第 1 题

(哈工大 2007 年研究生入学考试) 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

(1) 求使闭环系统稳定的 K 的取值范围;

(2) 若要求系统的剪切频率 $\omega_{\mathrm{c}}=3\mathrm{rad/s}$，相角裕度 $\gamma=45°$，求串联校正装置 $G_{c1}(s)$;

(3) 在 (2) 校正的基础上，若要求系统在 $r(t)=t$ 的作用下，稳态误差减小为原来的 1/10，而动态性能指标不变，求第二个串联校正装置 $G_{c2}(s)$。

(1) 闭环系统特征方程：

$$\begin{aligned}D(s)&=s(s+1)(0.1s+1)+K\\&=0.1s^3+1.1s^2+s+K\end{aligned}$$

列 Routh 表：

$$\begin{array}{lll}s^3 & 0.1 & 1\\ s^2 & 1.1 & K\\ s^1 & 1-\dfrac{K}{11} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

为使闭环系统稳定，有 $\begin{cases}1-\frac{K}{11}>0\\ k>0\end{cases}\Rightarrow 0<k<11.$

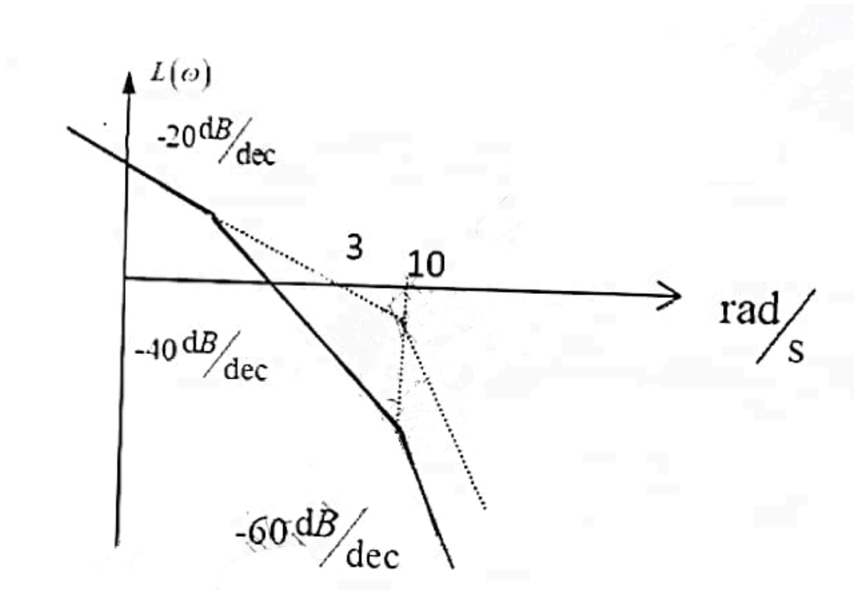
(2) 解：

先画出原来的 Bode 图:

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

起始频率为 $-20dB/dec$, 转折频率为 1rad/s 和 10rad/s

画出图像如下图：



当 $\omega_1 = 3\text{rad/s}$ 时，$\angle G(j\omega_1) = -90° - \arctan 0.1\omega_1 - \arctan \omega_1 = -178.26°$
采用超前校正

$$G_{C_1}(s) = \frac{\mathrm{s}+1}{Ts+1}$$
$$G_1(s) = G_{C_1}(s)G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(Ts+1)}$$

相角裕度：$\gamma = 180° - 90° - \arctan 0.1\omega_c - \arctan T\omega_c = 45°$
解得：T=0.179

$$G_{C_1}(s) = \frac{\mathrm{s}+1}{0.179s+1}$$

经检验 $\gamma = 45°$ 符合要求。再令 $\mid G_1(j\omega_c) = 1$，求得 $K = 3.55$

(3) 解：稳态误差减小为原来的 $\frac{1}{10}$, 即动态性能不变的情况下，开环放大倍数提升为原来的 10 倍，故采用迟后校正。

设 $G_{c_2}(s) = \beta\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}$, $\quad \beta = 10$, $\quad \frac{1}{\tau} \le \frac{1}{10}\omega_c$, 由 (2) 可得 $\omega_c = 3\text{rad/s}$

$\therefore \tau$ 取 4 即可

$\therefore G_{c_2}(s) = \frac{10(4s+1)}{40s+1}$

第 2 题

设一单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

要求校正后的具有相位裕度不小于 45°，幅值裕度不小于 6dB 的性能指标，试分别采样串联超前校正和串联滞后校正两种方法确定校正装置。

答：

$$20\lg|G_0(jw)| = \begin{cases} 20(\lg 10 - \lg w) \quad 0 < w < 2 \\ 20(\lg 10 - \lg w - \lg 0.5w) \quad 2 < w < 5 \\ 20(\lg 10 - \lg w - \lg 0.5w - \lg 0.2w) \quad w > 5 \end{cases}$$

$$20\lg|G_0(j\omega_{c0})| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_{c0} = 4.4721\mathrm{rad/s} \\ \gamma_0 = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) \\ \quad = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_{c0} - \arctan 0.5\omega_{c0} \\ \quad = -17.72^\circ \end{cases}$$

(1) 串联超前校正：

若用单级串联超前校正，需提供的相角至少为 $\varphi_m = \gamma - \gamma_0 + \Delta = 67.72^\circ \sim 72.12^\circ$，较大，故应采用两级串联超前校正。

第一级：

取 $\varphi_{m1} = \gamma - \gamma_0 + \Delta = 72.7155^\circ(\Delta = 10^\circ)$

则 $\alpha_1 = \frac{1+\sin\varphi_{m_1}}{1-\sin\varphi_{m1}} = 43.2882$

令

$$\begin{aligned} &20\lg\left|G_0\left(j\omega_{c_1)}\right)\right| = -10\lg\alpha_1 \\ &\Rightarrow 22\left(\lg 10 - \lg\omega_{c_1} - \lg 0.5\omega_{c_1} - \lg 0.2\omega_{c_1}\right) = -10\lg\alpha_1 \\ &\Rightarrow \omega_{c_1} = 8.6975 rad/s \end{aligned}$$

则 $T_1 = \frac{1}{\omega_{c1\sqrt{\alpha_1}}} = 0.01748 \Rightarrow G_{c_1}(s) = \frac{0.7565s+1}{0.01748s+1}$

第一级校正后 $G_1(s) = \frac{10(0.7565s+1)}{s(0.2s+1)(0.5s+1)(0.01748s+1)}$

令

$$\begin{aligned} &20\lg|G_1(j\omega_{c1})| \\ &= 20\left(\lg 10 + \lg 0.7565\omega_{c01} - \lg\omega_{c01} - \lg 0.2\omega_{C01} - \lg 0.5\omega_{c01}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \omega_{c01} = 8.698\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{01} &= \angle G_1(j\omega_{c1}) + 180^\circ \\ &= \arctan 0.7565\omega_{c01} - 90^\circ - \arctan 0.2\times\omega_{c01} - \arctan 0.5\omega_{c01} - \arctan 0.01748\omega_{c01} + 180^\circ \\ &= 25.5573^\circ < 45^\circ \end{aligned}$$

第二级:

令 $\varphi_{m2} = \gamma - \gamma_{01} + \Delta = 29.4427^\circ\ (\Delta = 10^\circ)$, 则 $\alpha_2 = \frac{1+\sin\varphi_{m2}}{1-\sin\varphi_{m2}} = 2.9335^\circ$

令 $20\lg\mid G_1(j\omega_{c2})\mid = -10\lg\alpha_2$

$\Rightarrow 20(\lg 10 + \lg 0.7565\omega_{c2} - \lg\omega_{c2} - \lg 0.2\omega_{c2} - \lg 0.5\omega_{c2})$

$= -10\lg\alpha_2$

$\Rightarrow w_{c2} = 11.3829\text{rad/s}$

则 $T_2 = \frac{1}{w_{c2}\sqrt{\alpha_2}} = 0.05129$

$\Rightarrow G_{C2} = \frac{0.1505.s+1}{0.05129s+1}$

则 $G(s) = G_0(s)G_{C1}(s)G_{C2}(s) = \frac{10(0.7565s+1)(0.1505s+1)}{s(0.2s+1)(0.5s+1)(0.01748s+1)(0.05129s+1)}$

令 $20\lg \mid G\left(j\omega_{c2}\right) = 0 \Rightarrow \Omega_{c2} = 11.38\text{rad/s}$

$$\gamma_2 = \angle G\left(j\omega_{c2}\right) + 180^\circ = \arctan 0.7565\omega_{c2} + \arctan 0.1505\omega_{c2} - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_{c2} - \arctan 0.5\omega_{c2} - \arctan 0.0174$$

满足要求。

令 $\angle G(j\omega_g) = 180^\circ \Rightarrow \omega_g = 32.2\text{rad/s}$

$\therefore 20\lg k_g = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 15.9dB > 6dB$, 满足要求

综上，$G_c(s) = \frac{(0.7565s+1)(0.1505s+1)}{(0.01748s+1)(0.05129s+1)}$

(2) 串联滞后校正

取校正后 $\omega_c = 1\text{rad/s}$

算得 $\gamma_0\left(\omega_c\right) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2 - \arctan 0.5 = 52.125^\circ > 45^\circ + \Delta \quad (\Delta = 6^\circ)$

$$
\begin{aligned}
&\text{令} 20\lg\left|G_0\left(j\omega_c\right)\right| - 20\lg\beta = 0\\
&\Rightarrow \beta = \frac{10}{\omega_c} = 10\\
&\text{取} \frac{1}{\tau} = \frac{1}{10}\omega_c \Rightarrow \tau = \frac{10}{\omega_c} = 10\text{rad/s} \qquad 4\\
&\text{则} G_c(s) = \frac{10s+1}{100s+1}\\
&\text{校正后} G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{10(10s+1)}{s(0.2s+1)(0.5s+1)(100s+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{令} 20\lg\left|G\left(j\omega_c\right)\right| = 0\\
&\Rightarrow \omega_c = 1\text{rad/s}\\
&\gamma = 180^\circ + \arctan 10 - 90^\circ - \arctan 0.2 - \arctan 0.5 - \arctan 100 = 46.987^\circ > 45^\circ, \text{满足要求}\\
&\text{令} \angle G\left(j\omega_g\right) = \arctan 10\omega g - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_g - \arctan 0.5\omega_g - \arctan 100k_g = -180^\circ\\
&\Rightarrow \omega_g = 3.0612\text{rad/s}\\
&20\lg k_g = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = -20\left(\lg 10 + \lg 10\omega_g - \lg\omega_g - \lg 0.5\omega_g - \lg 100\omega_g\right) = 13.42\text{ dB} > 6\text{ dB}, \text{满足要求}
\end{aligned}
$$

综上，串联滞后校正为 $G_c(s) = \frac{(10s+1)}{(100s+1)}$

第 3 题

(哈工大 2011 年研究生入学考试) 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(0.02s+1)}$$

设计一个串联校正装置，使得系统满足下列指标:

(1) 跟踪单位斜坡输入信号时的稳态误差为 0.01;

(2) 开环剪切频率为 $0.6 \leq \omega_c \leq 3\mathrm{rad/s}$;

(3) 开环相角裕度 $\gamma \geq 40°$。

要求写出校正装置的传递函数，并检验设计结果是否满足上述指标。

解：

分析: 由原系统开环传递函数 $G_0(S)$ 知，原系统已为 I 型，要求稳态误差 0.01，即 $\frac{1}{k}=0.01 \Rightarrow k=100$,

原系统剪切频率：$20\lg 2-20\lg\omega_{c0}-20\lg\omega_{c0}=0 \Rightarrow \omega_{c0}=\sqrt{2}\approx 1.414\mathrm{rad/s}$, 大于要求的剪切频率，故采用迟后校正，$G_c(s)=\frac{50(\tau s+1)}{\beta\tau s+1}(\beta>1)$

设计：取校正后剪切频率 $\omega_c=0.7\mathrm{rad/s}$

即：$20\lg\mid 50G_0(j\omega_c)\mid=20\lg\beta$

$$\beta=\frac{100}{w_c\sqrt{0.02^2w_c^2+1}\sqrt{w_c^2+1}}=117.022$$

原系统 0.7rad/s 处相位储备

$$\begin{aligned}\gamma_0\left(\omega_c\right)&=180°-90°-\arctan\omega_c-\arctan 0.02\,\omega_c\\&=55.81°>40°+6°\end{aligned}$$

具有足够的相位储备。

取 $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c$, 即$\tau=14.286$

则校正环节设计为：$G_c(s)=\frac{50(14.286s+1)}{1671.8s+1}$

检验：

校正后系统：$G_0(s)G_c(s)=\frac{100(14.286s+1)}{s(s+1)(0.02s+1)(1671.8s+1)}$

剪切频率：

$$\begin{aligned}&0=20\lg 100+20\lg 14.286\omega_c-20\lg\omega_c-20\lg 1671.8\omega_c\\&\Rightarrow\omega_c=0.8545\quad\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

符合条件。

相角裕度:

$$\begin{aligned}\gamma&=180°-90°+arctan7.143\omega_c-arctan\omega_c-arctan0.02\omega_c-arctan835.9\omega_c\\&=43.86°>40°\end{aligned}$$

符合条件。

第 4 题

(哈工大 2013 年研究生入学考试) 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

设计一个串联校正装置，使校正后系统的开环增益为 5, 相角裕度不低于 40°，幅值裕度不小于 10dB。

解：

确定原系统的剪切频率和相角裕度：

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+2)} \quad G_0(j\omega)=\frac{10}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$\begin{cases} |G_0(j\omega)|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{\omega^2+4}} \\ \angle G_0(j\omega)=-90^0-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2} \end{cases}$$

$$|G_0(j\omega)|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{\omega^2+4}}=1 \quad \text{解得}\omega_c=1.8\mathrm{rad/s}$$

相角裕度: $\gamma=180^\circ+\angle G_0(j\omega)=180^\circ-90^\circ-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}=12.9^\circ$

不满足要求。

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}=\frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

满足稳态误差要求。

设计串联迟后环节 $G_c(s)=\frac{\tau s+1}{Ts+1}(T>\tau)$

要求相角裕度 $\gamma\geq 40^\circ$, 取 $\gamma\left(\omega_c\right)=40^\circ+\Delta=46^\circ$

则校正后剪切频率 ω_c 满足：$\angle G_0\left(j\omega_c\right)=46^\circ-180^\circ$, 即：

$$\angle G_0(j\omega)=-90^0-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}=46^\circ-180^\circ$$

得 $\omega_c=0.547\mathrm{rad/s}$

根据 $20\lg|G_0(j\omega)|=20\lg\beta$, 故 $\beta=7.735$

取 $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c$

解得:$\tau=18.3$

$T=\beta\tau=7.735\times 18.3=141.5$

则校正环节为 $G_c(s)=\frac{18.3s+1}{141.5s+1}$

校正后系统 $G_0(s)G_c(s)=\frac{5(18.3s+1)}{s(s+1)(0.5s+1)(141.5s+1)}$

检验：

剪切频率：$|G_0(j\omega_c)G_c\left(j\omega_c\right)|=\frac{5\sqrt{18.3^2\omega_c^2+1}}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1}\sqrt{0.25\omega_c^2+1}\sqrt{141.5^2\omega_c^2+1}}=1$

$\Rightarrow\omega_c=0.5492\mathrm{rad/s}$

相位裕度

$$\gamma=180^\circ-90^\circ+arctan18.3w_c-arctanw_c-arctan0.5w_c-arctan141.5\omega_c$$
$$=40.92^\circ>40^\circ$$

满足条件

穿越频率：

$$\begin{aligned}\angle G_0\left(j\omega_g\right)G_c\left(j\omega_g\right) &= -90^{\circ}-\arctan\omega_g-\arctan 0.5\omega_g+\arctan 18.3\omega_g-\arctan 141.5\omega_g \\ &= -180^{\circ} \\ \Rightarrow \omega_g &= 1.3628\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

幅值裕度 $20\lg \mathrm{k_g}=-20\lg \mid G_0\left(j\omega_g\right)G_c\left(|\mathrm{w_g}\right)\mid = 12.68\ \mathrm{dB}>10\ \mathrm{dB}$

满足要求。

第 5 题

(哈工大 2014 年研究生入学考试) 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{8}{s(s+2)}$$

试设计一个校正环节，使得系统满足:

(1) 在信号 $r(t)=t$ 的作用下的稳态误差为 0.05;

(2) 系统的开环剪切频率为 $\omega_{\mathrm{c}}\geq 10\mathrm{rad/s}$, 相角裕度 $\gamma\geq 45^{\circ}$。

要求写出校正装置的传递函数，并画出校正后系统的开环对数渐近幅频特性之略图。

解：

① 首先满足稳态误差为 0.05

则 $0.05=\frac{1}{k_v}$, 得 $k_v=20$

故 $G_0'(s)=\frac{20}{s(0.5s+1)}\quad G_0'(j\omega)=\frac{20}{j\omega(0.5j\omega+1)}$

② 求 $G_0'(j\omega)$ 的剪切频率

$|G_0'(j\omega)|=\frac{20}{\omega\sqrt{0.25w^2+1}}\quad \angle G_0'(j\omega)=-90^{\circ}-\arctan 0.5\omega$

令 $|G_0'(j\omega)|=1$ 解得：$\omega_c=6.16\mathrm{rad/s}$

相角裕度 $\gamma=180^{\circ}-90^{\circ}-\arctan 0.5\omega_c=180^{\circ}-162^{\circ}=18$

故 ② 采用超前校正，设 $G_C(S)=\frac{K_C(\tau S+1)}{TS+1}$

1、计算串联超前校正装置的超前相角 $\psi_m=45^{\circ}-18^{\circ}+8^{\circ}=35^{\circ}$

2、求 α 的值：$\alpha=\frac{1-\sin 35}{1+\sin 35^{\circ}}=0.27$

3、计算 $-20\lg\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=-20\lg\frac{1}{\sqrt{0.27}}=-5.71dB$

4、求出 $G_0'(S)$ 的幅频特性为 $-5.71dB$ 处的频率为 $\omega_m=8.67\mathrm{rad/s}$

$\tau=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}=0.222\quad T=\alpha\tau=0.06$

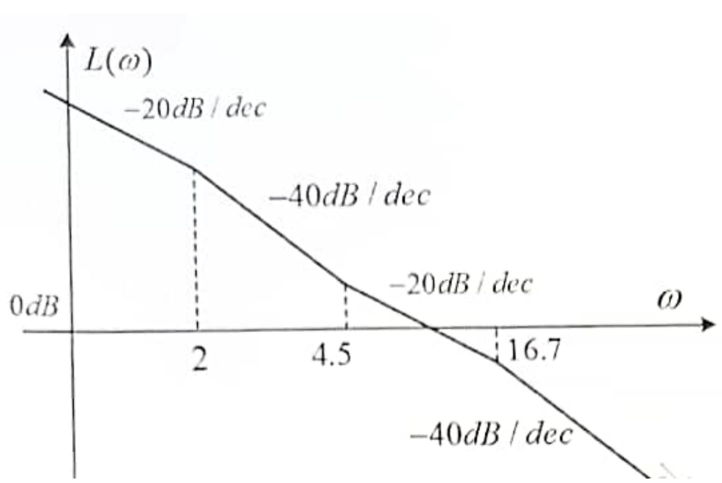
5、计算 k_c： $k_c=\frac{k}{k_0}=\frac{20}{4}=5$

最终得到超前校正装置为:

$$G_c(s)=\frac{5(0.222s+1)}{0.06s+1}\quad G(s)=\frac{20(0.222s+1)}{s(0.5s+1)(0.06s+1)}$$

验证剪切频率 $\omega_c=8.6\mathrm{rad/s}\quad \gamma=180^{\circ}+\angle G(j\omega)=180^{\circ}-131.85^{\circ}=48.15^{\circ}>45^{\circ}$

校正后系统的开环对数渐进幅频特性之略图：


$L(\omega)$
$-20dB/dec$
$-40dB/dec$
$-20dB/dec$
ω
$0dB$
2
4.5
16.7
$-40dB/dec$