ст. гр. 221701 Телица Илья

Задача 10. Обработка одномерной выборки *(Вариант 23)*
По выборке одномерной случайной величины:

- получить вариационный ряд;

- построить на масштабно-координатной бумаге формата А4 график эмпирической функции распределения $F^*(x)$;

- построить гистограмму равноинтервальным способом;
- построить гистограмму равновероятностным способом;
- вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии;

- вычислить интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95);

- выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины и проверить ее при помощи критерия согласия χ^2 и критерия Колмогорова (α = 0,05). График гипотетической функции распределения $F_0(x)$ построить совместно с графиком $F^*(x)$ в той же системе координат и на том же листе.

Одномерная выборка 1

7.34 3.60 9.79 2.10 -5.36 9.03 3.98 1.66 -2.00 6.91 4.98 -6.56 3.89 3.76 8.32 1.15 6.62 3.55 1.99 6.84 -1.58 2.16 -1.86 0.28 2.62 7.27 3.36 3.52 -7.21 2.53 5.19 7.18 4.13 11.30 -2.03 4.02 -1.39 0.26 1.03 0.57 1.07 10.30 -0.19 4.53 3.89 7.17 3.90 1.22 2.39 -1.06 2.51 1.20 3.34 9.50 -0.29 6.43 5.09 -3.66 6.61 4.95 7.56 1.26 -1.31 -2.03 4.39 0.56 4.62 3.72 0.56 4.02 3.11 3.43 9.79 1.08 2.20 3.12 1.98 -3.31 5.51 3.02 1.61 7.96 0.13 -5.17 4.85 4.36 7.59 13.04 8.53 -0.47 5.38 5.48 -2.38 2.55 6.48 0.92 -0.16 -0.25 11.82 4.87

Задание 1

Вариационный ряд:

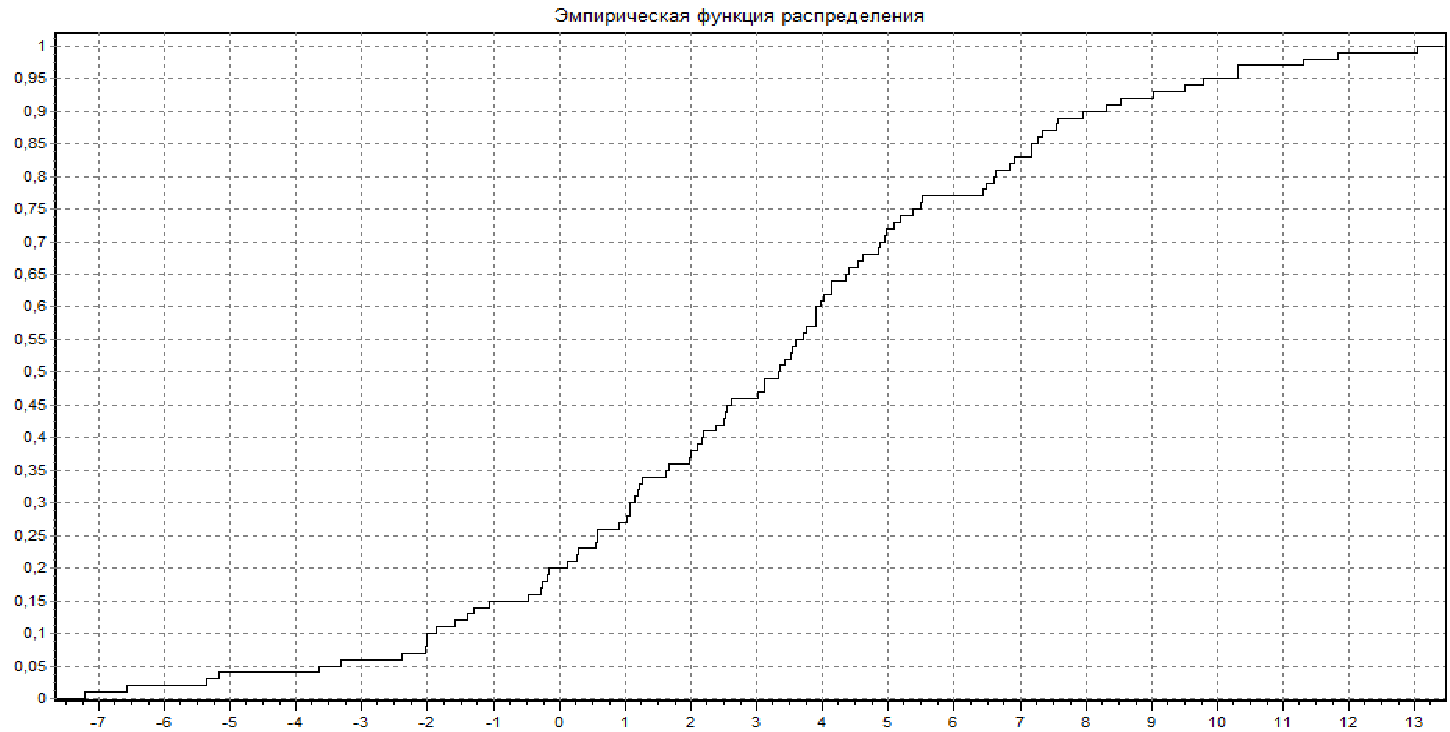
-7,21 -6,56 -5,36 -5,17 -3,66 -3,31 -2,38 -2,03 -2,03 -2,00 -1,86 -1,58 -1,39 -1,31 -1,06 -0,47 -0,29 -0,25 -0,19 -0,16 0,13 0,26 0,28 0,56 0,56 0,57 0,92 1,03 1,07 1,08 1,15 1,20 1,22 1,26 1,61 1,66 1,98 1,99 2,10 2,16 2,20 2,39 2,51 2,53 2,55 2,62 3,02 3,11 3,12 3,34 3,36 3,43 3,52 3,55 3,60 3,72 3,76 3,89 3,89 3,90 3,98 4,02 4,02 4,13 4,36 4,39 4,53 4,62 4,85 4,87 4,95 4,98 5,09 5,19 5,38 5,48 5,51 6,43 6,48 6,61 6,62 6,84 6,91 7,17 7,18 7,27 7,34 7,56 7,59 7,96 8,32 8,53 9,03 9,50 9,79 9,79 10,30 11,30 11,82 13,04

Задание 2

Эмпирическая функция распределения представлена следующей формулой:

$$F^*(x) = p^*(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le \hat{x}_1, \\ \vdots \\ \dfrac{i}{n}, & \hat{x}_i < x \le \hat{x}_{i+1} \\ \vdots \\ 1, & x > \hat{x}_n. \end{cases}$$

По данной формуле построим график эмпирической функции распределения F*(x). Так как F*(x) неубывающая и все ступеньки графика F*(x) имеют одинаковую величину *1/n*, то таблицу значений эмпирической функции распределения *F*(x)* можно не вычислять, а построить ее график непосредственно по и вариационному ряду, начиная с его первого значения



Задание 3

Определим количество интервалов *M*, необходимое для построения гистограмм.

$M \approx \sqrt{n} = \sqrt{100} = 10$

Для *равноинтервальной гистограммы* величины h_j, A_j, B_j, рассчитаем по следующей формуле

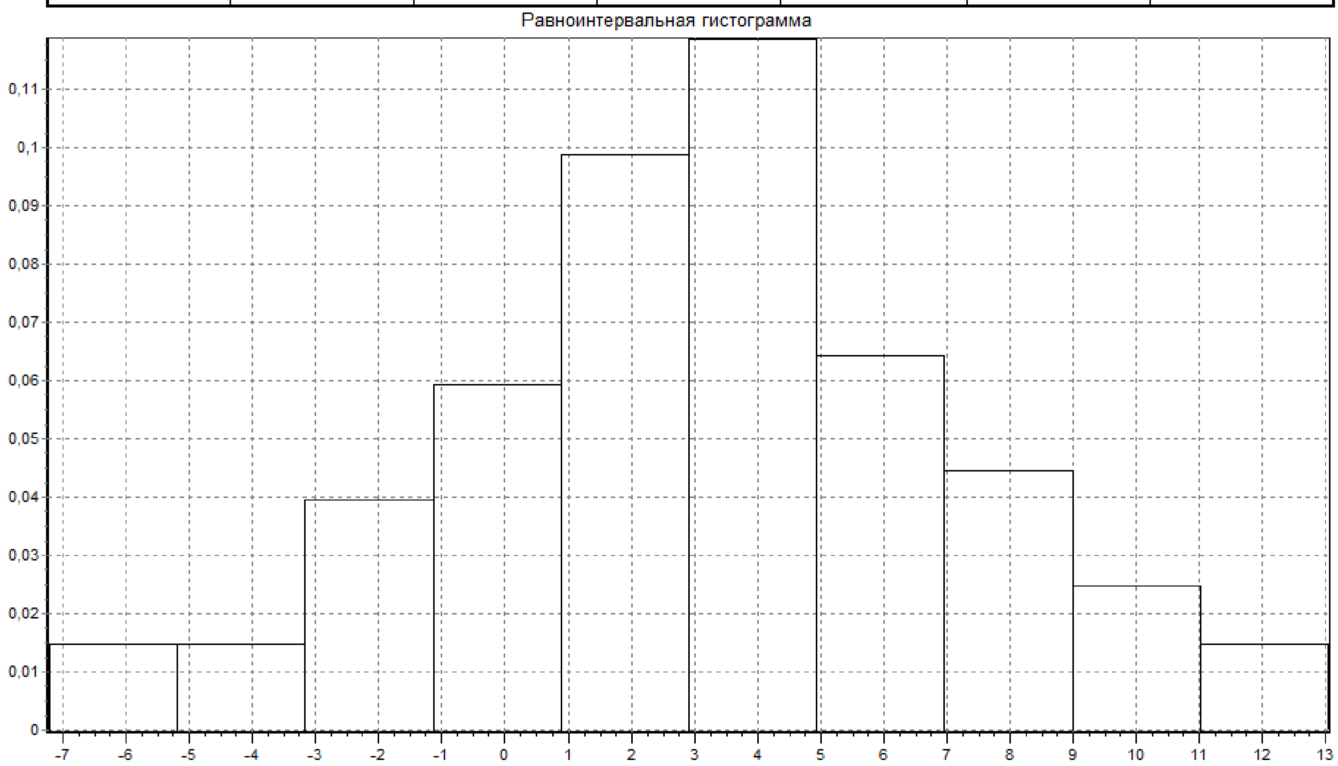
$h_j = h = \frac{x_n - x_1}{n}, \forall j \Rightarrow A_j = x_1 + (j-1)h, j = \overline{2, M}$

Шаг интервала $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{10}$

H = (13,04 - (-7,21))/10 = 2,025

j	A_j	B_j	h_j	ν_j	p_j^*	f_j^*
1	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_1 + h$	h	ν_1	$\frac{\nu_1}{n}$	$\frac{p_1^*}{h}$
...	...	...	...	...	...	...
M	$\hat{x}_1 + (M-1) \cdot h$	$\hat{x}_1 + M \cdot h$	h	ν_M	$\frac{\nu_M}{n}$	$\frac{p_M^*}{h}$

j	A_j	B_j	h_j	ν_j	p^*_j	f^*_j
1	-7,21	-5,19	2,025	3	0,03	0,0148
2	-5,19	-3,16	2,025	3	0,03	0,0148
3	-3,16	-1,14	2,025	8	0,08	0,0395
4	-1,14	0,89	2,025	12	0,12	0,0593
5	0,89	2,91	2,025	20	0,20	0,0988
6	2,91	4,96	2,025	24	0,24	0,1185
7	4,96	6,96	2,025	13	0,13	0,0642
8	6,96	8,99	2,025	9	0,09	0,0444
9	8,99	11,02	2,025	5	0,05	0,0247
10	11,02	13,04	2,025	3	0,03	0,0148

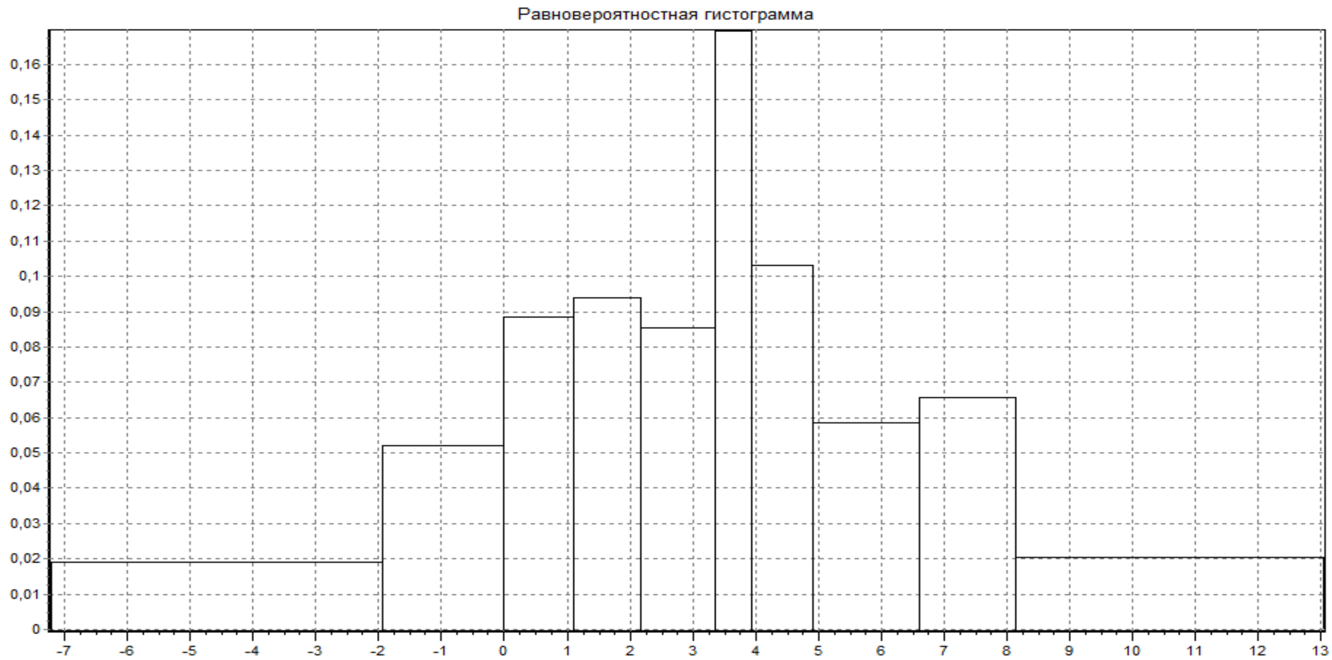


Задание 4

Построение равновероятностным способом

j	A_j	B_j	h_j	ν_j	p_j^*	f_j^*
1	$\hat{x}_1$	$\frac{\hat{x}_{11}+\hat{x}_{10}}{2}$	$B_1 - A_1$	$\frac{n}{M}$	$\frac{1}{M}$	$\frac{p_1^*}{h_1}$
2	$\frac{\hat{x}_{11}+\hat{x}_{10}}{2}$	$\frac{\hat{x}_{21}+\hat{x}_{20}}{2}$	$B_2 - A_2$	$\frac{n}{M}$	$\frac{1}{M}$	$\frac{p_2^*}{h_2}$
...	...	...	...	...	...	...
M	$\frac{\hat{x}_{\nu_M\cdot(M-1)+1}+\hat{x}_{\nu_M\cdot(M-1)}}{2}$	$\hat{x}_n$	$B_M - A_M$	$\frac{n}{M}$	$\frac{1}{M}$	$\frac{p_M^*}{h_M}$

j	A_j	B_j	h_j	v_j	p^*_j	f^*_j
1	-7,21	-1,93	5,280	10	0.1	0,0189
2	-1,93	-0,01	1,915	10	0.1	0,0522
3	-0,01	1,11	1,130	10	0.1	0,0885
4	1,11	2,18	1,065	10	0.1	0,0939
5	2,18	3,35	1,170	10	0.1	0.0855
6	3,35	3,94	0,590	10	0.1	0.1695
7	3,94	4,91	0,970	10	0.1	0.1031
8	4,91	6,62	1,705	10	0.1	0.0587
9	6,62	8,14	1,525	10	0.1	0.0656
10	8,14	13,04	4,9	10	0.1	0.0204



Задание 5

Вычислим *точечную оценку математического ожидания* по формуле:

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

Пример расчёта

$$m_x^* = \frac{1}{100}((-7{,}21) + (-6{,}56) + (-5{,}36) + \cdots + 11{,}82 + 13{,}04) = 3{,}123$$

Вычислим *точечную оценку дисперсии* по формуле:

$$D_x^* = S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2 = 15{,}75$$

Математическое ожидание составило 3,123

Дисперсия составляет $15{,}75$

Среднее квадратичное отклонение составляет 3,969

Задание 6

γ = 0,95

Построим *доверительный интервал для математического ожидания* с надежностью γ = 0,95 по формуле $I_\gamma(m_x) = \left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s_0}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_\gamma \frac{s_0}{\sqrt{n}}\right]$.

Из таблицы Лапласа найдём значение аргумента, которое соответствует значению, равному $\frac{\gamma}{2} = 0.475$.

$$z_{0.95} = arg(0.475) = 0.1844$$

Тогда получаем

$$z_\gamma \frac{s_0}{\sqrt{n}} = 0.0132$$

$3{,}1178 < m_x < 3{,}1335$

Построим *доверительный интервал для дисперсии* с надежностью $\gamma = 0{,}95$ по формуле:

$$I_y\big(D(x)\big) = \left[S_O^2 - z_\gamma \sqrt{\frac{2}{n-1}} S_0^2 ; S_O^2 + z_\gamma \sqrt{\frac{2}{n-1}} S_0^2\right]$$

Тогда получаем

$$z_\gamma \sqrt{\frac{2}{n-1}} S_0^2 = 0{,}4129$$

.

$$15{,}3401 < D_x < 16{,}1658$$

Задание 7

Выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины и проверить ее при помощи критерия согласия χ^2 и критерия Колмогорова ($\alpha = 0{,}05$). График гипотетической функции распределения $F_0(x)$ построить совместно с графиком $F^*(x)$ в той же системе координат и на том же листе.

По виду графика эмпирической функции распределения $F^*(x)$ и гистограмм выдвигаем двухальтернативную гипотезу о законе распределения случайной величины:
H_0 – величина X распределена по нормальному закону

H_0: $F_{(x)} = F_{0(x)}, f(x) = f_0(x)$

$$f_0 x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$F_0(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

H_1 – величина X не распределена по нормальному закону:

H_1: $F_{(x)} \neq F_{0(x)}, f(x) \neq f_0(x)$

Где $F_0(x)$, $f_0(x)$ – теоретическая функция и плотность распределения. В свою очередь:

m = 3,123

$\sigma =$ 3,969

j	A_j	B_j	$F_0(A_j)$	$F_0(B_j)$	P_j	P_j^*	$\frac{\left(P_j - P_j^*\right)^2}{P_j}$
1	-7,21	-5,19	0,0046	0,0181	0,0135	0,03	0,0091
2	-5,19	-3,16	0,0181	0,0567	0,0386	0,03	0,0025
3	-3,16	-1,14	0,0567	0,1414	0,0847	0,08	0,0003
4	-1,14	0,89	0,1414	0,2869	0,1455	0,12	0,0054
5	0,89	2,91	0,2869	0,4786	0,1917	0,20	0,0003
6	2,91	4,96	0,4786	0,6783	0,1997	0,24	0,0068
7	4,96	6,96	0,6783	0,8332	0,1549	0,13	0,0048
8	6,96	8,99	0,8332	0,9303	0,0971	0,09	0,0006
9	8,99	11,02	0,9303	0,9767	0,0464	0,05	0,0003
10	11,02	13,04	0,9767	0,9938	0,0171	0,03	0,0055
				Сумма	0,9892	1	0,0356

$$\chi 2 = n\sum\frac{(p_i - p_i^*)^2}{p_i}\ ;\ p_i = F_0(B_i) - F_0(A_i)$$

χ^2=100*0,0356=3,56

Число степеней свободы k=10 -1 -2=7

Из таблицы распределения Пирсона найдем критическое значение критерия:

$\chi^2_{кр}(99;0,95) = 14,07$

Так как $\chi^2_{кр} > \chi^2$ то гипотеза H_0 о нормальном распределении принимается.

Проверим гипотезу о нормальном распределении при помощи критерия Колмогорова, где $F_0(x)$– теоретическая функция распределения

$H_0: F_{(x)} = F_{0(x)}$

$H_1: F_{(x)} \neq F_{0(x)}$

X	$F_0(x)$	$F^*(x)$	$\|F^*(x) - F_0(x)\|$
-7,21	0	0,0046	0,0046
-5,19	0,03	0,0181	0,0119
-3,16	0,05	0,0567	0,0067
-1,14	0,14	0,1414	0,0014
0,89	0,26	0,2869	0,0269
2,91	0,46	0,4786	0,0186
4,96	0,7	0,6783	0,0217
6,96	0,82	0,8332	0,0132
8,99	0,92	0,9303	0,0103
11,02	0,96	0,9767	0,0167

$\mathrm{Z} = \max\left|\mathrm{F}^*_{(\mathrm{x_i})} - \mathrm{F}_0(\mathrm{x_i})\right| = 0{,}0269$

$\lambda = \sqrt{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{z} = 10 \cdot 0{,}0269 \ = 0{,}269$

Из таблицы распределения Колмогорова по заданному уровню значимости α =0,05 выбираем критическое значение $\lambda_y = \lambda_{1-a} = \lambda_{0,95} = 1{,}34$

Так как $\lambda < \lambda_y$, то гипотеза H_0 о нормальном распределении принимается.