# Численные методы решения дифференциальных уравнений

Тема 6

# Решение задачи Коши для уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения делятся на:

- *обыкновенные* (содержащие одну переменную),
- *уравнения в частных производных*.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) содержат одну или несколько производных искомой функции $y=y(x)$ и могут быть записаны в виде

$$F\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

или

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Наивысший порядок ***n*** входящей в уравнение производной называется *порядком дифференциального уравнения.*

*Линейными дифференциальными уравнениями* называются уравнения, линейные относительно искомой функции и её производных:

$$a_0(x)y + a_0(x)y' + a_0(x)y'' + \ldots + a_0(x)y^{(n)} = 0.$$

Уравнение, имеющее вид

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

называется уравнением, *разрешенным относительно старшей производной*.

Уравнение первого порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y' = f\left(x, y(x)\right)$$

*Решением* дифференциального уравнения является всякая функция $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, которая после её подстановки в уравнение, превращает его в тождество.

*Общее решение* обыкновенного дифференциального уравнения *n–го* порядка содержит ***n*** постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$$

*Частное решение* дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным константам придать определенные значения.

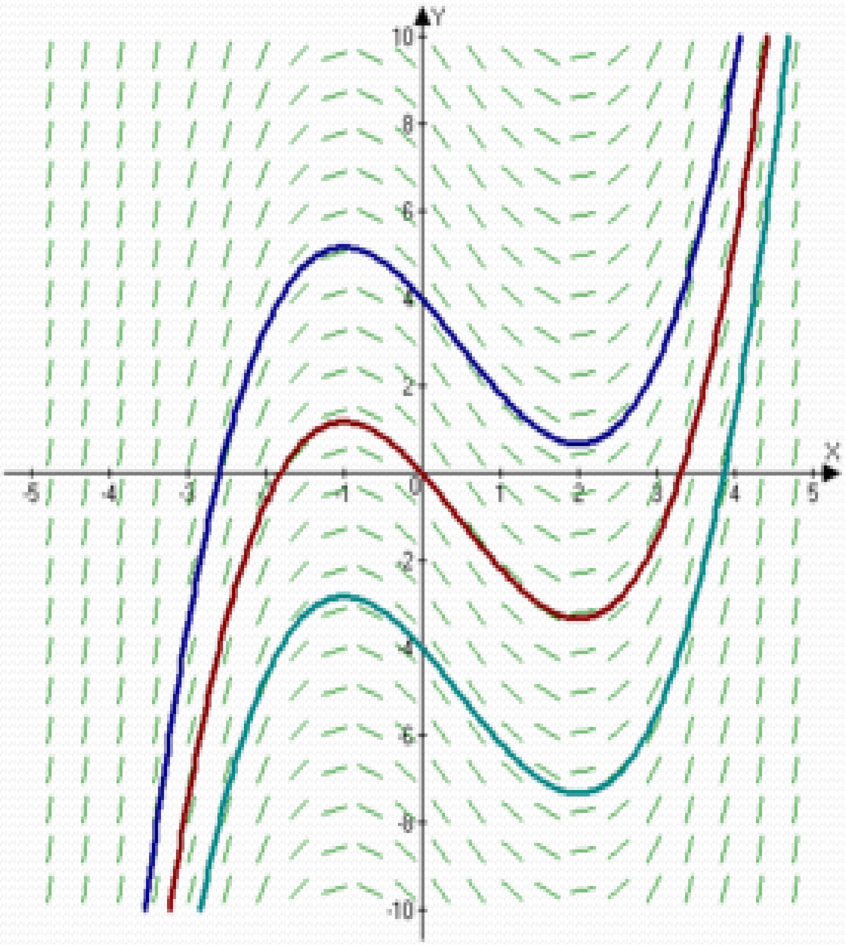
Для выделения частного решения из общего решения дифференциального уравнения порядка ***n*** следует задать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в общем решении.

# Геометрическая интерпретация линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка - бесконечное семейство функций с параметром *C*, а частному решению соответствует одна функция этого семейства. Для выделения некоторого частного решения **достаточно** задать координаты некоторой точки $(x_o, y_o)$ на данной интегральной кривой.

Поскольку производная характеризует наклон касательной к интегральной кривой в точке, то при $y' = k$ получаем уравнение линии постоянного наклона, называемой *изоклиной.* Меняя $k$, получаем *семейство изоклин.*

# Геометрическое представление решения дифференциального уравнения 1-го порядка.




*Графическое представление* - **семейство «параллельных» кривых** $\boldsymbol{y = \varphi(x) + C}$,

где каждому числу C соответствует определенная кривая семейства – *интегральная кривая.*

- Интегральные кривые для

$$y' = x^2 - x - 2$$

$$y = x^3/3 - x^2/2 - 2x + C$$

В зависимости от способа задания *дополнительных условий* существуют два типа задач:

1. **Задача Коши:** дополнительные условия задаются в одной точке (начальной точке) и называются *начальными условиями*.
2. **Краевая задача:** дополнительные условия задаются более, чем в одной точке (как правило, на границах области существования решения), называются *граничными или краевыми условиями*.

# Постановка задачи Коши для ОДУ первого порядка

Требуется найти решения дифференциального уравнения

$$y' = f\left(x, y(x)\right)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad .$$

Будем считать, что функция *f(x,y)* в некоторой области удовлетворяет всем необходимым требованиям и задача поставлена корректно, т.е. решение задачи Коши существует и единственно.

# Постановка задачи численного решения Коши для ОДУ первого порядка

***Решение задачи Коши численными методами*** :

**не определяя функцию** $y = \varphi(x)$, найти по заданному числу $\mathbf{y_0}$ для некоторой последовательности аргументов $\mathbf{x_0, x_1, \dots, x_n}$ такие значений $\mathbf{y_1, \dots, y_n}$, что

$$y_i = \varphi(x_i), i = 1, 2, \dots, n$$

(т.е. построить таблицу приближенных значений $y_1, y_2, \dots, y_n$ решения уравнения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ .)

# Численное решение задачи Коши

Введем равномерную *сетку* с шагом $h$ *(h>0)*, т.е. рассмотрим множество точек (*узлов сетки* ) $x_i = x_0 + kh,\ k=1,2, \ldots, n.$

Дифференциальное уравнение заменим некоторым разностным

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-p+1})$$

которое необходимо решить на каждом шаге для нахождения $y_{k+1}$.

Выбор функции **Ф** определяет *метод численного решения*: если она не зависит от $y_{k+1}$, то получают *явный метод* (явную формулу для вычисления $y_{k+1}$), и *неявный* - в противном случае.

# Численное решение задачи Коши

Метод, дающий формулу для вычисления $y_{k+1}$ по $m$ предыдущим значениям $y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-m+1}$,

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-m+1})$$

называется *m-шаговым.*

Существуют две группы численных методов решения задачи Коши:

- одношаговые (или методы Рунге -Кутта)
- многошаговые разностные методы.

# Классификация численных методы решения задачи Коши для ОДУ

- ОДНОШАГОВЫЕ : $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k)$$
- МНОГОШАГОВЫЕ: $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-m+1})$$

- ЯВНЫЕ: $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_k, \ldots, y_{k-p+1})$$
- НЕЯВНЫЕ: $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-p+1})$$

# Численные методы решения ОДУ характеризуются следующими показателями:

Численные методы решения ОДУ характеризуются

следующими показателями:

- Точность – характеризует погрешность, с которой получается решение. Все методы характеризуется определенным порядком точности. Чем выше порядок – тем выше точность.
- Устойчивость метода характеризует возможность вообще получить достоверный результат.

# Замечания к решению задачи Коши для уравнения первого порядка

- Метод должен быть ***устойчив***. Устойчивость связана с некоторой критической величиной шага. При проявлении неустойчивости наблюдается полное искажение качественной картины расчета, «разболтка» результата.
- При выборе метода рекомендуется сначала добиться устойчивости, а внутри области устойчивости — сходимости результата. Устойчивость обеспечивает качественную картину. Сходимость обеспечивает количественный результат.

# Замечания к решению задачи Коши для уравнения первого порядка

- Каждый численный метод обладает ***точностью***, поскольку результат отличается от теоретического. Точность метода зависит от величины шага. Различные методы имеют различную точность. <u>Порядок зависимости точности от величины шага обозначают как</u> $\boldsymbol{O(h)}$.

- Если при уменьшении шага предел $\boldsymbol{y_n}$ стремится к значению $\boldsymbol{y_{\text{теор.}}}$, то говорят, что метод обладает ***сходимостью***, которая характеризуется *скоростью сходимости метода.*

# Замечания к решению задачи Коши для уравнения первого порядка

*Метод сходится в точке $x^*$,* если построена последовательность сеток таких, что $x^*=x_0+nh$ ( $h\to 0$, $n\to\infty$ ), и $|y(x^*)- y_n|\to 0$ при $h\to 0$.

*Метод имеет p-ый порядок сходимости* если существует такое $p > 0$, что $|y(x^*)- y_n|=O(h^p)$ при $h\to 0$.

Доказано, что при очень общих предположениях *порядок точности разностного метода* совпадает с *порядком аппроксимации дифференциального уравнения разностным:*

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-p+1})$$

# Метод Эйлера

Производную функции *y'* представим в виде конечной разности. За величину приращения аргумента Δx принимаем величину шага h:

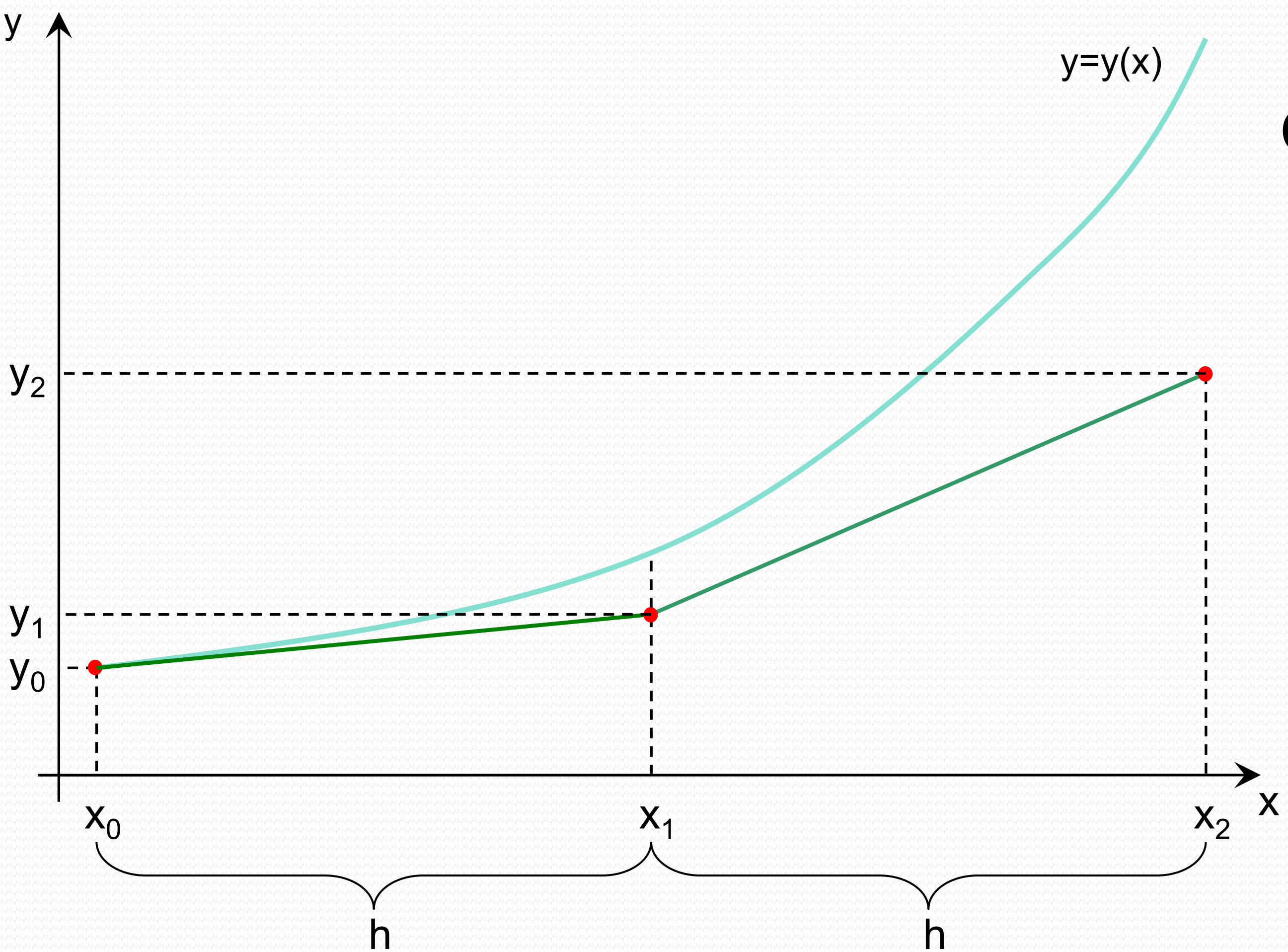
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

В общем виде:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

Эта формула называется *методом Эйлера*

# Графическая интерпретация метода Эйлера




От начальной точки $(x_0, y_0)$ проводим касательную к графику до пересечения с линией $x=x_1$. Получаем новую точку $(x_1, y_1)$.

# Характеристики метода Эйлера

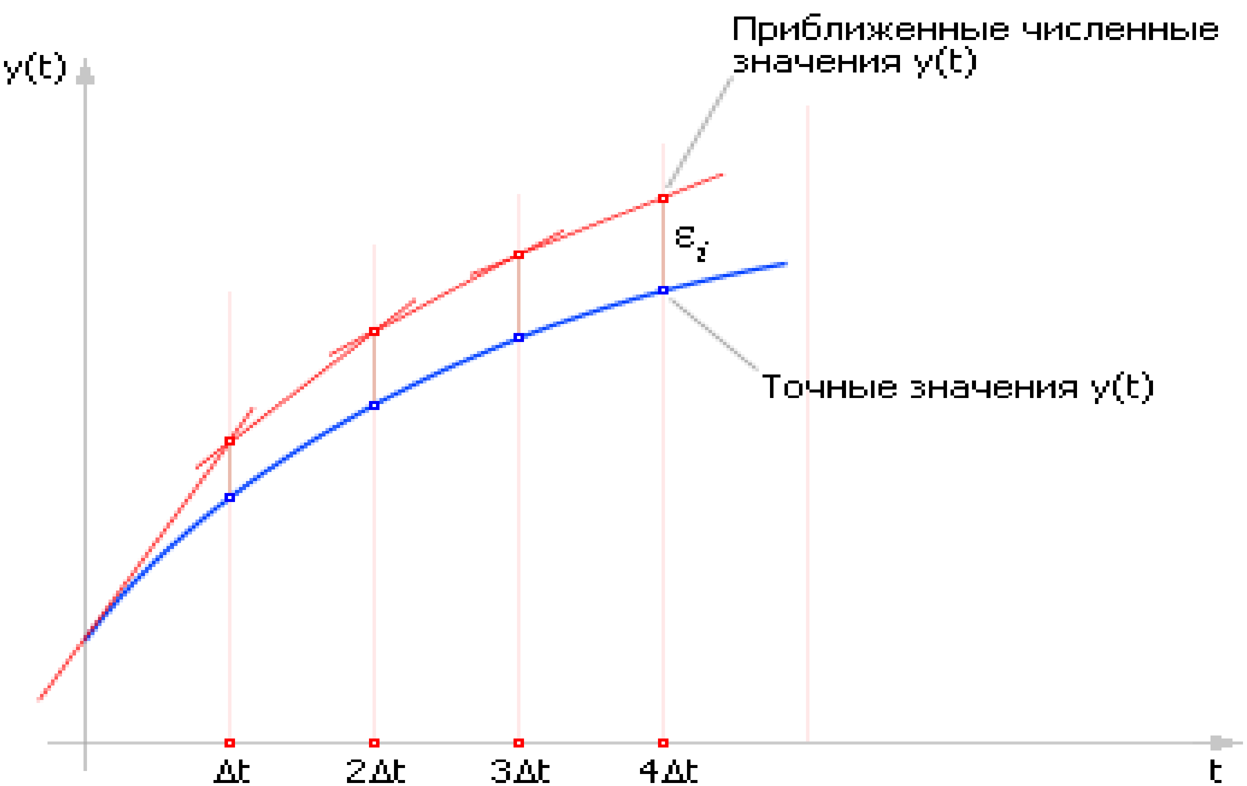
Метод Эйлера является *одношаговым методом*, то есть для расчета последующей точки необходимо знать только координаты предыдущей.

Метод использует *явную схему* – в правой части формулы Эйлера все величины известны.

Метод Эйлера *не является устойчивым* методом, поэтому он применяется только для ОДУ, решением которых являются достаточно гладкие функции.

Метод характеризуется *первым порядком точности* (точность низкая).

# Нарастание суммарной ошибки в методе Эйлера на ряде шагов




Из графика видно, что с увеличением количества шагов погрешность возрастает.

Если величину шага h уменьшить, то результат получится более точным.

# Решение задачи Коши для уравнения первого порядка методом Эйлера

**Задача 1.**

Дано дифференциальное уравнение

$$y' = 2xy$$

Задано начальное положение системы:

$$y(0) = 1.$$

Требуется найти $y(x)$ на интервале от 0 до 1.

# Численный расчет уравнения методом Эйлера и сравнение результата с точным решением на каждом шаге

| $i$ | $t_i$ | $y_i = y_{i-1} + y'_{i-1} \cdot \Delta t$ | $y'_i = 2t_i \cdot y_i$ | $\Delta y_i = y'_i \cdot \Delta t$ | $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$ | $y_{\text{точн.}} = \exp(t_i^2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0.1 | 1 | 0.2 | 0.02 | 1.02 | 1.0101 |
| 2 | 0.2 | 1.02 | 0.408 | 0.0408 | 1.0608 | 1.0408 |
| 3 | 0.3 | 1.061 | 0.636 | 0.0636 | 1.1246 | 1.0942 |
| 4 | 0.4 | 1.124 | 0.900 | 0.0900 | 1.2140 | 1.1735 |
| 5 | 0.5 | 1.214 | 1.214 | 0.1214 | 1.3354 | 1.2840 |
| 6 | 0.6 | 1.336 | 1.603 | 0.1603 | 1.4963 | 1.4333 |
| 7 | 0.7 | 1.496 | 2.095 | 0.2095 | 1.7055 | 1.6323 |
| 8 | 0.8 | 1.706 | 2.729 | 0.2729 | 1.9789 | 1.8965 |
| 9 | 0.9 | 1.979 | 3.561 | 0.3561 | 2.3351 | 2.2479 |
| 10 | 1.0 | 2.335 | 4.669 | 0.4669 | 2.8019 | 2.7183 |

Если будем менять значение шага $\Delta x$, например, уменьшать шаг, то относительная погрешность расчета тоже будет уменьшаться.

Результат вычисления значения $y(1)$ с разными значениями шага:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta x$ | $y_{расч.}(1)$ | $y_{теор.}(1)$ | $\sigma$ |
| 1/10 | 2.3346 | 2.7183 | 14% |
| 1/20 | 2.5107 | 2.7183 | 8% |
| 1/100 | 2.6738 | 2.7183 | 2% |

Как видим, с уменьшением шага приращения $\Delta x$ уменьшается величина относительной погрешности.

Изменение шага в 10 раз (с 1/10 до 1/100) ведет к изменению величины ошибки примерно тоже в 10 раз (с 14% до 2%). При изменении шага в 100 раз ошибка примерно уменьшится тоже в 100 раз. Иными словами размер шага и ошибка для метода Эйлера связаны линейно.

Этот факт в математике принято обозначать символом $\boldsymbol{\varepsilon = O(\Delta x)}$, а поэтому *метод Эйлера* называют методом *первого порядка точности*.

# Замечания к решению задачи Коши для уравнения первого порядка

Поскольку в методе Эйлера ошибка достаточно велика и от шага к шагу накапливается, а точность пропорциональна количеству вычислений, то метод Эйлера обычно применяют для грубых расчетов, для оценки поведения системы в принципе.

Для точных количественных расчетов применяют более точные методы. Обычно используют методы Рунге-Кутты, которые являются методами повышенной точности.

При небольшом объеме вычислений стандартный метод Рунге-Кутты обладает точностью метода $O(h^4)$.

# Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Как и в методе Эйлера

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

но функцию $y = F(x)$ раскладывают в ряд Тейлора с точностью до членов $h^4$, включительно.

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4y}{dx^4}$$