自控 HW-4　自动化1班　19041010２　方尧

1. 拉普拉斯变换指工程中常用一种积分变换：$L[x(t)]=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$

Z变换是指对离散序列转换为复频域的变换：$Z[x(t)]=X^*(s)|_{z=e^{sT}}$

傅里叶变换是指将时域变换为频域的一种积分变换：$F(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-jwt}dt$

三者的联系：傅里叶变换是拉氏变换的频域形式，是拉氏变换的特例；拉氏变换是傅氏变换的扩展；Z变换是离散傅氏变换在复平面上的扩展

Z变换在离散时间信号中相当于连续时间信号中的拉氏变换。

2. 信号的混叠是指信号经采样，采样后的采样频谱中高频分量与低频分量发生重叠的现象。

产生混叠的原因：采样频率不够高，不产生信号混叠，$f_s>2f_{max}$

观察电风扇叶转动，当肉眼频率与扇叶转动频率一致时，扇叶会"静止"。

3. (1) $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{nT}\cdot z^{-n}=\frac{2^Tz}{2^Tz-1}\quad(z>2^{-T})$

(2) $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}nT\cdot z^{-n}$

前n项和 $S_n=T\frac{z^{n+1}-(n+1)z+n}{z^n(z-1)^2}$　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{Tz}{(z-1)^2}$.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nT\cdot z^{-n}=\frac{Tz}{(z-1)^2}\quad(z>1)$$

4. 证明：$x(t)$ Z变换为 $X(z)$ 即 $X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$

等式右边 $=z^nX(z)-z^n\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{n-k}$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}x(kT)z^{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x(nT+kT)z^{-k}$$

$=Z[x(t+nT)]=$ 左式

$Z[x(t+nT)]=z^nX(z)-z^n\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}$ 得证

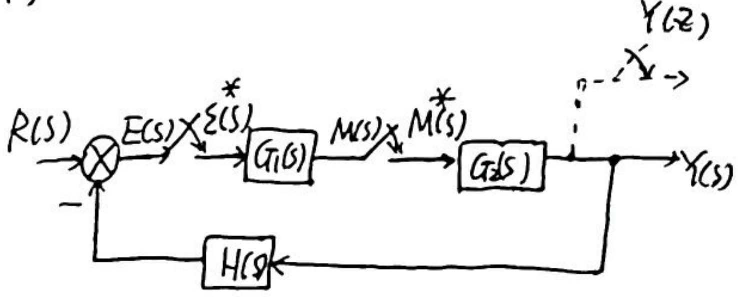
5. $\frac{X(z)}{z}=\frac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-aT}}$

即 $X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$ 查表可得 $Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]=1$，$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]=e^{-at}$

故 $x(kT)=1-e^{-akT}$

$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^{-akT})\delta(t-kT)$

6. 对于A系统



$Y(S)=G_2(S)\cdot M^*(S)$

$M(S)=G_1(S)\cdot E^*(S)$

$E(S)=R(S)-Y(S)H(S)=R(S)-G_2(S)M^*(S)H(S)$

对上式z变换

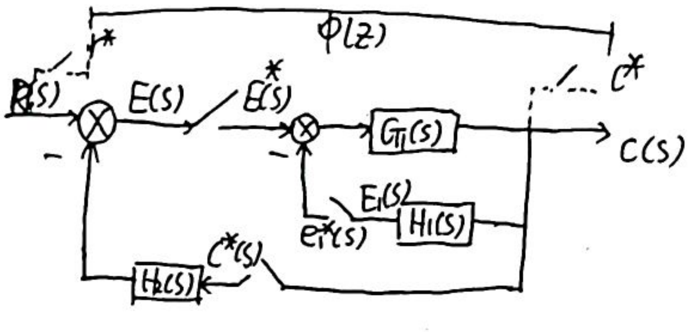
$Y(z)=G_2(z)M(z)$

$M(z)=G_1(z)E(z)$

$E(z)=R(z)-HG_2(z)M(z)$

得 $G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$

对于B系统



$E(S)=R(S)-C^*(S)H_2(S)$

$C(S)=[E^*(S)-e_1^*(S)]G_1(S)$

$E_1(S)=C(S)H_1(S)$

$\quad=[E^*(S)-e_1^*(S)]G_1(S)H_1(S)$

对上式求z变换.

$E(z)=R(z)-C(z)H_2(z)$

$C(z)=E(z)G_1(z)-E_1(z)G_1(z)$

$E_1(z)=G_1H_1(z)E(z)-G_1H_1(z)E_1(z)$

$C(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1H_1(z)}[R(z)-C(z)H_2(z)]$

得 $\Phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)}{1+G_1(z)H_2(z)+G_1H_1(z)}$