Аппроксимация функций

Тема 3

Погрешность интерполирования алгебраическими многочленами. Сплайны

Интерполирование функций алгебраическими многочленами

Функция $f(x)$ задана таблицей значений в некоторых точках отрезка $[a,b]$ - $\left(x_j, f(x_j)\right),\quad j = 0,1,2,\ldots,n$

Задачей интерполирования функции алгебраическими многочленами является построение многочлена

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

степени не выше *n*, значения которого *совпадают* со значениями функции в этих точках.

Эта задача имеет *единственное решение*, различаются формы записи интерполяционного многочлена. Наиболее часто применяют интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа :

$$L_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x-x_j)}{\prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x_k-x_j)} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot l_k(x), \qquad l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k\neq j \end{cases}$$

представляет многочлен в виде линейной комбинации значений функции в узлах с коэффициентами – многочленами степени n, зависящими только от узлов.

Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона может быть записан в двух формах:

для интерполирования в начале таблицы (вперед):

$$N_n^{(в)}(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \\ + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

и для интерполирования в конце таблицы (назад):

$$N_n^{(н)}(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + \\ + f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \\ + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

При их построении используются верхняя наклонная и нижняя наклонная строки в таблице разделенных разностей.

x_0	$f(x_0)$				
		$f(x_0,x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$		
		$f(x_1,x_2)$		…	
x_2	$f(x_2)$		…		$f(x_0,x_1,\dots,x_n)$
		…		…	
…	…		$f(x_{n-1},x_{n-1},x_n)$		
…	…	$f(x_{n-1},x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

Интерполяционный многочлен Ньютона

Разделенными разностями первого порядка называются отношения

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

....

$$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

По этим разделенным разностям первого порядка можно построить *разделенные разности второго порядка.*

Интерполяционный многочлен Ньютона

Разделенные разности второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$

$$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Разделенные разности более высокого *(k+1)*-го порядка вычисляются по уже известным разностям порядка *k по формулам*:

$$f(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}, x_{j+k+1}) =$$

$$= \frac{f(x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+k+1}) - f(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}$$

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Погрешность замены функции интерполяционным многочленом (погрешность интерполирования) определяется разностью

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

и зависит от многих факторов - свойств интерполируемой функции, количества и расположения узлов на отрезке, положения точки x относительно узлов. Представим погрешность в виде:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x) \cdot r_n(x)$$

где

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

зависит только от количества и расположения узлов, а $r_n(x)$ - от свойств функции.

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Погрешность интерполирования функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равна:

$$R_n(x) = r_n(x)\cdot\omega(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \qquad a<\xi<b,$$

и оценивается на отрезке интерполирования неравенством

$$\left|R_n(x\right| = \left|f(x)-P_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

где

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Такая оценка называется ***априорной оценкой*** *погрешности интерполирования.*

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Если узлы x_k расположены равномерно с шагом h на отрезке $[a,b]$, то локальные максимумы $|\omega(x)|$ на интервалах $[x_k, x_{k+1}]$ увеличиваются по мере продвижения от центрального интервала к крайним и наименьшая погрешность аппроксимации будет в интервалах, примыкающих к центральному узлу, за счет минимальной величины произведения в правой части оценки.

В *центральном интервале* (при четном количестве узлов) получена следующая оценка погрешности:

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| < \sqrt{2 / n\pi} \quad M_{n+1} (h/2)^{n+1}$$

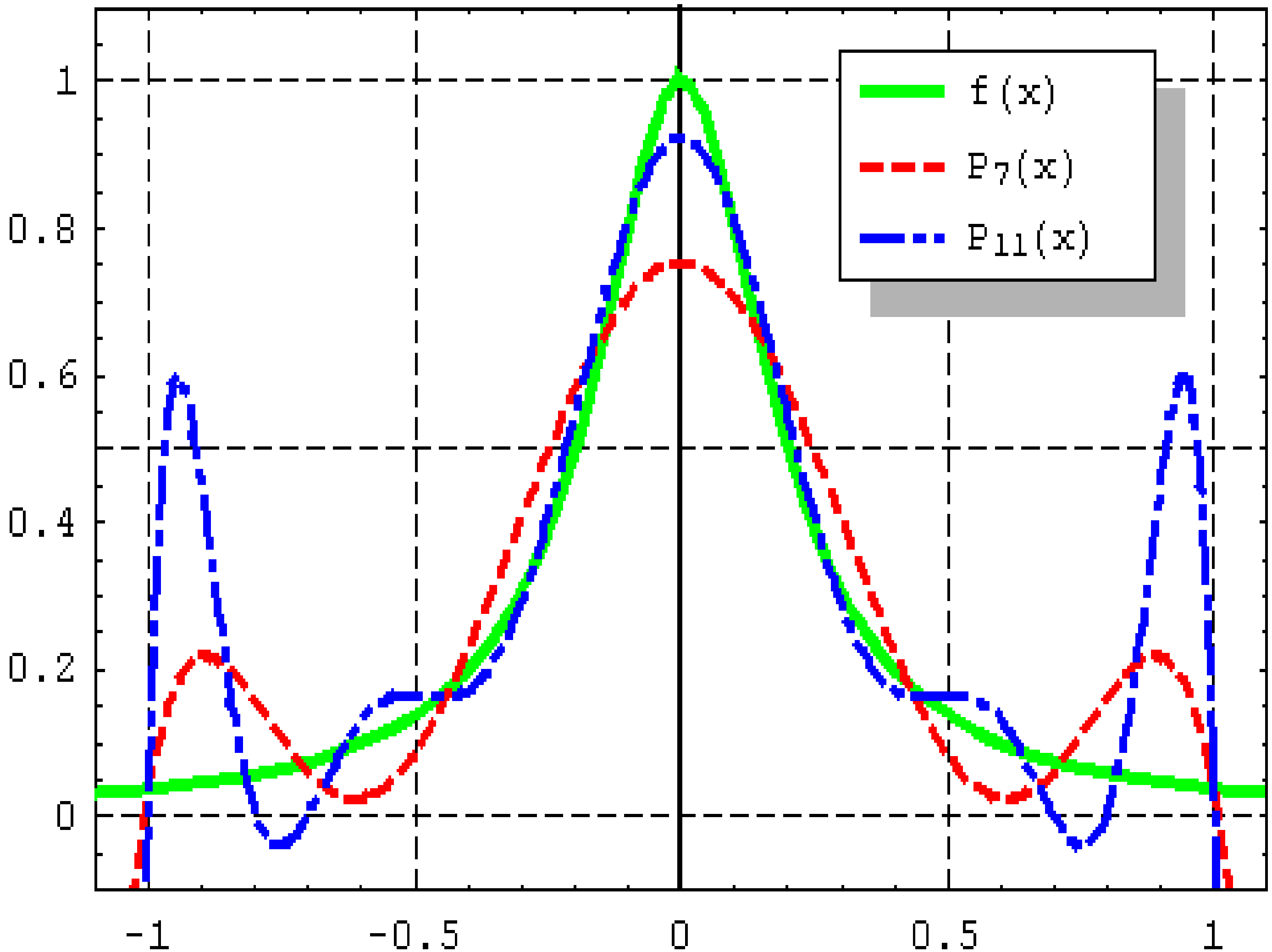
Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Например, ниже представлены для сопоставления графики функции $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ и интерполирующих многочленов (пунктирная и штрихпунктирная линии), построенные на отрезке [-1,1] по таблицам для **8** и **12** равноотстоящих узлов.

На графике видно, что интерполяционные многочлены более высокого порядка больше отклоняются от функции на концах отрезка.

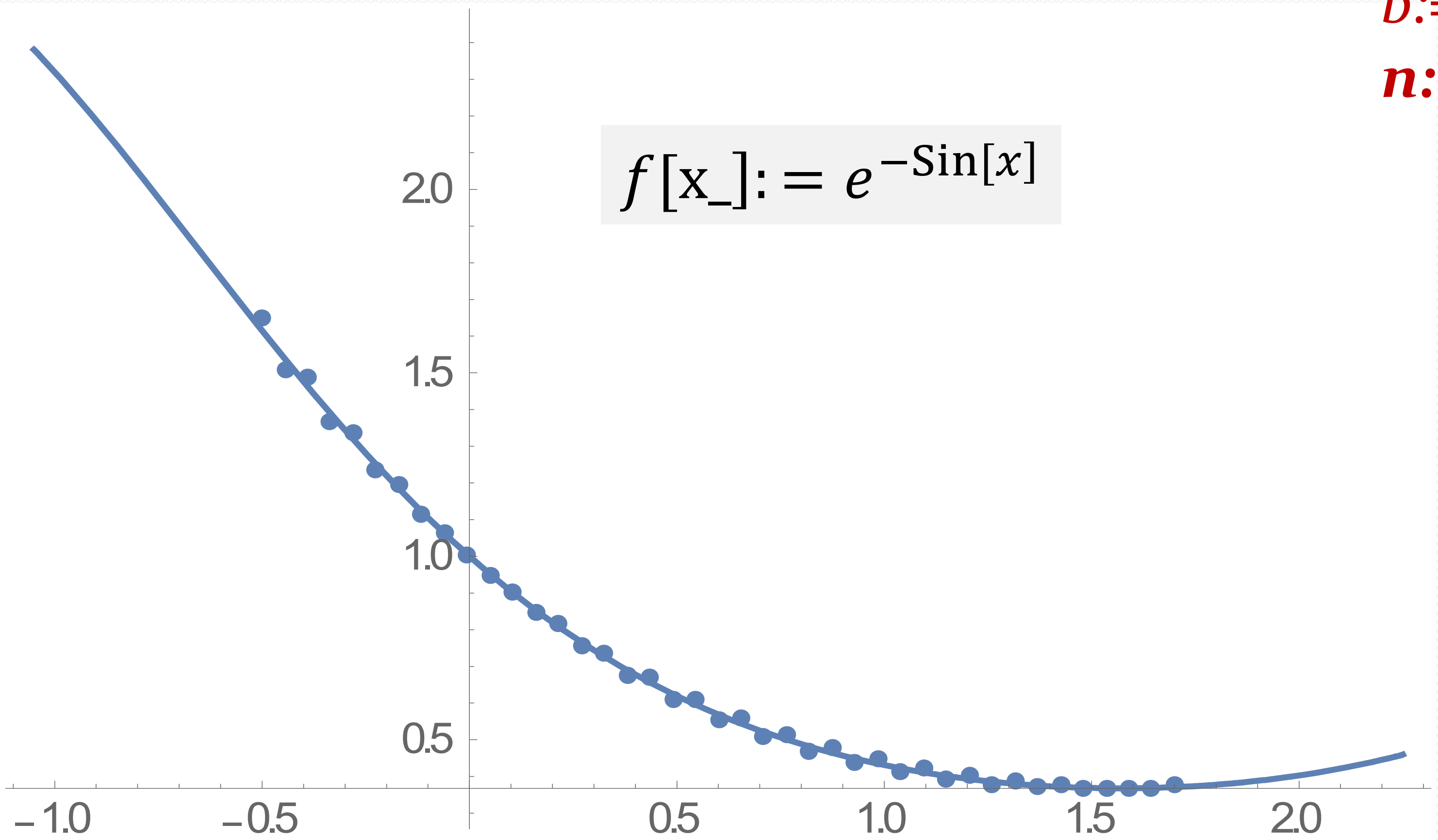
На практике при интерполировании, как правило, используются многочлены не выше 5-й степени, *если нет дополнительной информации о свойствах функции*.

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

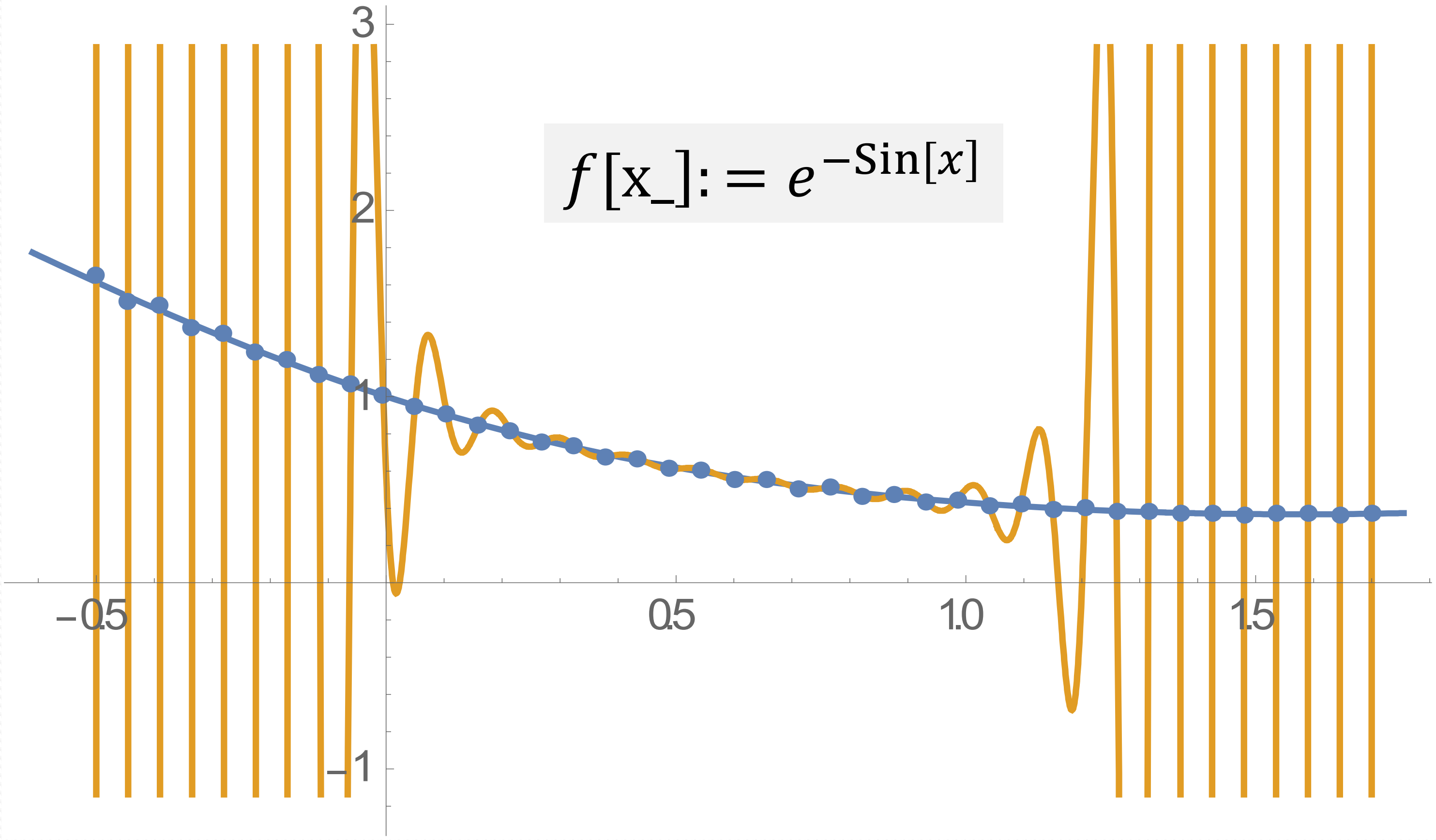


Функция задана в 41 узле с погрешностями

a:=-0.5
b:=1.7
n:=40



Интерполяционный многочлен 40-й степени



$$f[x\_] := e^{-\mathrm{Sin}[x]}$$

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Для уменьшения погрешности интерполирования

$$\left|R_n(x)\right| = \left|r_n(x)\right| \cdot \left|\omega(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

можно подобрать узлы так, чтобы минимизировать *максимум многочлена* $\left|\omega(x)\right|$, зависящего только от расположения узлов на отрезке.

Для этого многочлен $\omega(x)$ должен быть модифицированным многочленом Чебышева $\widetilde{T}_{n+1}(x)$ со старшим коэффициентом 1,т.к. этот многочлен имеет наименьшее значение максимума модуля на отрезке $x \in [-1,1]$:

$$\max_{x \in [-1,1]} \widetilde{T}_{n+1}(x) = 2^{-n}$$

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Многочлен Чебышева первого рода $T_{n+1}(x)$ может быть определен рекуррентно:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

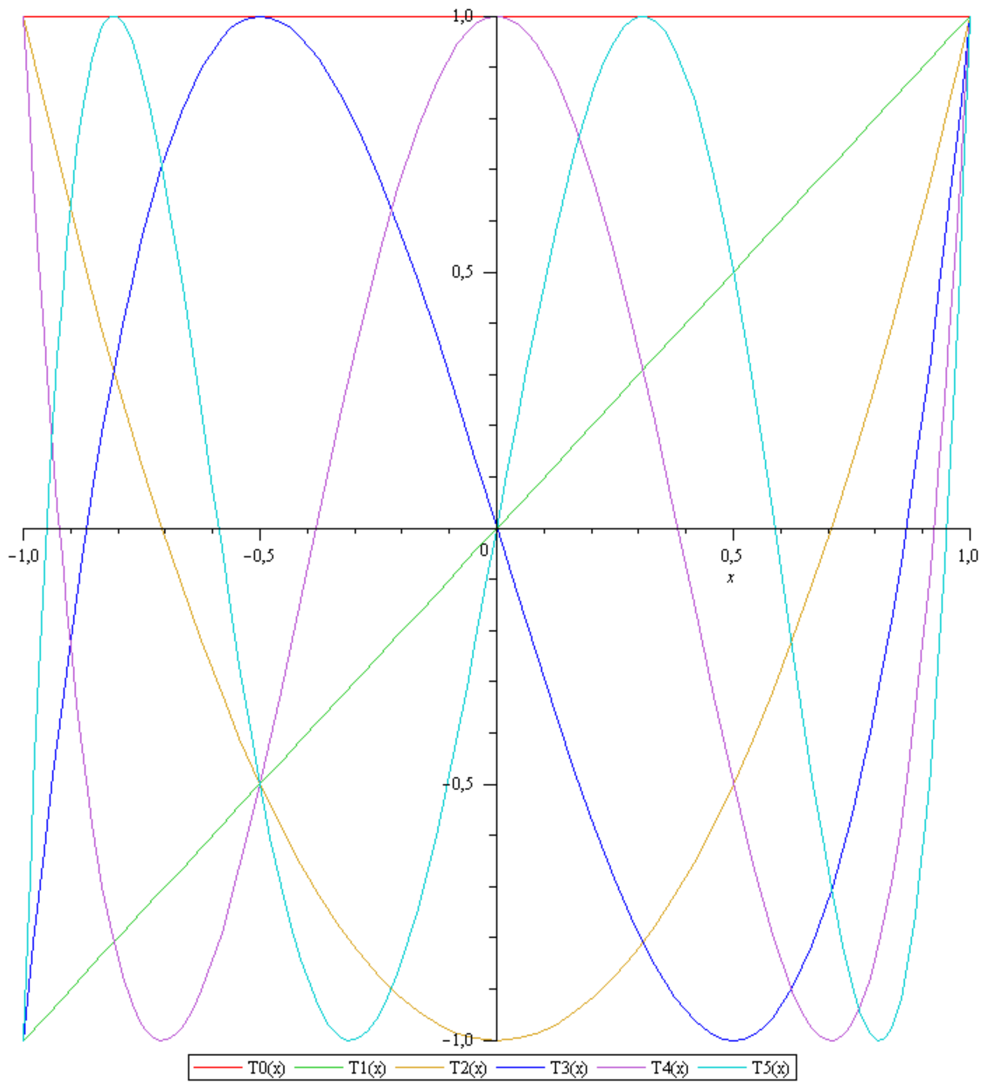
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

или при помощи равенства:

$$T_n(x) = \cos\big(n \cdot \arccos(x)\big)$$

Модифицированный многочлен Чебышева равен

$$\widetilde{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$



Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Если в качестве узлов интерполирования взять корни многочленов Чебышева:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}, \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

то оценка погрешности интерполирования примет вид:

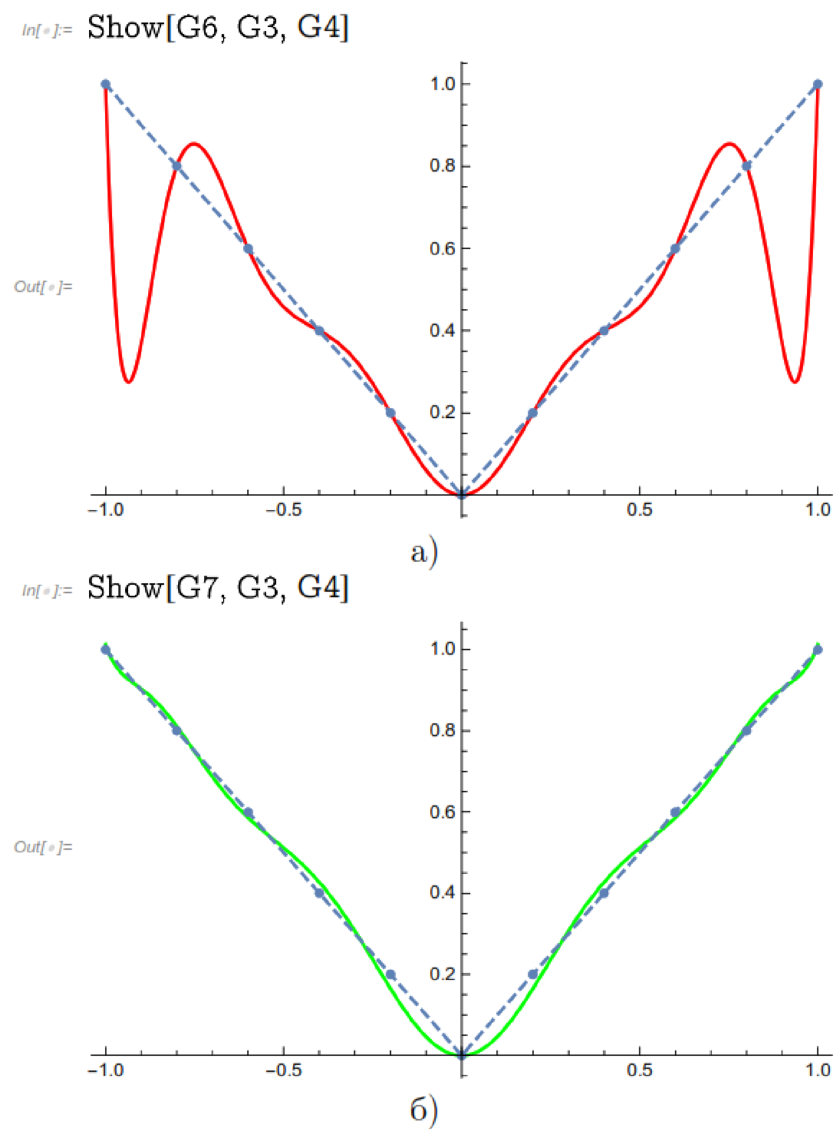
$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - P_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Эта оценка не может быть улучшена для конкретного n.

На рисунке:
а) полином Лагранжа, построенный
на равномерной сетке;
б) на сетке с узлами Чебышева,

в) пунктирная линия - исходная функция

$$y = |x)|, \qquad x \in [-1,1]$$



с. 2.2. Интерполяция методом Лагранжа: а — полином, построенный на равномерной
ке; б — на сетке Чебышева, пунктирная линия — исходная функция.

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Апостериорная оценка погрешности основана на следующем свойстве разделенных разностей:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \xi \in (a, b),$$

т.е. *разделенная разность k -го порядка являются оценкой значения производной порядка k, деленной на k!.*

Таким образом, правая часть оценки приближенно совпадает по модулю с новым слагаемым в выражении для многочлена, появляющимся при добавлении *(n+1)*-го узла:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \approx f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Эта особенность делает интерполяционный многочлен Ньютона одним из наиболее приемлемых алгоритмов интерполирования, особенно при достаточно большом количестве узлов.

Можно постепенно подключать новые узлы до тех пор, пока абсолютная величина очередного слагаемого станет меньше заданной величины ε или начнет возрастать.

Этот рекуррентный процесс интерполяции не требует априорного задания степени полинома и *дает возможность контролировать достигнутую точность*.

Погрешность интерполирования функций алгебраическими многочленами

Для того чтобы избежать больших погрешностей рекомендуется применять для интерполирования не один многочлен степени *n,* а использовать *кусочно-полиномиальную интерполяцию*, при которой весь отрезок разбивают на частичные отрезки и на каждом заменяют функцию многочленом невысокой степени.

Такой подход, однако, не гарантирует непрерывность приближающей функции. Для обеспечения непрерывности и требуемой гладкости аппроксимирующей функции рекомендуется *интерполирование сплайнами*.

Интерполирование сплайнами

Термин ***сплайн*** произошел от названия гибкой металлической линейки (англ. *spline*) — универсального лекала, которое использовали чертёжники для соединения точек на чертеже плавной кривой, то есть для графического исполнения интерполяции.

Кривая, описывающая деформацию гибкой линейки, зафиксированной в отдельных точках, является **сплайн-функцией**.

Таким образом, имеется физическая модель сплайн-функции (или, наоборот, сплайн-функция является математической моделью гибкой линейки).

Интерполирование сплайнами

Сплайном называют функцию, которая непрерывна на отрезке [*a*, *b*], имеет на этом отрезке несколько непрерывных производных и на каждом частичном отрезке является *алгебраическим многочленом*.

Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов называется *степенью сплайна*, а разность между степенью сплайна и порядком его наивысшей непрерывной производной - *дефектом сплайна.*

Наиболее распространенными являются сплайны первой и третьей степени.

Интерполирование сплайнами

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, в узлах которой известны значения $f_k=f(x_k)$, $k=0,1,\ldots,n$ функции.

Интерполяционный сплайн *первой степени* $S_1(x)$ геометрически представляет собой ломаную, проходящую через точки (x_k, f_k), и на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ имеет вид

$$S_{1,k}(x) = f_k + \frac{x - x_k}{h_k}(f_{k+1} - f_k), \qquad h_k = x_{k+1} - x_k$$

Интерполирование сплайнами

Интерполяционным кубическим *сплайном*, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам x_k называют функцию $S_3(x)$,

а) являющуюся на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ многочленом третьей степени:

$$S_{3,k}(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \, ;$$

б) непрерывную на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными до второго порядка включительно;

в) удовлетворяющую условиям интерполирования в узлах.

Интерполирование сплайнами

Сплайн, удовлетворяющий вышеназванным условиям, называется *естественным кубическим сплайном* и является самой гладкой из всех функций, интерполирующих заданную функцию *f(x)*.

Задача построения *кубического сплайна* сводится к нахождению 4*n* неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k . Для ее решения используют условия интерполирования в *n+1* узле сетки и условия непрерывности сплайна и его первой и второй производных во внутренних *n-1* узлах, что дает в общей сложности 4*n*-2 линейных уравнения. Два недостающих уравнения получают, задавая *граничные условия* для $S_3(x)$, т.е. значения сплайна или его производных на концах отрезка.

Интерполирование сплайнами

$$S_3(x_k) = f_k \quad \Rightarrow \quad f_k = a_k$$

$$S_{3,k}(x_{k+1}) = f_{k+1} \Rightarrow \quad a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f_{k+1},$$

$$S'_{3,k}(x_{k+1}) = S'_{3,k+1}(x_{k+1}) \Rightarrow \quad b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}$$

$$S''_{3,k}(x_{k+1}) = S''_{3,k+1}(x_{k+1}) \Rightarrow \quad c_k + 3d_k h_k = c_{k+1}$$

$$S''_3(a) = S''_3(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0, \qquad c_{n-1} + 3d_{n-1} = 0$$

Интерполирование сплайнами

Выразив d_k , а затем b_k через c_k , преобразуем уравнения к следующей линейной системе *n-1* уравнения относительно c_k :

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = 3\left[\frac{f_{k+1} - f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k}\right],$$

$$k = 1,2,\dots,n-1, \qquad c_0 = c_n = 0.$$

с симметричной трехдиагональной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & r_1 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & \dots & 0 & 0 & r_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & r_{n-1} \end{array}\right]$$

Интерполирование сплайнами

Кубические сплайн-функции обладают хорошими аппроксимирующими свойствами и достаточно хорошо приближает гладкие функции вместе с несколькими производными. Если интерполируемая функция *f(x)* принадлежит к классу $C_{k+1}[a,b]$, $0 \le k \le 3$ (т.е. имеет минимум непрерывную производную на [*a*, *b*]), то для погрешности интерполирования функции справедлива следующая оценка:

$$\left\| f(x) - S_3(x) \right\|_c \le C \cdot h^{k+1} \max_{[a,b]} \left| f^{(k+1)}(x) \right|,$$

где С - неотрицательная константа, не зависящая от шага *h* сетки, на которой задана функция.

Интерполирование сплайнами

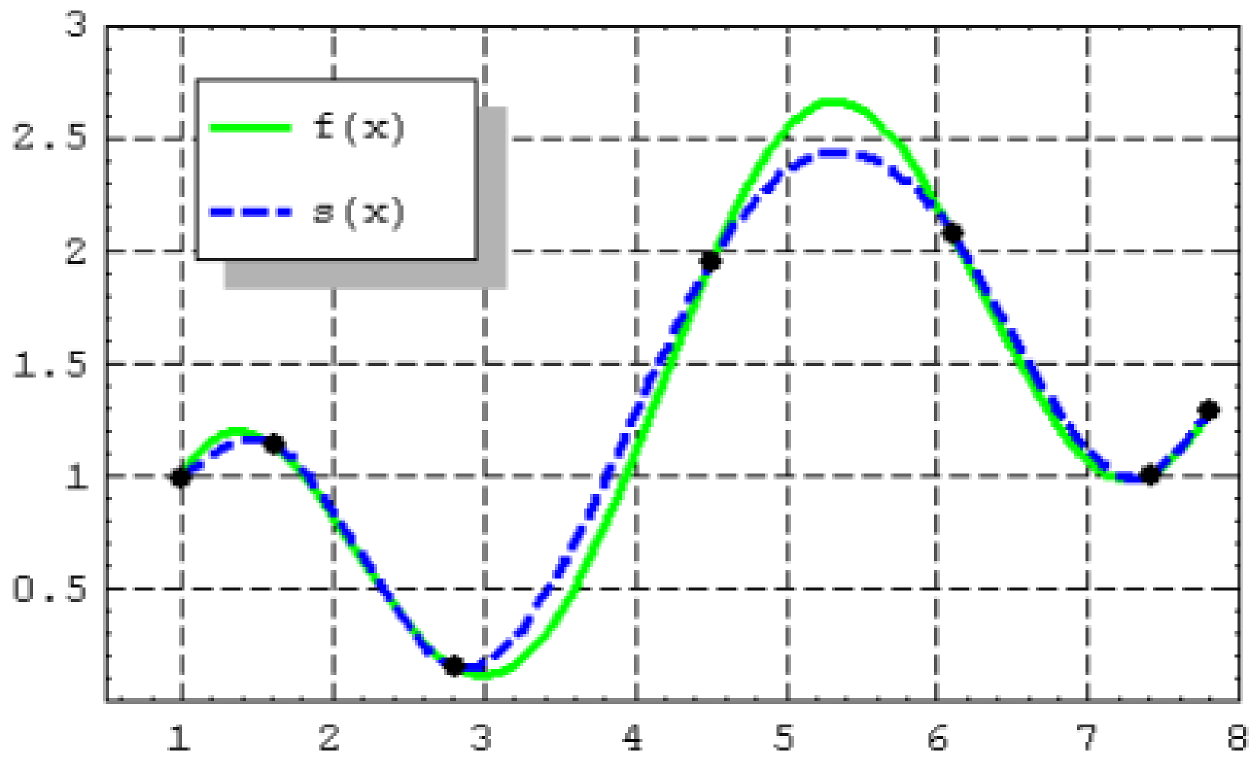
Таким образом, погрешность для гладких функций имеет порядок $O(h^4)$. Даже для непрерывной функции, не имеющей непрерывной производной (например, $y = |x|$) погрешность имеет порядок $O(h)$. Поэтому интерполирование кубическими сплайнами является *сходящимся процессом*, т.е. при неограниченном возрастании числа узлов последовательность сплайнов сходится равномерно к интерполируемой функции, причем скорость сходимости повышается вместе с гладкостью функции. Таким свойством не обладает полиномиальная интерполяция, и в этом заключается преимущество интерполирования кубическими сплайнами.

Интерполирование сплайнами

Пример. Построить сплайн-функцию для функции

$$y(x) = \ln x + \sin(3x/2)$$

заданной в 7 узлах: *1.0, 1.6, 2.8, 4.5, 6.1, 7.4, 7.8.*

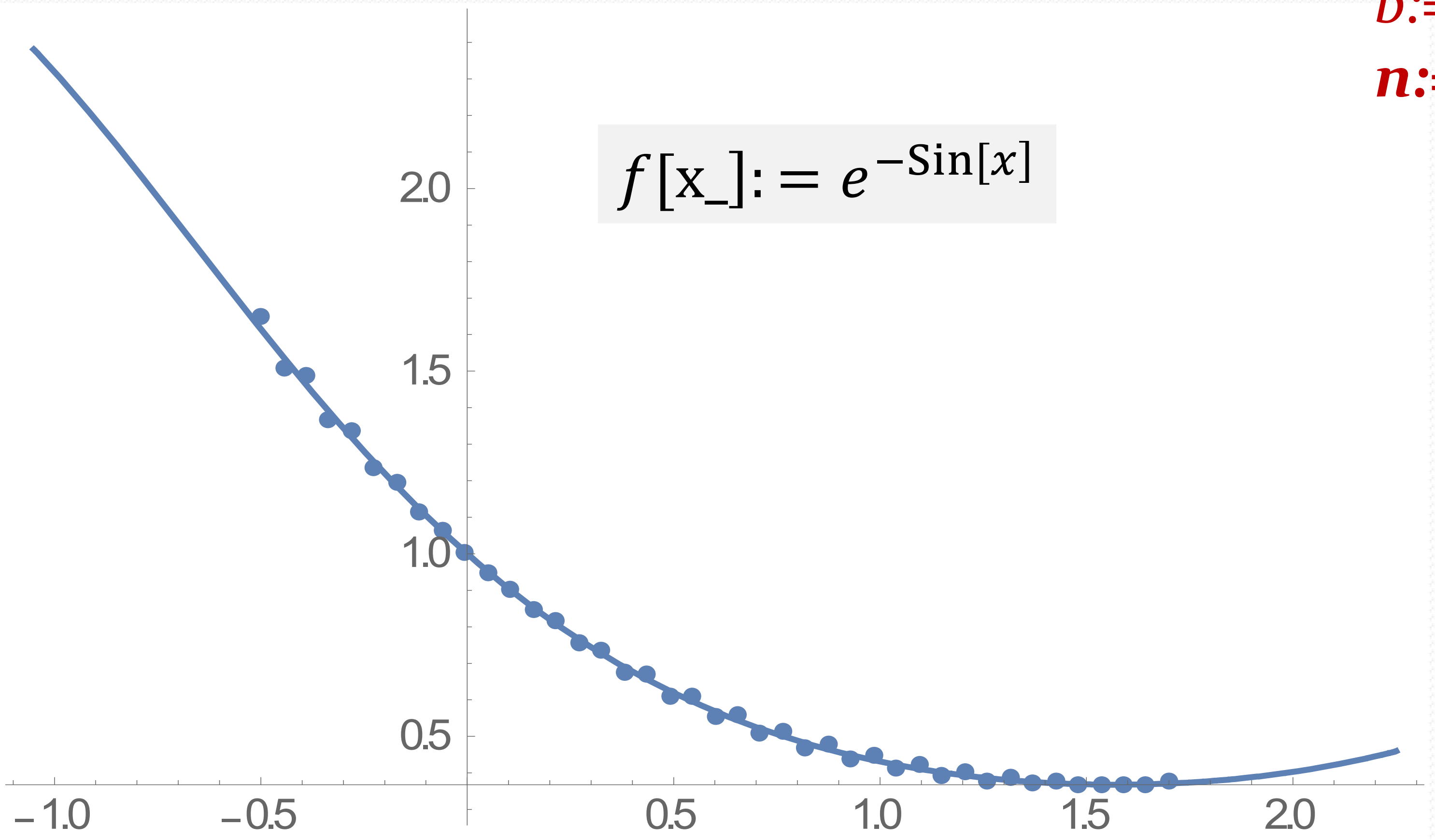


Функция задана в 41 узле с погрешностями

a:=-0.5

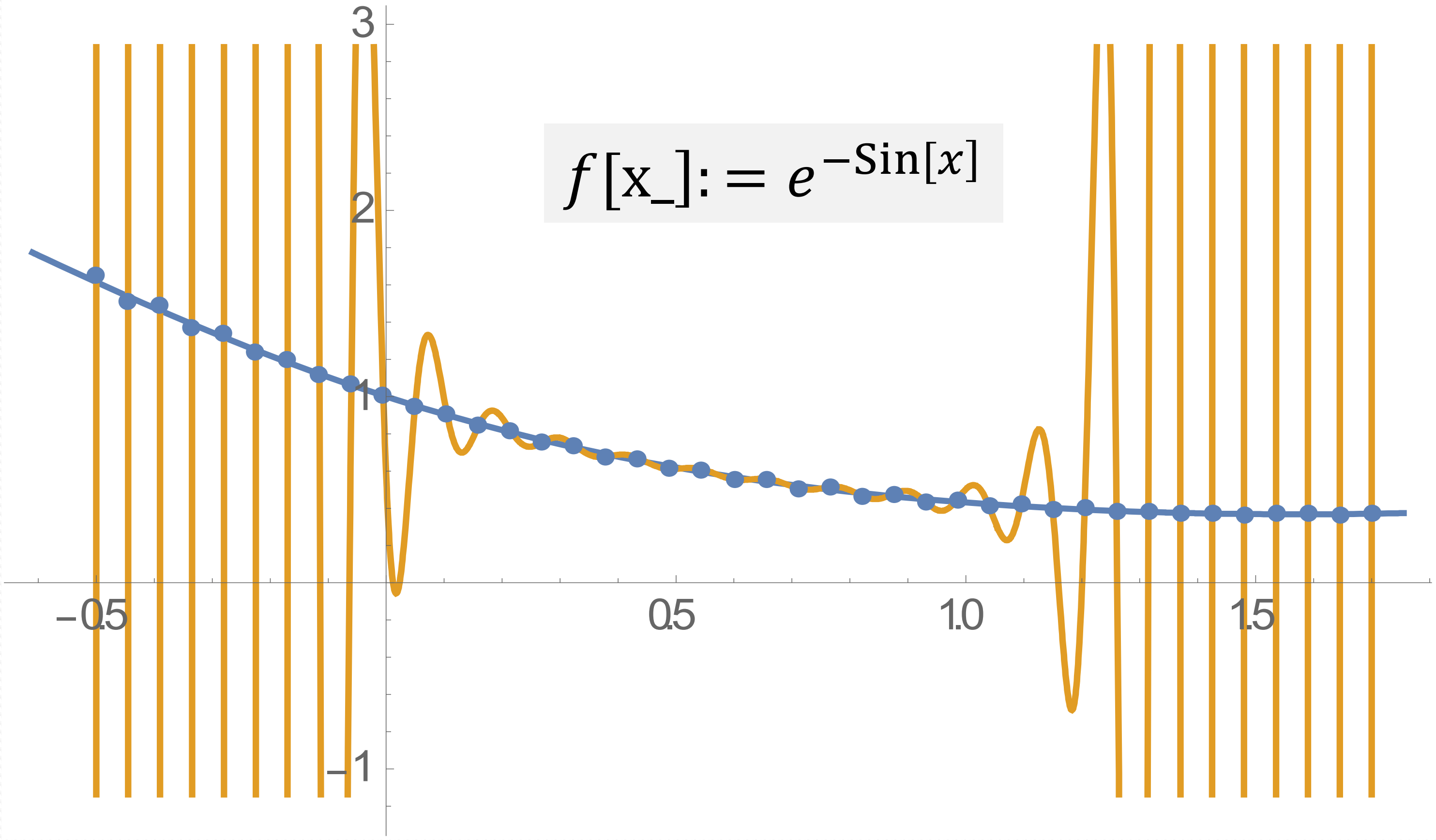
b:=1.7

n:=40



$$f[x\_]:=e^{-\mathrm{Sin}[x]}$$

Интерполяционный многочлен 40-й степени



Интерполяционный сплайн по 41-му узлу