Численное интегрирование и дифференцирование

Тема 5

Погрешность квадратурных формул.

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности.

Приближенное вычисление определенного интеграла основано на замене интеграла конечной суммой по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k),$$

называемой ***квадратурной формулой***,

где

C_k - ***коэффициенты*** *(или веса) квадратурной формулы,*

x_k- ***узлы*** *квадратурной формулы* (точки отрезка интегрирования).

Квадратурные формулы ***интерполяционного типа*** (***формулы Ньютона-Котеса***) получают заменой подынтегральной функции *f(x)* на *[a,b]* *интерполяционным многочленом* $P_m(x)$ с узлами интерполяции в точках $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ (узлах) и последующим интегрированием для получения коэффициентов(весов) формул:

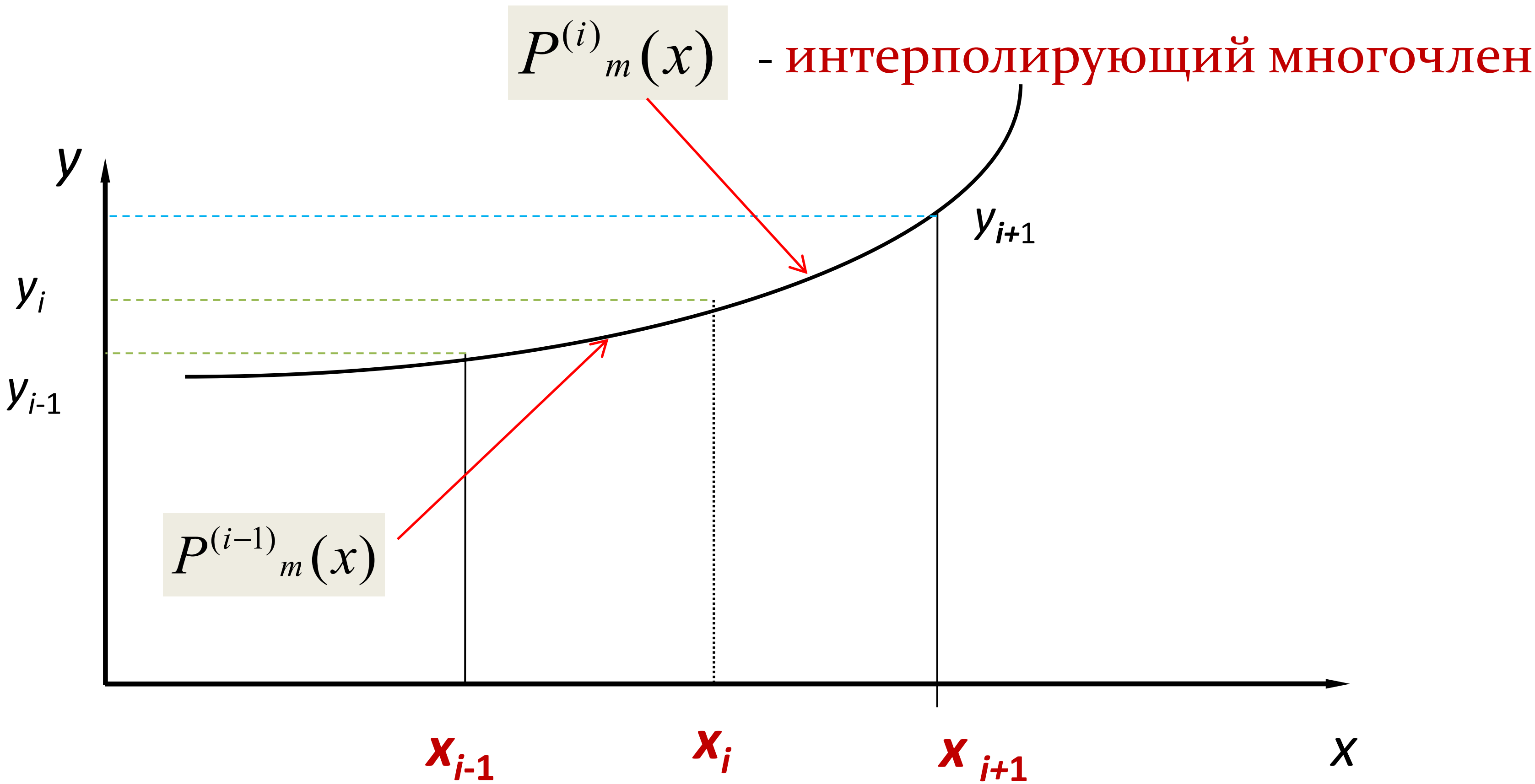
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx$$

Простейшие ***составные квадратурные формулы*** получаются при разбиении области интегрирования $[a,b]$ на ***n*** ***равных частей*** длиною ***h=(b-a)/n*** и замене подынтегральной функции на каждой части ***интерполяционным многочленом*** невысокой степени ***m***:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P^{(i)}{}_m(x)dx$$

Увеличение числа отрезков разбиения ***n*** ведет к увеличению точности замены.

Квадратурные формулы интерполяционного типа



Замена функции на *элементарных отрезках* разбиения *полиномами нулевой, первой и второй степени* (***m=0,1,2***) позволяет получить соответственно следующие формулы численного интегрирования:

- ✓ методы прямоугольников;
- ✓ метод трапеций;
- ✓ метод Симпсона (парабол).

Очевидно, что во всех случаях замена функции $f(x)$ интерполирующим полиномом приводит к образованию ***погрешности вычисления значения интеграла***.

Разность $R_n(f)$ между точным значением и приближенным значением интеграла, вычисленным по квадратурной формуле, называется *погрешностью квадратурной формулы:*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k) + R_n(f)$$

Для *элементарных отрезков разбиения* погрешность квадратурных формул ***Ньютона-Котеса*** для различных степеней ***m*** на можно найти из равенства:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_m(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} r_m^{(интерп)}(x)dx$$

Для элементарных квадратурных формул степени ***m*** остаточный член можно получить интегрированием погрешности интерполяционного многочлена $P_{m,i}(x)$:

$$R_{m,i}=\int_{x_i}^{x_{i+1}} r_m^{(\text{интерп})}(x)dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega_{m+1}(x)dx$$

Оценка погрешности формулы:

$$\left|R_{m,i}\right|\le\frac{\max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\omega_{m+1}(x)dx$$

Используем формулу Тейлора для функции *f(x)*, тогда *остаточный член квадратурной формулы* совпадает с погрешностью интегрирования остаточного члена формулы Тейлора:

$$R_{m,i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_i)^{m+1}dx = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\cdot\frac{(x-x_i)^{m+2}}{m+2}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+2)!}\cdot(x_{i+1}-x_i)^{m+2} = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+2)!}\cdot h^{m+2},$$

где *h* – длины *элементарных отрезков*, *ξ* - некоторая точка отрезка.

Справедлива следующая *априорная оценка погрешности интегрирования* для *элементарных отрезков* длиною h:

$$\left|R_{m,i}\right| \le \frac{\max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f^{(m+1)}(x)}{(m+2)!} \cdot h^{m+2}$$

или

$$R_{m,i} = O(h^{m+2}).$$

Погрешности составных *квадратурных формул* равны сумме погрешностей соответствующих формул для *элементарных отрезков* и по теореме о среднем:

$$R_n(f) = \sum_{k=1}^{n} R_{m,i}$$

$$R_n(f)=\sum_{k=1}^{n} R_{m,i} \le \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} f^{(m+1)}(x)}{(m+2)!}\sum_{k=1}^{n} h^{m+2} =$$

$$= \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} f^{(m+1)}(x)}{(m+2)!}\cdot n\cdot h^{m+2} = \max_{x\in[a,b]} f^{(m+1)}(x)\frac{(b-a)}{(m+2)!}\cdot h^{m+1},$$

$$R_n(f)=O\left(h^{m+1}\right)$$

Из оценки видно, что даже *составная формула левых и правых прямоугольников* (***m=0***) имеет погрешность порядка ***O(h)***, погрешность других формулы имеет более высокий порядок.

Формула средних прямоугольников и формула трапеций

$$I^{(средн.прям.)} = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{h}{2} + kh\right),$$

$$R_N(f) = h^2 \frac{b-a}{24} f^{II}(\xi), \quad \xi \in [a,b],$$

$$I^{(трап.)} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh) + f(b) \right],$$

$$R_N(f) = -h^2 \frac{b-a}{12} f^{II}(\xi_1), \quad \xi_1 \in [a,b]$$

Знак оценки погрешности формулы трапеций противоположен знаку оценки погрешности формулы средних прямоугольников.

Разность значений, полученных по формулам прямоугольников и трапеций, можно использовать для оценки погрешности каждой из них.

Формула парабол(Симпсона)

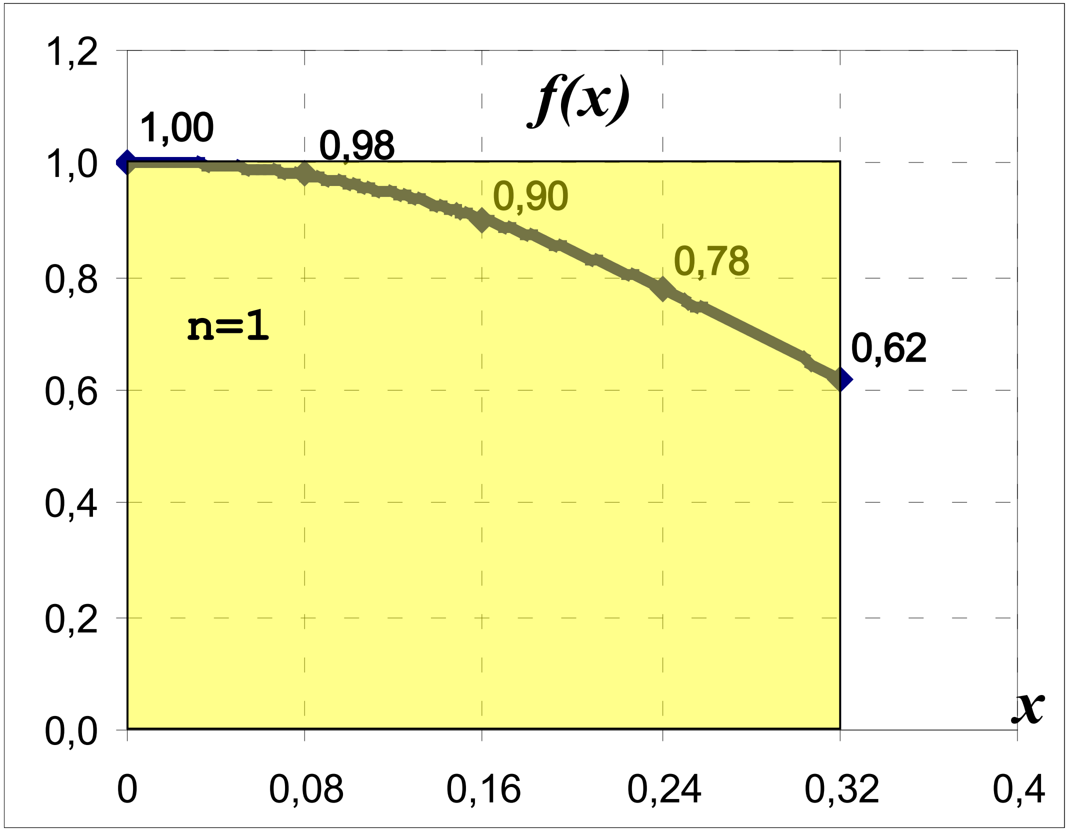
$$I^{(параб.)} = \int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f(a+(k+0.5)h) + f(b) \right),$$

$$R_N(f) = -h^4 \frac{b-a}{2880} f^{IV}(\xi_2), \qquad \xi_2 \in [a,b].$$

Выражение для остаточного члена показывает, что *алгебраический порядок точности* формулы Симпсона равен <u>трем</u>. Формула позволяет получить высокую точность, если четвертая производная не слишком велика.

Оценка точности интегрирования



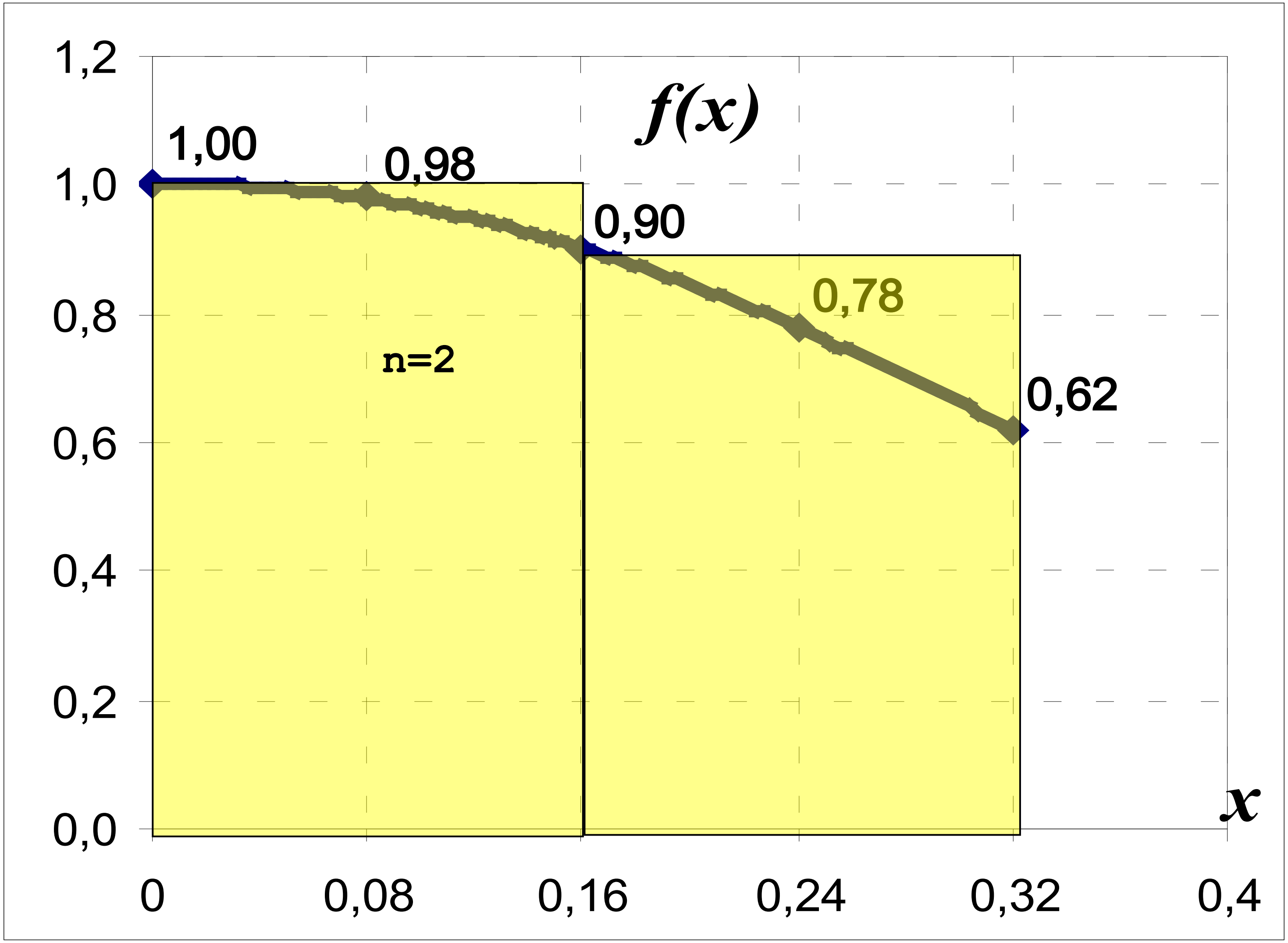
точное значение

$$\int_0^{0,32} f(x)\,dx = \mathbf{0{,}278967}$$

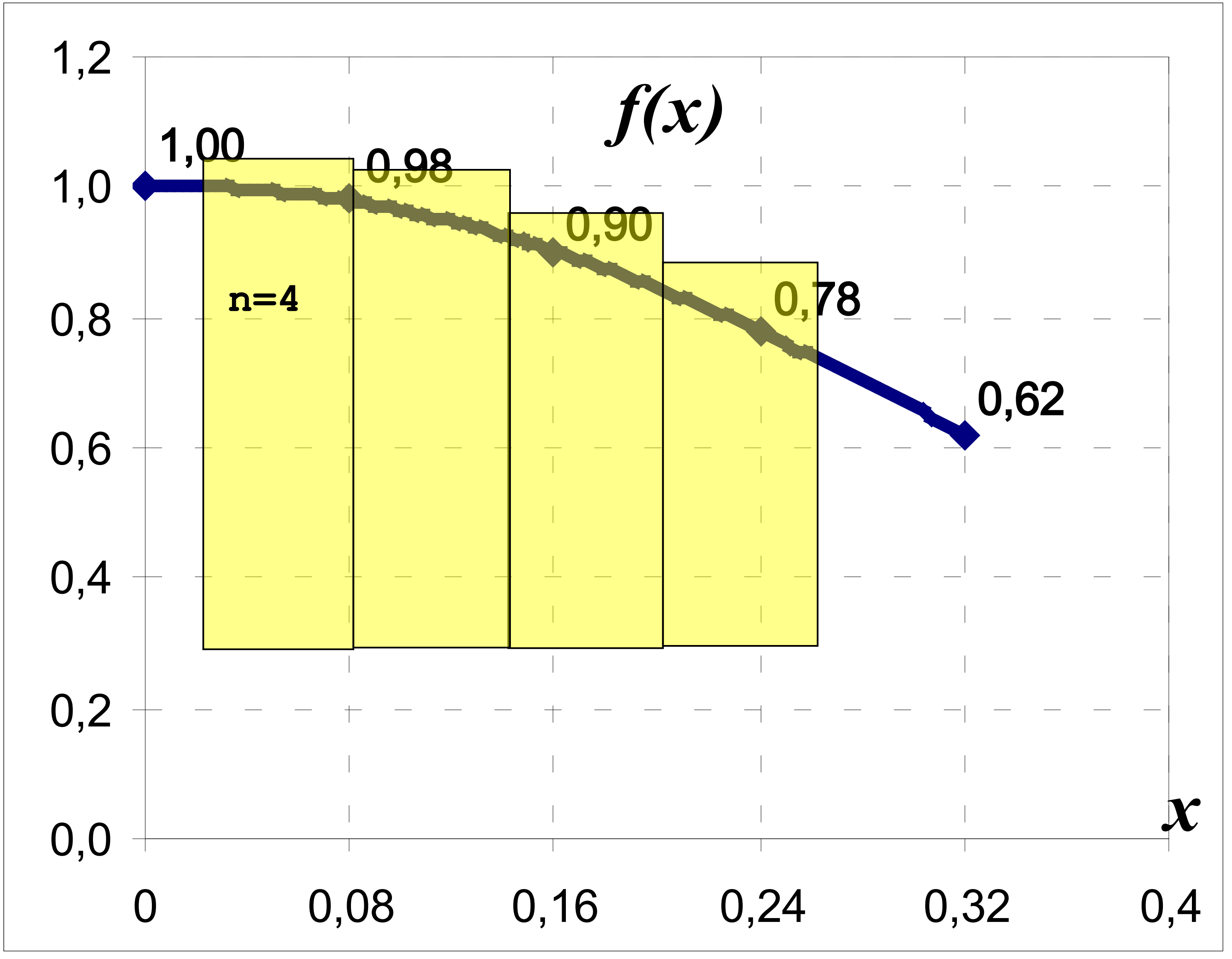
n – *количество интервалов*

I_n – *значение интеграла при данном разбиении*

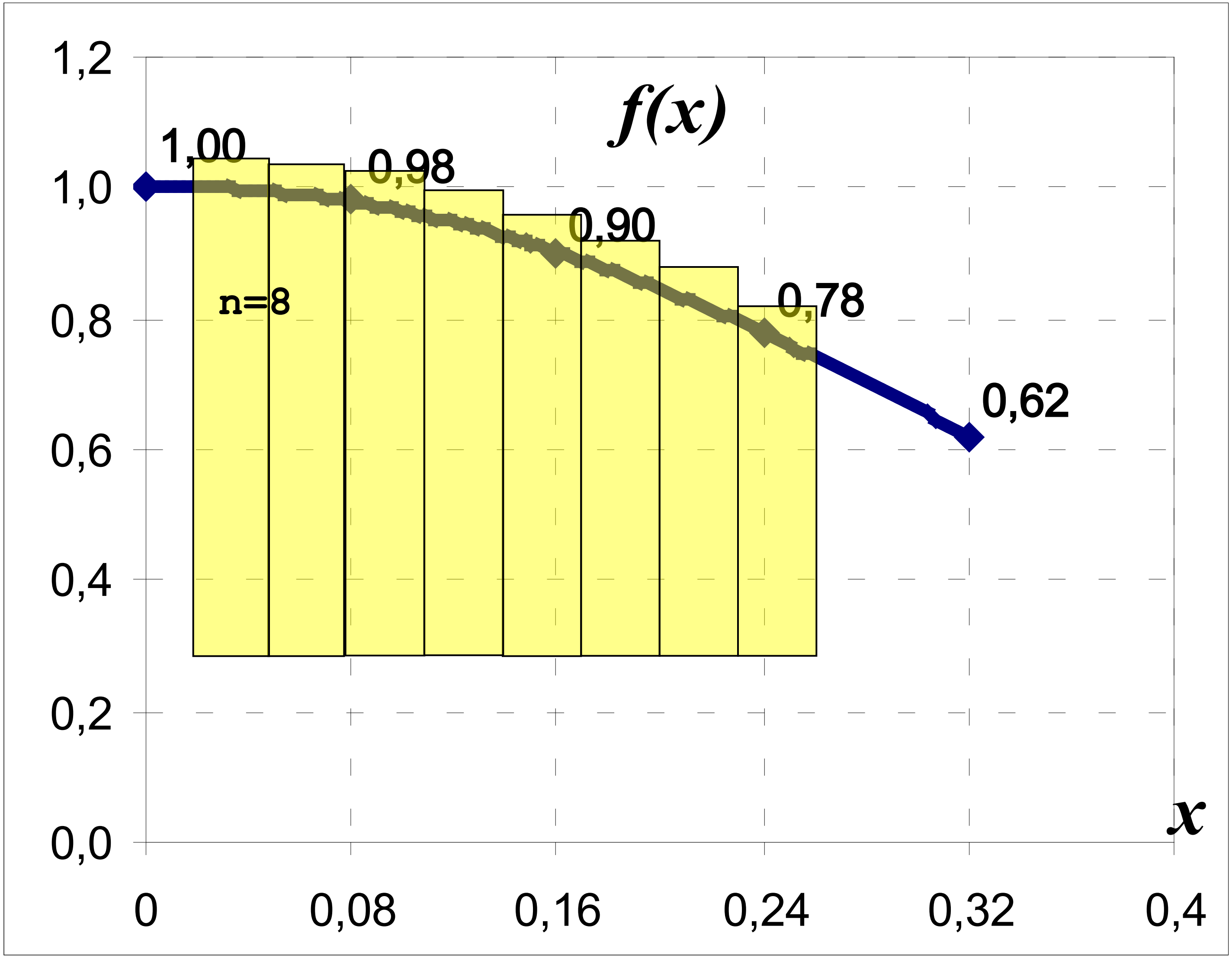
$$\varepsilon = \left| \frac{I_{n+1} - I_n}{I_{n+1}} \right| \qquad \varepsilon_{точн} = \left| \frac{I_{точн} - I_n}{I_{точн}} \right|$$



1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
f(x)
1,00
0,98
0,90
0,78
0,62
n=2
x
0
0,08
0,16
0,24
0,32
0,4



f(x)
1,00
0,98
0,90
0,78
0,62
n=4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
0
0,08
0,16
0,24
0,32
0,4
x

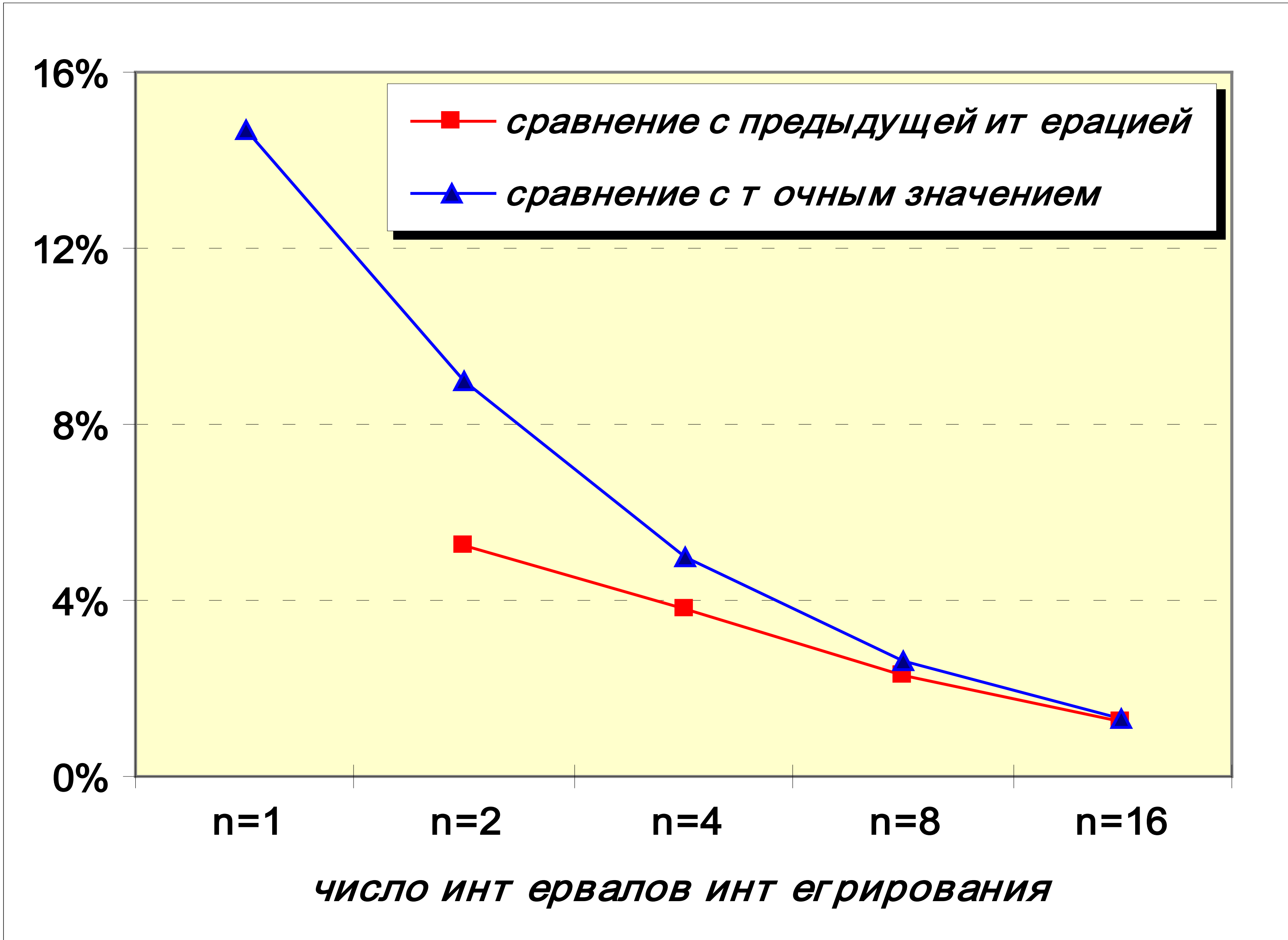


f(x)
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
1,00
0,98
0,90
0,78
0,62
n=8
0
0,08
0,16
0,24
0,32
0,4
x

Погрешность интегрирования

	количество интервалов разбиения				
	n=1	**n=2**	**n=4**	**n=8**	**n=16**
Значение I_n	**0,320**	**0,304**	**0,293**	**0,286**	**0,283**
ε		**0,0526**	**0,038**	**0,023**	**0,013**
$\varepsilon_{точн}$	**0,147**	**0,090**	**0,050**	**0,026**	**0,013**

Погрешность интегрирования



Методы наивысшей алгебраической точности

Методы наивысшей алгебраической точности (формулы Гаусса).

В квадратурной формуле Гаусса ***узлы*** и ***коэффициенты*** подобраны так, чтобы формула была точна для всех многочленов степени ***2m-1*** и имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{m} A_k f(x_k), \quad x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k$$

где t_k - корни многочленов Лежандра степени m .

Формулы Гаусса наивысшей алгебраической точности

n	t_k	A_k
1	$t_1 = 0$	$A_1 = 2$
2	$t_2 = - t_1 = 0.5773502692$	$A_1 = A_2 = 2$
3	$t_2 = 0$ $t_3 = - t_1 = 0.7745966692$	$A_2 = 8/9$ $A_1 = A_3 = 5/9$
4	$t_4 = - t_1 = 0.8611363116$ $t_3 = - t_2 = 0.3399810436$	$A_2 = A_3 = 0.6521451549$ $A_1 = A_4 = 0.3478548451$
5	$t_3 = 0$ $t_5 = - t_1 = 0.9061798459$ $t_4 = - t_2 = 0.5384693101$	$A_3 = 0.5688888899$ $A_2 = A_4 = 0.4786286705$ $A_1 = A_4 = 0.2369268851$
6	$t_6 = - t_1 = 0.9324695142$ $t_5 = - t_2 = 0.6612093865$ $t_4 = - t_3 = 0.2386191861$	$A_1 = A_6 = 0.1713244924$ $A_2 = A_5 = 0.3607615730$ $A_3 = A_4 = 0.4679139346$

Формулы Гаусса

Формулами Гаусса называются интерполяционные квадратурные формулы, имеющие максимальную алгебраическую степень для данного числа узлов. Формула Гаусса с K узлами имеет степень $2K-1$ и порядок $2K$. Формулы Гаусса обычно приводят для стандартного отрезка $[-1,1]$:

Число узлов, K	Узлы x_k	Веса w_k	$E[f]$
1	0	1	$\frac{f''(\zeta)(b-a)^3}{24}$
2	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1/2	$\frac{f^{IV}(\zeta)(b-a)^5}{4320}$
3	0 $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$	4/9 5/18	$\frac{f^{VI}(\zeta)(b-a)^7}{2016000}$

Простейшая формула Гаусса совпадает с формулой средней точки. Узлы формул Гаусса не содержат крайних точек отрезка интегрирования.

Формулы Гаусса наивысшей алгебраической точности

Если подынтегральная функция достаточно гладкая, то ***квадратурная формула Гаусса*** обеспечивает очень высокую точность при небольшом числе узлов, так как для погрешности формулы Гаусса справедлива оценка

$$R_n(f) = \frac{b-a}{2.5\sqrt{n}}\left(\frac{b-a}{3n}\right)^{2n} f^{(2n)}(\xi), \qquad \xi \in [a,b]$$

Вычисление интеграла с заданной точностью

Вычисление интеграла с заданной точностью по приведенным квадратурным формулам требует либо предварительного (***априорной оценки)*** определения числа частичных интервалов ***n*** (или величины шага интегрирования **h**, что равносильно), либо возможности оценки достигнутой точности (***апостериорной оценкой***) при произвольном числе разбиений отрезка.

Определение шага на основании ***априорной оценки*** погрешности интегрирования часто оказывается невозможным из-за трудностей определения максимума производных подынтегральной функции.

Метод двойного просчета (правило Рунге)

На практике применяют апостериорные оценки погрешности интегрирования по ***правилу Рунге***.

Для этого априорные оценки погрешностей квадратурных формул записывают, выделив явно главную часть погрешности, в виде

$$R(f) = Ah^{p} + O(h^{p+1})$$

где *A*- коэффициент, зависящий от метода интегрирования и вида подынтегральной функции, **p** - порядок метода.

Метод двойного просчета (правило Рунге)

Вычисляют интеграл <u>по одной и той же</u> формуле

<u>дважды</u> :

- с шагом h и

- с шагом kh (обычно k=2):

$$I = I_h + Ah^p + O(h^{p+1}),$$

$$I = I_{kh} + A(kh)^p + O((kh)^{p+1})$$

Метод двойного просчета (правило Рунге)

Приравнивают правые части соотношений и определяют главную часть погрешности по **первой формуле Рунге:**

$$Ah^p = \frac{I_h - I_{kh}}{k^p - 1}$$

Метод двойного просчета (правило Рунге)

Это - *апостериорная оценка погрешности*, и согласно ей ошибка более точного приближения примерно в ***k^p-1*** раз меньше разности между двумя приближениями. *Уточненное* значение интеграла определяется по ***второй формуле Рунге:***

$$I_h^T = I_h + \frac{I_h - I_{kh}}{k^p - 1}$$

Метод двойного просчета (правило Рунге)

Возможность ***<u>апостериорно</u>*** оценить погрешность позволяет вычислять интеграл с заданной точностью путем *автоматического выбора шага* интегрирования. Если на каком-то частичном отрезке не выполняется неравенство

$$\left|\frac{I_{0.5h,i} - I_{h,i}}{2^p - 1}\right| \le \frac{\varepsilon h_i}{b-a}$$

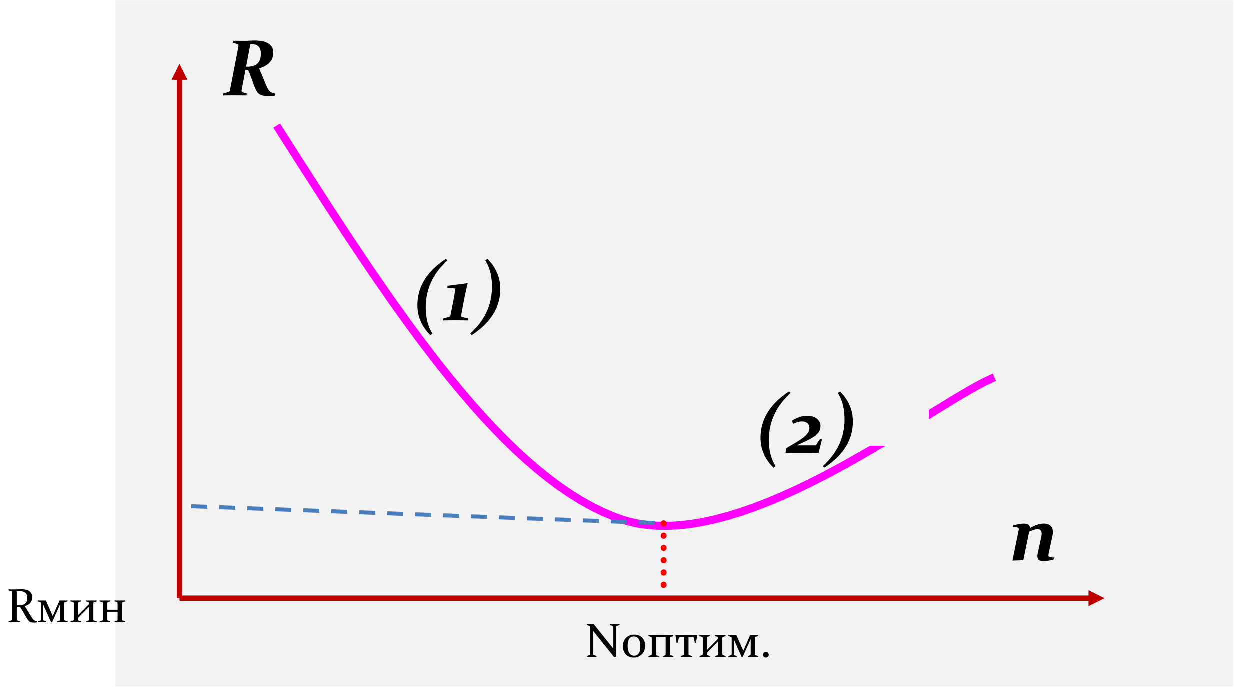
то шаг на этом отрезке надо **<u>уменьшить еще в два раза</u>** и снова оценить погрешность.

Погрешность квадратурных формул

Независимо от выбранного метода, *погрешность обобщенной квадратурной формулы* будет уменьшаться при увеличении числа разбиений ***n*** за счет более точной аппроксимации подынтегральной функции. Однако при этом будет возрастать вычислительная погрешность суммирования частичных интегралов, и, начиная с некоторого N_o, она станет преобладающей.

Метод двойного просчета (правило Рунге)

Это особенность должна предостеречь от выбора чрезмерно большого числа ***n*** и привлечь внимание к важности как *априорной*, так и *апостериорной* оценкам погрешности интегрирования.



Зависимость *погрешности численного интегрирования* от *числа разбиений* ***n*** *интервала интегрирования*