Методы решения систем нелинейных уравнений

Постановка задачи

Для простоты ограничимся случаем двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$$

Решить систему – значит найти пару значений *(x, y)* обращающих уравнения системы в верные числовое равенства.

Большинство нелинейных уравнений и систем, встречающихся на практике, невозможно решить в явном виде. Более того, многие из тех задач, которые возможно решить аналитически, нередко гораздо быстрее и эффективнее решаются численными методами с требуемой точностью.

Этапы решения

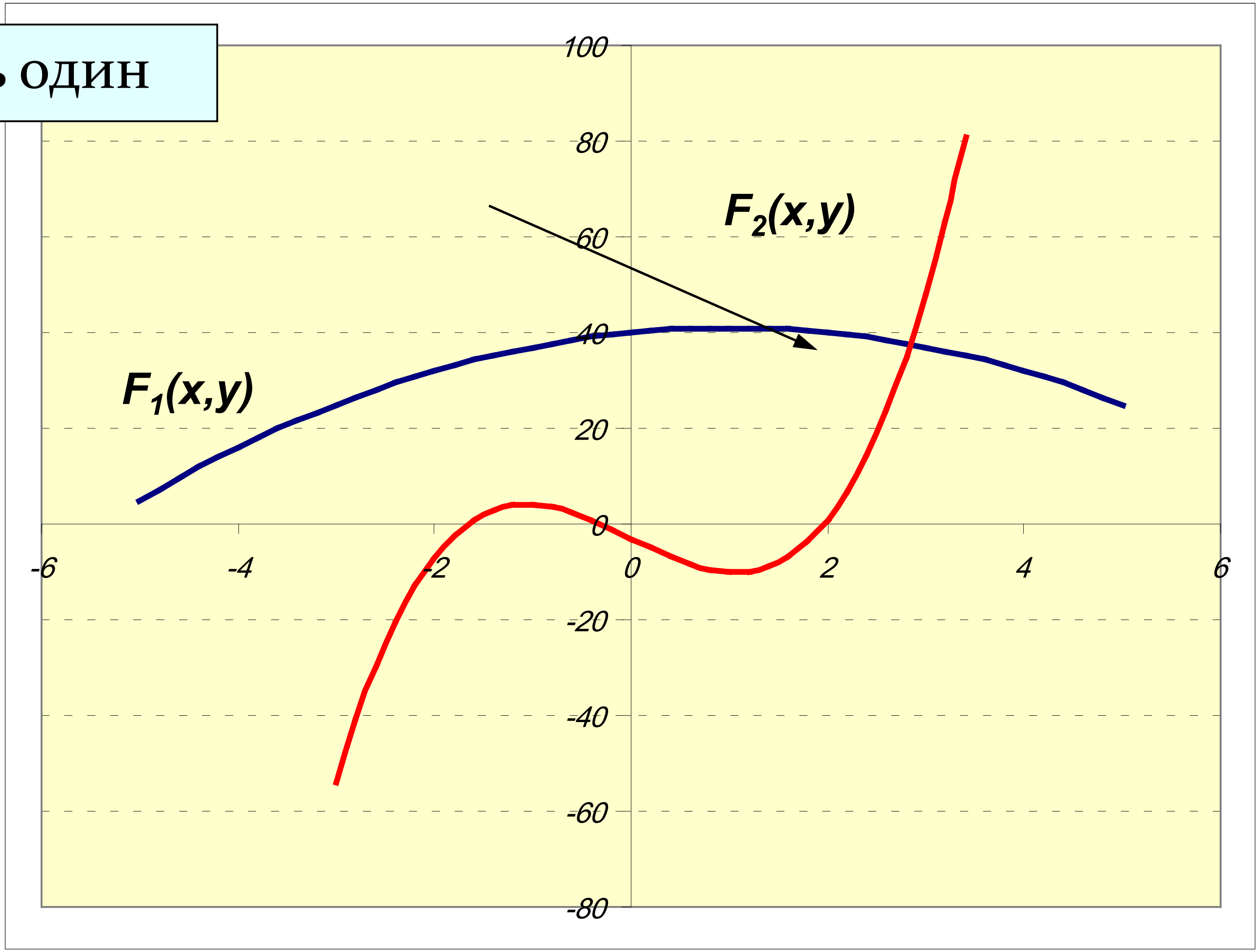
1. Исследование *существования* и *числа решений.* Вопрос о существовании решения в двумерном случае можно исследовать графически с сопутствующим анализом на монотонность, смену знака, выпуклость функции. Для этого на плоскости нужно изобразить графики уравнений *F1(x,y)* *и* *F2(x,y)*. Точки пересечения графиков и дадут множество решений системы. В общем же случае локализовать корни удается не всегда.

2. Предполагая, что система нелинейных уравнений имеет единственное вещественное решение на заданном интервале, выбираем *начальное приближение* (x_0, y_0) к решению.

3. Дальнейшее уточнение корня производится итерационными методами *с заданной точностью* (реализация возможна в различных программных продуктах).

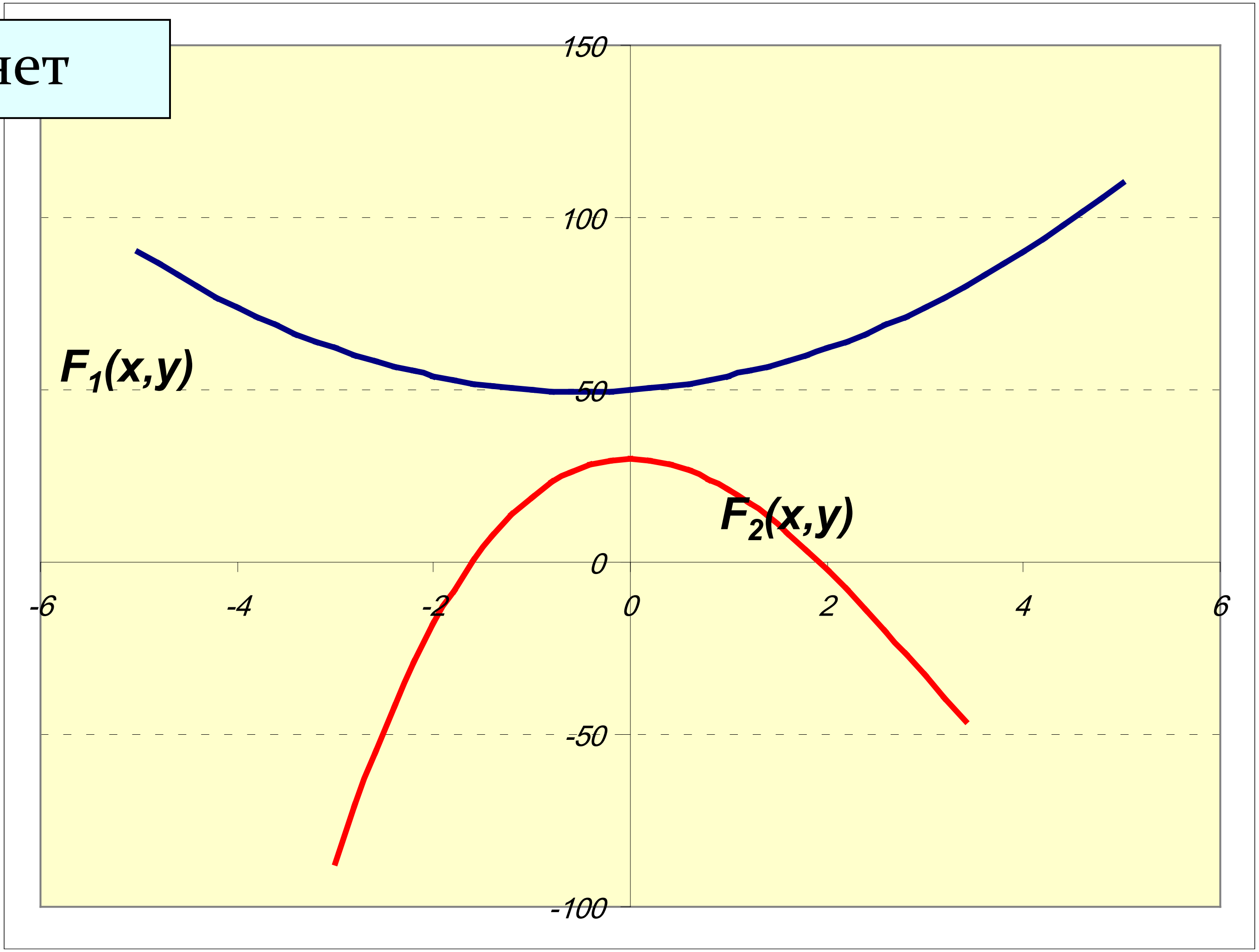
Существование и единственность решения.

корень один



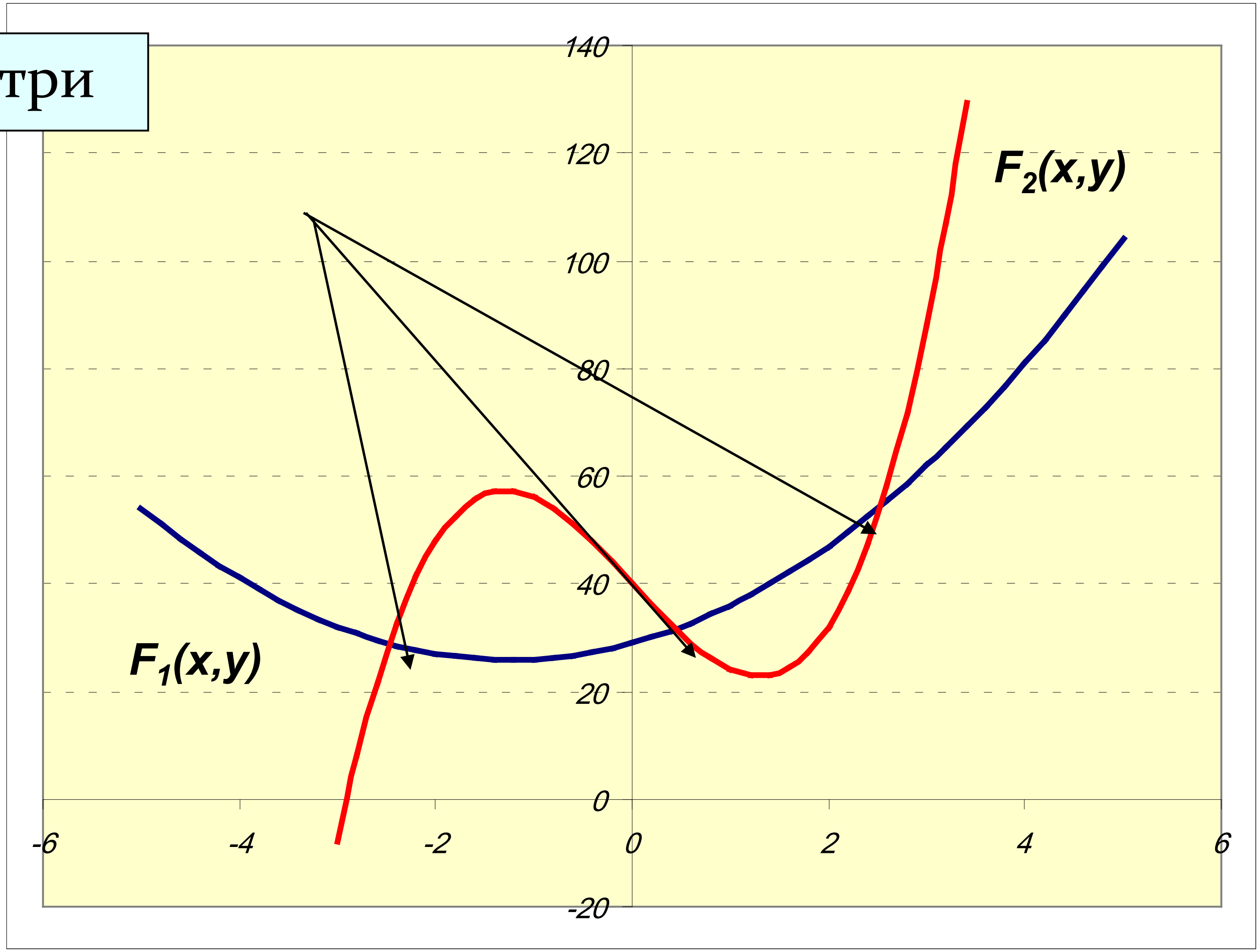
Существование и единственность решения.

корней нет



Существование и единственность решения.

корня три



Методы решения систем нелинейных уравнений

Для применения распространенных численных итерационных методов исходная система может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

Алгоритм поиска решения *методом простых итераций (методом Якоби)* задается формулами:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = \varphi_2(x_k, y_k) \end{cases}$$

Метод Гаусса - Зейделя

Алгоритм поиска решения *методом Гаусса – Зейделя* задается формулами

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = \varphi_2(x_{k+1}, y_k) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_{k+1} = \varphi_2(x_k, y_k), \\ x_{k+1} = \varphi_1(x_k, y_{k+1}) \end{cases}$$

Процесс вычисления заканчивается, когда

$$|x_n - x_{n+1}| \le \varepsilon \quad и \quad |y_n - y_{n+1}| \le \varepsilon$$

Сходимость метода простой итерации

Достаточное условие сходимости итераций:

$$\left\| I_\varphi \right\| < 1,$$

где I_φ - матрица Якоби функций $\varphi_i(x)$

$$I_\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

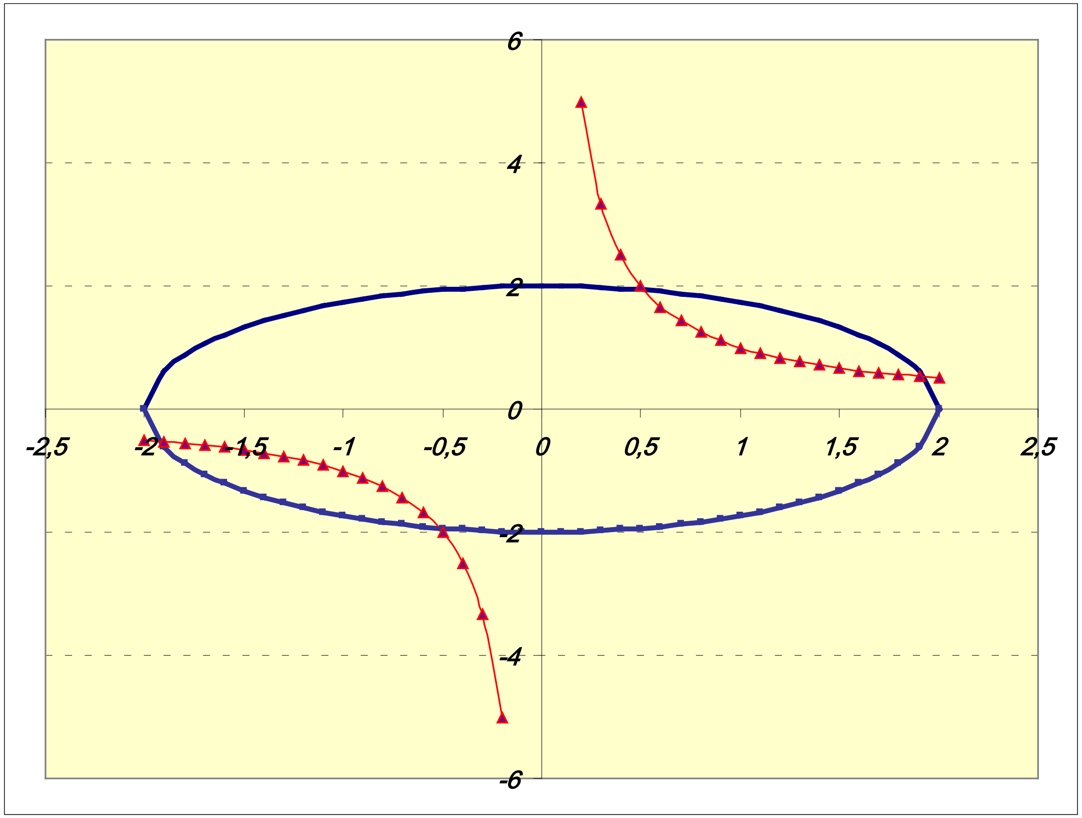
Для погрешности на каждой итерации справедливо следующее равенство: $\varepsilon^{k+1} = A_\varphi \varepsilon^k$.

Пример

Дана система

$$\begin{cases} y \cdot x = 1 \\ y^2 + x^2 = 4 \end{cases}$$

Построим графики этих уравнений для определения числа решений



Пример

Приведем систему к виду

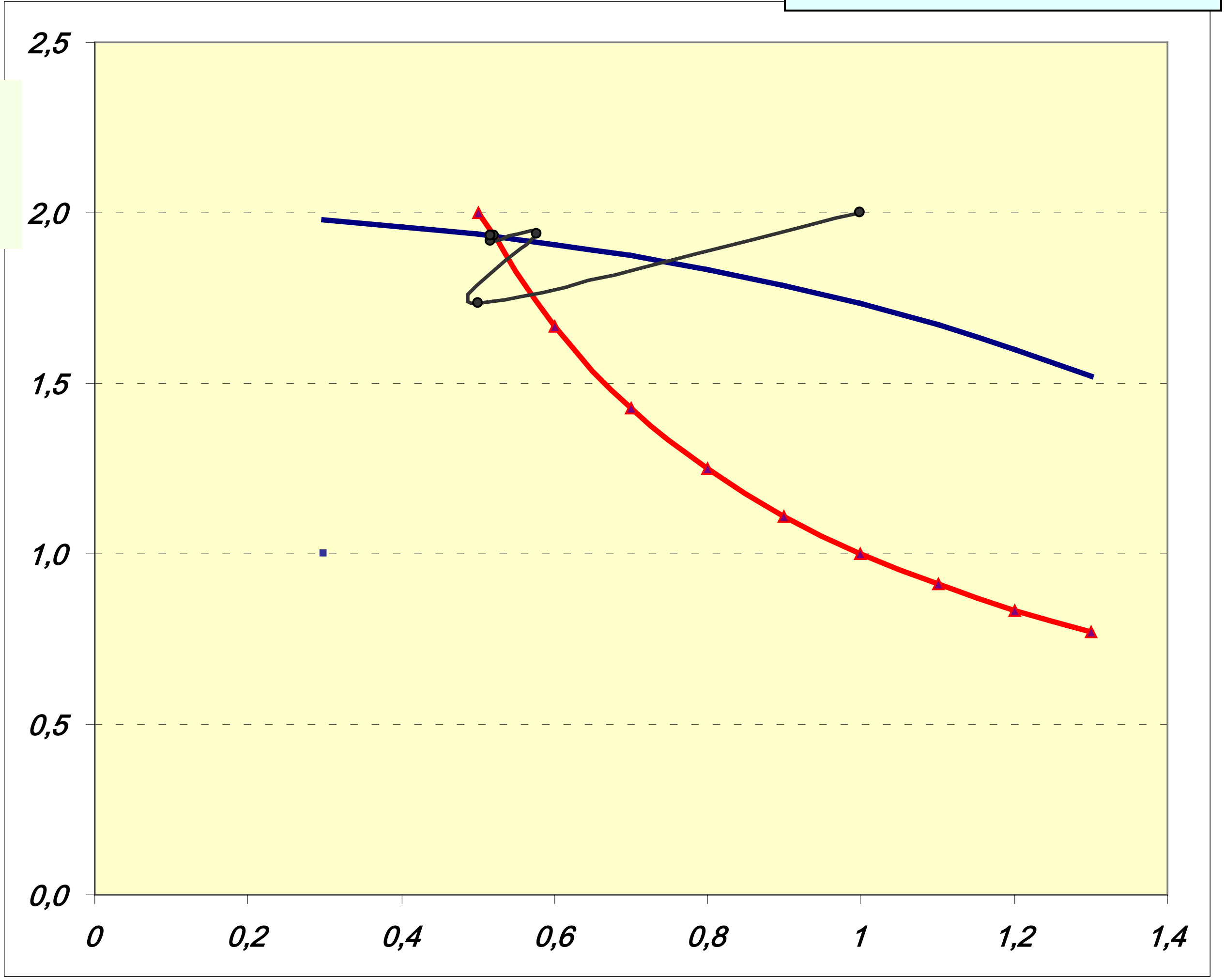
$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} = \varphi_1\left(x_{k-1}, y_{k-1}\right) \\ y_k = \sqrt{4 - x_{k-1}{}^2} = \varphi_2\left(x_{k-1}, y_{k-1}\right) \end{cases}$$

Пример

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} \\ y_k = \sqrt{4 - x_{k-1}^{\ 2}} \end{cases}$$

x0=1 y0=2

Сходимость к корню
x=0,52 y=1,93

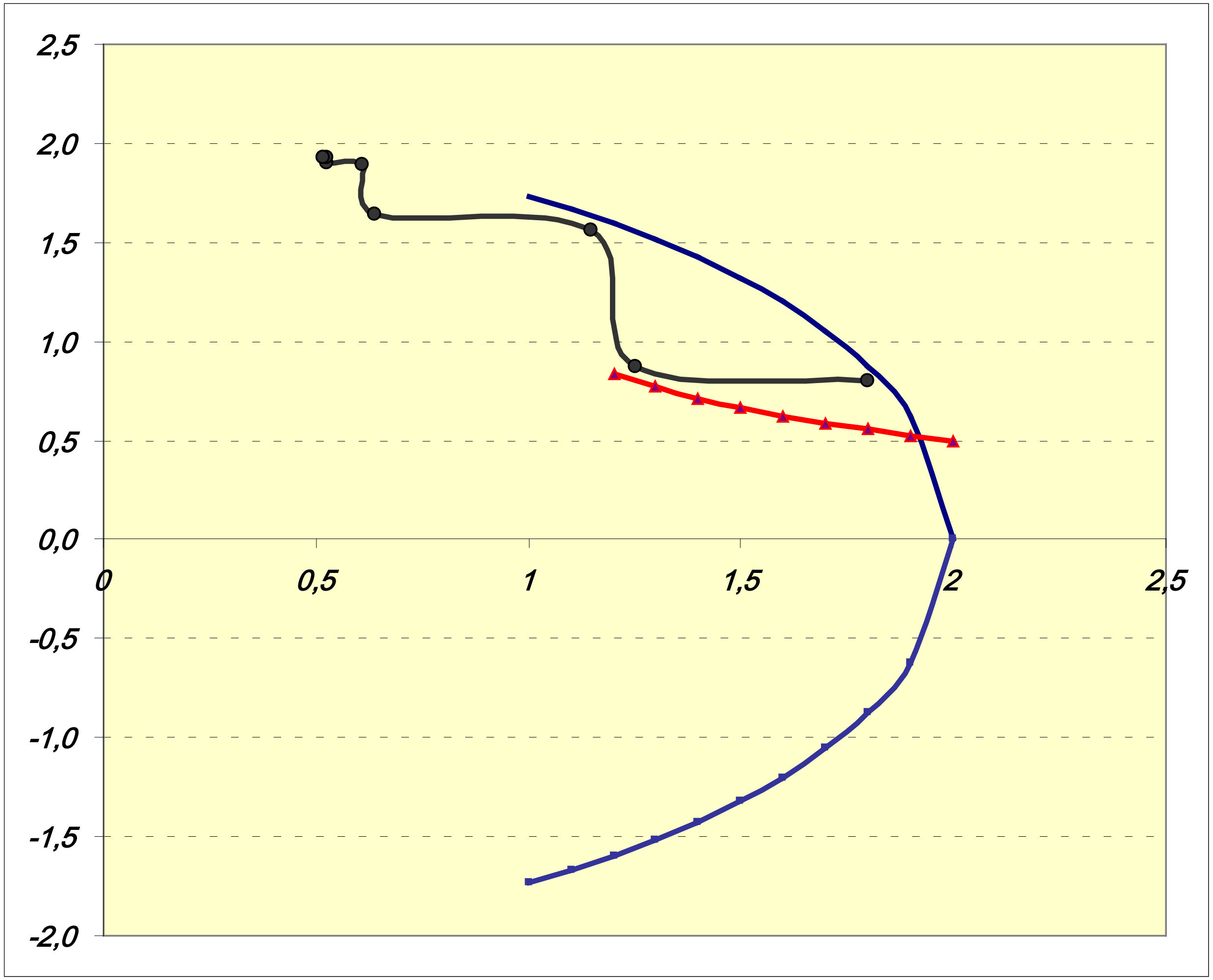


Пример

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} \\ y_k = \sqrt{4 - x_{k-1}^{\ 2}} \end{cases}$$

x0=1,8 y0=0,8

Сходимость к корню
x=0,52 y=1,93

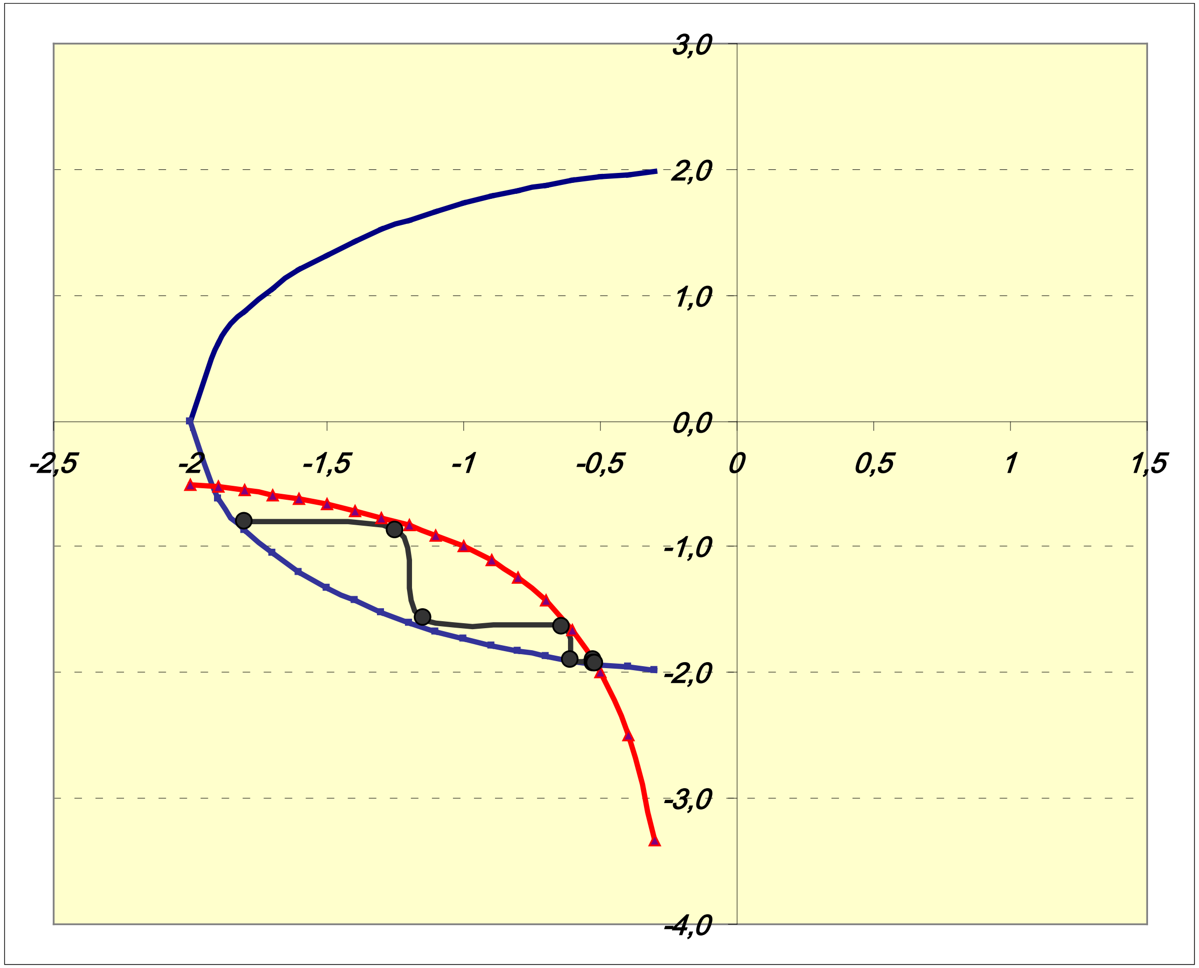


Пример

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{y_{k-1}} \\ y_k = x_{k-1}\sqrt{\dfrac{4}{{x_{k-1}}^2} - 1} \end{cases}$$

xo=-1,8 yo=-0,8

Сходимость к корню
x=-0,52 y=-1,93

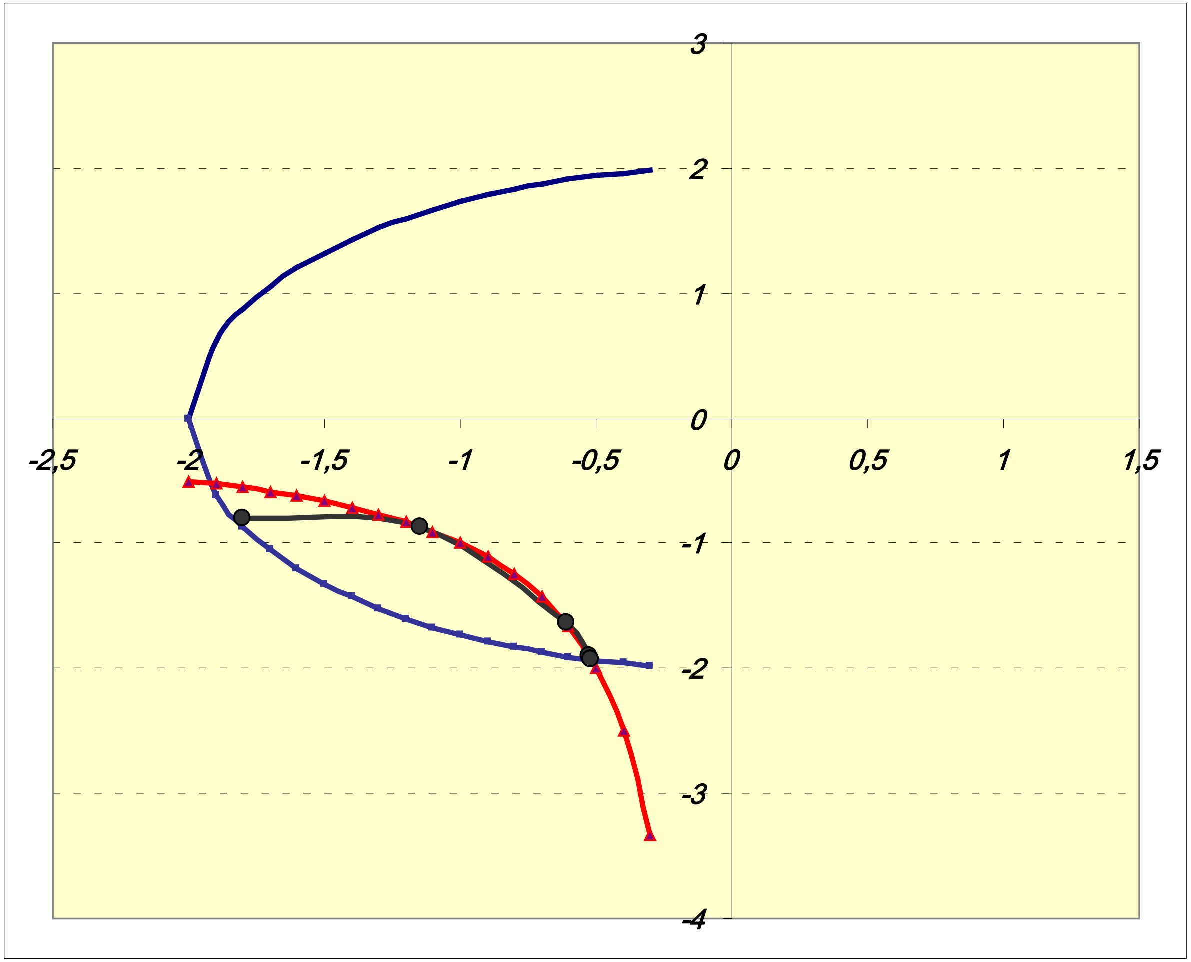


Пример

$$\begin{cases} y_k = x_{k-1}\sqrt{\dfrac{4}{x_{k-1}^{\ 2}} - 1} \\ x_k = \dfrac{1}{y_k} \end{cases}$$

x0=-1,8   y0=-0,8

Сходимость к корню
x=-0,52   y=-1,93



Метод Ньютона

Метод Ньютона для решения систем - точный аналог одномерного метода Ньютона (одношагового метода, в котором на каждой итерации требуется используется вычислять производную).

В многомерном случае необходимо уметь вычислять *градиенты* всех функций системы.

Запишем систему двух уравнений с двумя неизвестными в векторной форме:

$$F(\vec{z}) = 0$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} - вектор - функция$$

Метод Ньютона

Обобщим *формулу Ньютона* на многомерный случай:

$$\vec{z}^{(k+1)} = \vec{z}^{(k)} - \left[F'\left(\vec{z}^{(k)}\right)\right]^{-1} \cdot F\left(\vec{z}^{(k)}\right)$$

$$F'\left(\vec{z}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} - матрица\ \ Якоби\ \ вектор-функции$$

Пример (метод Ньютона)

$$\begin{cases} y \cdot x = 1 \\ y^2 + x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y \cdot x - 1 = 0 \\ y^2 + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Применим метод к исходной системе

$$F(\vec{z}) = \begin{pmatrix} y \cdot x - 1 \\ y^2 + x^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$F'(\vec{z}) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\left[F'(\vec{z})\right]^{-1} = \frac{1}{2y^2 - 2x^2} \begin{pmatrix} 2y & -x \\ -2x & y \end{pmatrix}$$

Пример (метод Ньютона)

Окончательно получим итерационную схему

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x - \dfrac{2y(xy-1) - x\left(x^2+y^2-4\right)}{2y^2-2x^2} \\ y - \dfrac{-2x(xy-1) + y\left(x^2+y^2-4\right)}{2y^2-2x^2} \end{pmatrix}$$