自动控制理论 A

Matlab 仿真实验报告

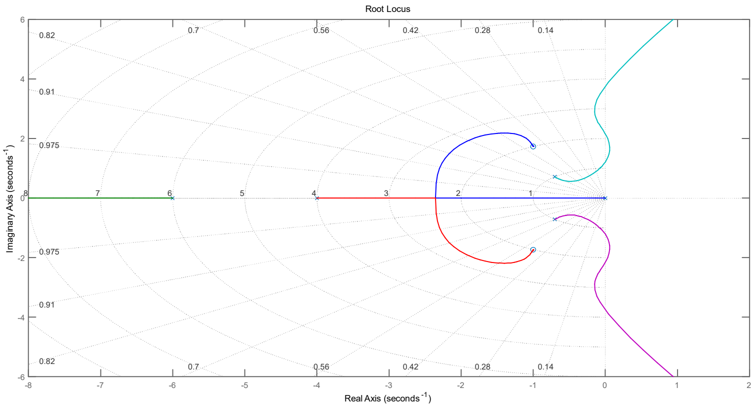
实验名称	：根轨迹与频率特性分析
姓　　名	：方尧
学　　号	：190410102
班　　级	：19级自动化1班
撰写日期	：2021年12月28日

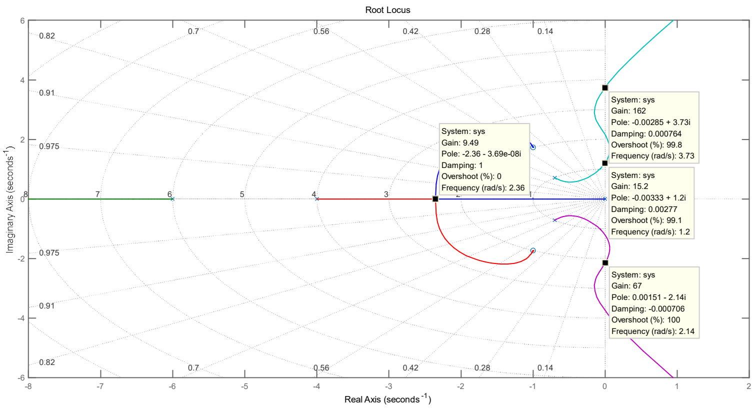
哈尔滨工业大学（深圳）

一、 基于根轨迹的性能分析

1. 对开环传递函数$G(s)$、$G_1(s)$和$G_2(s)$分别画出关于根轨迹增益k的闭环根轨迹图，给出根轨迹的分离点、与虚轴的交点，给出使闭环系统稳定的参数k的范围。

- G(s) 关于根轨迹增益k的闭环根轨迹图如下：





根轨迹的分离点、与虚轴的交点测量如下：

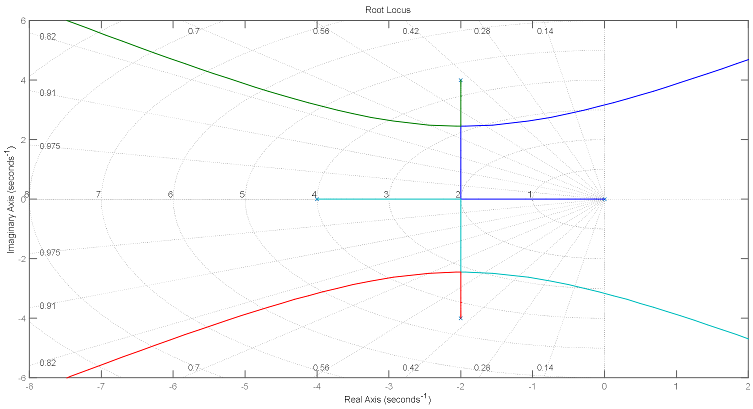
$G(s)$	分离点	虚轴交点					
坐标	(-2.36,0)	(0,3.74)	(0,2.14)	(0,1.2)	(0,-1.2)	(0,-2.14)	(0,-3.74)
增益K	9.49	162	67	15.2	15.2	67	162

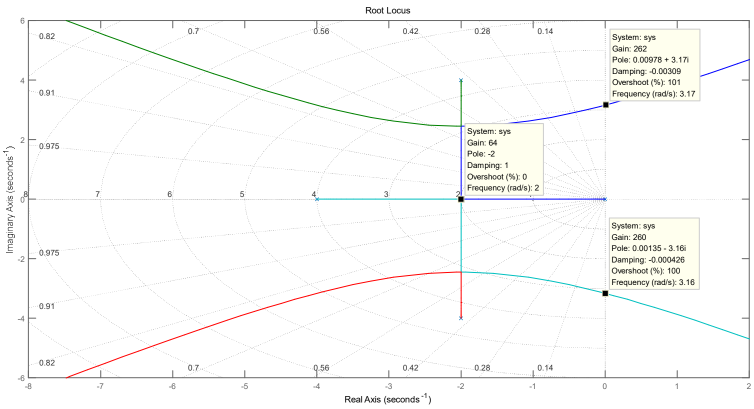
根据根轨迹以及测量数据可知使闭环系统稳定的参数k的范围为：$k \in (0,15.2) \cup (67,162)$

MATLAB代码如下：

```
%1.1.1_G(S)闭环根轨迹图
clear
num=[1,2,4];
den=conv(conv([1,4,0],[1,6]),[1,1.4,1]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys);
axis([-8 2 -6 6]);grid on
```

• $G_1(s)$ 关于根轨迹增益k的闭环根轨迹图如下：





根轨迹的分离点、与虚轴的交点测量如下：

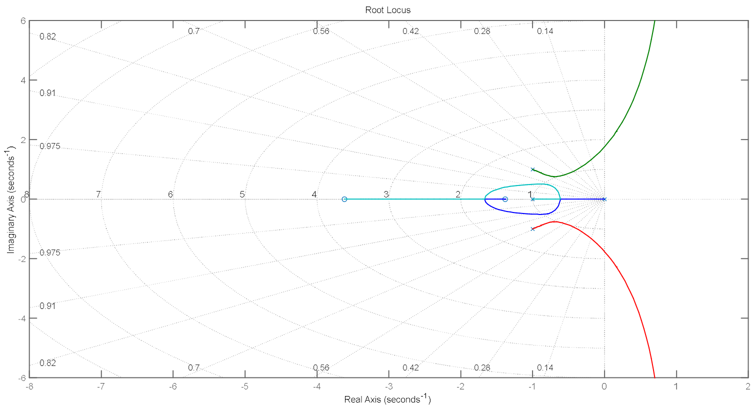
$G_1(s)$	分离点	虚轴交点	
坐标	(-2,0)	(0,3.17)	(0,-3.17)
增益 K	64	260	260

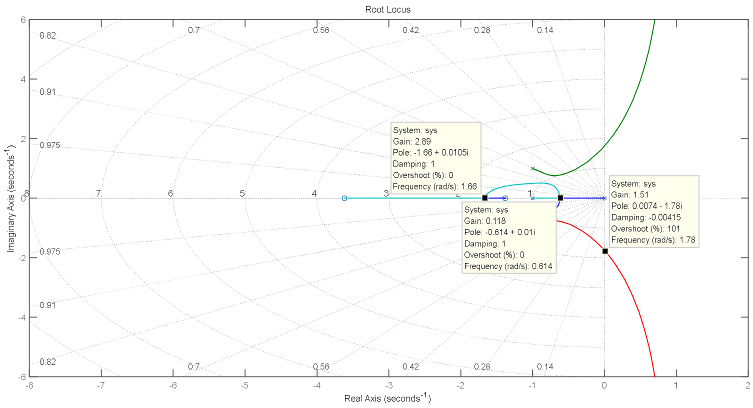
根据根轨迹以及测量数据可知使闭环系统稳定的参数k的范围为：$k \in (0, 260)$

MATLAB代码如下：

```
%1.1.2_G1(S)闭环根轨迹图
clear
num=[1];
den=conv([1,4,0],[1,4,20]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys);
axis([-8 2 -6 6]);grid on
```

• $G_2(s)$ 关于根轨迹增益k的闭环根轨迹图如下：





根轨迹的分离点、与虚轴的交点测量如下：

$G_2(s)$	分离点		虚轴交点	
坐标	(-1.66,0)	(-0.61,0)	(0,1.78)	(0,-1.78)
增益 K	2.89	0.118	1.51	1.51

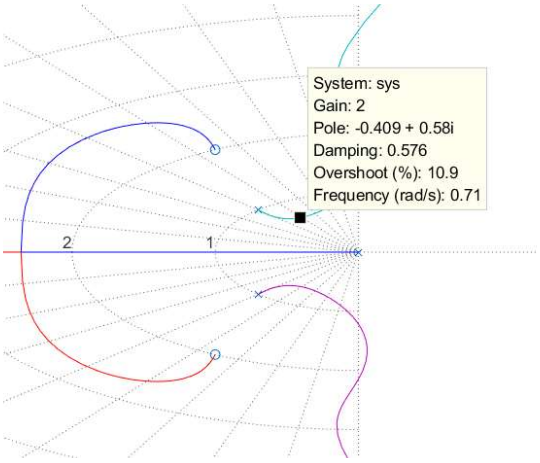
根据根轨迹以及测量数据可知使闭环系统稳定的参数k的范围为：$k \in (0,1.51)$

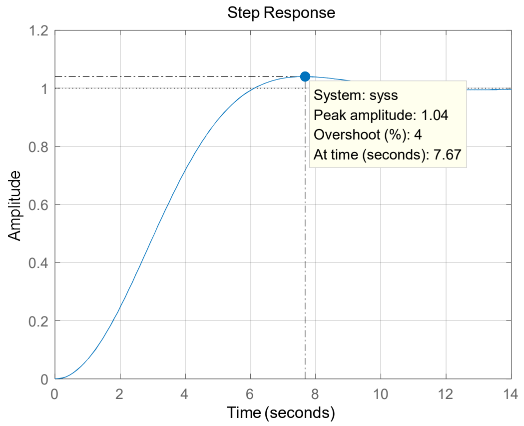
MATLAB代码如下：

```
%1.1.3_G2(S)闭环根轨迹图
clear
num=[1,5,5];
den=conv([1,1,0],[1,2,2]);
sys=tf(num,den);
rlocus(sys);
axis([-8 2 -6 6]);grid on
```

2. 对开环传递函数$G(s)$、$G_1(s)$和$G_2(s)$，借助等阻尼比射线，找出使闭环主导极点的阻尼比在**0.3～0.8** 之间的某一根轨迹增益，画出在该增益下单位反馈闭环系统的阶跃响应。比较从阶跃响应上得到超调与从根轨迹信息框里的超调，进而给出简单的结论。

- G(s)取k=2，$\xi = 0.576$



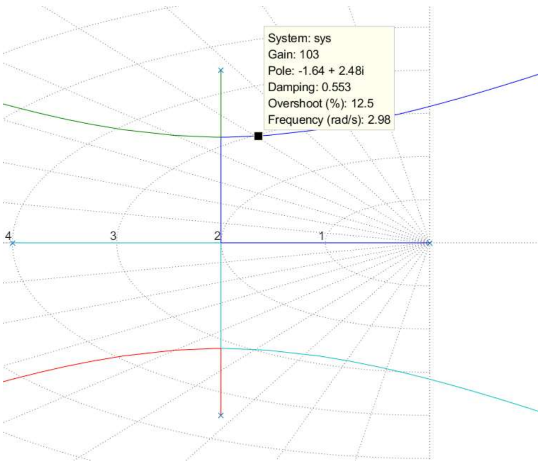


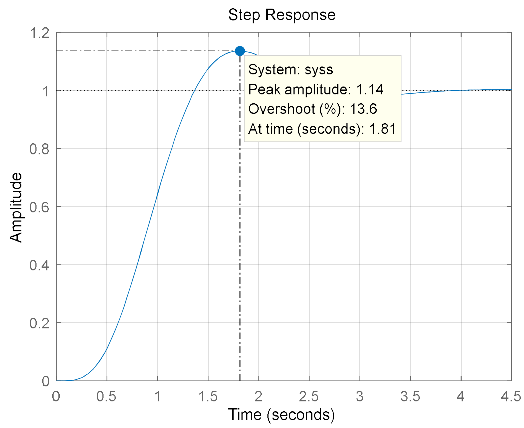
根轨迹信息框里的超调为10.9%；阶跃响应上得到超调为4%

MATLAB代码如下：

```
%1.2.1_G(s)
k=2;
num=k*[0,0,0,1,2,4];
den=conv(conv([1,4,0],[1,6]),[1,1.4,1]);
syss=tf(num,den+num);
step(syss)
```

- G_1(s)取k=103，$\xi = 0.553$



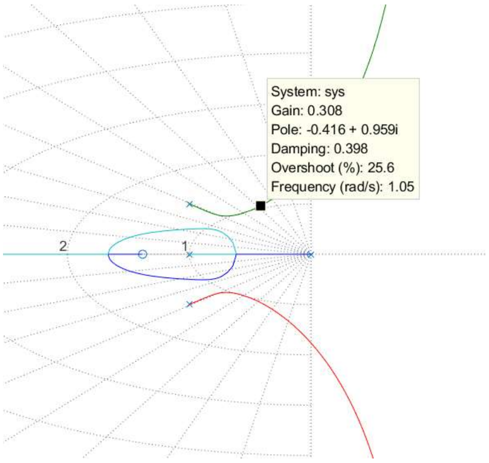


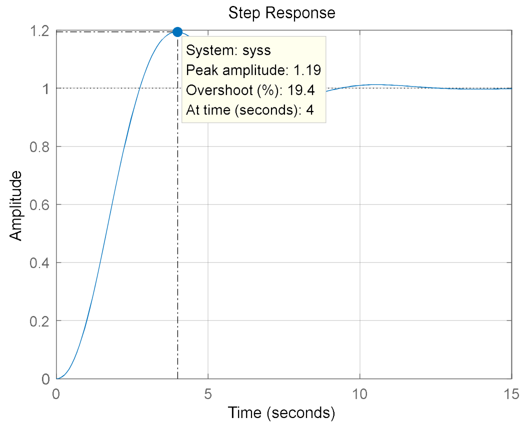
根轨迹信息框里的超调为12.5%；阶跃响应上得到超调为13.6%

MATLAB代码如下：

```
%1.2.2_G1(s)
k=103;
num=k*[0,0,0,0,1];
den=conv([1,4,0],[1,4,20]);
syss=tf(num,den+num);
step(syss)
```

• $G_2(s)$取k=0.308，$\xi=0.398$





根轨迹信息框里的超调为25.6%；阶跃响应上得到超调为19.4%

MATLAB代码如下：

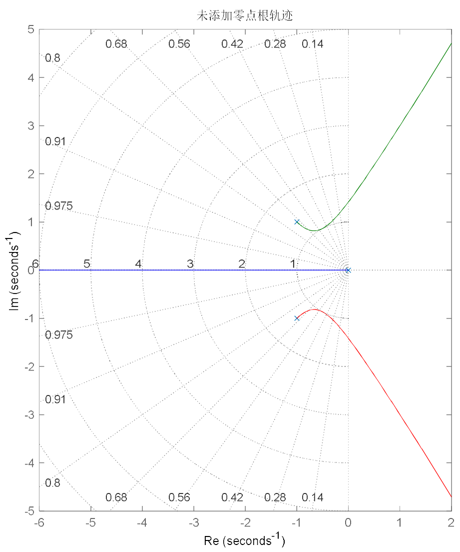
```
%1.2.3_G2(s)
k=0.308;
num=k*[0,0,1,5,5];
den=conv([1,1,0],[1,2,2]);
syss=tf(num,den+num);
step(syss)
```

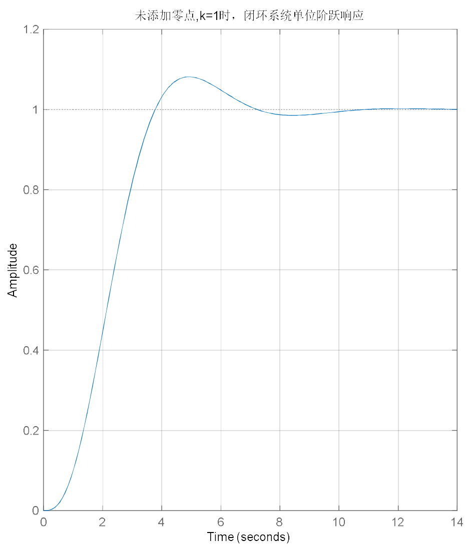
结论：根轨迹信息框里的超调量与阶跃响应得到的超调量不一致，没有明显的大小关系，实际时应该以阶跃响应得到的超调量为准。

3. **对开环传递函数*G*3(*s*)画出不同零点时的根轨迹，并与不含零点时的根轨迹进行比较，给出简单的结论。**

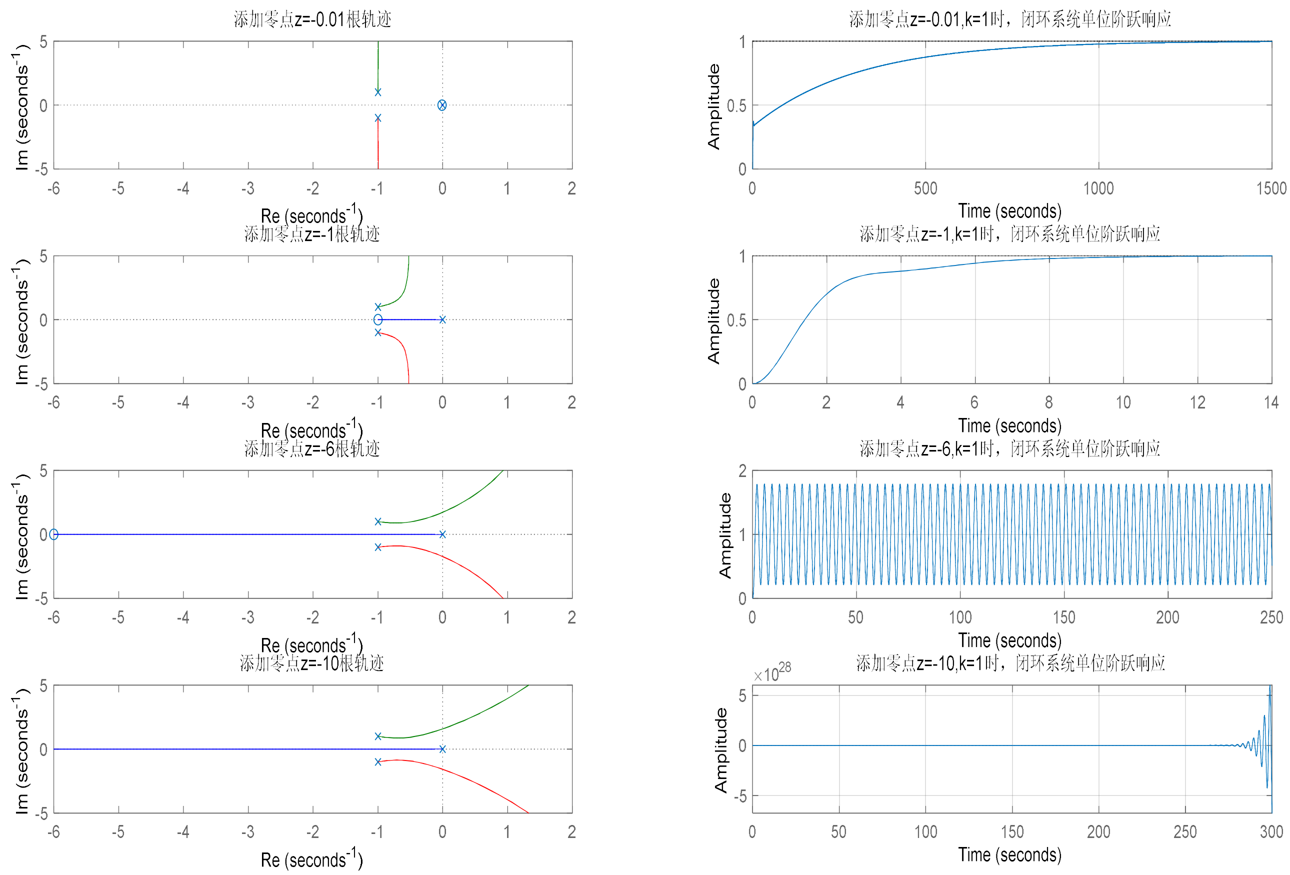
要求：给出画根轨迹的m 文件的代码，画出根轨迹，给出单位阶跃响应图。

• $G_3(s)$未添加零点时根轨迹如下：





- $G_3(s)$分别添加零点z=[0,-1,-3,-5,-8,-10]时根轨迹如下：



结论：不同于二阶系统添加零点，对于三阶系统$G_3(s)$，添加开环零点后，零点越靠近虚轴，闭环系统单位阶跃响应越接近未添加零点的原系统，零点越远离虚轴（|z|越大），系统越易不稳定。

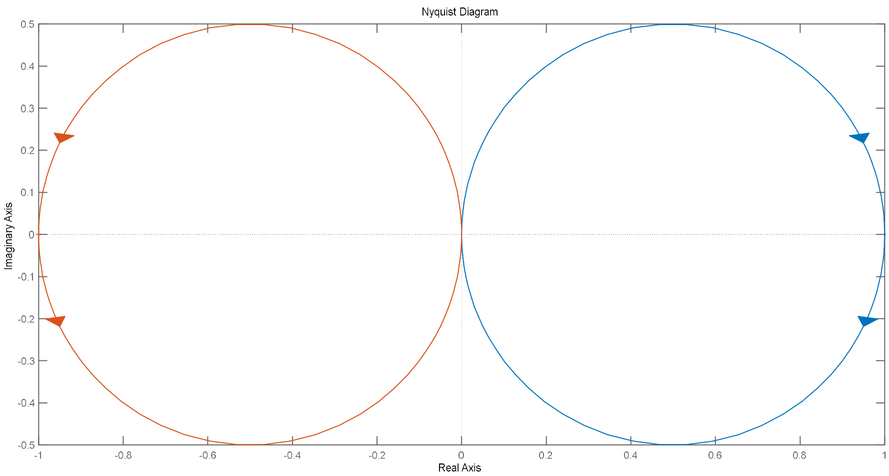
MATLAB代码如下：

```
%%1.3 G3(s)添加零点
num=[1];
den=[1,2,2,0];
sys=tf(num,den);
syss=tf(num,den+[0,0,0,num]);
subplot(1,2,1)
rlocus(sys);grid on
title('未添加零点根轨迹');xlabel('Re'),ylabel('Im')
%阶跃响应
subplot(1,2,2)
step(syss),grid on
title('未添加零点,k=1 时，闭环系统单位阶跃响应');
%添加零点
figure
z=[-0.01,-1,-6,-10];
for k=1:4
    num=[1,-z(k)];
    den=[1,2,2,0];
    sys=tf(num,den); %开环传递函数
```

```
    syss=tf(num,den+[0,0,num]); %闭环传递函数
    %Nyquist 曲线
    subplot(4,2,2*k-1)
    rlocus(sys);
    tit=['添加零点 z=',num2str(z(k)),'根轨迹'];
    title(tit);xlabel('Re'),ylabel('Im')
    axis([-6 2 -5 5]);
    %阶跃响应
    subplot(4,2,2*k)
    step(syss),grid on
    tit=['添加零点 z=',num2str(z(k)),',k=1 时，闭环系统单位阶跃响应'];
    title(tit);
end
```

二、 线性系统的频率特性分析

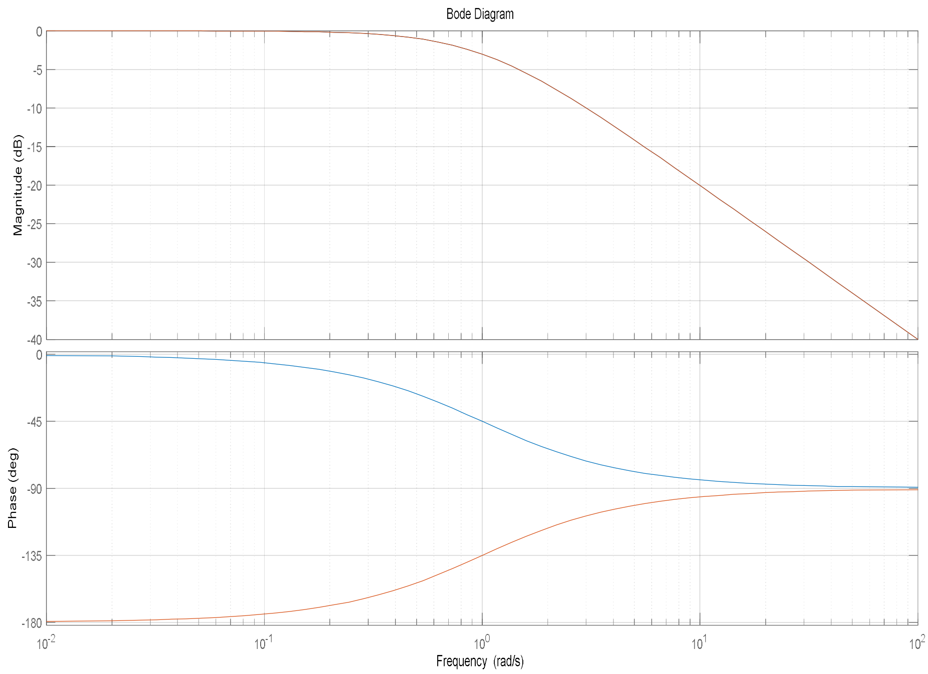
1. 固定K和T，在同一幅图里绘制一阶惯性环节 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ 和非最小相位的惯性环节 $G(s)=\dfrac{K}{Ts-1}$ 的Nyquist图，说明它们的Nyquist图的关系。



它们的Nyquist图关于原点中心对称，由于各自Nyquist图都为圆形，故也关于虚、实轴对称。
MATLAB代码如下：

```
%2.1
K=1;T=1;
num=[K];
den=[T 1];
sys=tf(num,den);
den=[T -1];
syss=tf(num,den);
nyquist(sys);hold on
nyquist(syss)
```

2. 固定K和T，在同一幅图里绘制一阶惯性环节 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ 和非最小相位的惯性环节 $G(s)=\dfrac{K}{Ts-1}$ 的Bode图，说明它们的Bode图的关系。

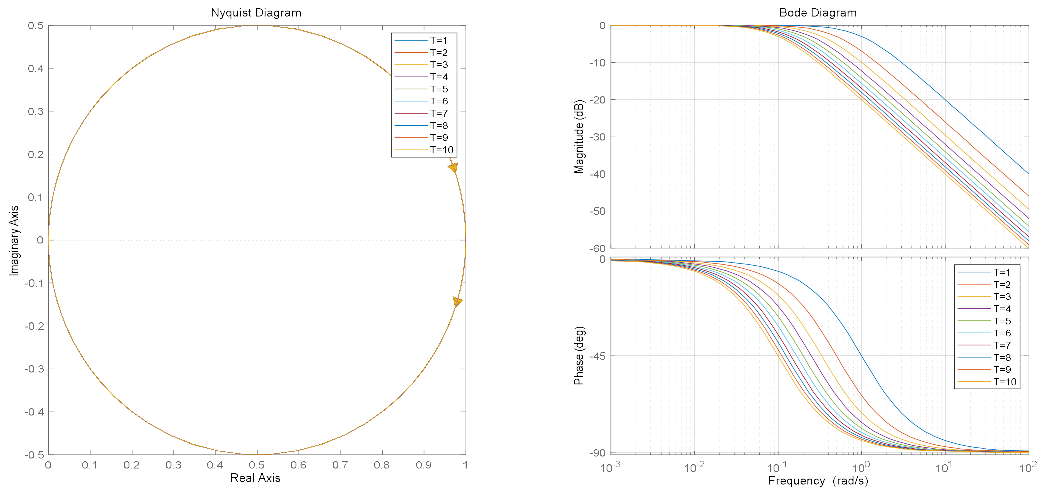


它们的Bode图的关系：幅频重叠，相频关于-90°直线对称。

MATLAB代码如下：

```
%2.2
K=1;T=1;
num=[K];
den=[T 1];
sys=tf(num,den);
den=[T -1];
syss=tf(num,den);
bode(sys);hold on
bode(syss)
```

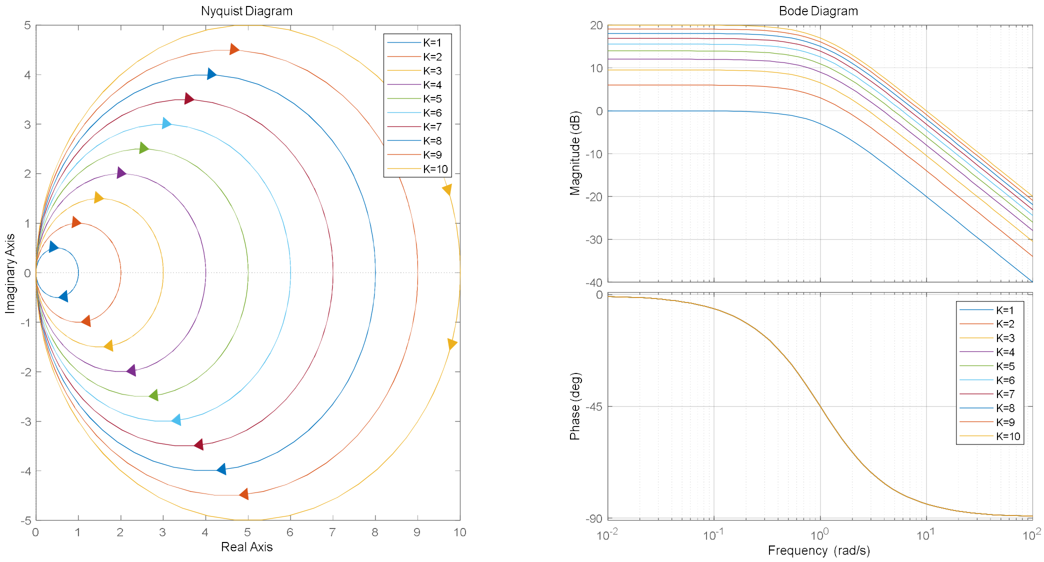
3.固定K，分别在同一幅图绘制不同T时一阶惯性环节$G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$的Nyquist图和Bode图，分析T的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。



固定K，T越大，对Nyquist图没有影响；T越大，bode图幅频特性的转折频率越小，下降段斜率保持不变，相频特性的对称点频率越小。
MATLAB代码如下：

```
%2.3
K=1;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
for T=1:10
    num=[K];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{T}=['T=',num2str(T)];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for T=1:10
    num=[K];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{T}=['T=',num2str(T)];
end
legend(legd)
```

4. 固定T，分别在同一幅图绘制不同K时一阶惯性环节 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ 的的Nyquist图和Bode图，分析K的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。

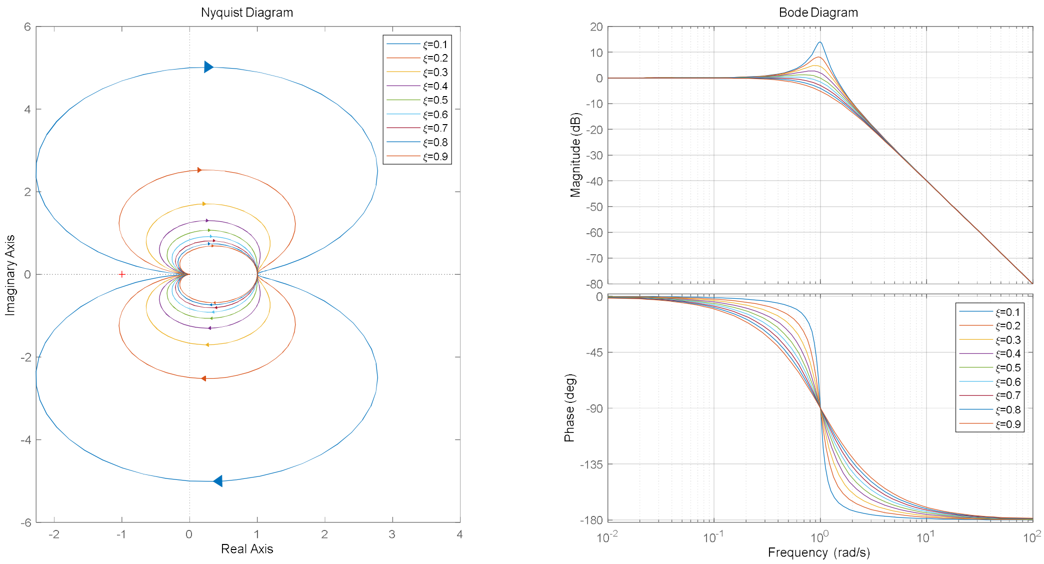


固定T，K越大，Nyquist曲线“圆”直径越大，但最终都回到原点；bode图幅频特性特性起始直线位置越高，转折频率不变；对相频特性无影响。

MATLAB代码如下：

```
%2.4
T=1;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
for K=1:10
    num=[K];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{K}=['K=',num2str(K)];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for K=1:10
    num=[K];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{K}=['K=',num2str(K)];
end
legend(legd)
```

5.T固定，分别在同一幅图绘制不同阻尼比时二阶振荡环节$G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2T\xi s+1}$的Nyquist图和Bode图，分析析阻尼比的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。

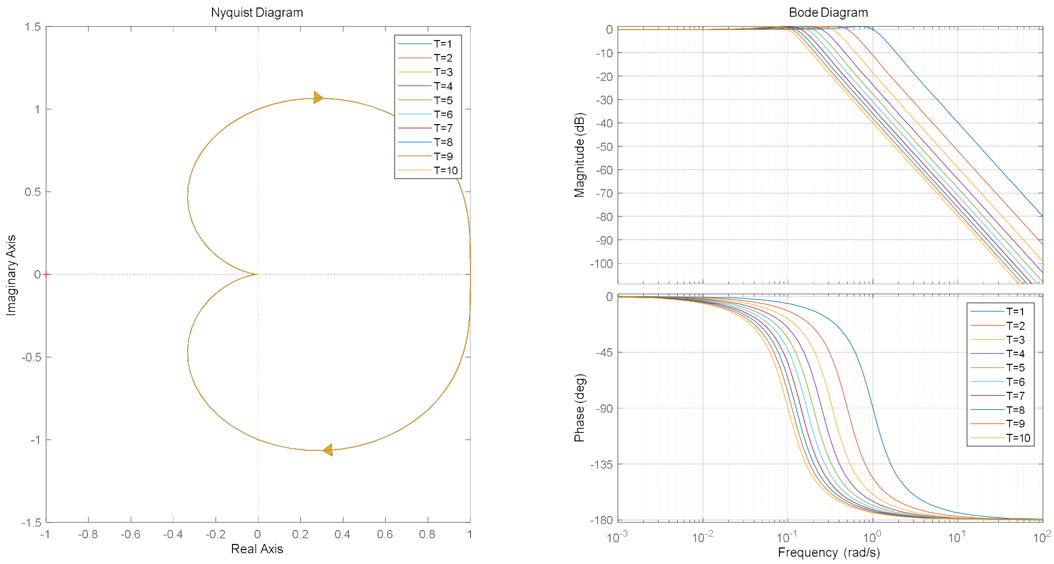


固定T，ξ越大，Nyquist曲线相同相角下相频更小，直径更小，但起点和终点相同；ξ越大，bode图幅频特性转折频率附近谐振峰值越小，甚至不谐振；相频特性变化越平缓，但对称中心不变。

MATLAB代码如下：

```
%2.5
T=1;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
xi=0.1:0.1:0.9;
for t=1:9
    num=[1];
    den=[T^2 2*T*xi(t) 1];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{t}=['\xi=',num2str(xi(t))];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for t=1:9
    num=[1];
    den=[T^2 2*T*xi(t) 1];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{t}=['\xi=',num2str(xi(t))];
end
legend(legd)
```

6. 阻尼比固定，分别在同一幅图绘制不同时间常数时 $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2T\xi s+1}$ 的Nyquist图和Bode图，分析时间常数T的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。

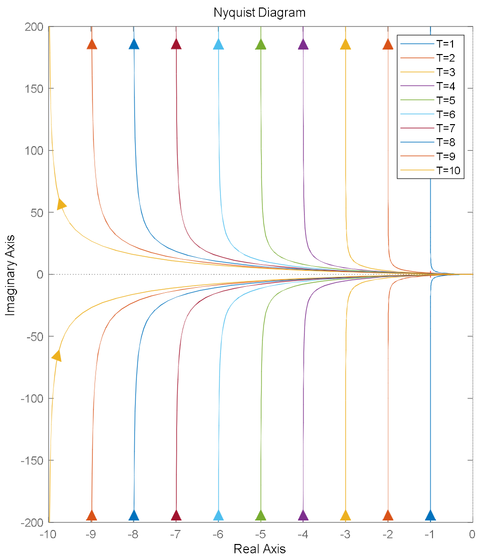


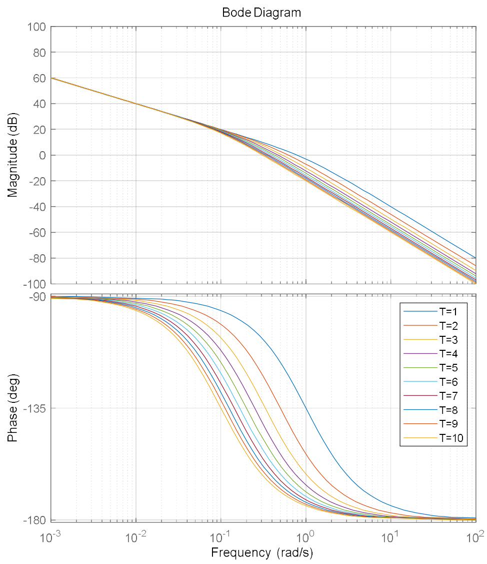
固定ξ，T变化，Nyquist曲线重叠；T越大，bode图幅频特性转折频率越小，谐振峰值相等，相频特性对称点对应频率变小。

MATLAB代码如下：

```
%2.6
xi=0.5;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
for T=1:10
    num=[1];
    den=[T^2 2*T*xi 1];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{T}=['T=',num2str(T)];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for T=1:10
    num=[1];
    den=[T^2 2*T*xi 1];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{T}=['T=',num2str(T)];
end
legend(legd)
```

7.K固定，分别在同一幅图绘制不同时间常数T时 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$ 的Nyquist图和Bode图，分析时间常数T的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。



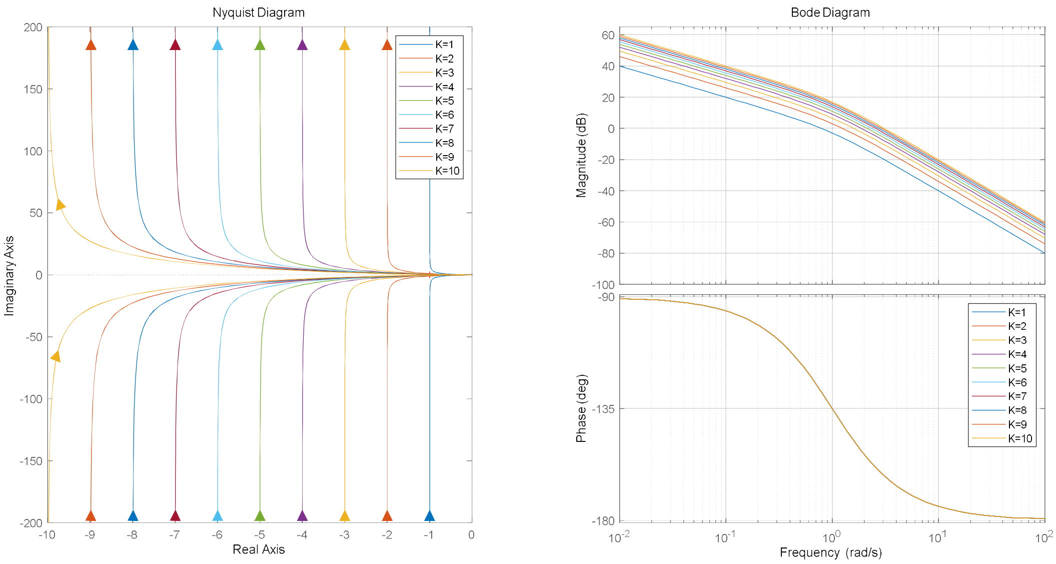


固定K，T越大，Nyquist曲线越靠近虚轴；T越大，bode图幅频特性转折频率越小，相频特性对称点对应频率变小。

MATLAB代码如下：

```
%2.7
K=1;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
for T=1:10
    num=[K];
    den=[T 1 0];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{T}=['T=',num2str(T)];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for T=1:10
    num=[K];
    den=[T 1 0];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{T}=['T=',num2str(T)];
end
legend(legd)
```

8. T固定，分别在同一幅图绘制不同开环增益K时 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$ 的Nyquist图和Bode图，分析开环增益K的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。对给定的K和T，判断单位反馈闭环系统的稳定性。



固定T，K越大，Nyquist曲线越靠近虚轴；K越大，bode图幅频特性起始点越高，斜率保持不变，转折点不变，相频特性重叠。

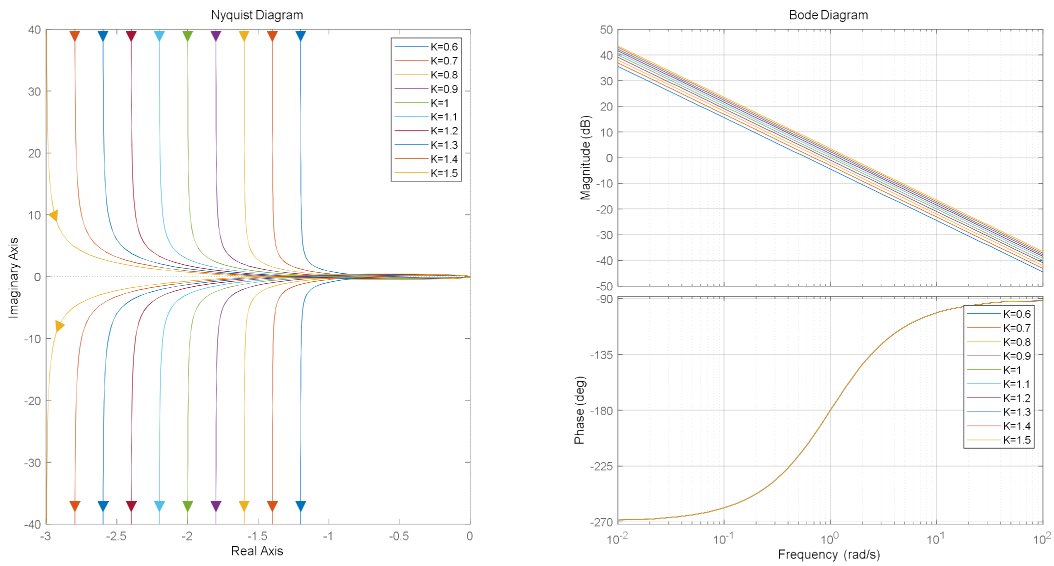
由于 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$， $\Phi(s)=\dfrac{K}{Ts^2+s+K}$ 为二阶系统，T>0，K>0即能保证系统稳定。故所选择系统均稳定。

MATLAB代码如下：

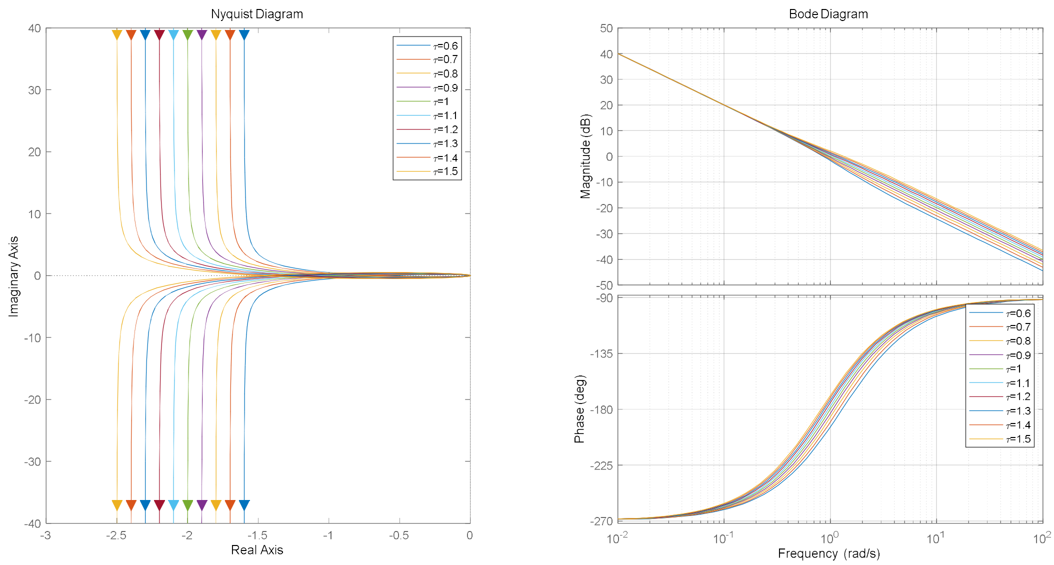
```
%2.8
T=1;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
for K=1:10
    num=[K];
    den=[T 1 0];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{K}=['K=',num2str(K)];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for K=1:10
    num=[K];
    den=[T 1 0];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{K}=['K=',num2str(K)];
end
legend(legd)
```

9.固定T和τ，分别在同一幅图绘制不同K时，$G(s)=\dfrac{K(\tau s+1)}{s(Ts-1)}$ 的Nyquist图和Bode图；固定T和K，分别在同一幅图绘制不同τ时$G(s)=\dfrac{K(\tau s+1)}{s(Ts-1)}$的Nyquist图和Bode图。分析$K$和τ的变化对Nyquist曲线和 Bode图的影响，并分析单位反馈闭环系统的稳定性。特别注意$K\tau = 1$这一分界点。

固定T和τ：



固定T和K：



结论：

（1）固定T=1，τ=1，K在0.6-1.5变化,K越大，Nyquist曲线越远离虚轴；bode图中，相频起始点更高，斜率相同，相频重叠。

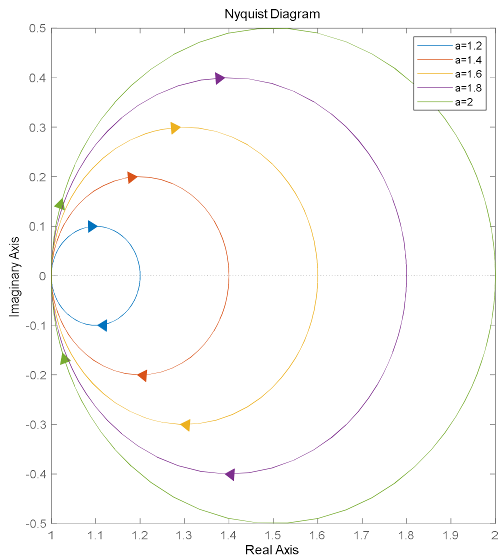
（2）固定T=1，K=1，τ在0.6-1.5变化,τ越大，Nyquist曲线越远离虚轴；bode图中，相频起始斜率相同，高频时τ越小，下降越快；τ越大，相频转折频率越小。

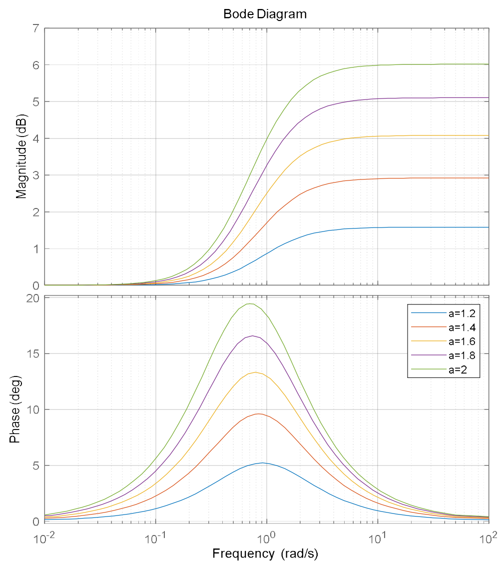
（3）取T=1，τ=1,K=0.6-1.5,由于K=1时，曲线恰好过(-1,j0),闭环系统临界稳定。由Nyquist稳定判据，

当K>1时，系统稳定，K小于1时，系统不稳定。
取T=1，K=1，τ=0.6-1.5，由于τ=1时，曲线恰好过(-1,j0)，闭环系统临界稳定。由Nyquist稳定判据，当τ>1时，系统稳定，τ小于1时，系统不稳定。
（4）由劳斯判据也可知，$K\tau=1$系统临界稳定。系统稳定条件是$K\tau>1$，与Nyquist稳定判据得到结果相符合。
MATLAB代码如下：

```
%2.9
T=1;t=1;%固定 T=1 τ=1, K 在 0.6-1.5 变化
subplot(1,2,1)%nyquist 图
K=0.6:0.1:1.5
for k=1:10
    num=[K(k)*t K(k)];
    den=[T -1 0];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{k}=['K=',num2str(K(k))];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for k=1:10
    num=[K(k)*t K(k)];
    den=[T -1 0];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{k}=['K=',num2str(K(k))];
end
legend(legd)
figure
T=1;K=1;%固定 T=1 K=1,τ 在 0.6-1.5 变化
subplot(1,2,1)%nyquist 图
t=0.6:0.1:1.5
for k=1:10
    num=[K*t(k) K];
    den=[T -1 0];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{k}=['\tau=',num2str(t(k))];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for k=1:10
    num=[K*t(k) K];
    den=[T -1 0];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{k}=['\tau=',num2str(t(k))];
end
legend(legd)
```

10. 固定T，在a>1的条件下，分别在同一幅图绘制不同a时 $G(s)=\dfrac{aTs+1}{Ts+1}$ 的Nyquist图和Bode图，分析a的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。



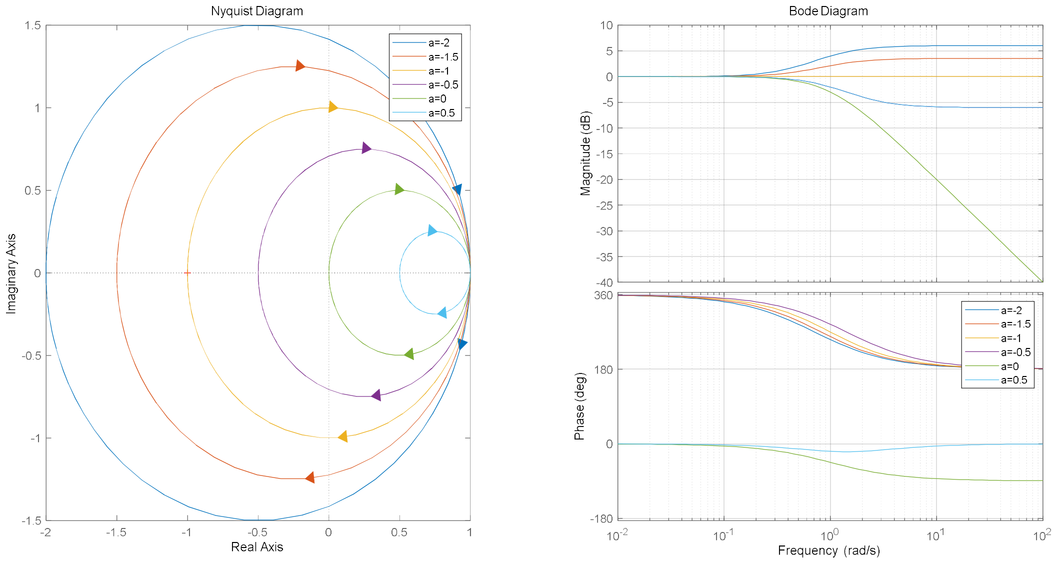


结论：
（1）固定T=1，a=1.2-2，a越大，Nyquist图半径越大；a越大，bode图幅频峰最终值和相频峰值也越大。
（2）系统始终处于稳定状态。

MATLAB代码如下：

```
%2.10
T=1;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
a=1.2:0.2:2;
for k=1:5
    num=[a(k)*T 1];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{k}=['a=',num2str(a(k))];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for k=1:5
    num=[a(k)*T 1];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{k}=['a=',num2str(a(k))];
end
legend(legd)
```

11. 固定T，在a<1的条件下，分别在同一幅图绘制不同a时 $G(s)=\dfrac{aTs+1}{Ts+1}$ 的Nyquist图和Bode图，分析a的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。



结论：

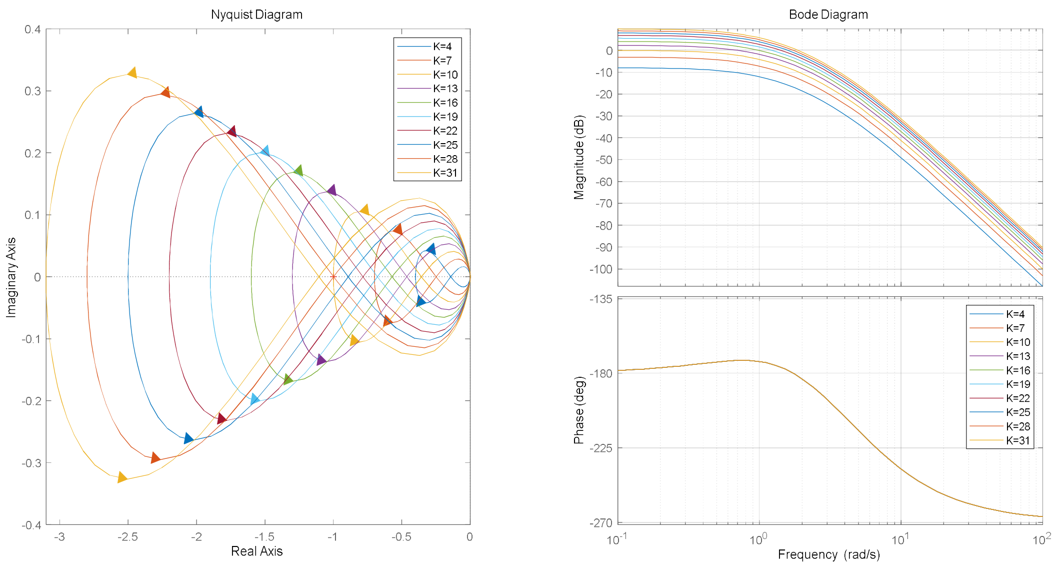
（1）固定T=1, a=-2:0.5:0.5, a越小，Nyquist图半径越大；a越小（除了a=0），bode图幅频峰最终值和相频峰值也越大。（a=0时，一阶微分环节丢失，不予考虑在内。）

（2）由routh判据，aT>-1，闭环系统稳定．对应当a=-1时，Nyquist曲线经过(-1, j0)，临界稳定；-1<a<1时，闭环系统稳定；a<-1时，闭环系统不稳定。

MATLAB代码如下：

```
%2.11
T=1;
subplot(1,2,1)%nyquist 图
a=-2:0.5:0.5;
for k=1:6
    num=[a(k)*T 1];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{k}=['a=',num2str(a(k))];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for k=1:6
    num=[a(k)*T 1];
    den=[T 1];
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{k}=['a=',num2str(a(k))];
end
legend(legd)
```

12. 分别在同一幅图画出不同K时 $G(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s+5)(s-1)}$ 的Nyquist图和Bode图，分析K的变化对Nyquist曲线和Bode图的影响。借助于Nyquist图，试着确定使单位反馈闭环系统稳定的K的范围。



（1）取K=4:3:31,K越大，与负实轴交点横坐标越小（越远离虚轴）;K越大，bode图幅频特性幅值越低，相频没有变化。

（2）当K=28或者K=10时，Nyquist曲线经过(-1,j0)，由Nyquist稳定判据可知，此时系统临界稳定；K>28时，曲线绕(-1,j0)顺时针一周（全频段），即R=-1，由G(s)表达式可知P=1，故Z=P-R=2；闭环系统不稳定；10<K<28时，曲线绕(-1,j0)逆时针一周（全频段），即R=1，由G(s)表达式可知P=1，故Z=P-R=0；闭环系统稳定。K<10时，曲线不绕(-1,j0)转圈，故R=0，由G(s)表达式可知P=1，故Z=P-R=1,闭环系统不稳定。

可知使得单位反馈闭环系统稳定时K的范围是10<K<28。

MATLAB代码如下：

```matlab
%2.12
subplot(1,2,1)%nyquist 图
K=4:3:31;
for k=1:10
    num=[K(k)];
    den=conv(conv([1,2],[1,5]),[1,-1]);
    sys=tf(num,den);
    nyquist(sys),hold on
    legd{k}=['K=',num2str(K(k))];
end
legend(legd)
subplot(1,2,2)%bode 图
for k=1:10
    num=[K(k)];
    den=conv(conv([1,2],[1,5]),[1,-1]);
    sys=tf(num,den);
    bode(sys),hold on
    legd{k}=['K=',num2str(K(k))];
end
legend(legd)
```