Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2м.5

ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ УКАЗАНИЕ

Минск 2022

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2м.5

ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель работы:

1. Изучить динамику и кинематику свободных незатухающих гармонических колебаний.
2. Изучить такие колебательные системы, как физический и математический маятник.
3. Проверить свойство взаимности точки подвеса и центра качания.
4. Измерить ускорение свободного падения тел с помощью оборотного маятника.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени, называются колебаниями. Описывающие их функции времени обладают свойством периодичности. В частности, для механических колебаний таким свойством обладают обобщенные координаты системы, т.е. величины, однозначно определяющие в каждый момент времени положение системы в пространстве, но не обязательно являющиеся декартовыми координатами.

Различают *свободные и вынужденные* колебания. Свободными называются колебания, которые совершает система, предоставленная самой себе после какого-либо внешнего воздействия. Вынужденными называются колебания, происходящие под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Простейшими колебаниями являются *гармонические* колебания, при которых обобщенные координаты системы изменяются по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен, во-первых, потому, что реальные колебания часто имеют характер, близкий к гармоническим, а, во-вторых, периодические процессы с другой зависимостью от времени могут быть представлены в виде суперпозиции гармонических колебаний.

Гармонические колебания

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки (частицы) массой m под действием упругой силы $\vec{F} = -k\vec{r}$, где $k = const > 0$, $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы относительно положения равновесия.

Уравнение движения частицы, в соответствии со вторым законом Ньютона, запишется в виде $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$, или

$$m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = \vec{0} \qquad (1)$$

В одномерном случае движения по координатной оси OX, получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (2)$$

Общий вид решения решение уравнения (2) имеет вид:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),\qquad (3)$$

где A, ω_0, φ_0 – некоторые константы. Дважды дифференцируя функцию (3) по времени, находим

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).\qquad (4)$$

Подставляя выражения (4) и (3) в уравнение (2), получаем:

$$(-m\omega_0^2 + k)A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0.$$

(5)

Поскольку $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ не является тождественным нулем, то функция (3) будет решением уравнения (2) , если

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.\qquad (6)$$

Постоянные A и φ_0 могут быть определены из дополнительных условий, которые в данном случае называются начальными условиями колебательного процесса: $x(0) = x_0$ и $v(0) = v_0$, где $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ – скорость движения частицы.

Движение частицы, происходящее по закону (3), называют *гармоническими колебаниями*.

Функция $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ называется *фазой колебаний*, а константа $A = x_{\max}$ – *амплитудой колебаний*.

Постоянную (6), определяющую период $T = 2\pi/\omega_0$ координатной функции $x(t)$ (время одного полного колебания), называют *циклической, или круговой частотой* колебаний. Интервал времени T называют *периодом колебаний*, за это точка время четыре раза откланяется от положения равновесия на амплитуду.

Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее колебания в однородном поле силы тяжести относительно горизонтальной неподвижной оси (точка подвеса O), не проходящей через центр тяжести (точка центра масс C) тела (рис. 1). Это механическая система, обладающая одной степенью свободы.

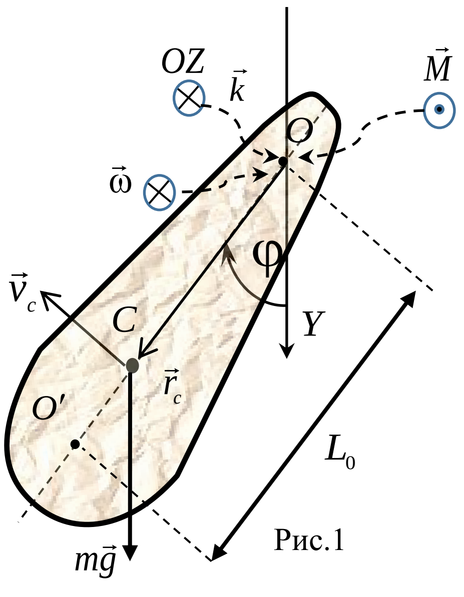


Рис.1

Если маятник отклонить от положения равновесия на некоторый угол и отпустить, то он будет совершать *локально-вращательное* движение в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной фиксированной оси. Любая точка, принадлежащая телу, будет двигаться по дуге окружности.

В качестве обобщенной координаты физического маятника выбирается φ – угол отклонения прямой OC от вертикали. На рис.1 показано положительное направление отсчета угла φ от нулевого значения.

Ось OZ и ее единичный вектор $\vec{k}$ направлены перпендикулярно плоскости рисунка и от нас. Этому факту соответствует кружок с крестом $\otimes$ на рис.1. В соответствии с векторным определением $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_c$, вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ также направлен по оси OZ, то есть в *данный момент времени* тело движется справа налево.

Полагаем, что моменты силы трения в оси подвеса тела и силы сопротивления, действующей на него со стороны воздуха пренебрежимо малы. Тогда на маятник массой m действуют два момента внешних сил: момент силы тяжести $m\vec{g}$ и силы нормальной реакции опоры $\vec{N}$.

Сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ в процессе движения маятника все время меняет направление, однако ее радиус-вектор относительно точки O равен нулю, поэтому момент силы нормальной реакции опоры относительно точки O равен нулю.

В соответствии с определением, вектор момента силы тяжести относительно точки O равен $\vec{M} = \vec{r}_c \times m\vec{g}$ и направлен против оси OZ. Этому факту соответствует кружок с точкой $(\bullet)$на рис.1, то есть вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно к плоскости рисунка и к нам.

Основное уравнение вращательного движения физического маятника вокруг фиксированной оси подвеса OZ имеет вид:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \tag{7}$$

где I_z – момент инерции маятника относительно оси Z.

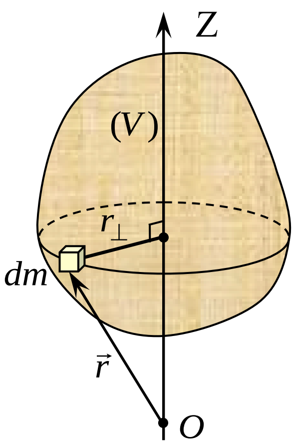


Рис. 2

Момент инерции I_z твердого тела относительно некоторой неподвижной оси OZ – скалярная физическая величина, являющаяся наряду с массой количественной мерой инертности этого тела при его вращательном движении вокруг данной оси, и равная: $I_z = \int\limits_{(V)} r_\perp^2 dm$, где dm – масса малого элемента тела, находящегося в точке с радиус-вектором $\vec{r}$; $r_\perp$ – расстояние от этого элемента до оси (рис. 2). Размерность величины момента инерции СИ – $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Из определения следует, что момент инерции является величиной *аддитивной*, т. е. момент инерции твердого тела относительно некоторой неподвижной оси равен сумме моментов инерции всех частей этого тела относительно той же оси.

Момент инерции твердого тела относительно некоторой неподвижной оси зависит от распределения его массы относительно выбранной оси, т. е. от массы тела, его геометрической формы и размеров, а также от взаимного расположения оси и данного тела. Поэтому одно и то же тело относительно различных осей обладает разными моментами инерции.

Теорема Штейнера. Момент инерции I_z относительно произвольной оси OZ равен сумме момента инерции I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела m на квадрат расстояния r между этими осями: $I_z = I_C + mr^2$.

Проекция момента силы тяжести $\vec{M}$ на ось OZ определяется скалярным произведением $M_z = \vec{M} \cdot \vec{k} = \left|\vec{M}\right| \cdot \left|\vec{k}\right| \cdot \cos 180^o = -mgr_c \cdot \sin\varphi$. Поскольку проекция вектора угловой скорости на ось OZ положительна и равна $\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то уравнение движения физического маятника запишется в виде:

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr_c \sin\varphi. \qquad (8)$$

Если ограничиться случаем малых колебаний, то есть углы отклонения удовлетворяют в радианной мере приближенному равенству $\sin\varphi \approx \varphi$, то уравнение (8) будет иметь вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\mathrm{mgr_c}}{\mathrm{I_z}}\varphi = 0 \ . \qquad (9)$$

Сравнивая выражения (9) и (2), заключаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (10)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr_c}{I_z}}, \qquad (11)$$

где φ_m – угол наибольшего отклонения маятника от положения равновесия. Из (11) вытекает, что период малых колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgr_c}}. \qquad (12)$$

В соответствии с формулой (10), малые колебания физического маятника являются гармоническими.

Далее, замечаем, что отношение $\dfrac{I_z}{mr_c}$ имеет размерность длины: $\left[\dfrac{I_z}{mr_c}\right] = \dfrac{кГ \cdot м^2}{кГ \cdot м} = м$. Учитывая это обстоятельство, введем понятие *приведенной длины* физического маятника:

$$L_0 = \frac{I_z}{mr_c}. \qquad (13)$$

Тогда выражение (12) приобретает вид аналогичный формуле периода колебаний *математического* маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}. \qquad (14)$$

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Приведенная длина физического маятника всегда больше r_c. Действительно, согласно теореме Штейнера,

$$I_z = I_c + mr_c^2, \quad (15)$$

где I_c – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси OZ (рис. 1).

Разделив левую и правую стороны выражение (16) на mr_c, находим

$$\frac{I_z}{mr_c} = \frac{I_c}{mr_c} + r_c.$$

Так как, по определению, $\frac{I_z}{mr_c} = L_0$, то $L_0 = \frac{I_c}{mr_c} + r_c$ и, следовательно, $L_0 > r_c$.

Центром качания физического маятника называют точку O', лежащую на прямой, проходящей через точку подвеса O и центр масс C, на расстоянии приведенной длины от точки O.

Точка подвеса и центр качания обладают *свойством взаимности*: если точку подвеса O и центр качания O' поменять местами, то период малых колебаний физического маятника не изменится.

Действительно, новый период колебаний будет равен

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgr}}, \quad (16)$$

где I' – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O', $r = L_0 - r_c$ – расстояние от точки O' до точки центра масс C. Выполняя подстановку для $I' = I_c + mr^2$, согласно теореме Штейнера, получаем

$$T'^2 = \frac{4\pi^2}{mg}\frac{I_c + mr^2}{r} \quad \text{или} \quad r^2 - \frac{gT'^2}{4\pi^2}r + \frac{I_c}{m} = 0, \quad (17)$$

Последнее выражение есть приведенное квадратичное уравнение относительно переменной r. По теореме Виета, сумма корней такого уравнения равна $r_1 + r_2 = \frac{gT'^2}{4\pi^2}$, а произведение – $r_1 \cdot r_2 = \frac{I_c}{m}$.

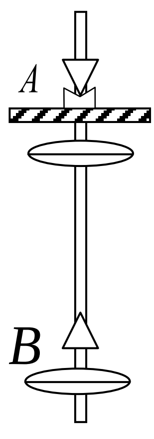


*Рис.*3.

Откуда следует, что если период T' не изменяется для разных точек подвеса, то сумма корней есть постоянная величина: $\frac{gT'^2}{4\pi^2} = r_1 + r_2 = const$.

Так как мы меняли точки подвеса с $r_1 = r_c$ на $r_2 = r$, то

$$r_1 + r_2 = (L_0 - r_c) + r_c = L_0.$$

Ускорение свободного падения в поле тяжести Земли можно найти, зная приведенную длину физического маятника:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}L_0. \quad (18)$$

ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

На свойстве взаимности точки подвеса и центра качания основано определение ускорения свободного падения с помощью, так называемого *оборотного маятника*. Оборотным называется физический маятник, у которого имеются две опорные призмы, за которые он может поочередно подвешиваться (рис.3).

Они параллельны друг другу и закреплены на осевом стержне маятника, вдоль которого могут закрепляться и перемещаться тяжелые грузы.

Перемещением опорных призм добиваются того, чтобы *при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков.* Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно приведенной длине L_0. Если измерить длину L_0 и соответствующий ей период колебаний маятника $T_0 = \frac{t_0}{n}$, тогда можно по формуле (19) найти ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 n^2 L_0}{t_0^{\,2}}, \qquad (19)$$

где t_0 – время n полных колебаний маятника.

Таким образом, главная задача прямых измерений, с помощью которых определяется значение ускорения свободного падения, сводится к измерению приведенной длины физического маятника.

В условиях эксперимента точное определение приведенной длины затруднено, поэтому мы будем изучать, как зависит период колебаний маятника от расстояния между призмами, перемещая последние вдоль стержня. Таким способом, возможно в *перспективе* найти совпадение периодов колебаний маятника при разных положениях опорных призм.

Решение этой задачи может быть получено графическим способом путем построения графиков функций $t^2(L) = \frac{4\pi^2 n^2 L}{g}$ для разных опорных призм. Точка пересечения этих графиков для одинаковых периодов колебаний с разными точками подвеса, будет соответствовать искомому расстоянию между призмами L, которое будет равно приведенной длине физического маятника L_0.

Порядок выполнения работы

1. Располагаем опорные призмы A и B оборотного маятника на максимальном удалении друг от друга. Измеряем расстояние AB_1 между опорными рёбрами призм.
2. Подвешиваем маятник за призму A. Отклоняем его на угол не более 15^0 и измеряем время t_{1A} пяти полных колебаний (n = 5). Опыт повторяем 3 раза, данные вносим в Таблицу 1.
3. Переворачиваем маятник так, чтобы призма B оказалась *вверху*, то есть стала *опорной.* Расстояние между призмами остается неизменным AB_1. Отклонив маятник на угол не более 15^0, отсчитываем время t_{1B} пяти полных колебаний. Опыт повторяем 3 раза, данные вносим в Таблицу 1.

4. При *верхнем* положении призмы *В,* уменьшаем расстояние между опорными призмами *А* и *В* до величины BA_1, сместив *нижнюю* призму *А* на два деления.

5. Переворачиваем маятник так, чтобы призма *А* оказалась *вверху*, то есть стала *опорной.* Расстояние между призмами остается неизменным BA_1 . Отклонив маятник на угол не более 15^0, отсчитываем время $t_{2\text{A}}$ пяти полных колебаний. Опыт повторяем 3 раза, данные вносим в Таблицу1.

6. При *верхнем* положении призмы *А,* уменьшаем расстояние между опорными призмами *А* и *В* до величины AB_3, сместив *нижнюю* призму *В* на два деления.

Обратить внимание на чередование буквенных индексов в Таблице 1.

7. Переворачиваем маятник так, чтобы призма *В* оказалась *вверху*, то есть стала *опорной.* Расстояние между призмами остается неизменным AB_4 . Отклонив маятник на угол не более 15^0, отсчитываем время $t_{2\text{B}}$ пяти полных колебаний. Опыт повторяем 3 раза, данные вносим в Таблицу1.

8. Выполняем измерения аналогично (см. п.2 и п.3) для других расстояний между опорными призмами, данные вносим в Таблицу 1.

Таблица 1

	AB_1	t_{1A}	BA_2	t_{1B},	AB_3	t_{2A},	BA_4	t_{2B},	…	AB_9	t_{5A}	BA_{10}	t_{5B}	n	$\Delta L\cdot10^{-2}$, м	Δt, с	g, м/с^2	Δg, м/с^2
1.														5				
2.														5				
3.														5				
Ср.														5				

9. По полученным данным составить Таблицу 2, где L_A принимает значения $AB_1, .. AB_5$, а t_A принимает значения $t_{1A}, .. t_{5A}$ и т.д.. Построить графики функций $t^2{}_A\,(L_A)$ и $t^2{}_B\,(L_B)$ в одной системе координат.

Таблица 2

	L_A, м	$t^2{}_A$, с^2	L_B, м	$t^2{}_B$, с^2
AB_1		.		
BA_2				.
AB_3		.		
BA_4				.
AB_5		.		
…				.

10. Определить координаты $(L_0;\, t_0{}^2)$ точки пересечения графиков, где L_0 – приведенная длина, а t_0 – соответствующее ей время пяти полных колебаний физического маятника.

11. Вычислить среднее значение ускорение свободного падения по формуле:

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 n^2 L_0}{t_0^2}.$$

12. Вычислить абсолютную погрешность величины ускорения свободного падения по формуле: $\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t_0, L_0} \cdot \Delta t + \left|\frac{\partial g}{\partial L}\right|_{t_0, L_0} \cdot \Delta L$.

13. Полученные значения внести в Таблицу 1.

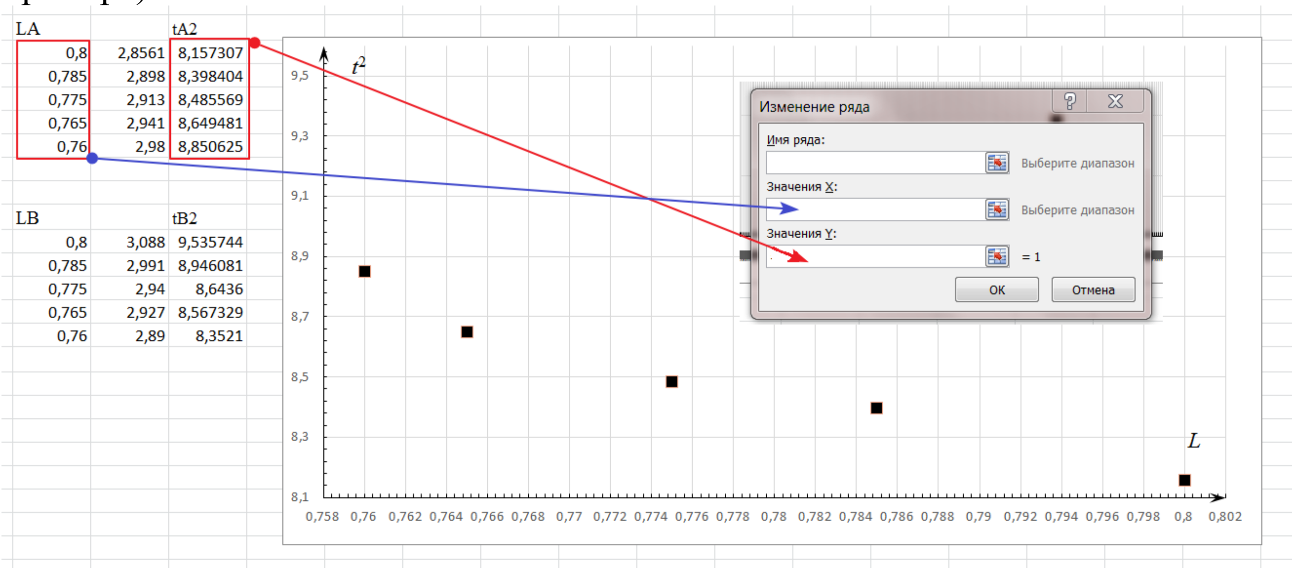
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие физические процессы называются колебаниями? Дайте определение свободных и вынужденных колебаний.
2. Какие колебания называют гармоническими? Запишите дифференциальное уравнение гармонический колебаний и его общее решение. Дайте определение амплитуды, частоты и фазы гармонических колебаний.
3. Что собой представляет физический маятник? Запишите дифференциальное уравнение колебаний физического маятника и его общее решение в случае малых колебаний.
4. Какая сила называется квазиупругой? Какую роль она играет в колебательном движении?
5. Получите формулу периода колебаний физического маятника.
6. Что называется приведенной длиной физического маятника? Центром качания?
7. Сформулируйте свойство взаимности точки подвеса и центра качания.
8. Как свойство взаимности точки подвеса и центра качания применимо в работе?

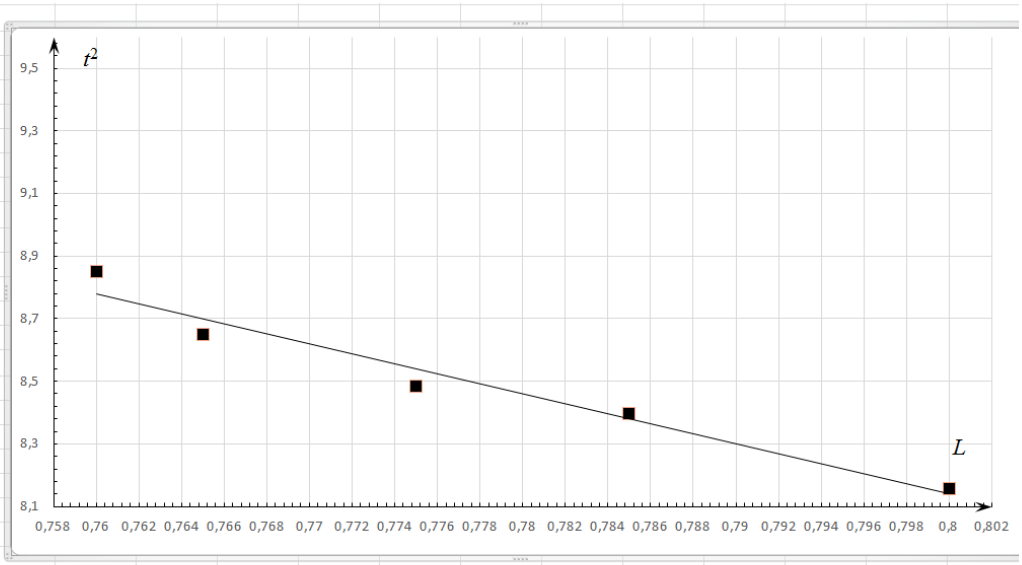
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Построение графика функции $t^2 = t^2(L)$ в *MS Excel*.

1. Ввести данные в виде столбцов для L_A и t_A^2 (данные приведены качестве примера).



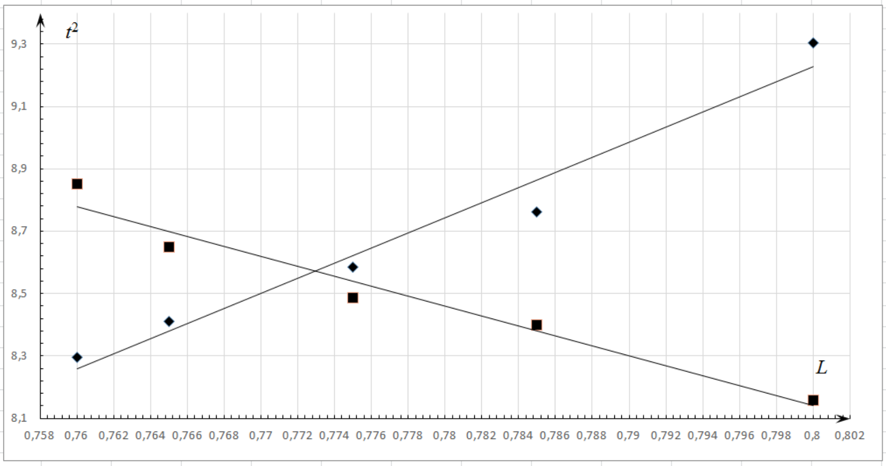
2. Из меню «Вставка» выбрать «Точечная диаграмма» Кликнуть правой клавишей в область диаграммы, «Выбрать данные». Выделить курсором ячейки с численными данными L_A и t_A^2. Нажать «ОК». Кликнуть правой клавишей любой маркер диаграммы и добавить «Линия тренда», там выбрать «Линейная».



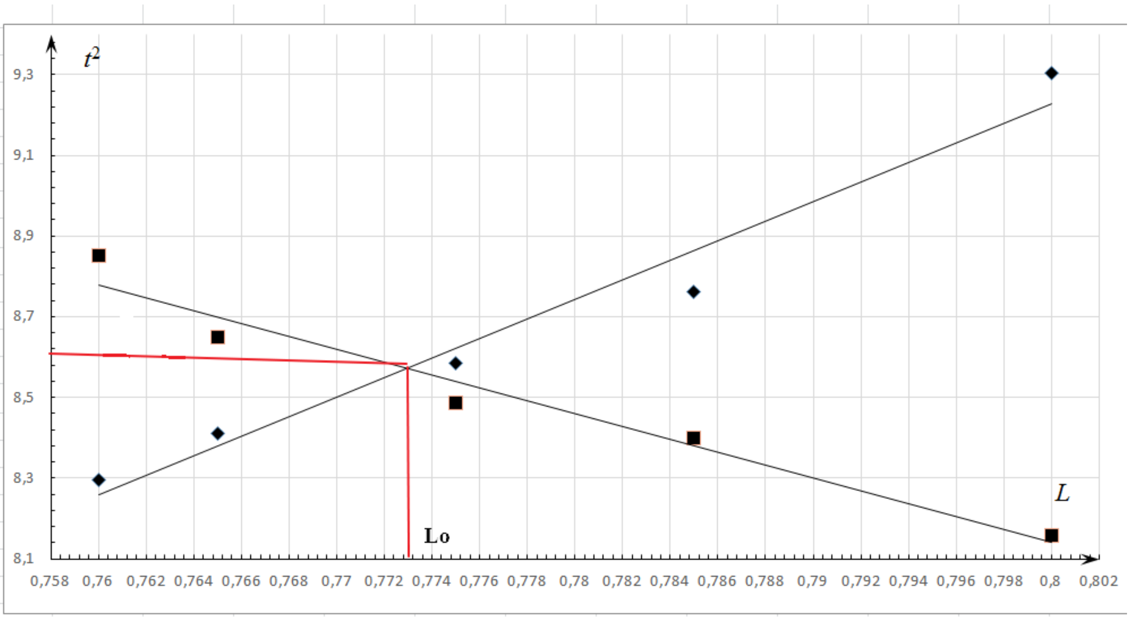
3. Ввести данные в виде столбцов для $L_В$ и $t_В^2$. Кликнуть по диаграмме правой клавишей в открывшемся меню «Выбрать данные»: для «х» выделить столбец $L_В$, для «*y*» – выделить столбец $t_В$. Кликнуть по маркерам и выбрать «Добавить линию тренда», линейная.

LA		tA2
0,8	2,8561	8,157307
0,785	2,898	8,398404
0,775	2,913	8,485569
0,765	2,941	8,649481
0,76	2,98	8,850625

LB		tB2
0,8	3,05	9,3025
0,785	2,96	8,7616
0,775	2,93	8,5849
0,765	2,9	8,41
0,76	2,88	8,2944



4. Найти пересечения координаты пересечения графиков:



ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики : [учебное пособие] : в 5 кн. Кн. 1 : Механика / И.В.Савельев. – М. : Астрель : АСТ, 2008. – 336 с. : ил.
2. Наркевич И.И. Физика : учебник [утв. МО РБ] / И. И. Наркевич, Э.И.Волмянский, С. И. Лобко. – Минск : Новое знание, 2004. – 680 с.