# 《概率论与数理统计》课程“概率论”板块总结

姓名：方尧 学号：190410102

学院：机电工程与自动化学院 班级：19 自动化 1 班

2020 年秋季学期《概率论与数理统计》课程分两大板块，一是概率论，二是数理统计。概率论板块先后讲述了随机事件与概率、条件概率与独立性、一维常见离散/连续随机变量的分布、多维随机变量及其分布以及随机变量的数字特征和极限定理；数理统计部分讲述了基本概念以及参数估计中的点估计和鉴定估计量的标准。现对前一大板块作出期末总结。

## 第一章、 随机事件与概率

本章介绍了事件的和 $A\cup B\,/\,A+B$，事件的差 $A-B$，事件的逆 $\overline{A}$，事件的积/交 $A\cap B\,/\,AB$。互斥事件 $AB=\varnothing$ 意为事件不能同时发生（互不相容），对立事件 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$ 意为事件对立、互为补集。本章内含古典概率、几何概率和统计概率。介绍了概率的公理化定义。另外讲解了韦恩图，我们可以方便求解事件的和差积逆问题。

- 性质 $\overline{\left(\overline{A}\right)}=A$，加法公式 $P(A+B)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$

## 第二章、条件概率与独立性

- 条件概率定义为 $P\left(A\middle|B\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}$，事件独立定义为 $P\left(AB\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$
- 全概率公式：$A_k\left(k=1,2,3\cdots n\right)$ 互不相容，事件 $B$ 满足 $B\subset A_1+A_2+\cdots+A_n$ 则

$$P\left(B\right)=\sum_{k=1}^{n}P\left(B\middle|A_k\right)\cdot P\left(A_k\right)$$

- 贝叶斯公式：$A_i\left(k=1,2,3\cdots n\right)$ 互不相容，$P\left(A_i\right)>0$，$\forall$ 事件 $B$ 有 $B\subset A_1+A_2+\cdots+A_n$，且 $P\left(B\right)>0$，则

$$P\left(A_i\middle|B\right)=\frac{P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P\left(A_j\right)\cdot P\left(B\middle|A_j\right)}=\frac{P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)}{P\left(B\right)}\qquad\left(i=1\cdots n\right)$$

介绍了独立重复试验和二项概率公式，还介绍了

- 泊松定理：$X\sim B\left(n,p\right),P_n\left(X=k\right)=C_n^k\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}\xrightarrow[n\to\infty,p\to\infty]{np=\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

## 第三章、一维随机变量及其分布

离散型随机变量：离散型随机变量的概率表示方式——概率分布列，着重介绍了 0-1 分布，二项分布 $B\left(n,p\right)$，泊松分布 $P(\lambda)$，几何分布 $G\left(p\right)$，超几何分布；

连续型随机变量：介绍了累计分布函数 $F\left(x\right)=P\left(X\le x\right)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$，概率密度函数

$$f\left(x\right)=\begin{cases}F'(x), & F'(x)\text{存在的点}\\ 0\quad, & \text{不存在的点}\end{cases}$$

$$P\left(a\le x\le b\right)=\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-F(a)$$

介绍了均匀分布 $U(a,b)$ 及指数分布 $E(\lambda)$，着重介绍了正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 以及

- 正态分布的标准化：

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\ \ \text{则}\ F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$P\left(X\le b\right)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}),P\left(a\le X\le b\right)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

- 求 $Y=g(X)$ 概率密度，先求 $F_Y(y)$，求导得 $f_Y(y)=F_Y'(y)$，即可得到 $Y$ 的概率密度。
- 正态函数的分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ， $Y=aX+b$，则 $Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

## 第四章、多维随机变量及其分布

二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数定义为 $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$，并介绍了分布函数的几条性质；边缘分布函数定义为

$$F_X\left(x\right)=P(X\le x)=P(X\le x,Y\le+\infty)=F(x,+\infty)$$
$$F_Y\left(y\right)=P(Y\le y)=P(X\le+\infty,Y\le y)=F(+\infty,y)$$

二维离散型随机变量：$(X,Y)$ 分布列 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$

二维离散型随机变量的分布函数可以写成

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

二维连续型变量：介绍了二维均匀分布以及二维正态分布

引出了联合概率密度 $f(x,y)$ 有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,dudv$，即

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

介绍了边缘概率密度 $f_X\left(x\right), f_Y\left(y\right)$

$$f_X\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$
$$f_Y\left(y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

- 多维随机变量的独立性：

$$(X,Y)\text{独立} \Leftrightarrow F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)\ or\ f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

介绍了多维随机变量函数的分布，主要介绍了和以及 $\max(X,Y)$ 、 $\min(X,Y)$ 的分布。

- 和的分布 $Z = X + Y$ ：

1) 离散型： $P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) \underline{\underline{\text{若}(x,y)\text{独立}}} \sum_{i=0}^{k} p_{i,k-i} \quad (k=0,1,\cdots)$

其中若泊松分布 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_1)$ 则 $Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

2) 连续型： $F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) = \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\, dxdy$

- 若 $X,Y$ 独立，则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx \text{——卷积公式} f_Z = f_X * f_Y$$

其中若正态分布 $X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2), Y \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ 独立，则

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)$$

$n$ 个相互独立的正态变量的线性组合 $X_i \sim N(\mu_i, {\sigma_i}^2)\ \ (i = 1,2,\cdots n)$ ，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2)$$

- $\max(X,Y)$ 分布， $\min(X,Y)$ 分布：

$$P_{\max}(z) = P\left\{\max(x,y) \le z\right\} = P\left\{x \le z, y \le z\right\}$$

若 $(x,y)$ 独立， $X_i \sim F_{X_i}(x_i)\ \ ,i = 1,2,\cdots$

$$F_{\max}(z) = P\left\{\max(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le z\right\} = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z)$$

$$F_{\min}(z) = P\{\min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le z\} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - F_{X_i}(z)\right]$$

对于独立同分布，$X_i$ 独立同分布于 $F(x)$ 时

$$F_{\max}(z) = F^n(z), F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

$$f_{\max}(x) = nf(z)[F(z)]^{n-1}, f_{\min}(x) = nf(z)[1 - F(z)]^{n-1}$$

## 第五章、随机变量的数字特征和极限定理

- 数学期望：离散型 $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$，连续型 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

1) $Y = g(X)$ 分布：离散型 $E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$，连续型 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx$

2) $Z = g(X, Y)$ 分布：

离散型 $E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$，连续型 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y)dxdy$

- 数学期望的性质：

1) $a \le x \le b \;\; a \le E(X) \le b$

2) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

3) $X, Y$ 独立，$E(XY) = E(X)E(Y)$

- 方差定义为 $D(X) = E[X - E(X)]^2$,标准差 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

重要公式 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

- 方差性质：

1) $X \underline{\underline{a.e}}\, c$, 则 $D(X) = 0$

2) $c$ 为常数，$D(cX) = c^2 D(X)$

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$

特别是 $X, Y$ 独立，$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

- 协方差$Cov(X,Y)$，其等于0时$X,Y$不相关

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$$
$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$$

- 协方差性质：

1) $Cov(X,X)=D(X)$

2) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

3) $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$

- 相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\begin{cases}=0,\text{不相关} & \begin{matrix}\in(0,1)\ \text{正相关},=1\ \text{正线性}\\ \in(-1,0)\ \text{负相关},=-1\text{负线性}\end{matrix}\end{cases}$

其中 $\rho_{XY}=0\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0\Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

- 切比雪夫不等式

$$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2,\forall\varepsilon,P(|x-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},P(|x-\mu|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫大数定理、辛钦大数定律

- 中心极限定理：$X_k\left(i=1,2,\cdots,n\right)$独立同分布，$EX_k=\mu,DX_k=\sigma^2$

$$Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma},\ E(Y_n)=0,D(Y_n)=1$$

当$n$足够大时，$Y_n\sim N(0,1)$,$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

# 附表：常见分布的一些性质

| 离散型随机变量 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 名称 | 二项分布 | 泊松分布 | 几何分布 | 负二项分布 | 超几何分布 |
| 符号 | $B(n,p)$ | $P(\lambda)$ | $G(p)$ | $NB(r,p)$ | |
| 分布 | $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ | $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ | $(1-p)^{k-1}q$ | $C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ | $\frac{C_m^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ |
| 期望 | $np$ | $\lambda$ | $\frac{1}{p}$ | | $n\frac{M}{N}$ |
| 方差 | $np(1-p)$ | $\lambda$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | | |

| 连续型随机变量 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 名称 | 均匀分布 | 指数分布 | 正态分布 | 标准正态分布 | $\chi^2$ 分布 |
| 符号 | $U[a,b]$ | $E(\lambda)$ | $N(\mu,\sigma^2)$ | $N(0,1)$ | $\chi^2(n)$ |
| 密度函数 | $\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b \\ 0 \quad ,\text{其他}\end{cases}$ | $\begin{cases}0 \quad ,x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x>0\end{cases}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ | |
| 期望 | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\mu$ | 0 | $n$ |
| 方差 | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\sigma^2$ | 1 | $2n$ |