哈尔滨工业大学 (深圳)

信号分析与处理上机实验报告（三）

实验（三）： 使用快速傅里叶变换（FFT）进行频谱分析 实验日期： 2021.11.08

姓名： 方尧 学号： 190410102 班级： 19 级自动化 1 班

一、 实验目的

1. 加深对快速傅里叶变换(FFT)的理解；
2. 熟悉应用 FFT 对典型信号进行频谱分析的方法；
3. 了解应用 FFT 进行信号频谱分析以及实际应用可能出现的问题；
4. 熟悉应用 FFT 实现两个序列的线性卷积的方法；
5. 熟悉 FFT 计算与应用的 Matlab 软件编程。

二、 代码及详细流程

MATLAB 代码：

```
% experiment3 使用快速傅里叶变换(FFT)进行频谱分析
clc,clear,close all
```

2.1 第一问：离散信号的傅里叶变换：幅度谱和相位谱

```
%experiment3(1)
N=10000;fs=1000;
nn=0:N-1;
ff=nn*fs/N;
x1n=[(0:4)+1,4:-1:1];%x1n：三角波序列
x2n=ones(1,7);%x2n 矩形序列；
% stem(0:length(x2n)-1,x2n)
X1k=fft(x1n,N);
X2k=fft(x2n,N);
figure
subplot(2,2,1),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X1k))
title('三角波'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
subplot(2,2,2),hold on,grid on ,box on
plot(ff,angle(X1k)/pi)
title('三角波'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('相位/\pi')
subplot(2,2,3),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X2k))
title('矩形波'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
subplot(2,2,4),hold on,grid on ,box on
plot(ff,angle(X2k)/pi)
```

```
title('矩形波'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('相位/\pi')
```

2.2 第二问：利用 FFT 计算线性卷积

```
%experiment3(2)
clear
N=10000;fs=1000;
nn=0:N-1;
ff=nn*fs/N;
x1n=[(0:4)+1,5:-1:1];
x2n=[2.^(0:5),-1*2.^(0:5)];
x3n=[0.8.^(0:6),4:8];
x4n=[-1:3,-1*0.6.^(-1:6)];
%第一小问
%计算 x1n 和 x2n 的线性卷积
X1k=fft(x1n,N);X2k=fft(x2n,N);%计算 x1n,x2n FFT
X1kX2k=X1k.*X2k;
figure
subplot(3,2,1),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X1k))
title('x_1[n]幅度谱|X_1k|'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
subplot(3,2,3),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X2k))
title('x_2[n]幅度谱|X_2k|'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
subplot(3,2,5),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X1kX2k))
title('|X_1k||X_2k|(x_1[n]x_2[n]卷积后幅度谱)'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
%第二小问
%计算 x3n 和 x4n 的线性卷积
X3k=fft(x3n,N);X4k=fft(x4n,N);%计算 x1n,x2n FFT
X3kX4k=X3k.*X4k;
subplot(3,2,2),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X3k))
title('x_3[n]幅度谱|X_3k|'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
subplot(3,2,4),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X4k))
title('x_4[n]幅度谱|X_4k|'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
subplot(3,2,6),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(X3kX4k))
title('|X_3k||X_4k|(x_3[n]x_4[n]卷积后幅度谱)'),xlabel('频率(f/Hz)'),ylabel('幅值')
%计算 FFT 反变换,计算卷积
x1x2=ifft(X1kX2k);x3x4=ifft(X3kX4k);
figure
subplot(2,1,1),hold on,grid on ,box on
```

```
stem(0:length(x1x2)-1,x1x2)
title('利用 FFT 计算 x_1[n]x_2[n]卷积'),xlabel('n'),ylabel('')
xlim([0,22-1])%N1+N2-1=22
subplot(2,1,2),hold on,grid on ,box on
stem(0:length(x3x4)-1,x3x4)
title('利用 FFT 计算 x_3[n]x_4[n]卷积'),xlabel('n'),ylabel('')
xlim([0,25-1])%N1+N2-1=25
```

2.3 第三问：利用 FFT 进行频谱分析，滤除噪声

```
%experiment3(3)
clear
fs=1e4;Ts=1/fs;N=ceil(0.1/Ts);
ff=(0:N-1)*fs/N;
tt=Ts:Ts:N*Ts;
xtt=sin(100*tt)./(100*tt);%无噪声信号
xt=sin(100*tt)./(100*tt)+rand(1,N);%有噪声信号
Xkk=Ts*fft(xtt);
Xk1=Ts*fft(xt);
%利用 fft 滤波,由幅度谱可知，可以用带阻滤波器滤波
Xk2=Xk1;
lim1=0.003;lim2=0.997;
for m=1:length(Xk2)
    if (m>lim1*length(Xk2))&&(m<lim2*length(Xk2))
        Xk2(m)=0;
    end
end
xt2=ifft(Xk2)/Ts;%ifft 求滤波后的时域图形
figure
subplot(3,2,1),hold on,grid on ,box on
plot(tt,xtt);
title('x(t)不带噪声时域波形'),xlabel('t/s'),ylabel('x(t)')
subplot(3,2,2),hold on,grid on ,box on
plot(2*pi*ff,abs(Xkk));
% xlim([0 300]);
title('x(t)不带噪声的频域幅度谱'),xlabel('\omega/(rad/s)'),ylabel('')
subplot(3,2,3),hold on,grid on ,box on
plot(tt,xt);
title('x(t)带噪声时域波形'),xlabel('t/s'),ylabel('x(t)')
subplot(3,2,4),hold on,grid on ,box on
plot(2*pi*ff,abs(Xk1));
% xlim([0 300]);
title('x(t)带噪声的频域幅度谱'),xlabel('\omega/(rad/s)'),ylabel('')
subplot(3,2,5),hold on,grid on ,box on
```

```
plot(tt,abs(xt2));
title('x(t)滤波后时域波形'),xlabel('t/s'),ylabel('x(t)')
subplot(3,2,6),hold on,grid on ,box on
plot(2*pi*ff,abs(Xk2));
% xlim([0 300]);
title('x(t)滤波后频域幅度谱'),xlabel('\omega/(rad/s)'),ylabel('')
```

2.4 第四问：FFT 选取不同采样频率、不同采样点数的比较

```
%experiment3(4)
clear
%experiment3(4)(1)
figure
fs=[5,15,40];
nn=0:127;N=128;
for m=1:3
    ts=1./fs(m);
    ff=nn*fs(m)/N;
    xn1=sin(2*pi*5*nn*ts)+sin(2*pi*9*nn*ts);
    subplot(3,2,2*m-1),hold on,grid on ,box on
    stem(nn,xn1,'.')
    xlabel('n'),ylabel('x(n)'),title(['Fs=',num2str(fs(m)),'Hz 时域波形'])
    Xk1=fft(xn1,N);%求频谱
    subplot(3,2,2*m),hold on,grid on ,box on
    stem(ff,abs(Xk1),'.')
    xlabel('f/Hz'),ylabel('幅度'),title(['Fs=',num2str(fs(m)),'Hz 频域幅度谱'])
end
%experiment3(4)(2、3)
figure
%fs=60Hz,x(t)的 64 点，不补零
fs=60;ts=1/fs;N=64;
nn=0:N-1;
ff=nn*fs/N;
tt=(0:N-1)*ts;
xn1=sin(2*pi*5*tt)+sin(2*pi*9*tt);%时域采样
Xk1=fft(xn1,N);
subplot(3,2,1),hold on,grid on ,box on
stem(nn,xn1,'.')
xlabel('n'),ylabel('x(n)'),title(['Fs=60Hz,64 点(不补零)时域波形'])
subplot(3,2,2),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(Xk1))
xlabel('f/Hz'),ylabel('幅度'),title(['Fs=60Hz,64 点(不补零)频域幅度谱'])
%fs=60Hz,x(t)的 64 点，补零到 128 点
xn2=[xn1,zeros(1,128-length(xn1))];
```

```
N=128;nn=0:N-1;
ff=nn*fs/N;
Xk2=fft(xn2,N);
subplot(3,2,3),hold on,grid on ,box on
stem(nn,xn2,'.')
xlabel('n'),ylabel('x(n)'),title(['Fs=60Hz,64 点(补零到 128 点)时域波形'])
subplot(3,2,4),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(Xk2))
xlabel('f/Hz'),ylabel('幅度'),title(['Fs=60Hz,64 点(补零到 128 点)频域幅度谱'])
%fs=60Hz,x(t)的 128 点
fs=60;ts=1/fs;N=128;
nn=0:N-1;
ff=nn*fs/N;
tt=(0:N-1)*ts;
xn3=sin(2*pi*5*tt)+sin(2*pi*9*tt);%时域采样
Xk3=fft(xn3,N);
subplot(3,2,5),hold on,grid on ,box on
stem(nn,xn3,'.')
xlabel('n'),ylabel('x(n)'),title(['Fs=60Hz,128 点时域波形'])
subplot(3,2,6),hold on,grid on ,box on
plot(ff,abs(Xk3))
xlabel('f/Hz'),ylabel('幅度'),title(['Fs=60Hz,128 点频域幅度谱'])
```

2.5 第五问：乐趣趣味小实验

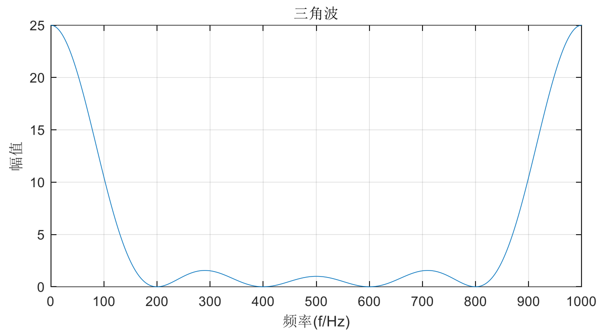
```
%experiment3(5)
%experiment3(5)(1)
fs = 8000; %采样频率
T = 1/fs; %采样周期
time1 = 0:T:0.5;time2 = 0:T:0.5;time3 = 0:T:0.5;time4 = 0:T:0.5; % 时长
freq1 = 261.63;freq2 = 293.66;freq3 = 329.63;freq4 = 349.23;freq5=392; % 频率
tone1 = sin(2*pi*freq1*time1);
tone2 = sin(2*pi*freq2*time2);
tone3 = sin(2*pi*freq3*time3);
tone4 = sin(2*pi*freq4*time4);
tone5 = sin(2*pi*freq5*time4);
Tone1 = [tone1, tone2, tone3, tone1]; %组合所有声音片段
Tone2 = [tone3, tone4, tone5, tone5]; %组合所有声音片段
Tone = [Tone1 Tone1 Tone2 Tone2];
sound(Tone,fs); %可以播放声音的函数 sound()
%存储.wav 音频文件
filename = ('5-3.wav'); %给文件取名
audiowrite(filename,Tone,fs);
%experiment3(5)(2)
```

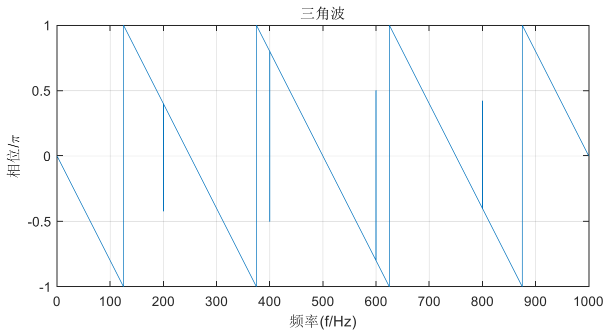
```
tone1 = tone1*54.*time1./exp(time1*20);
tone2 = tone2*54.*time2./exp(time2*20);
tone3 = tone3*54.*time3./exp(time3*20);
tone4 = tone4*54.*time4./exp(time4*20);
tone5 = tone5*54.*time4./exp(time4*20);
Tone1 = [tone1, tone2, tone3, tone1]; %组合所有声音片段
Tone2 = [tone3, tone4, tone5, tone5]; %组合所有声音片段
Tone = [Tone1 Tone1 Tone2 Tone2];
sound(Tone,fs); %可以播放声音的函数 sound()
%存储.wav 音频文件
filename = ('5-4.wav'); %给文件取名
audiowrite(filename,Tone,fs);
%experiment3(5)(3)
tone1 =
0.5*sin(2*pi*freq1.*time1)+0.3*sin(2*pi*freq1.*time1)+0.2*sin(2*pi*freq1.*time1);
tone2 =
0.5*sin(2*pi*freq2.*time2)+0.3*sin(2*pi*freq2.*time2)+0.2*sin(2*pi*freq2.*time2);
tone3 =
0.5*sin(2*pi*freq3.*time3)+0.3*sin(2*pi*freq3.*time3)+0.2*sin(2*pi*freq3.*time3);
tone4 =
0.5*sin(2*pi*freq4.*time4)+0.3*sin(2*pi*freq4.*time4)+0.2*sin(2*pi*freq4.*time4);
tone5 =
0.5*sin(2*pi*freq5.*time4)+0.3*sin(2*pi*freq5.*time4)+0.2*sin(2*pi*freq5.*time4);
tone1 = tone1*54.*time1./exp(time1*20);
tone2 = tone2*54.*time2./exp(time2*20);
tone3 = tone3*54.*time3./exp(time3*20);
tone4 = tone4*54.*time4./exp(time4*20);
tone5 = tone5*54.*time4./exp(time4*20);
Tone1 = [tone1, tone2, tone3, tone1]; %组合所有声音片段
Tone2 = [tone3, tone4, tone5, tone5]; %组合所有声音片段
Tone = [Tone1 Tone1 Tone2 Tone2];
sound(Tone,fs); %可以播放声音的函数 sound()
%存储.wav 音频文件
filename = ('5-5.wav'); %给文件取名
audiowrite(filename,Tone,fs);
```

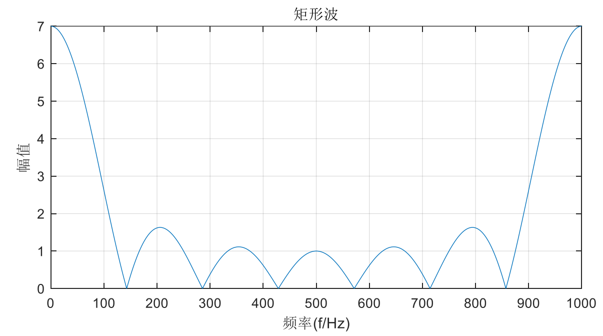
三、 实验结果

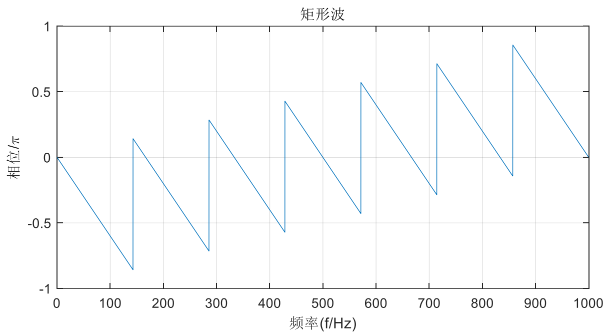
（图形均为矢量图像，可放大查看）

1. 离散信号的傅里叶变换：幅度谱和相位谱

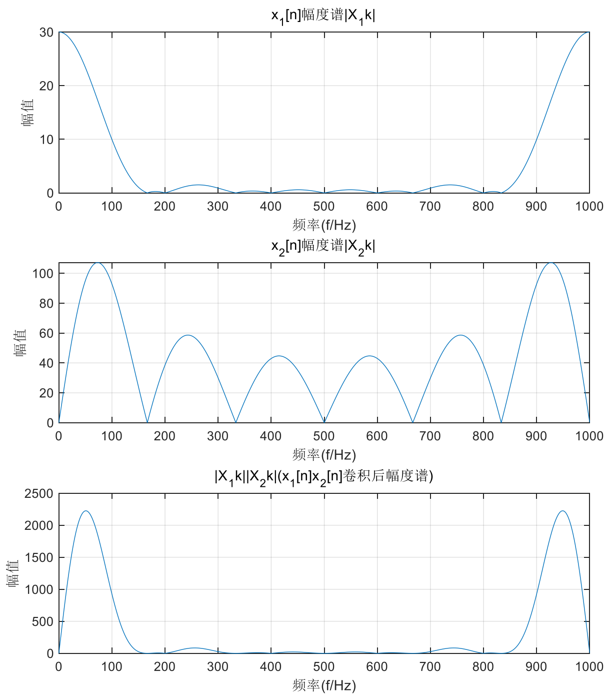


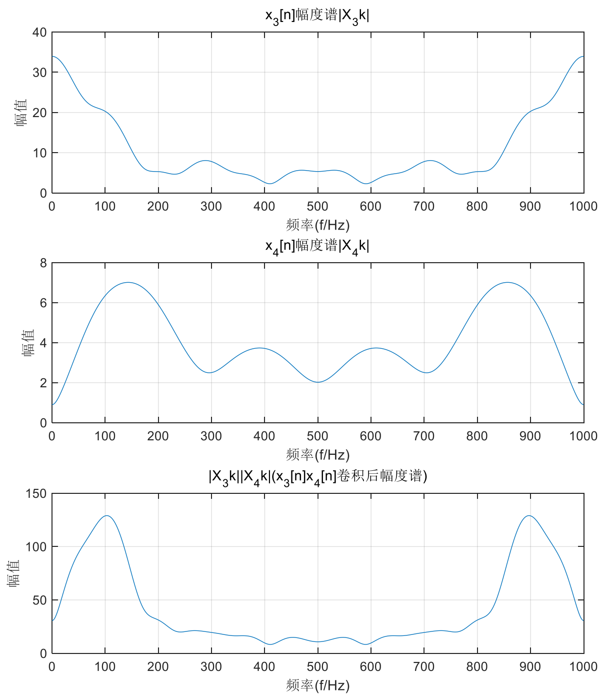




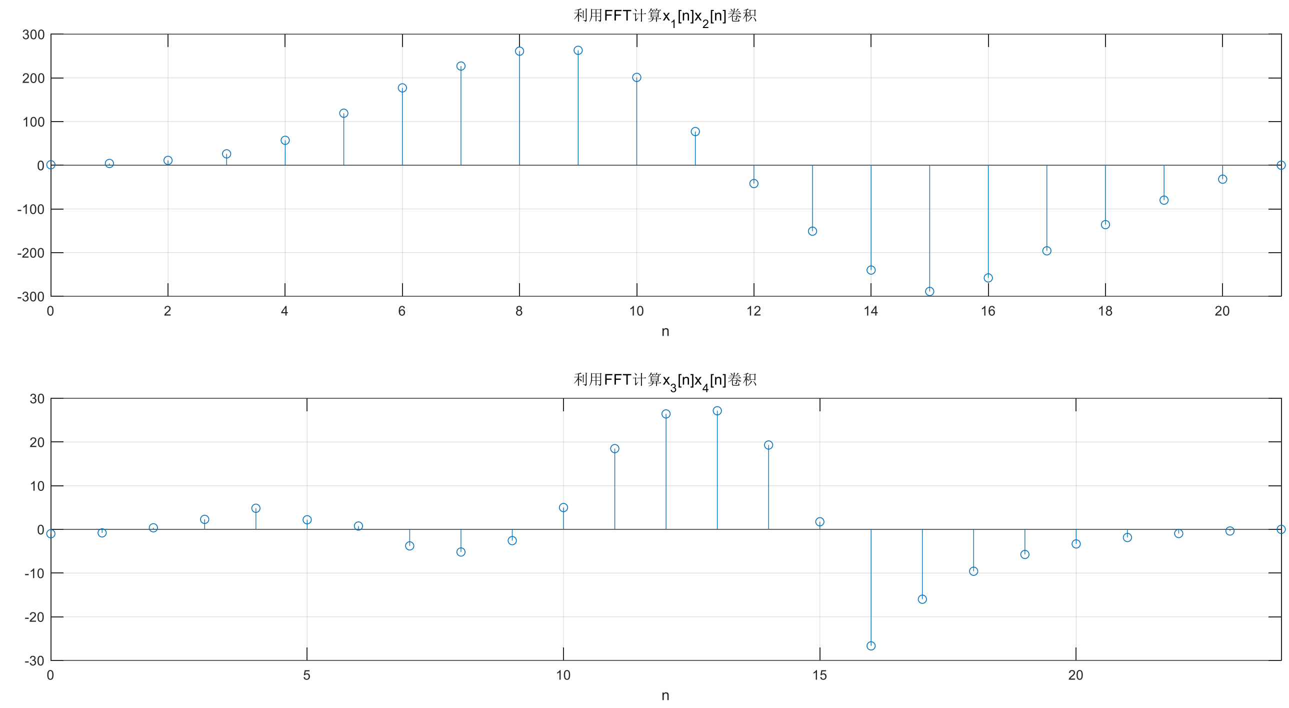


2. 利用 FFT 计算线性卷积

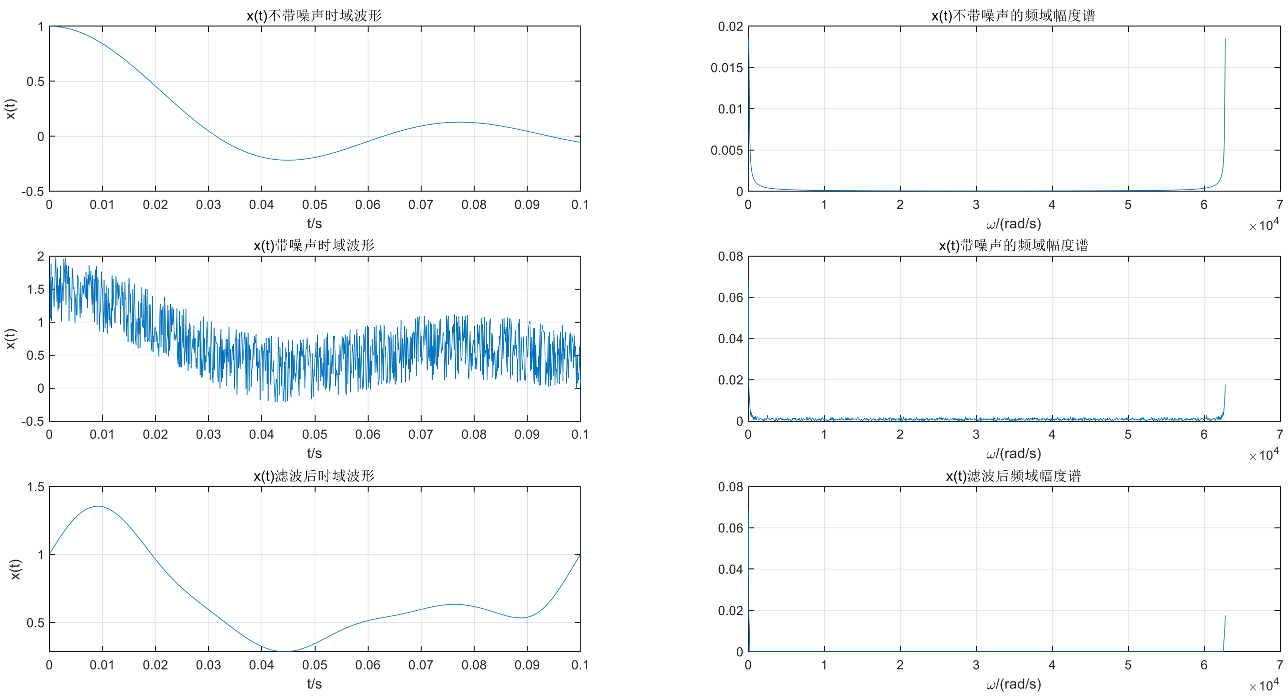




利用 FFT 计算卷积结果如下：

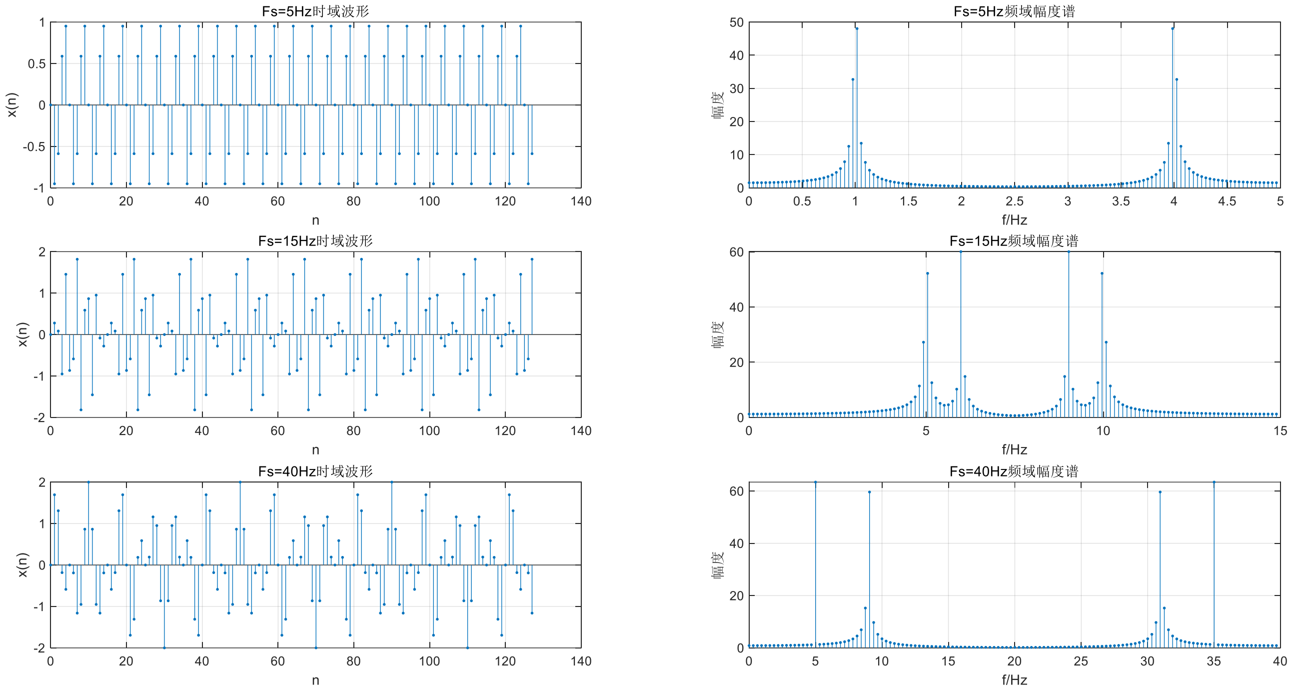


3. 利用 FFT 进行频谱分析，滤除噪声

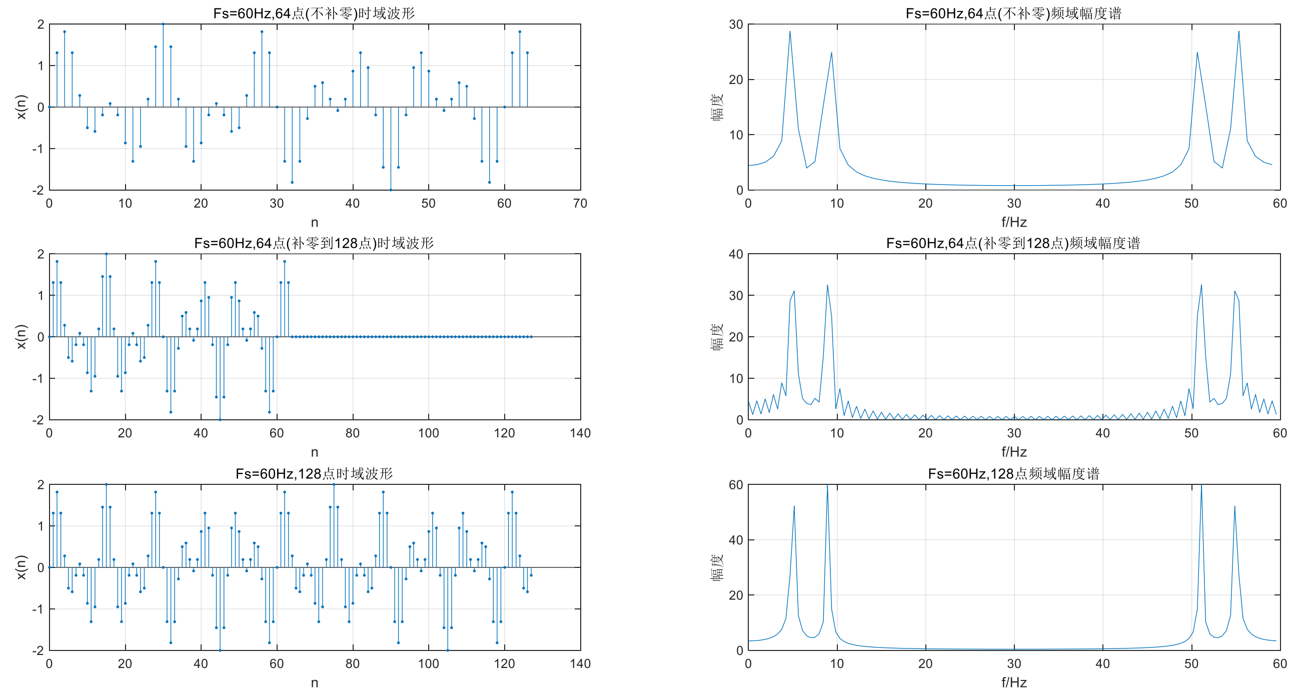


4. FFT 选取不同采样频率、不同采样点数的比较

（1）不同采样频率



（2）不同采样点数以及补零



5. 乐趣趣味小实验

成功播放出了完整的“两只老虎”，经过添加包络线、谐波叠加分别生成了对应的文件【5-3.mav】、【5-4.mav】、【5-5.mav】。

四、 实验结果分析讨论

1. 离散信号的傅里叶变换：幅度谱和相位谱

离散信号的频谱是以 fs 为周期进行周期延拓的。且幅度谱是偶函数，相位谱是奇函数。

2. 利用 FFT 计算线性卷积

长度为 N 和长度为 M 的两序列线性卷积得到的新序列长度是 M+N-1。

线性卷积的频谱和原两卷积序列各自频谱的乘积相同，即时域卷积，频域相乘。验证了时域卷积定理。

3. 利用 FFT 进行频谱分析，滤除噪声

由于 rand()信号属于白噪声，频谱无穷宽，故无法用常规滤波器滤波。但观察到原频谱在中间带频谱幅值小，故采用带阻滤波器滤除随机信号，效果较为良好。

4. FFT 选取不同采样频率、不同采样点数的比较

Fm=9Hz，5Hz 和 15Hz 不满足采样定理，会出现频谱混叠现象。40Hz 取主值后可以完全等于原信号频谱，可以无失真还原原信号。

64 点补零至 128 点序列频谱幅值和 64 点序列频谱近似相等，由于相当于进行了频谱插值，补零序列频谱呈现出锯齿波状，较原序列连续性变差。128 点是 64 点两倍，故在幅值上，128 点序列频谱幅值是 64 点序列的两倍，且 128 点点数多，连续性较 64 点好。

5. 乐趣趣味小实验

成功播放出了完整的“两只老虎”，经过添加包络线、谐波叠加分别生成了对应的文件【5-3.mav】、【5-4.mav】、【5-5.mav】。

五、 实验思考题

1. 理解线性卷积、圆周卷积和循环卷积的区别。用 FFT 计算线性卷积时，FFT 的长度 N 应满足什么条件？

A. 线性卷积定义为 $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)$，若 $x(n)$ 序列长度为 m，$h(n)$ 序列长度为 n，则线性卷积结果长度为 M+N-1。

B. 循环卷积定义为两周期序列 $x(n)$、$h(n)$ 周期为 N，$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h(n-m)$，卷积后的序列是周期为 N 的周期序列，取主值得到循环卷积。

C. 圆周卷积定义为两 N 点序列 $x(n)$、$h(n)$，$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h((n-m))_N R_N(n)$，进行周期为 N 的周期延拓后进行线性卷积，再取主值得到的序列为圆周卷积结果，序列长度为 N。

D. 利用 FFT 计算线性卷积：先将序列分别补零至长度 L，当 L≥M+N-1 时，圆周卷积的结果与线性卷积结果相同。故 L 应满足：L≥M+N-1;

2. **实数序列 x(t)的频域幅度谱和相位谱有什么规律？虚数序列x(t)的频域幅度谱和相位谱有什么规律？反之可以得出什么结论？**

实数序列，$F(\omega)$、$X(k)$ 实部是偶函数，虚部是奇函数，频域幅度谱为偶函数，频域相位谱为奇函数；

虚数序列，$F(\omega)$、$X(k)$ 实部是奇函数，虚部是偶函数，频域幅度谱为偶函数，频域相位谱为奇函数；

3. **FFT 也可以滤除信号中的噪声分量，从而恢复原信号，那么它与 IIR 和 FIR 滤波器的区别是什么？**

FFT 除噪是利用频域中去除噪声频率范围的分量实现的，它要求信号的频率范围与噪声的频率范围不重叠，否则将不能去除噪声，或者会损失一部分原信号，造成一定的失真。

IIR 和 FIR 滤波器是数字滤波器，原理是观测当前和过去输入（FIR）和过去输出（IIR），通过函数逼近给定的滤波器幅频特性模型，分离出原信号和噪声。

区别：FFT 滤波是在频域层次的，IIR 和 FIR 滤波器是在时域层次的。

4. **同一连续信号离散化后有两种情况，第一种是取较长的离散序列求 FFT；第二种是取较短的离散序列，结尾补零扩展成与第一种中的长度相等，再求 FFT。在上述两种情况下，信号的频谱有何异同点？**

相同点：序列总长度 N 相同，采样频率F_s相同，所以频域最大频率F_s相同，频谱间隔都为$\frac{Fs}{N}$。

不同点：短序列补零进行 FFT 变换是补零前序列频谱进行插值后的结果。

（1）长序列信号频谱幅度大，连续性更好。

（2）短序列补零信号频谱幅度小，连续性差。

（3）当原信号是周期信号时，长短信号都为整周期截断，频谱仅存在频谱幅值上的差异；若不为整周期截断，则会出现频谱泄露，两者频谱会出现很大不同。