

班号

姓名

学号

## 第七章 微分方程

### 习 题 七

#### 7.1

1. 求下列函数所满足的微分方程.

(1)  $y = Cx + C^2$ ;

(2)  $xy = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ .

2. 给定一阶微分方程  $\frac{dy}{dx} = 2x$ , 求: (1) 通解; (2) 满足初值条件  $y|_{x=1} = 4$  的特解; (3) 与直线  $y = 2x + 3$  相切的积分曲线; (4) 使  $\int_0^1 y dx = 2$  的解.

#### 7.2

1. 求下列微分方程的通解.

(1)  $\sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2}$ ;

(2)  $(y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0$ ;

(3)  $(e^{x+y} - e^x) dx + (e^{x+y} + e^y) dy = 0$ .

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解.

(1)  $y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0;$

(2)  $\cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}.$

3. 一曲线通过点  $(2, 3)$ , 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求该曲线方程.

4. 某湖泊的水量为  $V$ , 每年流入湖泊的含污染物  $A$  的污水量为  $\frac{V}{6}$ , 不含  $A$  的水流入量为  $\frac{V}{6}$ , 水的流出量为  $\frac{V}{3}$ , 已知 2017 年底湖中  $A$  的含量为  $5m_0$ , 超过国家标准, 为治理污染, 从 2018 年起, 限定排入湖中的水含  $A$  的浓度不超过  $\frac{m_0}{V}$ , 问至少需要多少年湖中  $A$  的含量可降至  $m_0$  以内? (湖中  $A$  的浓度均匀)

班号

姓名

学号

7.3

1. 求下列齐次方程的通解.

(1)  $xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0;$

(2)  $\left(2x \sin \frac{y}{x} + 3y \cos \frac{y}{x}\right) dx - 3x \cos \frac{y}{x} dy = 0.$

2. 求下列齐次方程满足所给初值条件的特解.

(1)  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy dx = 0, y|_{x=0} = 1;$

(2)  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y|_{x=1} = 2.$

7.4

1. 求下列微分方程的通解.

(1)  $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ ;

(2)  $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0$ ;

(3)  $y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0$ .

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解.

(1)  $\frac{dy}{dx} + 3y = 8, y \Big|_{x=0} = 2$ ;

(2)  $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x, y \Big|_{x=0} = 0$ .

3. 求解积分方程  $\int_0^x xy dx = x^2 + y$ .

---

班号

姓名

学号

---

4. 设有一质量为  $m$  的质点做直线运动. 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为  $k_1$ ) 的力作用于它, 此外还受一与速度成正比(比例系数为  $k_2$ ) 的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

$$(3) y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy=0.$$

6. 求下列伯努利方程的通解.

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x);$$

5. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解.

$$(1) y' = (x+y)^2;$$

$$(2) xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y} \tan \frac{y^2}{x};$$

7.5

$$(4) y'' = (y')^3 + y'.$$

1. 求下列微分方程的通解.

$$(1) y'' = \frac{1}{1+x^2};$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解.

$$(1) y'' = 3\sqrt{y}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2;$$

$$(2) y'' = y' + x;$$

$$(2) y'' + (y')^2 = 1, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0.$$

$$(3) yy'' + 2(y')^2 = 0;$$

班号

姓名

学号

3. 已知  $y(x)$  是具有二阶导数的上凸函数, 且曲线  $y = y(x)$  上任意点  $(x, y)$  处的曲率为  $\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$ , 曲线上点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $y = x + 1$ , 求该曲线方程, 并求函数  $y(x)$  的极值.

4. 敌方导弹 A 沿  $y$  轴正向以匀速  $v$  飞行, 经过点  $(0, 0)$  时, 我方设在点  $(16, 0)$  处的导弹 B 起飞追击, 导弹 B 飞行的方向始终指向 A, 速度的大小为  $2v$ , 求导弹 B 的追踪曲线和导弹 A 被击中的点.