

1. 高低角 $E = \arctan \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + V^2 t^2}}$

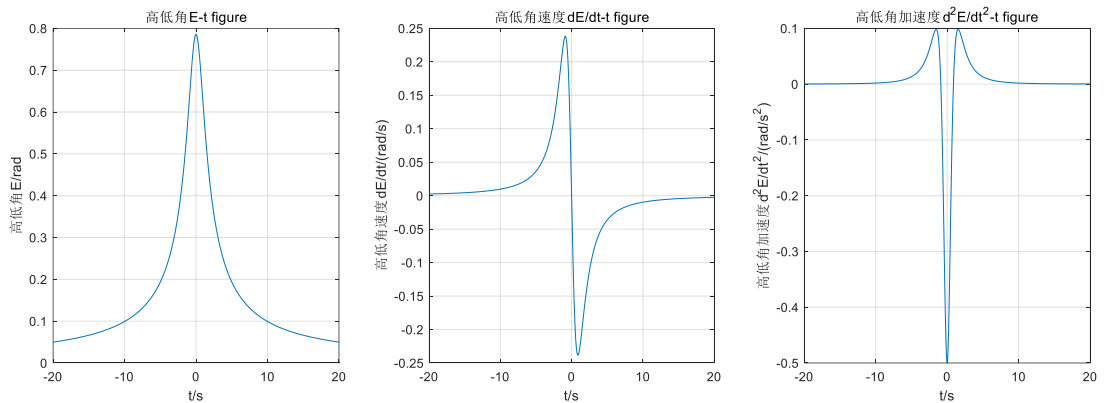
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + V^2 t^2}}\right)^2} \cdot (-1/2) Z_0 (X_0^2 + V^2 t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2V^2 t$$

$$= -\frac{V^2 Z_0 t}{(Z_0^2 + X_0^2 + V^2 t^2) \sqrt{X_0^2 + V^2 t^2}}$$

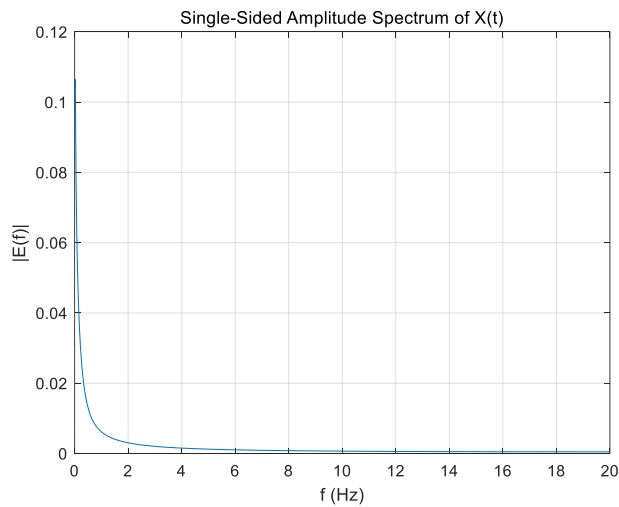
$$\frac{d^2 E}{dt^2} = -\frac{V^2 Z_0 \cdot (Z_0^2 + X_0^2 + V^2 t^2) \sqrt{X_0^2 + V^2 t^2} - V^2 Z_0 t \cdot [2V^2 t \sqrt{X_0^2 + V^2 t^2} + (Z_0^2 + X_0^2 + V^2 t^2) \cdot 2V^2 t \cdot 1/2 \cdot (X_0^2 + V^2 t^2)^{-\frac{1}{2}}]}{[(Z_0^2 + X_0^2 + V^2 t^2) \sqrt{X_0^2 + V^2 t^2}]^2}$$

$$= \frac{V^2 Z_0 (2V^4 t^4 + V^2 X_0^2 t^2 - Z_0^2 X_0^2 - X_0^4)}{(Z_0^2 + X_0^2 + V^2 t^2)^2 (X_0^2 + V^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

若 $X_0 = Z_0 = V = 1$ ，用 MATLAB 可作出：



E 傅里叶变换如下，高低角信号频谱分布在 20Hz 以内。



2. 列写 FFT 算法

FFT 本质上为离散傅里叶变换 DFT 的快速算法。

设 N 采样值数列 $x(n), n = 0, 1, \dots, N-1$, (通常 N 取 2^k) 其离散傅里叶变换 DFT 为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}$$

取 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 可得 $W_N^{r+mN} = W_N^r$ (周期性), $W_N^{r+N/2} = -W_N^r$ (对称性)

且有性质 $W_N^m = W_{N/r}^n, W_{rN}^m = W_N^n$, 可以得出以下计算思路:

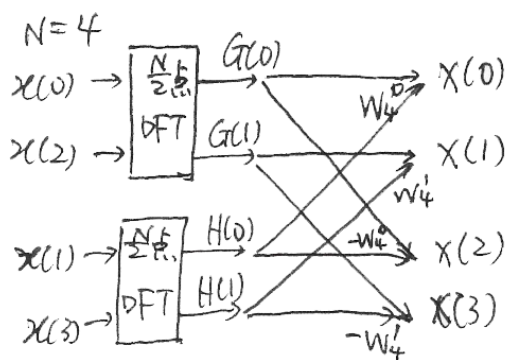
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}$$

$$\text{设 } G(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk}, H(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}, \text{ 有}$$

$$\begin{cases} X(k) = G(k) + W_N^k H(k), & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X(k + \frac{N}{2}) = G(k) - W_N^k H(k), & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{cases}$$

即可以将 N 点 DFT 转为求两个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT, 不断二分细分, 可大大提高运算效率。

下以 4 点 FFT 列运算图:



3. 使用卷积法，MATLAB 编程计算小功率随动系统的跟踪误差，并给出误差图形。

$$\text{开环传递函数 } G_k(s) = \frac{K}{s} \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \dot{r}(t) \text{ 到 } e(t): \frac{E(s)}{sR(s)} = \frac{1}{s} \frac{1}{1+G_k}$$

$$A(t) = \arctan(at), a = 0.5; \frac{dA}{dt} = a \cos^2 A$$

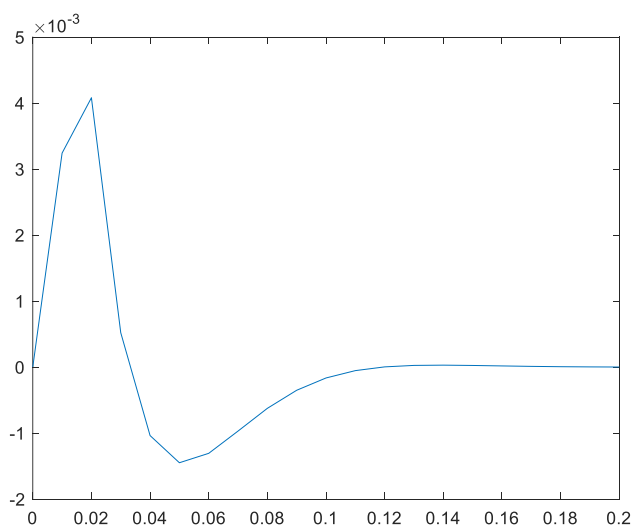
Matlab 代码如下：

```
clc,clear
%初始化传递函数
K=500;T=0.025;aT=0.15;a=0.5;
Gk=tf([K*T,K],[aT,1,0]);
E_sR=tf([1],[1,0])/(1+Gk);
tt=0:0.01:0.01;
ttt=0:0.01:0.2;
t=-6:0.01:6;
da=zeros(1,length(ttt));
da(1:2)=a*(cos(atan(a*tt)).^2);
w=lsim(E_sR, da, ttt);
plot(ttt,w)
dA=a*(cos(atan(a*t)).^2);
%卷积计算
N=length(w);
e=zeros(1,length(dA));
for k=N+1:length(dA)
    for n=k-N:k
        if(k-n>0)
            e(k)=e(k)+w(k-n)*dA(n);
        end
    end
end
end
plot(t,e),grid on,box on
xlabel('t/s'),ylabel('e')
```

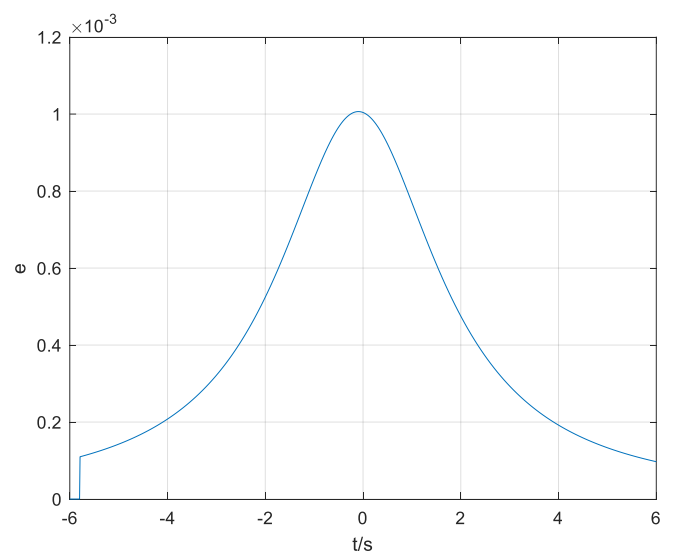
%脉冲输入序列
%脉冲响应时间序列

%脉冲响应
%脉冲响应图像

结果如下：



脉冲响应



跟踪误差