac{9}{7})$ $Z = \frac{30}{7}$ 非整数解



$x_2 \geq \frac{5}{4}$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2u_1}{11} + \frac{u_2}{11} + \frac{16}{11} \\ x_2 = \frac{5}{22}u_1 + \frac{3}{22}u_2 + \frac{15}{22} \end{cases}$$

$x_1 + u_1 = \frac{9u_1 + u_2}{11} + \frac{16}{11} \geq 2$ 即 $9u_1 + u_2 \geq 6$

即 $2x_1 - 2x_2 \leq 1$ ④

$x_2 = \frac{5}{22}u_1 + \frac{3}{22}u_2 + \frac{15}{22} \geq 1$ 即 $5u_1 + 3u_2 \geq 7$

即 $x_2 \geq 1$ ⑤

$-\frac{5x_1}{4} + \frac{u_2}{4} + \frac{10}{4} = 1 \Rightarrow x_2$

①-⑤约束解出仍不为整数解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{7} - \frac{u_1}{7} - \frac{2}{7}u_3 \\ x_2 = \frac{9}{7} + \frac{2}{7}u_1 - \frac{2}{7}u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6u_1 + 5u_3 \geq 1 \\ 2u_1 + 4u_3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 6 & ⑥ \\ x_1 \leq 1.5 & ⑦ \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 \leq 1$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10}{3} - \frac{u_2}{3} - \frac{4}{3}u_3 \\ x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}u_2 + \frac{5}{3}u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 + u_3 \geq 1 \\ 2u_2 + 5u_3 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 & ⑧ \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

⑦和② $\Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10 \end{cases} \Rightarrow x_2 \geq \frac{5}{4}$ 即 $x_2 \geq 2$ ⑨