主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2017/2018 学年春季学期

高等数学 B 试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密　封　线

一、填空题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分）

1. 设 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段，则对弧长的曲线积分 $\int_L (x+y)\mathrm{d}s =$ ＿$\sqrt{2}$＿.

2. 向量函数 $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2y\,\mathbf{i}+y^2z\,\mathbf{j}+z^2x\,\mathbf{k}$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的散度 $\operatorname{div}\mathbf{F}\big|_{(1,2,-1)} =$ ＿-2＿.

3. 设质量密度为常数 ρ 的均质立体由下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围成，其质心坐标是 $(0,0,\bar{z})$，则 $\bar{z} =$ ＿$-\frac{3}{8}$＿.

4. 若二元函数 $u=u(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}u=(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$，则 $u =$ ＿$\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5+C$＿.

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径 $R =$ ＿2＿.

二、选择题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 已知 $\alpha>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 的范围为（ D ）

(A) $0<\alpha\le\frac{1}{2}$；　(B) $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$；　(C) $1<\alpha\le\frac{3}{2}$；　(D) $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

2. 函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数的表达式为（ C ）

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$, $-2\le x<2$；　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$, $-2<x<2$；

(C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$, $-2<x<2$；　(D) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^n}$, $-2<x<2$.

3. 设 L 为平面内光滑的简单闭曲线，并取正向，则对坐标的曲线积分 $\oint_L\left(y^3-y+\sin x^2\right)\mathrm{d}x+\left(-x^3+\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}y$ 的最大值为(A)

(A) $\frac{\pi}{6}$；　(B) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$；　(C) $\frac{7\pi}{12}$；　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 Σ 是空间光滑的有向曲面片，其边界曲线 L 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，则由斯托克斯公式，对坐标的曲线积分 $\oint_L(2xz+y)\mathrm{d}x+(xy+z^2)\mathrm{d}y+(z+x^2)\mathrm{d}z$ 等于(B)

(A) $\iint_\Sigma 2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(B) $\iint_\Sigma -2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(C) $\iint_\Sigma(2z+x+1)\mathrm{d}S$；　(D) $\iint_\Sigma(2x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

5. 设 Σ 是抛物面 $z=2-x^2-y^2\,(z\ge0)$ 的上侧，则由两类曲面积分的关系，$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(C)

(A) $\iint_\Sigma\left(P\cdot2x+Q\cdot2y+R\right)\mathrm{d}S$；　(B) $\iint_\Sigma\frac{-P\cdot2x-Q\cdot2y+R}{\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}}\mathrm{d}S$；

(C) $\iint_\Sigma\frac{P\cdot2x+Q\cdot2y+R}{\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}}\mathrm{d}S$；　(D) $\iint_\Sigma\frac{P\cdot2x+Q\cdot2y+R\cdot z}{\sqrt{z^2+4\left(x^2+y^2\right)}}\mathrm{d}S$.

三、(5 分) 计算对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax\,(a>0)$ 所割下的部分.

$$\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\,dS$$

$$=\iint_\Sigma zx\,dS \quad (对称性)$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 2ax} x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^3\,dr$$

$$=\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$$

四、(6 分) 已知对坐标的曲线积分 $\int_L \frac{(x+ay)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在不包含 x 轴负半轴 $\{(x,0)|\,x<0\}$ 的区域内与路径无关，

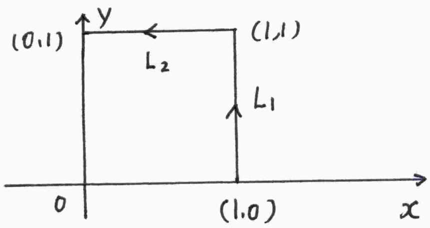
(1) 求常数 a；

(2) 计算上述积分，其中 L 是上半平面从点 $(1,0)$ 到点 $(0,1)$ 的曲线段 $x^3+y^3=1$.

(1) 设 $P=\frac{x+ay}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{ax^2-2xy-ay^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Longrightarrow a=-1$$

(2) $$\int_{(1,0)}^{(0,1)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$



$$=\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}\right)\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1+y}{1+y^2}dy+\int_1^0\frac{x-1}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1+y}{1+y^2}dy+\int_0^1\frac{1-y}{1+y^2}dy$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}$$

五、(6 分) 计算对坐标的曲面积分 $\iint_\Sigma 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 的上侧.

设 $\Sigma_1=\{(x,y)\,|\,z=0,x^2+y^2\leq 1\}$，取下侧，$\Omega$ 为 Σ 和 Σ_1 所围立体。则 Ω 在 xy 平面上投影为 D：$x^2+y^2\leq 1$. 由高斯公式

$$\text{原式}=\left(\iint_\Sigma+\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy)$$

$$=6\iiint_\Omega(x^2+y^2+z)dxdydz-\iint_{\Sigma_1}(2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy)$$

$$=6\iint_D dxdy\int_0^{1-x^2-y^2}(x^2+y^2+z)dz-3\iint_D dxdy$$

$$=6\iint_D[(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)+\tfrac{1}{2}(1-x^2-y^2)^2]dxdy-3\pi$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[r^2(1-r^2)+\tfrac{1}{2}(1-r^2)^2]rdr-3\pi$$

$$=2\pi-3\pi$$

$$=-\pi$$

六、(7 分) 求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n-1)}x^n$的收敛半径，收敛域及和函数.

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，收敛域 $[-1,1)$.

令 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n-1)}x^n$，则

$$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+3}{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{n}x^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}x^n+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\frac{2x}{1-x}-5\ln(1-x)$$

$$\therefore\ S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{2x}{1-x}dx-5\int_0^x\ln(1-x)dx$$

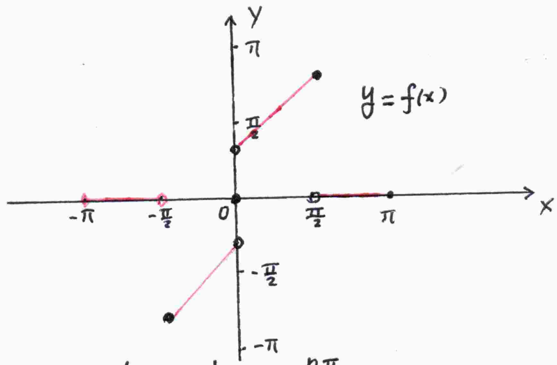
$$=2\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx-5\left[x\ln(1-x)\Big|_0^x+\int_0^x\frac{x}{1-x}dx\right]$$

$$=-2\ln(1-x)-2x-5x\ln(1-x)+5x+5\ln(1-x)$$

$$=3x+3\ln(1-x)-5x\ln(1-x)$$

$$\therefore\ S(x)=3x+3\ln(1-x)-5x\ln(1-x)\qquad x\in[-1,1).$$

七、(6 分) 将函数$f(x)=\begin{cases}x+1, 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0,\ \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$展开成正弦级数，并写出和函数在区间$[0,\pi]$上的表达式.



将 f(x) 进行奇延拓，则

$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(-x\cdot\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi}-\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\qquad n=1,2,\cdots$$

故当 $x\in[0,\pi]$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi}-\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx$$

$$=\begin{cases}0 & x=0\\ x+1 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\frac{\pi}{2}+1}{2} & x=\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$