1. 该系统：原点是唯一平衡点。

考虑 $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2$ 其中 $a>0, b>0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \dot{V}(x) = 2ax_1\cdot\dot{x}_1 + 2bx_2\cdot\dot{x}_2 = -2ax_1^2 - (4a-2b)x_1x_2 - 8bx_2^2$$

仅需保证 $4a-2b=0$，不妨取 $a=2, b=1$

此时 $V(x) = 2x_1^2 + x_2^2 > 0$，$\dot{V}(x) = -4x_1^2 - 8x_2^2 < 0$

且 $\|x\| \to \infty$ 时 $V(x) \to \infty$，故该系统平衡状态是大范围渐近稳定的

2. 对于 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，特征值为 $\begin{cases} \lambda_1 = 1+\sqrt{6} > 0 \\ \lambda_2 = 1-\sqrt{6} < 0 \end{cases}$

由Lyapunov第一法可知，该系统在平衡状态不稳定

3. 原方程可写成 $x(k+1) = \Phi x(k)$ $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E - \Phi| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ 3 & \lambda+2 & 3 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 + 7\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1.2346 \\ \lambda_2 = 0.12+2.7i \\ \lambda_3 = 0.12-2.7i \end{cases}$$

可知 $|\lambda_2| = |\lambda_3| > 1$ 故该离散系统平衡状态不稳定。

4. $$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -\frac{k}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{k}{2}\lambda = 0$$ 得 $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{\frac{k}{2}} \\ \lambda_3 = -\sqrt{\frac{k}{2}} \end{cases}$

为保证该系统在 $x_e=0$ 处渐近稳定

$\begin{cases} |\lambda_1| < 1 \\ |\lambda_2| < 1 \\ |\lambda_3| < 1 \end{cases}$ 故 $k<2$ 即 k 的取值范围为 $k \in (0,2)$