问题课二（$\boxed{2019年}$，矩阵） ①

1. 概念与运算

矩阵乘法：$A_{m\times n}B_{n\times r}=C_{m\times r}$

(1) $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\beta=(1\ 2\ 3)$

$$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

$$\beta\alpha=(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1+4+9=14$$

(2) 求 A^n

① 先算 A^2 找规律

(2018期中题2 深圳 填空) $A=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$，求 A^n.

(3分)

$$\underline{A^2}=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4&-4&4\\-4&4&4&-4\\-4&4&4&-4\\4&-4&-4&4\end{pmatrix}=-4A$$

$$A^n=(-4)^{n-1}A.$$

② 乘法结合律

$$(AB)^n = ABAB\cdots AB = A(BA)(BA)\cdots(BA)B$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)^n = \alpha\beta\alpha\beta\cdots\alpha\beta = \alpha\overbrace{(\beta\alpha)(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)}^{n-1}\beta ,\quad \beta\alpha=14$$

$$= 14^{n-1}\alpha\beta = 14^{n-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

③ 分块阵的幂.

$$\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}A_1^r & & \\ & A_2^r & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^r\end{pmatrix}$$

例
$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}&0&0\\2^{n-1}&2^{n-1}&0&0\\0&0&\cos n\theta&-\sin n\theta\\0&0&\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$$

④ 其它方法：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&2&0\\4&5&2\end{pmatrix}$，$A^n$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{pmatrix}=2E+B$$

~~$A^n = (2E+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2E)^k B^{n-k}$~~

~~注：$EB=BE$，所以上式正确；一般地 $(A+B)^n \neq \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$，除非 $AB=BA$.~~

$$A^n = (B+2E)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2E)^{n-k}$$

注：$EB=BE$，所以上式正确；一般地 $(A+B)^n \neq \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$，除非 $AB=BA$.

$$B^0=E,\quad B^1=B,\quad B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\15&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\15&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\3&0&0\\4&5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^n = C_n^0 B^0 (2E)^n + C_n^1 B (2E)^{n-1} + C_n^2 B^2 (2E)^{n-2},\quad (2E)^k = 2^k E$$

$$= E\,2^n \cdot E + n 2^{n-1} BE + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \cdot 2^{n-2} E$$

$$= 2^n E + 2^{n-1} B + n(n-1)2^{n-3} B^2,\quad n \geq 2$$

$$= \begin{pmatrix}2^n&&\\&2^n&\\&&2^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&&\\3\cdot 2^{n-1}&&\\4\cdot 2^{n-1}&5\cdot 2^{n-1}&\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}&&\\&&\\15n(n-1)2^{n-3}&&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\3\cdot 2^{n-1}&2^n&0\\2^{n+1}+15n(n-1)\cdot 2^{n-3}&5\cdot 2^{n-1}&2^n\end{pmatrix}$$

2、可逆矩阵：$AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

(1) $AA^* = A^*A = |A| E_n$， $A^* = \begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$

① $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ A可逆 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

② $|AA^*| = ||A|E_n| = |A|^n|E_n| = |A|^n$ ~~$=\begin{cases}0, & |A|=0\\|A|^n, & |A|\neq 0\end{cases}$~~

$\Rightarrow |A|\cdot|A^*| = |A|^n$ ~~$=\begin{cases}0, & |A|=0\\|A|^n, & |A|\neq 0\end{cases}$~~，故 $|A|\neq 0$ 时 $|A^*| = |A|^{n-1}$

(2) $|AA^{-1}| = |E| = 1 \Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

例：① $A_{n\times n}$ 是可逆矩阵，$B_{n\times 1}$，$b_{1\times 1}$，A^* 是 A 的伴随矩阵.

$P = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B'A^* & |A| \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & b \end{pmatrix}$ [redacted] $\left(A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}\right)$

证明 $|PQ| = |A|^2(b - B'A^{-1}B)$

证：$PQ = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B'A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_nA & E_nB \\ -B'A^*A + |A|B' & -B'A^*B + |A|b \end{pmatrix}$ [redacted]

$-B'A^*A + |A|B' = -B'|A|E_n + |A|B' = 0$

$-B'A^*B + |A|b = -B'|A|A^{-1}B + |A|b = |A|(-B'A^{-1}B + b)$

$\Rightarrow PQ = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & |A|(b - B'A^{-1}B) \end{pmatrix} \Rightarrow |PQ| = |A|\,|A|\,(b - B'A^{-1}B)$

$= |A|^2(b - B'A^{-1}B)$

② (2017期中 选择题5)：A, B 均为2阶方阵

$|A| = 2$，$|B| = 3$，求 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.（用 A^*, B^* 表示）

$D = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B^*}{|B|} \\ \frac{A^*}{|A|} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix}$

② (2017 期中大题5) 浙大 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$A^*X=A^{-1}+2X$， ⑤

习题

求矩阵 X.

解：$AA^*X=E+2AX \Rightarrow E+2AX=|A|EX \Rightarrow (|A|E-2A)X=E$

(练) $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}\underset{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}{=}\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\-2&2\end{vmatrix}=4$

$B=|A|E-2A=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&-2\\-2&2&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$

$X=B^{-1}$.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{r_2-r_1\\r_3+r_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&2&1&0&0\\0&+4&-4&-1&1&0\\0&0&4&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\frac14\times r_3\\r_2+4r_3\\r_1-2r_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&0&\frac12&0&-\frac12\\0&4&0&0&1&1\\0&0&1&\frac14&0&\frac14\end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{\frac14\times r_2\\r_1+2r_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&\frac12&\frac12&0\\0&1&0&0&\frac14&\frac14\\0&0&1&\frac14&0&\frac14\end{array}\right)\xrightarrow[\frac12 r_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac14&\frac14&0\\0&1&0&0&\frac14&\frac14\\0&0&1&\frac14&0&\frac14\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac14&\frac14&0\\0&\frac14&\frac14\\\frac14&0&\frac14\end{pmatrix}$

3. 初等变换：用初等行变换求逆矩阵.

A 可逆，$(A|E)\xrightarrow[\text{初等行变换化行最简形}]{}(E|A^{-1})$

$(A|B)\longrightarrow(E|A^{-1}B)$

4、初等矩阵

左乘初等矩阵 $\Leftrightarrow$ 做相应初等行变换

右乘初等矩阵 $\Leftrightarrow$ 做相应初等列变换

例：(2018 深圳 期中选择题 4)

A为3阶方阵，B为3阶可逆阵，$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

若将B的第2列加到第1列得P，求 $P^{-1}AP$.

解：$\underset{(c_1+c_2)}{P=B}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}:=BC$

$$P^{-1}AP=(BC)^{-1}A(BC)=C^{-1}B^{-1}ABC=C^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}C$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{c_1+c_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

5、秩（分块矩阵的秩）

(1) $R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A)+R(B)$

(2) $R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geqslant R(A)+R(B)$

(3) $R(A \vdots B) \leqslant R(A)+R(B)$

(4) $R(A+B) \leqslant R(A)+R(B)$

(5) $R(AB) \leqslant \min\{R(A), R(B)\}$

(6) $A_{m\times n}$，$B_{n\times r}$

$R(AB) \geqslant R(A)+R(B)-n$

例：（2018 深圳期中填空 4）

A 为 n 阶方阵，且 $A^2=E$，

则 $R(A+E)+R(A-E)=$ ______

解：$(A+E)(A-E)=A^2-E=0$

$\Rightarrow 0=R((A+E)(A-E)) \geqslant R(A+E)+R(A-E)-n$

$\Rightarrow R(A+E)+R(A-E) \leqslant n$

$R(A+E)+R(A-E) \geqslant R(A+E+A-E)$

$=R(2A)=R(A)=n$. 因 $|A^2|=|E|\neq 0$

$\Rightarrow |A|\neq 0$.

$\boxed{\text{注：} AB=0 \text{ 且 } A+B \text{ 可逆} \Rightarrow R(A)+R(B)=n}$

6、分块阵

(1) $r=m+n$，$\left| A_{r\times m} \vdots B_{r\times n} \right| = (-1)^{mn} \left| B_{r\times n} \vdots A_{r\times m} \right|$

$$\begin{vmatrix} A_{m\times r} \\ \hdashline B_{n\times r} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} B_{n\times r} \\ \hdashline A_{m\times r} \end{vmatrix}$$

例：（2018 深圳期中填空题 5）

设 A, B 为 n 阶方阵，且 $|A|=|B|=a\neq 0$，则 $\left|\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right|=$ ______

解：$|D^{-1}|=\frac{1}{|D|}$．考虑 $\begin{vmatrix} 0 & A^* \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & A^* \end{vmatrix} = (-1)^{n^2}|B||A^*|$

$AA^*=|A|E_n \Rightarrow |A||A^*|=|A|^n \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}$ 当 $|A|\neq 0$ 时（$|A|=a\neq 0 \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}=a^{n-1}$）

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & A^* \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} a\cdot a^{n-1} = (-1)^{n^2} a^n \Rightarrow \left|(\quad)^{-1}\right| = (-1)^{-n^2} \cdot a^{-n} = (-1)^{n^2} a^{-n}$

(2) 降阶公式

$A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, $m>n$, $\lambda\in R$.

$$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|.$$

例①: $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{3\times1}$, $B=(3\ -1\ \ 1)_{1\times3}$

$$|\lambda E_3 - AB| = \lambda^{3-1}\left|\lambda E_1 - \underbrace{(3\ -1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{BA}\right| = \lambda^2|\lambda-4| = \lambda^2(\lambda-4).$$

证明: $\lambda\neq0$, $|\lambda E_m - AB| = \left|\begin{pmatrix}\lambda E_m-AB & 0\\ B & E_n\end{pmatrix}\right|$

$$\xlongequal{r_1+A\times r_2}\begin{vmatrix}\lambda E_m & A\\ B & E_n\end{vmatrix} = \lambda^m\begin{vmatrix}E_m & \frac{1}{\lambda}A\\ B & E_n\end{vmatrix} \xlongequal{r_2-B\times r_1} \lambda^m\begin{vmatrix}E_m & \frac{1}{\lambda}A\\ 0 & E_n-\frac{1}{\lambda}BA\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^m\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n\begin{vmatrix}E_m & \frac{1}{\lambda}A\\ 0 & \lambda E_n-BA\end{vmatrix} = \lambda^{m-n}|E_m|\cdot|\lambda E_n-BA| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|.$$

$\lambda=0$, $R(AB)\leq R(A)\leq n<m \Rightarrow |AB|=0$.

例②: $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $A=\alpha\alpha^T$. (1) 求 $R(A)$ (2) $|kE+A^n|$

(2018深圳期中大题十)

解: (1) (结论) $A=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1\ \ 0\ -1)\neq0 \Rightarrow R(A)>0$

$R(A)=R(\alpha\alpha^T)\leq R(\alpha)=1 \Rightarrow 0<R(A)\leq1 \Rightarrow R(A)=1$.

(2) ~~EE~~ $A^n=(\alpha\alpha^T)^n=\alpha(\alpha^T\alpha)^{n-1}\alpha^T$, $\alpha^T\alpha=(1\ \ 0\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$

$\Rightarrow A^n=2^{n-1}\alpha\alpha^T$

(续) $\left|kE_3 + 2^{n-1}\underset{3\times1}{\alpha}\,\underset{1\times3}{\alpha^T}\right| = \left|kE_3 - (-2^{n-1}\alpha)\alpha^T\right|$

$= k^{3-1}\left|kE_1 - \alpha^T(-2^{n-1}\alpha)\right| = k^2\left(k+2^{n-1}\alpha^T\alpha\right) = k^2(k+2^n)$

(3) 分块初等变换

例：A, B, C, D 是 n 阶方阵，A 可逆 且 $AC=CA$.

证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$.

注：一般情况下 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |AD-CB|$

~~证：~~ $\cancel{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - A^{-1}r_1} \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-A^{-1}B \end{vmatrix}}$ ~~(化为分块行阶梯形)~~

证明：化/分块行阶梯形

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1}\times r_1} \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

$AC=CA \Rightarrow \cancel{C^{-1}A = AC^{-1}}$ $CA^{-1}=A^{-1}C$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\cdot|D-A^{-1}CB| = |A|\,|A^{-1}(AD-CB)|$$

$$= |A|\,|A^{-1}|\,|AD-CB| = |AD-CB|.$$

其它例题

1. 关于伴随矩阵，$AA^* = A^*A = |A| E_n$，可见 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 当 $|A| \neq 0$ 时

(3东)

例：$|A| = 2$，A 为 4 阶方阵，求：(1) $|A^*|$，(2) $|(-A)^*|$，

(3) $\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1} - \frac{1}{2}A^*\right|$，(4) $|(A^*)^{-1}|$。

解：$|AA^*| = ||A| E_n| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$ 当 A 可逆时。

(1) $|A| \neq 0 \Rightarrow |A^*| = |A|^{4-1} = 2^3 = 8$。

(2) $|(-A)^*| = |-A|^{n-1} = \left((-1)^n |A|\right)^{n-1} = (-1)^{n(n-1)} \cdot |A|^{n-1} = 2^3 = 8$

(3) $\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1} - \frac{1}{2}A^*\right|$

① A^* 表示 $\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}$，$\left(\frac{A}{4}\right)^{-1}\left(\frac{A}{4}\right) = E \Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{A}{4}\right)^{-1} \cdot A = E$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{A}{4}\right)^{-1} = A^{-1} \Rightarrow \left(\frac{A}{4}\right)^{-1} = 4A^{-1} = 4\frac{A^*}{|A|} = 2A^*$

$\Rightarrow \left|2A^* - \frac{1}{2}A^*\right| = \left|\frac{3}{2}A^*\right| = \left(\frac{3}{2}\right)^4 |A^*| = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^3 = \frac{3^4}{2} = \frac{81}{2}$。

(4) $|(A^*)^{-1}| = \frac{1}{|A^*|} = \frac{1}{8}$。

~~答案~~

2、A 是 n 阶方阵

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$$

证明： $AA^*=|A|E_n$

① $R(A)=n \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow R(A^*)=n$.

② $R(A)=n-1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow AA^*=0$

$\Rightarrow 0=R(AA^*)\geq R(A)+R(A^*)-n \Rightarrow R(A)+R(A^*)\leq n$

$\Rightarrow R(A^*)\leq n-R(A)=1$

另外 $R(A)=n-1$，故存在 $(n-1)$ 阶非零子式 $\Rightarrow A^*\neq 0 \Rightarrow R(A^*)=1$.

③ $R(A)<n-1$. $\Rightarrow$ 所有 $(n-1)$ 阶子式均为0 $\Rightarrow A^*=0$，即 $R(A^*)=0$.

3、(2018深圳期中大题七)

A，B为n阶方阵，$|A|\neq 0$，$(B-E)$可逆，且 $(B-E)^{-1}=(A-E)^T$.

证明 B可逆.

证明： $E=(B-E)(B-E)^{-1}=(B-E)(A-E)^T=(B-E)(A^T-E)$

$=BA^T-A^T-B+E \Rightarrow B=BA^T-A^T=(B-E)A^T$

$\Rightarrow |B|=|B-E|\cdot|A^T|=|B-E|\cdot|A|\neq 0$. $\Rightarrow$ B可逆.

4. (练) $AXA = AXB + B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{求 } X.$$

解: $|A| = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆 $\Rightarrow XA = XB + A^{-1}B$

$$\Rightarrow X(A-B) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B(A-B)^{-1}$$

$\cancel{(A \mid B)}$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-3r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}B(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$