

# Введение в численные методы.

Обзор инструментальных программных  
средств.  
MATHEMATICA

Тема 1

# Система компьютерной алгебры

**Система компьютерной алгебры (СКА, *computer algebra system, CAS*)** — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме.

СКА появились в начале 1960-х и поэтапно развивались, в основном, в двух направлениях: теоретическая физика и создание искусственного интеллекта.

Одной из ранних программ является, используемая и поныне **FORM** (голландский институт субатомной физики).

Первым успешным примером СКА была **Schoonschip** - программа для символьных вычислений в физике высоких энергий (1963) - новаторская работа Велтмана (позднее удостоенная Нобелевской премии по физике)

Используя LISP, Карл Энгельман в 1964 создал **MATHLAB** в рамках проекта по исследованию искусственного интеллекта. **MATHLAB** («**math**ematical **lab**oratory») не стоит путать с **MATLAB** («**mat**rix **lab**oratory»), системой для численных расчётов, созданной 15 лет спустя (1979) в университете Нью-Мехико.


Начиная с конца 1960-х первое поколение СКА включало в себя системы:

- **MACSYMA** (Джоэл Мозес),
- **MATLAB** (Массачусетский технологический институт),
- **SCRATCHPAD** (Ричард Дженкс, IBM),
- **REDUCE** (Тони Хирн),
- **SAC-I**, позже **SACLIV** (Джорж Коллинз),
- **MUMATH** для микропроцессоров (Дэвид Стоутмайер) и его продолжатель
- **DERIVE**.

Эти системы были способны выполнять символьные вычисления: интегрирование, дифференцирование, факторизация

Ко второму поколению **систем компьютерной алгебры**, в котором стал применяться более современный **графический интерфейс пользователя**, относятся СКА:

- **Maple** (Кейт Геддес и Гастон Гоннет, университет Уотерлу, 1985 год)
- **Mathematica** (разработана в 1988 году Стивеном Вольфрамом, дальнейшим развитием системы занята основанная им совместно с Теодором Греем компания **Wolfram Research** ).



На сегодняшний день лидерами среди **систем компьютерной алгебры** являются **Mathematica** и **Maple** – мощные системы с собственными ядрами, оснащенные развитым пользовательским интерфейсом и обладающие разнообразными графическими и редакторскими возможностями.

Широкое распространение в настоящее время имеют и СКА: **Derive, Maxima, Axiom, Reduce, MuPAD, Mathcad, MATLAB.**


Ядром большинства современных систем компьютерной алгебры являются следующие три блока вычислений:

- **численные вычисления неограниченной точности** (так называемые безошибочные вычисления) с целыми, рациональными, вещественными и комплексными числами;
- собственно **алгебраические** (т.е. **символьные**) **вычисления с многочленами**, перестановками, векторами, матрицами;
  - **логические** и **структурные манипуляции с высказываниями**, последовательностями, списками, множествами.

Однако кроме этого при помощи систем компьютерной алгебры можно проводить все обычные в математике и ее приложениях **аналитические вычисления**:

- численное и символьное дифференцирование, интегрирование, решение дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных и тому подобное;
- доказательство несложных теорем, включая доказательство всех теорем из школьного курса геометрии;
- логическую обработку и преобразование текстов любой природы:
  - текстов на естественных языках,
  - шифров,
  - музыкальных текстов;



- 
- анализ и редактирование изображений, все геометрические и графические построения — вплоть до создания мультфильмов;
  - статистическую обработку численных, текстовых, логических и графических данных;
  - создание баз данных, электронных энциклопедий, интерактивных справочников, учебников и задачников по любой области знания;
  - математическое моделирование любых процессов, компьютерный эксперимент;
  - разработку, тестирование и анализ алгоритмов, компьютерных программ и прикладных пакетов
- и многое другое.

**Mathematica** – система компьютерной алгебры компании Wolfram Research является одним из наиболее мощных и широко применяемых интегрированных программных комплексов мультимедиа-технологии.

По удобству использования, продуманности интерфейса и встроенной помощи, унификации формата применяемых командных слов и конструкций, их предсказуемости и близости к реальному математическому английскому языку, **Mathematica** значительно удобнее всех других систем, включая Maple.

Принципиальными моментами, которые заставляют сделать выбор в пользу системы **Mathematica**, являются поддерживаемый ей более гибкий стиль программирования и более высокое качество графики.

Лингвистическую основу системы составляет **Wolfram** — интерпретируемый язык функционального программирования, позволяющий расширять её возможности, более того, система **Mathematica** в значительной степени написана на языке Wolfram, хотя некоторые функции, особенно относящиеся к линейной алгебре, в целях оптимизации реализованы на **Си**.

В СКА **Mathematica** используется традиционный интерфейс, поставляющийся с системой — **вычислительная записная книжка (интерактивный блокнот)**.

**Интерактивный блокнот** — подход к построению **пользовательского интерфейса интерактивной вычислительной среды**, объединяющий в одном окне **работу с кодом** (в том числе редактор с подсветкой синтаксиса), **исходными данными и результатом вычислений** и сформированной графикой — в едином редактируемом документе, называемом блокнотом **notebook**.

## Основные аналитические возможности Mathematica :

- решение систем полиномиальных и тригонометрических уравнений и неравенств , а также трансцендентных уравнений, сводящихся к ним;
- решение рекуррентных уравнений;
- упрощение выражений;
- нахождение пределов;
- интегрирование и дифференцирование функций;
- нахождение конечных и бесконечных сумм и произведений;

- решение дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
- преобразования Фурье и Лапласа, а также Z-преобразование;
- преобразование функции в ряд Тейлора, операции с рядами Тейлора: сложение, умножение, композиция, получение обратной функции;
- вейвлет-анализ.



Для запуска программы **Mathematica** необходимо щелкнуть иконку **Mathematica** в меню «Программы» или ярлык программы в месте его расположения.

При запуске программы на экране появляется главное окно (рис. 1.1).

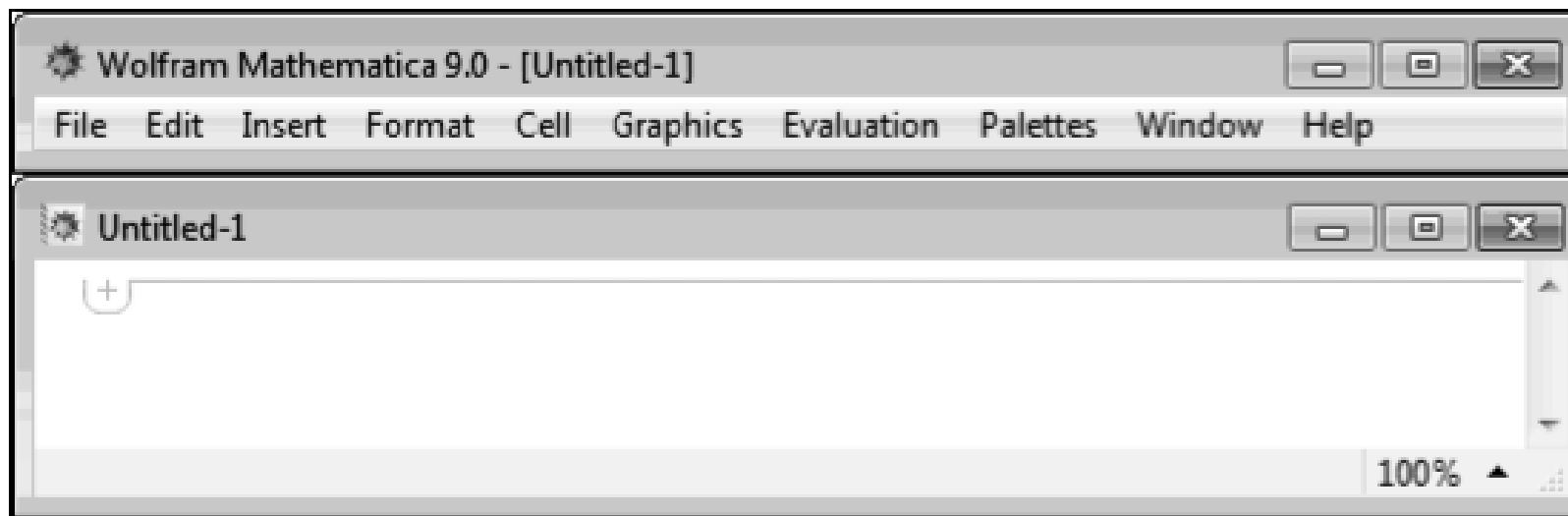



Рис. 1.1

Главное окно системы содержит строку заголовка, главное меню (File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window, Help) и большой экран редактирования (окно ввода).





**Mathematica** позволяет осуществлять ввод данных в окно ввода двумя способами: вручную с клавиатуры и с использованием так называемых палитр (*Palettes* – панели с кнопками быстрого управления). Они представляют собой окна, содержащие набор кнопок, за которыми закреплены определенные действия, и выпадающих списков (рис. 1.2). Палитры можно выводить на экран и убирать с экрана, создавать собственные палитры с требуемым набором функций.



В программе **Mathematica** все введенные в окно ввода данные содержатся в отдельных, определенным образом выделенных областях экрана, называемых *ячейками*. Введенные данные автоматически объединяются во входную ячейку, которая обозначается квадратной скобкой – ] в правой части окна ввода. Например, наберем  $3 + 7$  (рис. 1.3).

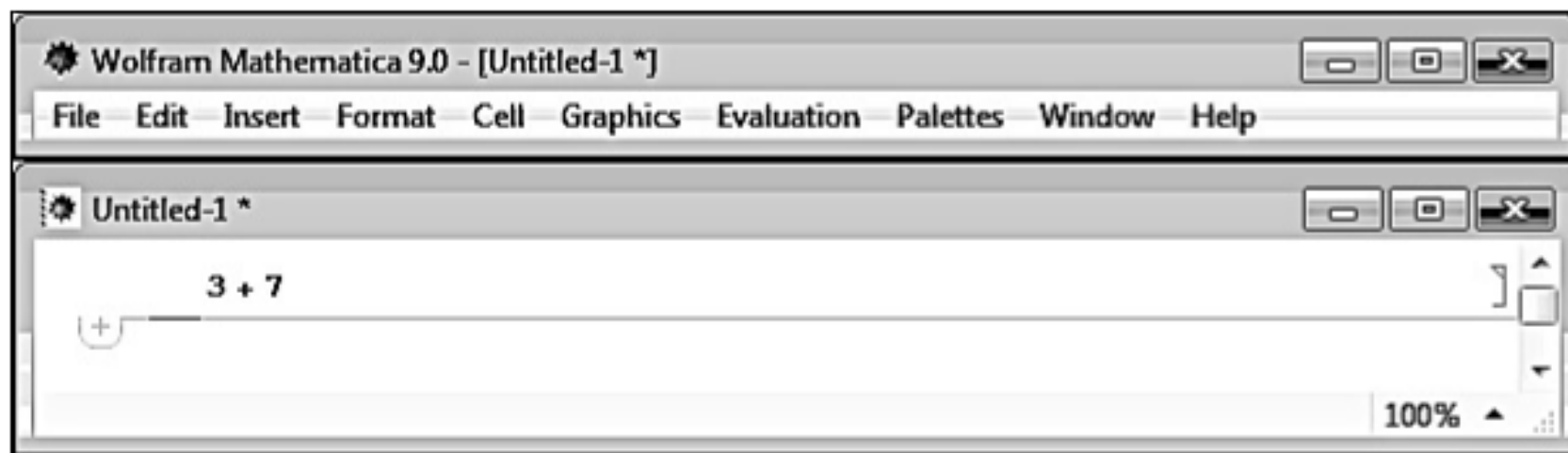


Рис. 1.3

Для получения результата поместим курсор в любой части ячейки и нажмем **Shift+Enter** (удерживая **Shift**, нажать **Enter**). Нажатие одной клавиши **Enter** приводит к созданию новой строки в той же ячейке.

Если введенные данные являются логически завершенными и не содержат синтаксических ошибок, программа **Mathematica** обрабатывает их и выдает результат. В противном случае указывается тип ошибки.

Результат  $3 + 7$  на рис. 1.4.

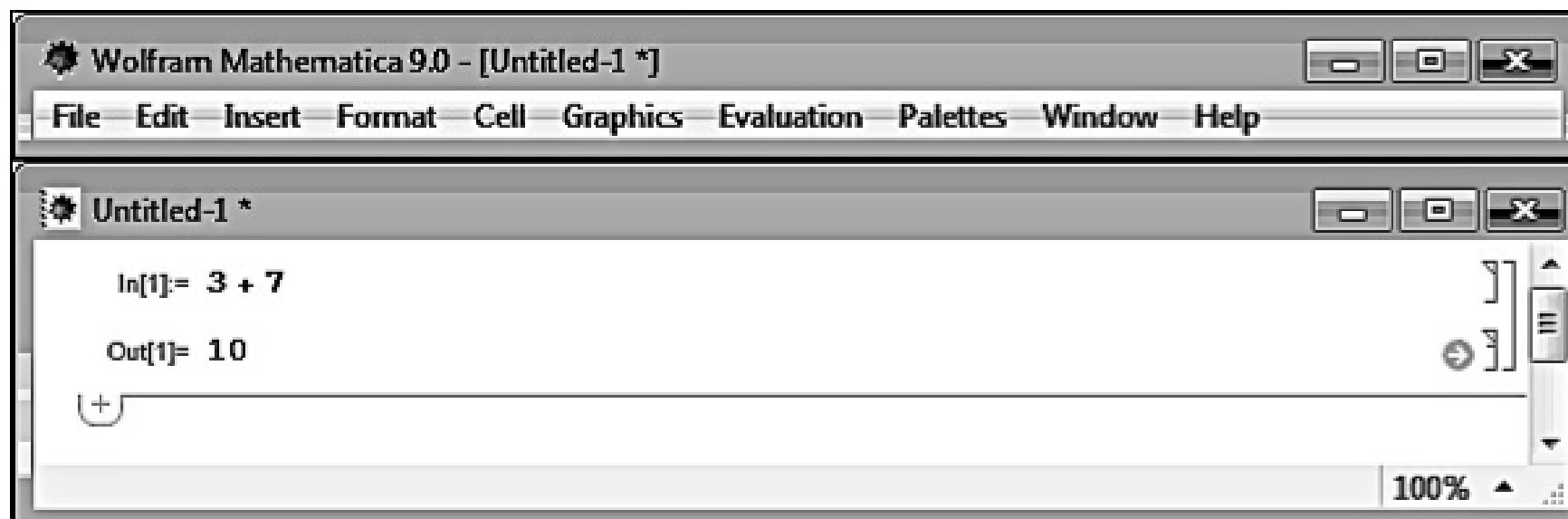


Рис. 1.4

На рис. 1.4 **Mathematica** добавляет к данным на экране метки:

- 1) **In[n]:=** – вводимые пользователем данные;
- 2) **Out[n]:=** – результат, выводимый программой **Mathematica**,

Входную и выходную ячейки окаймляют квадратные скобки, а вместе они ограничены общей квадратной скобкой – это значит, что сформирована группа ячеек.

Для окончания работы с пакетом **Mathematica** необходимо выбрать команду *Exit* в разделе **File** главного меню. Если требуется сохранить введенные данные, то появляется дополнительное окно, в котором можно определить имя сохраняемого документа. Этот файл можно открыть при следующем сеансе работы с программой **Mathematica**, выбрав в разделе **File** команду *Open*.

# Пример вычисления $(32+48)/11$ , $75^5$ , $75^{(-5)}$

```
In[25]:= (32 + 48) / 11
N[(32 + 48) / 11]
численное приближение
N[(32 + 48) / 11, 7]
численное приближение
N[(32 + 48) / 11, 16]
численное приближение
75^5
N[75^5, 3]
численное приближение
75^-5
N[75^-5]
численное приближение
80
Out[25]= 11
Out[26]= 7.27273
Out[27]= 7.272727
Out[28]= 7.272727272727273
Out[29]= 2 373 046 875
Out[30]=  $2.37 \times 10^9$ 
Out[31]=  $\frac{1}{2\,373\,046\,875}$ 
Out[32]=  $4.21399 \times 10^{-10}$ 
```

```
In[48]:= (32 + 48) / 11
N[(32 + 48) / 11]
численное приближение
IntegerPart[(32 + 48) / 11]
целая часть
FractionalPart[(32 + 48) / 11]
дробная часть
80
Out[48]= 11
Out[49]= 7.27273
Out[50]= 7
Out[51]=  $\frac{3}{11}$ 
In[56]:= Rationalize[7.2727272727272725` ]
найти рациональное приближение
80
Out[56]= 11
In[58]:= Rationalize[1.6666666666666667]
найти рациональное приближение
5
Out[58]= 3
```

# Работа с функциями:

```
In[66]:= f[x_] = x2 - 4 x + 4  
y = f[3]
```

```
In[69]:= y = f[1]
```

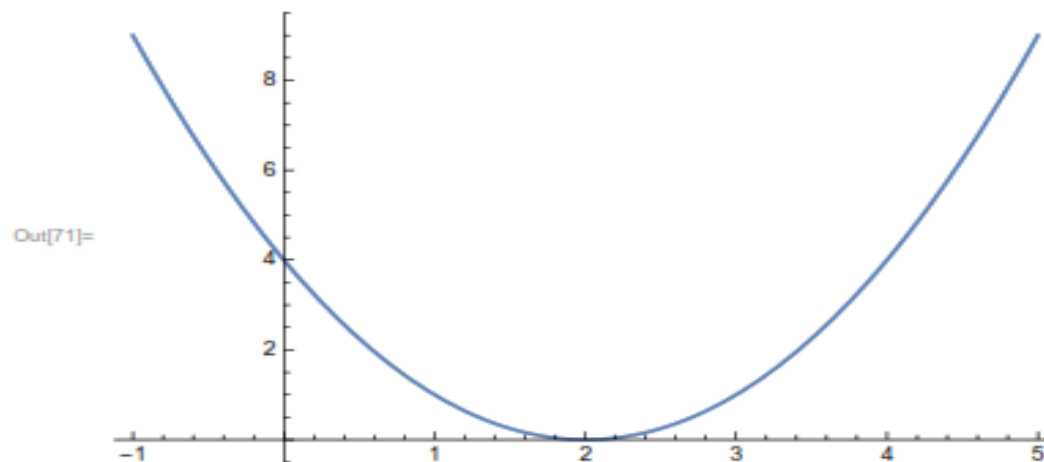
```
Out[69]= 1
```

```
In[68]:= Factor[f[x]]  
[факторизовать]
```

```
Out[68]= (-2 + x)2
```

```
In[70]:= Table[f[x], {x, -1, 5}]  
[таблица значений]  
Plot[f[x], {x, -1, 5}]  
[график функции]
```

```
Out[70]= {9, 4, 1, 0, 1, 4, 9}
```



# Работа с функциями:

```
In[80]:= f[x_] = (x + 1) (x^2 - 4 x + 4)
```

```
Out[80]:= (1 + x) (4 - 4 x + x^2)
```

```
In[74]:= y = f[1]
```

```
Out[74]:= 1
```

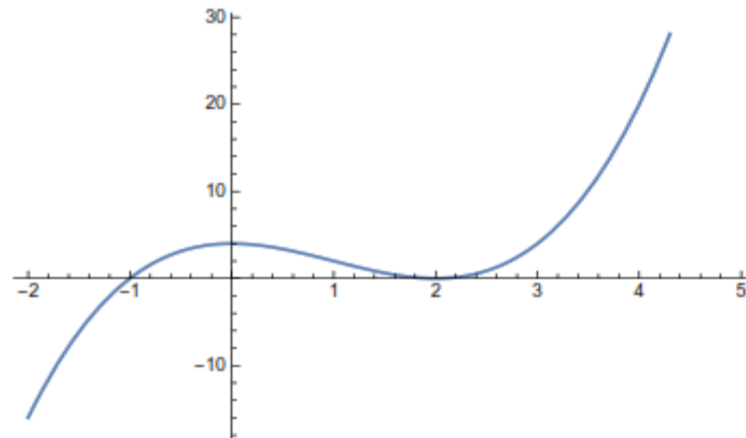
```
In[81]:= Expand[f[x]]  
[раскрыть скобки]
```

```
Out[81]:= 4 - 3 x^2 + x^3
```

```
In[88]:= Table[f[x], {x, -2, 4}]  
[таблица значений]  
Plot[f[x], {x, -2, 5}]  
[график функции]
```

```
Out[88]:= {-16, 0, 4, 2, 0, 4, 20}
```

```
Out[89]=
```









Проблема N 1 кибернетики:

**Каким местом человек думает?**

Проблема N 2 кибернетики:

**Как он это этим местом делает?**

А.Соловьев, 'Искусственный интеллект'