
系统建模与仿真实验指导书

直线电机一级倒立摆实验

(V1.0 版)

2020 年 12 月

第一章系统硬件简介及系统建模

一、实验系统组成

1. 系统整体介绍

直线电机一级倒立摆实验系统是研究倒立摆控制技术的平台,它主要由直线电机、角度编码器、数字控制器和被控对象小车、摆杆等元件组成。它是一个典型的倒立摆系统。由直线一级倒立摆实验本体、电控箱、运动控制卡和普通 PC 机组成控制平台。系统控制框图如图 1.1 所示

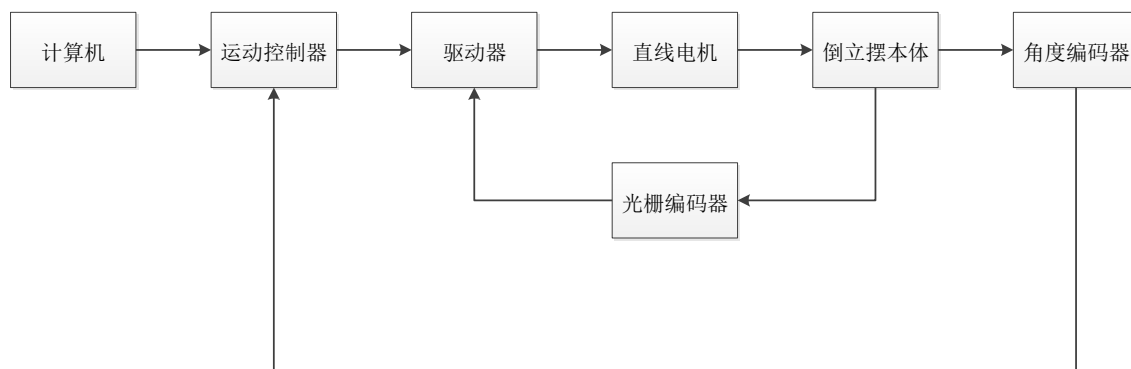


图 1.1 系统控制框图

2. 系统本体的结构组成

系统本体主要有以下几个部分组成

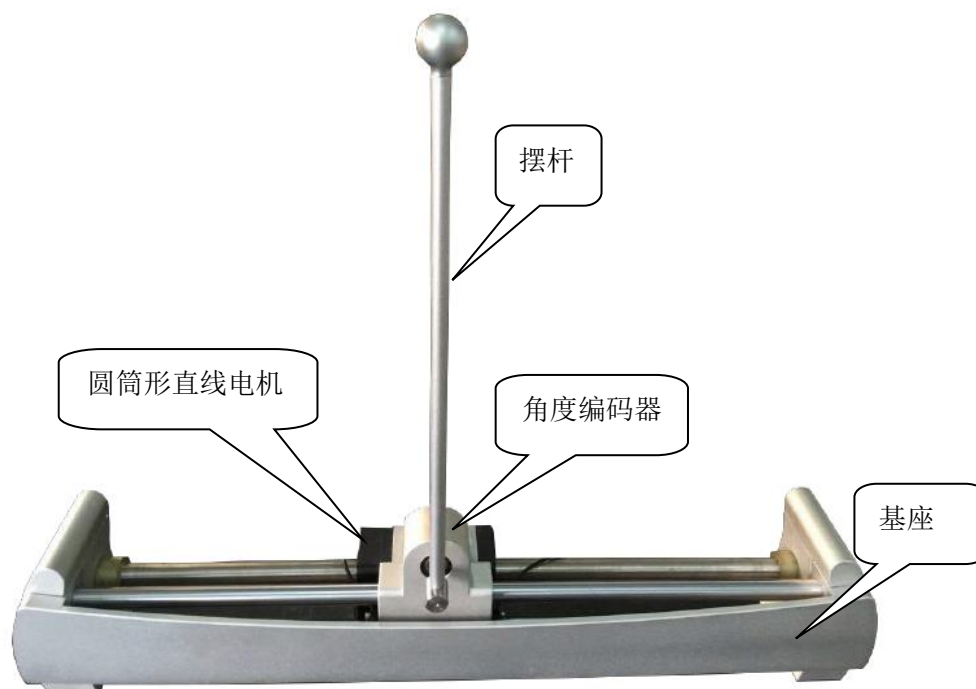


图 1.2 倒立摆本体

3. 电箱结构

电箱整体外观及各接口定义如下图所示



图 1.3 电控箱外观图 1.4 电控箱接口图

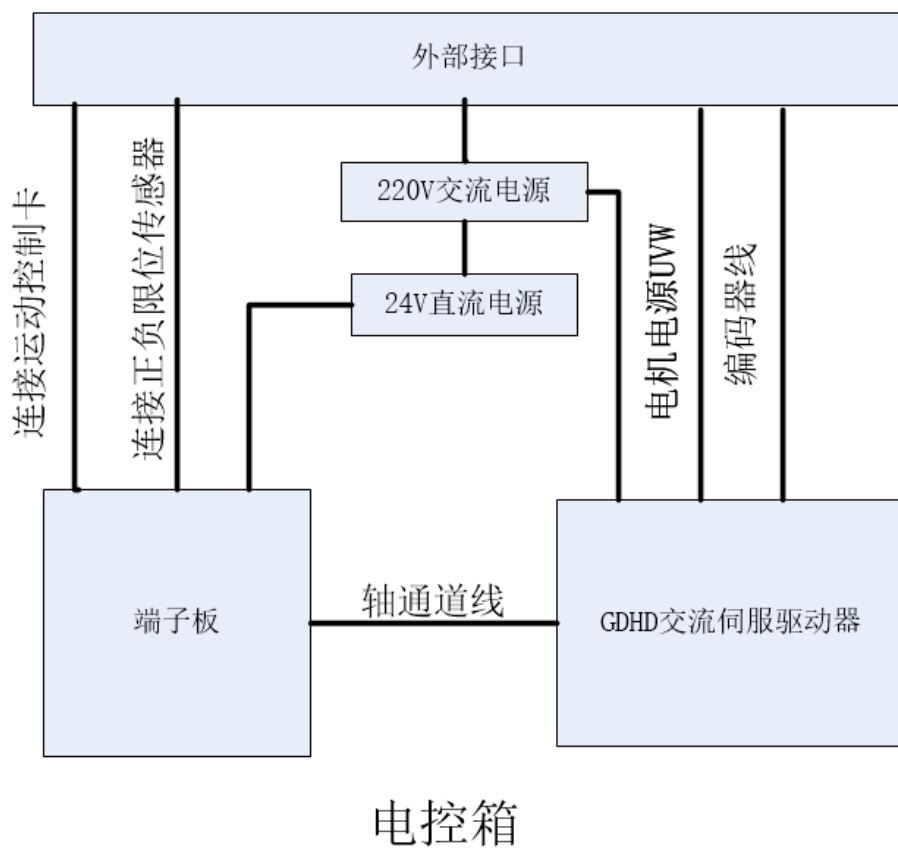


图 1.5 电控箱内部布局图

4. 硬件连接

系统硬件连接如图 1-6 所示

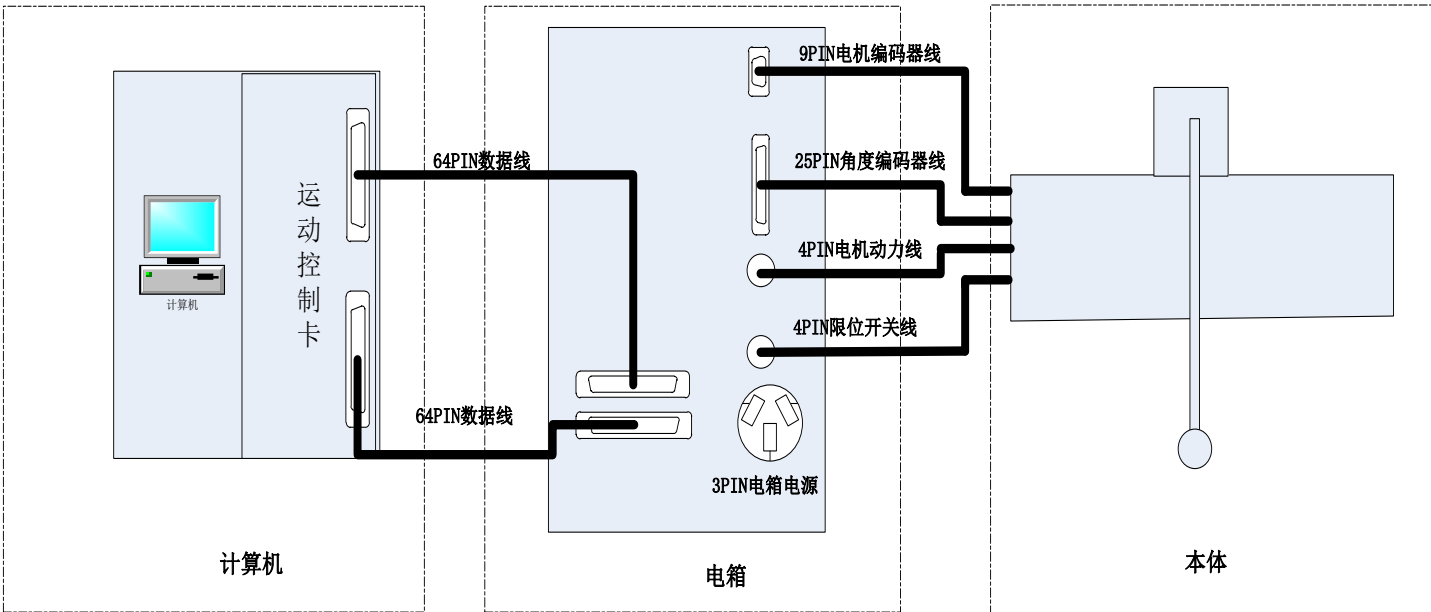


图 1.6 系统连接示意图

二、电气参数

1. 电机参数

表 1.1 直线电机参数

电机型号	LCM-75S
额定功率(W)	200
额定扭矩(N.m)	0.64
瞬时最大扭矩(N.m)	1.91
额定/最大转速(r/min)	3000/5000
Encoder 电机转子惯量 $\times 10^{-4}(\text{kg.m}^2)$	0.19
Resolver 电机转子惯量 $\times 10^{-4}(\text{kg.m}^2)$	0.2
每秒最大功率(kw/s)	21.5
机械常数(ms)	0.9
额定电流(A)	1.7
瞬时最大电流(A)	5
极对数（对）	4
绝缘等级	F 级
使用温度	0~+40℃
保存温度	-10~+85℃
耐震性	5G 以下
使用湿度	85%RH 以下（不结露）
IP 等级	标准 IP42（可支持 IP65）

2. GTHD 交流伺服驱动器参数

表 1.2GTHD 交流伺服驱动器参数

驱动器型号	GTHD-0032AAP1
额定电压(VAC 线-线) $\pm 10\%$	120/240
频率	50/60HZ
线路熔断器	10A
耐受电压	1500VAC
连续电流	5Arms
控制电路电源损耗	5W
净重	0.75kg
连续输出电流	3Arms
PWM 频率	16kHz

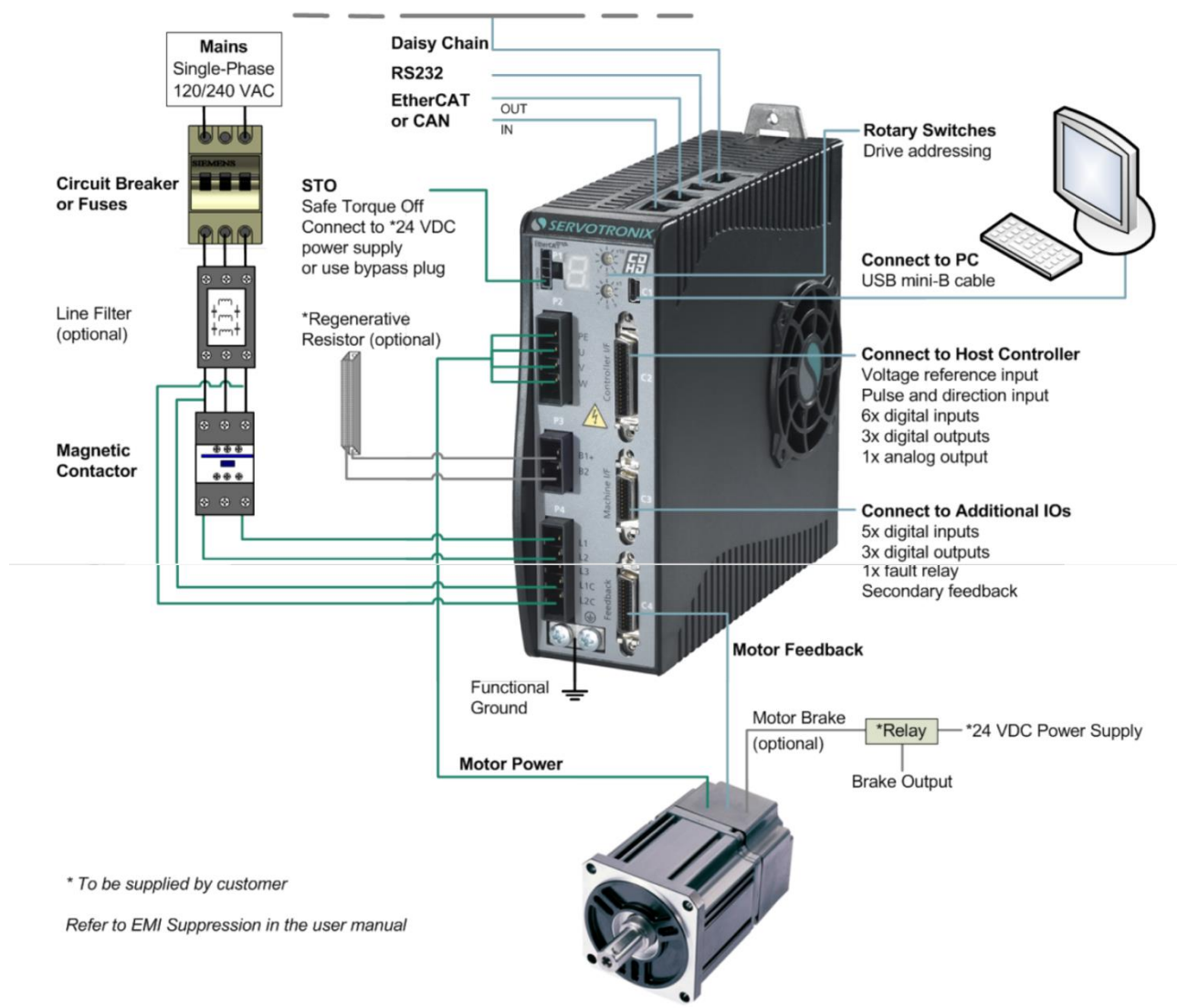


图 1.7 驱动器系统布线及引脚定义

第二章系统建模及稳定性分析

一、实验目的

1. 了解机理法建模的基本步骤；
2. 使用机理法建立直线一级倒立摆的数学模型；
3. 分析直线一级倒立摆的稳定性，并在 MATLAB 中仿真验证
4. 掌握控制系统稳定性分析的基本方法；

二、实验设备

直线一级倒立摆本体；倒立摆电控箱；PC 机（MATLAB 平台；运动控制卡）

三、实验原理

系统建模可以分为两种：机理建模和实验建模。机理建模是在了解研究对象的运动规律基础上，通过物理、化学的知识和数学手段建立起系统内部的输入—输出状态关系。实验建模是通过在研究对象上加上一系列的研究者事先确定的输入信号，激励研究对象并通过传感器检测其可观测的输出，应用数学手段建立起系统的输入—输出关系。这里面包括输入信号的设计选取、输出信号的精确检测、数学算法的研究等内容。

对于倒立摆系统，经过小心的假设忽略掉一些次要的因素后，它就是一个典型的运动的刚体系统，可以在惯性坐标系内应用经典力学理论建立系统的动力学方程。下面采用其中的牛顿—欧拉方法建立直线一级倒立摆系统的数学模型。

1. 受力分析

在忽略了空气阻力、各种摩擦之后，可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统，如图 2.1 所示

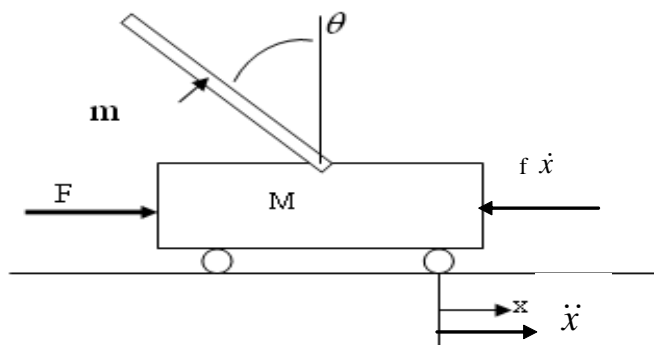


图 2.1 直线一级倒立摆系统

本文中倒立摆系统描述中涉及的符号、物理意义及相关数值如表 3-1 所示。

表 2.1 直线一级倒立摆系统参数

符号	意义	实际数值
M	小车质量（不含动子）	1.42kg
m	摆杆质量	0.12kg
b	小车摩擦力系数*	N/m/sec
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.188m
I	摆杆惯量	0.0014kg*m*m
g	重力加速度	9.8 m/s^2
K1	电机推力系数	10N/A
K2	驱动器电流转换系数	0.51A/v
	小车平动编码器	48mm/10000pulse
	摆杆角度编码器	2400pulse/rev
	控制卡模拟量输出	-10V——10V
F	加在小车上的力	
x	小车位置	
θ	摆杆与垂直向下方向的夹角 (考虑到摆杆初始位置为竖直向下)	
ϕ	摆杆与垂直向上方向的夹角	
F_s	摆杆受到的水平方向的干扰力	
F_h	摆杆受到的垂直方向的干扰力	
F_g	F_s 与 F_h 的合力	
注意：带*变量表示因倒立摆硬件本体的不同其数值可以存在一定差异		

图 2.2 是系统中小车的受力分析图。其中, N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。

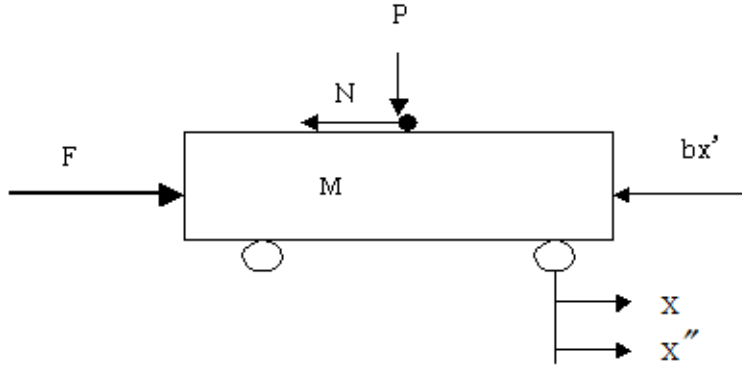


图 2.2 系统中小车的受力分析图

图 2.3 是系统中摆杆的受力分析图。 F_s 是摆杆受到的水平方向的干扰力, F_h 是摆杆受到的垂直方向的干扰力, 合力是垂直方向夹角为 α 的干扰力 F_g 。

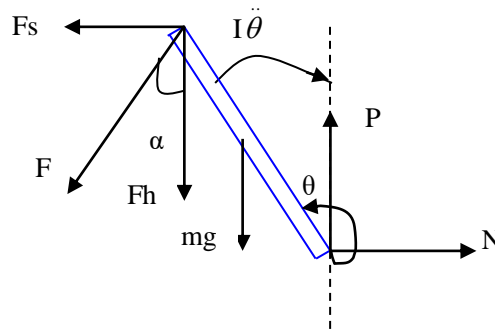


图 2.3 摆杆受力分析图

注意: 在实际倒立摆系统中检测装置和执行装置的正负方向已确定, 因而矢量方向定义如图所示, 图示方向为矢量正方向。

2. 数学模型

分析小车水平方向所受的合力, 可以得到以下方程:

$$M\ddot{x} = F - bx - N \quad (2-1)$$

设摆杆受到与垂直方向夹角为 α 的干扰力 F_g , 可分解为水平方向、垂直方向的干扰力, 所产生的力矩可以等效为在摆杆顶端的水平干扰力 F_s 、垂直干扰力 F_h 产生的力矩。

$$F_s = F_g \sin \alpha \quad F_h = F_g \cos \alpha \quad (2-2)$$

对摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式:

$$N - F_s = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (2-3)$$

$$\text{即: } N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + F_g\sin\alpha \quad (2-4)$$

对图 3.3 摆杆垂直方向上的合力进行分析, 可以得到下面方程:

$$-P + mg + F_h = m\frac{d^2}{dt^2}(l - l\cos\theta) \quad (2-5)$$

$$\text{即: } -P + mg + F_g\cos\alpha = ml\ddot{\theta}\sin\theta + ml\dot{\theta}^2\cos\theta \quad (2-6)$$

力矩平衡方程如下:

$$F_g l \sin\alpha \cos\theta + F_g l \cos\alpha \sin\theta + Pl \sin\theta + Nl \cos\theta + I\ddot{\theta} = 0 \quad (2-7)$$

代入 P 和 N , 得到方程:

$$2F_g l \sin\alpha \cos\theta + 2F_g l \cos\alpha \sin\theta + (I + ml^2 \cos 2\theta)\ddot{\theta} + mgl \sin\theta - ml^2\dot{\theta}^2 \sin 2\theta + ml\ddot{x} \cos\theta = 0 \quad (2-8)$$

设 $\theta = \pi + \phi$ (ϕ 是摆杆与垂直向上方向之间的夹角, 单位是弧度), 代入上式。假设 $\phi \ll 1$, 则可以进行近似处理:

$$\cos\phi = 1, \sin\phi = \phi, \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 0, \cos 2\phi = 1, \sin 2\phi = \phi$$

$$\text{由于: } I = \frac{1}{3}ml^2$$

方程化为:

$$2F_g(-\sin\alpha - \phi\cos\alpha) + \frac{4}{3}ml\ddot{\phi} - mg\phi = m\ddot{x} \quad (2-9)$$

令: $F_f = F_g(-\sin\alpha - \phi\cos\alpha)$ 则(2.9)式化为

$$2F_f + \frac{4}{3}ml\ddot{\phi} - mg\phi = m\ddot{x} \quad (2-10a)$$

式(2-10a)即是化简后的直线一级倒立摆系统微分方程。代入 $mg = 1.176, l = 0.188$ 实际数据后, 微分方程如式(2-10b)所示。

$$\ddot{\phi} = 29.4\phi + 3\ddot{x} - 6\frac{F_f}{m} \quad (2-10b)$$

当忽略了 F_f , 系统的微分方程如式(2.10c)所示。

$$\ddot{\phi} = 29.4\phi + 3\ddot{x} \quad (2-10c)$$

忽略干扰力后, 直线一级倒立摆系统是单输入二输出的四阶系统, 考虑干扰力后, 直线一级倒立摆系统是二输入二输出的四阶系统。其内部的 4 个状态量分别是小车的位移 x 、小车的速度 \dot{x} 、摆杆的角度 θ 、摆杆的角速度 $\dot{\theta}$ 。系统输出的观测量为小车的位移 x 、摆杆的角度 θ 。其控制量为小车的加速度 \ddot{x} , F_f 是直线一级倒立摆运动中各种干扰因素的综合项, 可以等效为干扰力考虑。

四、实验步骤

1. 建立系统传递函数：

根据系统微分方程（式 2-10c），化为关于加速度输入量和角度输出量的传递函数：

$$\frac{\Phi(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 - 29.4} \quad (2-11)$$

2. 直线一级倒立摆闭环系统稳定性分析：

构建如图 2.4 所示闭环系统，则系统的闭环极点为 (-5.4222) 、 (5.4222) ：

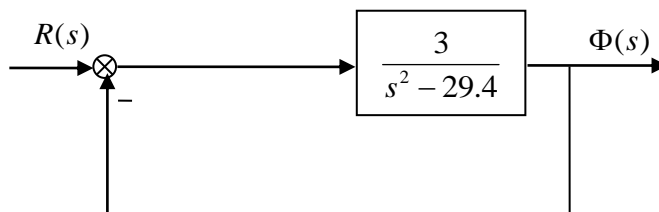


图 2.4 闭环系统结构图

由于有实部为正的极点，所以闭环系统不稳定，必须设计控制器使系统稳定。

3. SIMULINK 仿真

在 MATLAB Simulink 中构建图 2.5 所示系统的仿真程序 e1.mdl

Exp 01 Googol Linear 1-Stage Inverted Pendulum-System Modeling and Stability Analysis

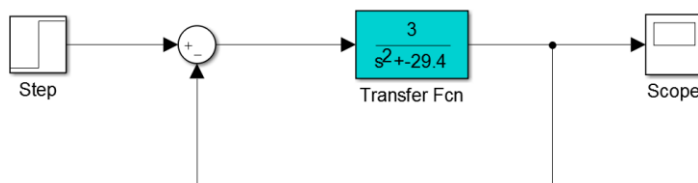



图 2.5 系统仿真程序

加入 1m/s^2 的阶跃信号，点击按钮“”，双击 Scope 模块，得到系统仿真曲线如图 2.6，此时系统不稳定，发散

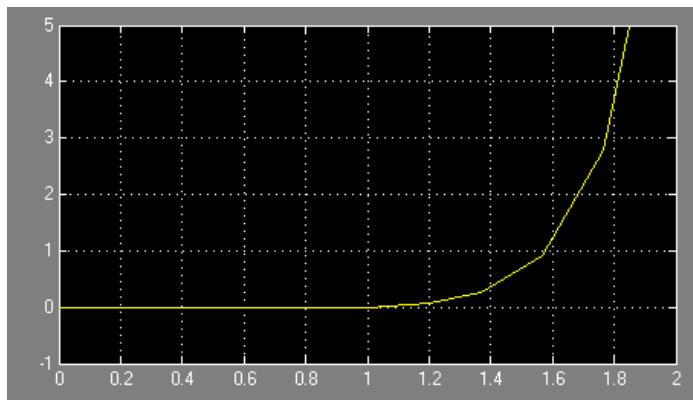


图 2.6 仿真曲线

五、实验分析及思考题

影响系统稳定的因素是闭环系统的极点位置，任意极点位于 s 右半平面，则系统不稳定。测量系统稳定性的方法之一是加入大小合适的阶跃信号，根据其输出的阶跃响应分析系统的稳定性和其他性能。

思考题：根据直线一级倒立摆建模的过程，总结机理法建模的基本步骤：

1. 根据系统运动的物理规律建立方程
2. 化简为微分方程
3. 根据小偏差线性化的理论化简为线性系统的传递函数；

第三章 LQR 控制实验

一、实验目的

1. 掌握 LQR 的设计方法;
2. 会根据系统需求设计 LQR 调节器;
3. 设计直线一级倒立摆 LQR 调节器;
4. 测试系统性能指标;

二、实验设备

直线一级倒立摆; 倒立摆电控箱; PC 机 (MATLAB 平台; 运动控制卡)

三、实验原理

1. 线性二次型最优调节器

线性二次型 (LQ——Linear Quadratic) 是指系统的状态方程是线性的, 指标函数是状态变量和控制变量的二次型。线性二次型控制理论已成为反馈系统设计的一种重要工具, 广泛适用于 MIMO 系统。其特点是为多变量反馈系统的设计提供了一种有效的分析方法, 可适用于时变系统, 可处理扰动信号和测量噪声问题, 可处理有限和无限的时间区间, 设计的闭环系统具有良好的稳定裕度。

A. LQR (线性二次型最优调节器) 的原理

考虑系统的状态方程如式(2.1), 找一状态反馈控制量: $u = -Kx$, 使得如下性能指标最小化:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T f[x^T Qx + u^T Ru]dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) Mx(t_f) \quad (3.1)$$

其中 Q 、 M 是半正定矩阵, R 是正定矩阵, Q 、 M 分别是对状态变量和输入向量的加权矩阵, x 是 n 维状态变量, u 是 m 维输入变量, 终端时间 t_f 固定, 终端状态 $x(t_f)$ 自由。

要使性能函数 J 最小, 则可首先构造一个 Hamilton 函数:

$$H = -\frac{1}{2} [x^T Qx + u^T Ru] + \lambda^T [Ax + Bu]$$

当输入信号不受约束时, 则可对 Hamilton 函数进行求导并令其值为 0, 求出最小值, 从而得到最优控制信号:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -Ru + B^T \lambda = 0$$

$$u^* = R^{-1} B^T \lambda$$

λ 可由下式求出

$$\dot{\lambda} = -Px$$

P 可由 Riccati 方程求出

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$$

当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, P 趋近于一个常值矩阵, 且 $\dot{P} = 0$, 因此, 上式给出的 Riccati 方程就简化为

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = 0$$

LQR 问题的解是一个全状态反馈调节器，有非常好的鲁棒性能。它可以通过适当选取权矩阵 Q 和 R ，在控制信号能量和输出性能之间进行调节。

利用 MATLAB 的 LQR 函数可以很方便、准确地求出 LQR 的解—— K 阵。

B. LQR（线性二次型最优调节器）的实现

LQR 线性二次型最优调节器通过选取权矩阵 Q 和 R 使求解的全状态反馈阵 K 与系统的性能指标联系起来，其实质是设计最优的全状态反馈阵，比全状态反馈调节器更易设计出鲁棒性更强的控制系统。

为了控制全部状态，系统状态 LQR 模型为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} [\ddot{x}]$$

是单输入四输出。设计 LQR 调节器如下：

$$\text{选取 } Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad R = 1, \text{ 则根据上述方法求得 LQR 的解为:}$$

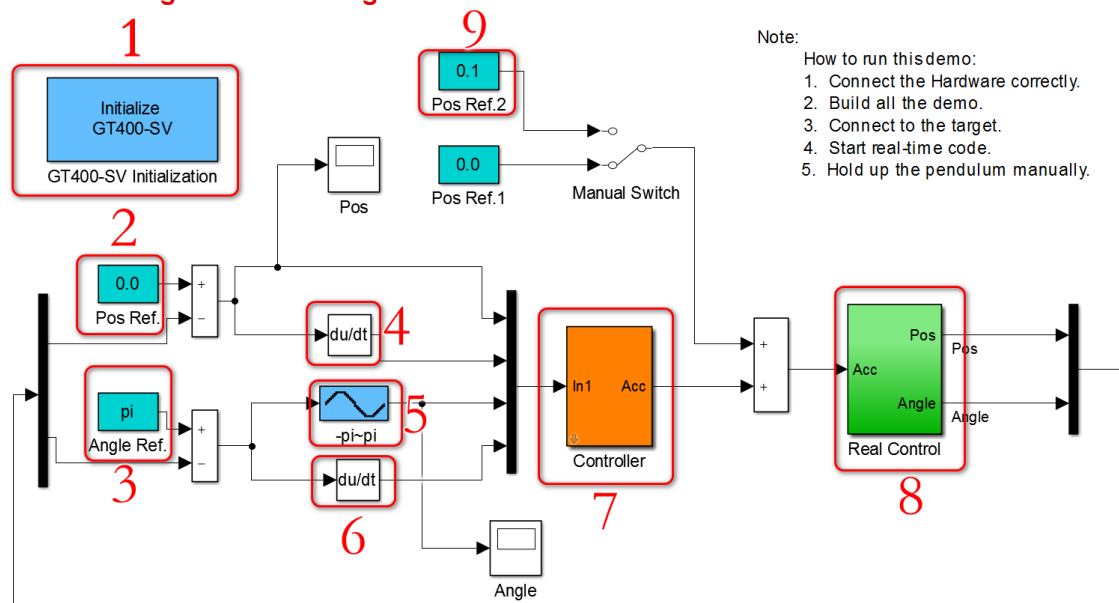
$$K = [-7.0711 \quad -9.5801 \quad 52.6097 \quad 10.0370] \quad (3.2)$$

四、实验步骤

1. 实时控制

(1) LQR 控制程序设计说明

EXP.09 Gogool Linear 1-Stage Inverted Pendulum--State Feedback Control of 4 States

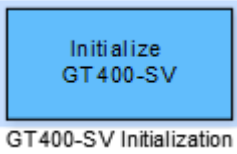


a) 实时控制程序设计简介：

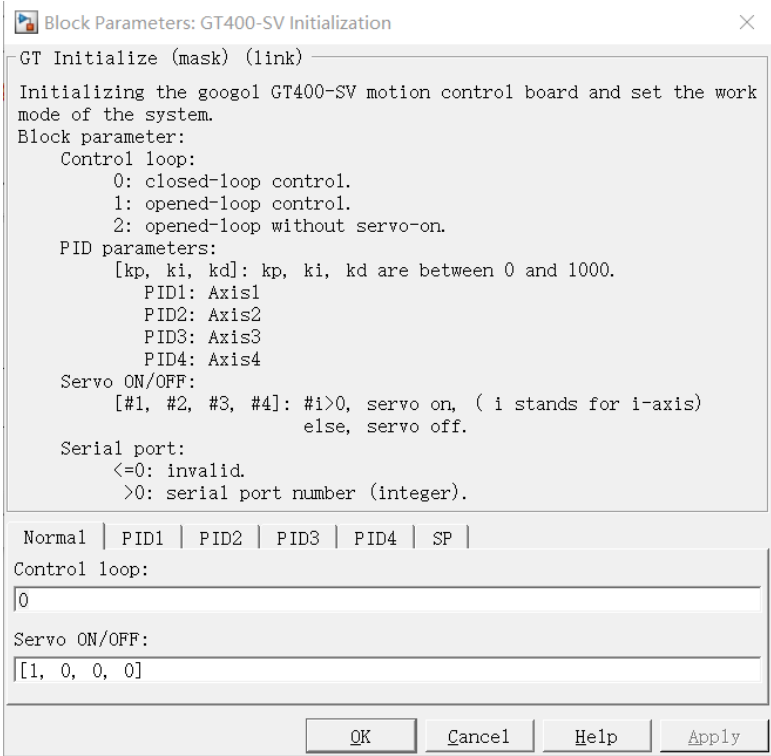
首先控制的是系统摆杆的角度，所以输入为系统目标角度，设计闭环负反馈系统结合根轨迹校正环节，使系统输出满足设计要求。

b) 程序模块说明

① GTS400-PVs Initialization 模块：



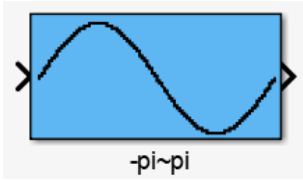
双击打开参数界面如下



参数说明：

负责初始化 GT-400-SV 控制器			
类	标示	功能	默认
参数	Control loop	表示控制器开、闭环控制。 0：控制器闭环控制 1：控制器开环控制 2：控制器开环且轴不上伺服（多用于硬件测试）	0
	ServoON/OFF	表示各轴上下伺服。 0：下伺服 1：上伺服	0
	PID parameters	[kp, ki, kd] 各轴使用控制器闭环时的 PID 参数 kp, ki, kd 参数为 0~32767, 但不能全为 0	[1,0,0] [1,0,0] [1,0,0] [1,0,0]
	SP	串口号，根据硬件串口号进行设置，主要用于直线电机倒立摆的模式切换，其他应用均设置为 0。	0

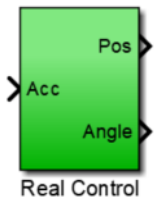
- ② Pos Ref.0 模块:位移补偿
- ③ Angle Ref 模块: 系统摆杆垂直向上角度定义为 $\pi=180^\circ$
- ④ 位移对时间求导
- ⑤ $-\pi\sim\pi$ 模块:



负责将角度转换到 $-\pi \sim +\pi$ 之间			
类别	标示	功能	默认值
输出	/	转换后角度	/
输入	/	转换前角度	/
转换关系		例如: 输入 $1.5*\pi$ 则输出 $-0.5*\pi$	

- ⑥ du/dt 模块: 角度对时间求导
- ⑦ Controller 模块: 控制器
- ⑧ RealControl 模块:

双击程序的”Real Control”模块



内部结构如图 3.1

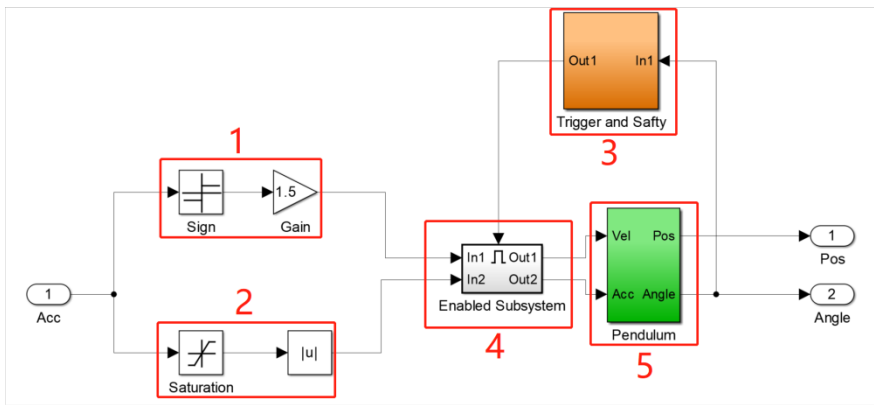


图 3.1 Real Control 子模块

表 3.1”Real Control”子模块说明

序号	功能	说明
1	输出速度	运动控制器输出速度
2	输出加速度	运动控制器输出加速度
3	系统保护	此保护模块详细说明见下表 2.2
4	通断开关	系统保护模块对开关输出 1 时 ACC 信号可通过，输入 0 时 ACC 信号无法通过
5	实时控制	对系统输出加速度及速度并处理限位信号及编码器信号

双击”Trigger and Safty”模块

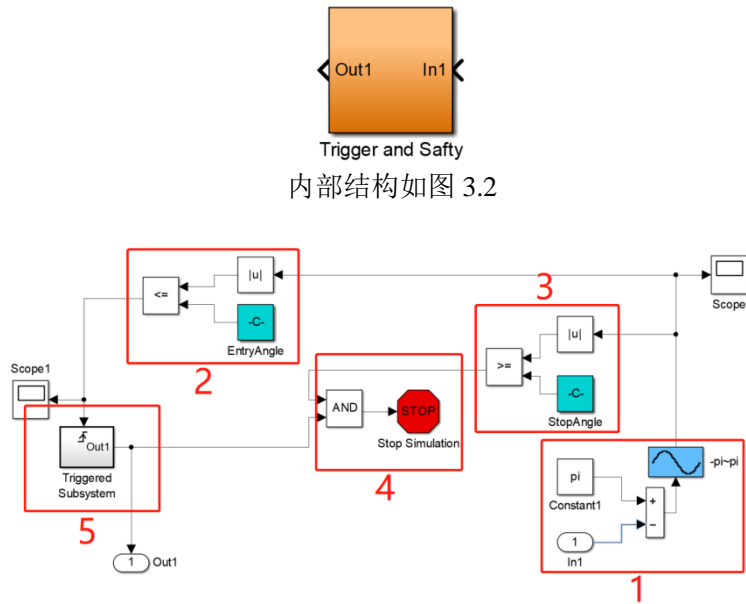


图 3.2 Trigger and Safty 子模块

表 3.2” Trigger and Safty”子模块说明

序号	说明	功能
1	系统输入角度	系统输入角度等于摆杆角度与 π 作差
2	起始控制角度逻辑判断	系统输入角度绝对值小于等于 10° 系统开始控制
3	停止控制角度逻辑判断	系统输入角度绝对值大于等于 10° 系统停止运行
4	停止程序逻辑	系统输入角度绝对值大于等于 10° 程序停止并复位
5	通断开关	详细请参考表 2.1

双击 “Pendulum”模块

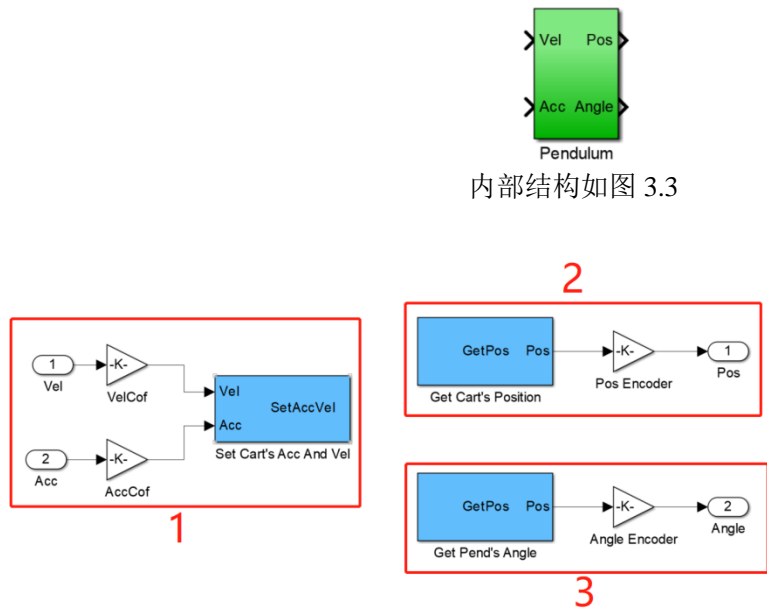


图 3.3

表 3.3Pendulum 子模块说明

序号	功能	说明
1	设定加速度	负责设定倒立摆加速度变化输出
2	捕获编码器值	负责捕获电机的编码器值

3	捕获编码器值	负责捕获摆杆的编码器值
---	--------	-------------

⑨ Pos Ref.1 模块：位移阶跃信号

(2) 实验操作步骤

- 1) 打开倒立摆电控箱上的电源按钮，然后将倒立摆小车扶至导轨中间位置。
- 2) 打开文件“LQR_Control.slx”，会弹出如图 2.4 所示的实时控制界面,根据图 3.5 所示的控制程序图，自己进行搭建补充（提示：图 3.5 中的 Controler 模块可用函数模块替换）。

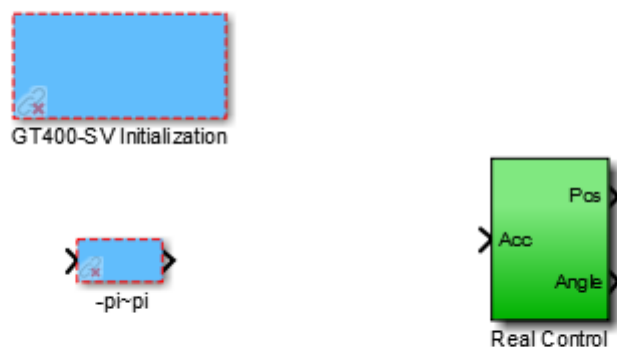


图 3.4LQR 实时控制程序

EXP.09 Googol Linear 1-Stage Inverted Pendulum--State Feedback Control of 4 States

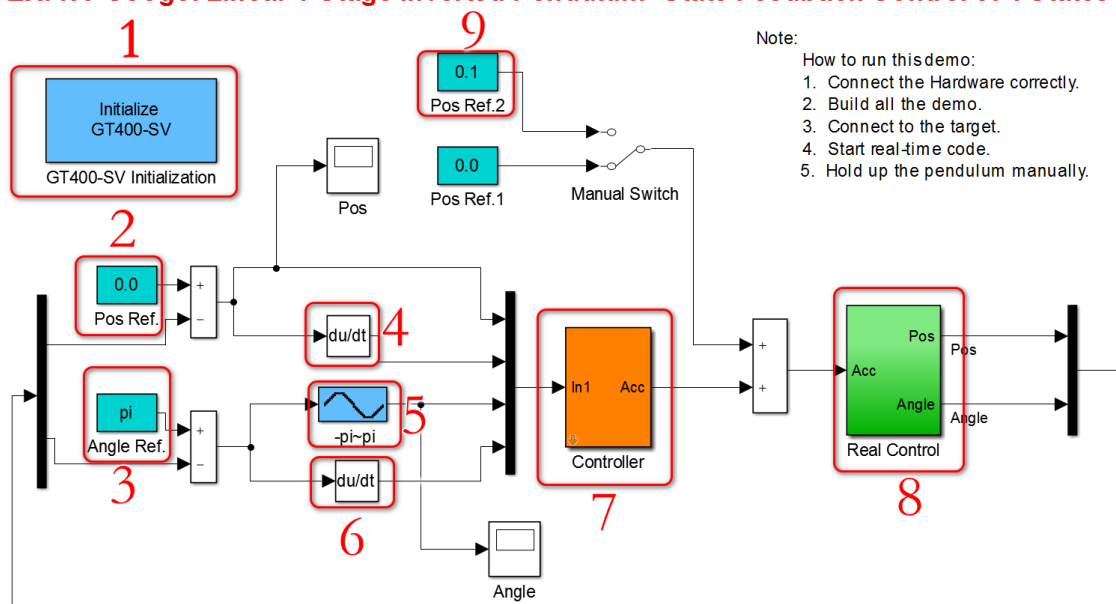





图 3.5LQR 实时控制程序

- 3) 搭建完成后，点击“”编译程序。
- 4) 点击“”运行程序，等到右下方开始时间计时时，迅速提起摆杆到竖直向上的位置，程序进入自动控制后松开摆杆。
- 5) 双击“Manual Switch”将输入信号打到 0.1m/s² 端，观察摆杆的运动现象。
- 6) 点击“”停止程序，打开示波器“Pos”和“Angle”，观察系统输出的响应。

7) 把(3-1)所示 K 阵带入实际系统中, 系统是稳定的。在 0.1 m/s^2 阶跃激励下的输出如图 3.6 所示。

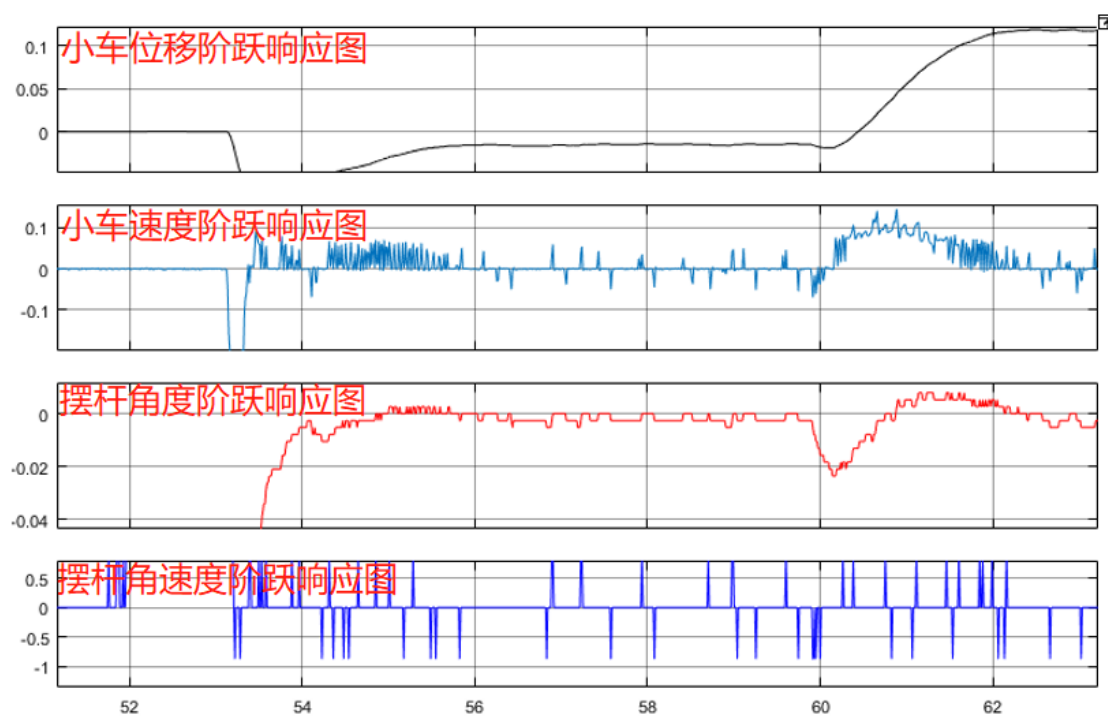


图 3.6 LQR 调节器 $K = [-7.0711 \quad -9.5801 \quad 52.6097 \quad 10.0370]$ 阶跃响应各状态输出图

五、实验数据

实验数据填入下表

	小车位移	小车速度	摆杆角度	摆杆角速度
稳态时方差				
阶跃响应振幅				
调节时间				

六、思考题:

1. 如何设计鲁棒性更强的系统?

2. 若在 LQR 实时控制程序中不采用 -pi~pi 模块, 该如何搭建控制程序? 对提起摆杆方向是否有要求? 如果有要求, 该如何提起摆杆才会稳定?