ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Лектор: Князева Людмила Павловна

Темы курса «Высшая математика» :

Наименование раздела, темы	Всего аудиторных часов	Лекции, часы	Практические занятия, часы
Тема 1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра			
Тема 2. Введение в математический анализ			
Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной			
Тема 4. Интегральное исчисление функций одной переменной			
Тема 5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных			
Тема 6. Интегральное исчисление функций многих переменных			
Тема 7. Дифференциальные уравнения и системы			
Тема 8. Числовые и функциональные ряды			

Темы курса «Численные методы»:

Наименование раздела	Лекции, часы	Практические занятия по подгруппам, часы	Индивидуальные практические занятия, часы
1. Введение в численные методы. Теоретические основы численных методов. Основы теории погрешностей	4	2	2
2. Методы интерполирования и приближения функций	6	2	2
3. Численные методы линейной алгебры	4	2	2
4. Решение нелинейных уравнений	4	2	2
5. Численное интегрирование и дифференцирование	4	2	2
6. Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем	4	2	2

Вид аудиторных занятий	Количество		
Лекции	**15**		
Практические занятия по подгруппам = **Лабораторные работы**	**6**		
Типовой расчет	**1**		
ЭКЗАМЕН	**1/2/3**		

Введение в численные методы.

Теоретические основы численных методов. Основы теории погрешностей

Тема 1

Введение в численные методы

1.1 **Математическое моделирование и использование вычислительной техники в решении прикладных задач.**

Вычислительный эксперимент и его этапы.

Вычислительные задачи. Корректность и обусловленность вычислительных задач.

Вычислительные алгоритмы.

Численные методы. Корректность и реализуемость численного метода

Введение в численные методы

1.2 **Источники и классификация погрешностей.**

Неустранимая погрешность. Погрешность метода.

Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Значащие и верные цифры. Погрешности (относительные) арифметических операций. Погрешность функции одной и многих переменных. Обусловленность вычислительной задачи.

Представление чисел в ЭВМ. Понятия машинного эпсилон, машинной бесконечности, машинного нуля. Катастрофическая потеря точности при выполнении арифметических операций.

1.3 **Обзор инструментальных программных средств** пакетов прикладных программ Mathematica, Mathcad и др.

Введение в численные методы. Моделирование

Моделирование - это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается ***не сам интересующий нас объект***, а некоторая ***вспомогательная*** искусственная или естественная ***система (модель):***

- находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;
- способная замещать его в определенных отношениях;
- дающая при её исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте.

Математическое моделирование - процесс построения и изучения **математических моделей**.

Под **математической моделью** понимают математически формализованное представление знаний об основных закономерностях и связях, присущих изучаемому явлению.

Математическая модель – это система математических отношений, описывающих ***с требуемой точностью*** изучаемый объект и его поведение в реальных условиях.

Как правило, это наборы правил или соглашений, выраженные в математической форме, которые описывают реальный объект, составляющие его характеристики и взаимосвязи между ними.

Это могут быть *формулы, уравнения, система математических уравнений, неравенств, формул и различных математических выражений.*

Основные свойства математических моделей

- **Полнота** – позволяет отразить в достаточной мере те характеристики и особенности объекта или явления, которые интересуют исследователя с точки зрения поставленной цели проведения вычислительного эксперимента.

- **Точность** – дает возможность обеспечить приемлемое совпадение значений характеристик реального объекта и значений этих характеристик полученных с помощью модели.

- **Адекватность** - способность отражать нужные свойства объекта с погрешностью не выше некоторого заданного значения.

- **Экономичность** – оценка затрат на вычислительные ресурсы (машинное время и память), необходимые для реализации математической модели на ЭВМ.

Введение в численные методы. Вычислительный эксперимент

В настоящее время выработалась новая технология и методология в научных и прикладных исследованиях сложных проблем, основанная на построении и анализе с помощью компьютера математических моделей изучаемого объекта, названная **вычислительным экспериментом.**

Вычислительный эксперимент – это эксперимент, проводимый на компьютере, над *математической моделью* объекта. И состоит он в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие её параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах объекта (процесса, явления), описываемого математической моделью.

Схематически этапы вычислительного эксперимента можно представить следующим образом:

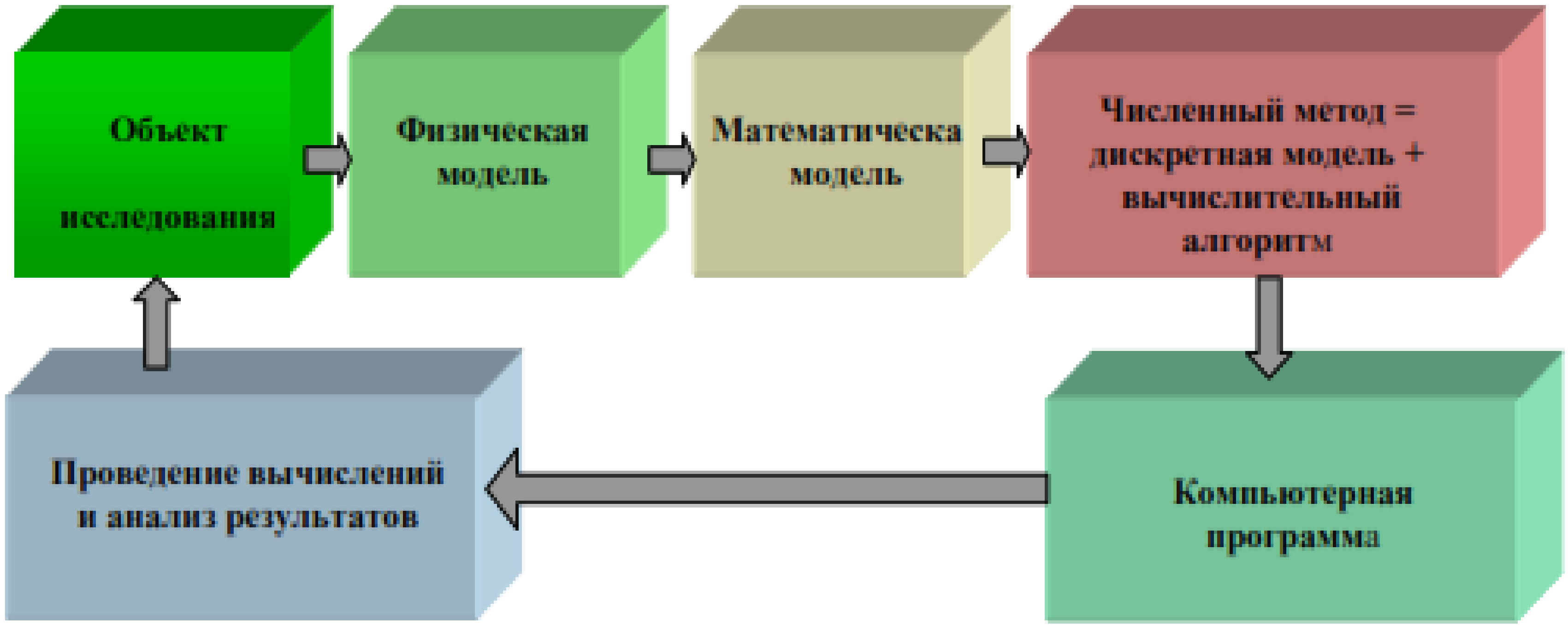

Схема вычислительного эксперимента

Введение в численные методы

Под **численным методом** понимается совокупность дискретной модели, реализуемой на компьютере, и вычислительного алгоритма, позволяющего решить дискретизированную задачу.

Численный метод реализуется на одном из языков программирования или применяется готовый пакет прикладных программ. В настоящее время существуют пакеты прикладных программ, такие как MathCAD, Matlab, Maple, Mathematica и другие, позволяющие решить большинство встречающихся на практике вычислительных задач.

Однако грамотная постановка задачи, рациональный выбор метода решения и правильная интерпретация результатов требуют серьезных знаний численных методов.

Введение в численные методы

Одной и той же *математической модели* можно поставить в соответствие множество дискретных моделей и вычислительных алгоритмов, т. е. численных методов. При выборе численного метода необходимо учитывать две группы требований:

- дискретная модель должна быть адекватной математической модели;
- численный метод должен быть корректным и реализуемым на компьютере.

Для обеспечения адекватности дискретная модель должна обладать свойствами *сходимости численного метода, выполнения дискретных аналогов законов сохранения и качественно правильного поведения решения*.

Введение в численные методы

В узком смысле под ***численными методами*** понимают методы ***приближённого решения*** математических задач, сводящиеся к **выполнению конечного числа элементарных операций над числами.**

Введение в численные методы. Погрешности

На каждом этапе математического моделирования вносятся те или иные погрешности. Они обусловлены следующими причинами:

a) математическое описание задачи является упрощенным;
b) недостаточно точно заданы исходные данные, являющиеся, как правило, результатом проведенных экспериментов;
c) всякий численный метод является приближенным в том смысле, что он не дает точного решения задачи, (для точного решения, например, может потребоваться неограниченно большое число арифметических операций);
d) в самом процессе решения задачи в ЭВМ при вводе исходных данных, выполнении арифметических операций и при выводе результатов производятся округления.

Погрешности в решении задачи, обусловленные пунктами «a» и «b», называются **неустранимыми**.

При переходе от математической модели к численному методу (пункт «c») возникает *погрешность метода*.

Построение численного метода для математической модели состоит из двух этапов – формулировки дискретной модели и разработки вычислительного алгоритма, позволяющего отыскать решение дискретной задачи.

Соответственно погрешность метода подразделяется на *погрешность дискретизации* или *погрешность аппроксимации* и на возникающую в процессе решения (пункт «d») *вычислительную погрешность* или *погрешность округления*.

Введение в численные методы. Погрешности

Полная погрешность является результатом сложного взаимодействия всех видов погрешностей и ответ на вопрос, какая из трех погрешностей является преобладающей, не может быть однозначным. *Погрешность округления* не должна быть существенно больше *погрешности метода вычисления*. В противном случае произойдет потеря точности метода за счет ошибок округления.

Численный метод считается удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность округления по крайней мере в несколько раз меньше погрешности метода. Типичной является ситуация, когда неустранимая погрешность значительно превышает погрешность метода, а вычислительной погрешностью можно пренебречь по сравнению с погрешностью метода. В общем случае надо стремиться, чтобы погрешности имели один порядок.

Математическое моделирование. Пример

ПРИМЕР. Определить плотность материала, из которого изготовлена фигура.

Математическое моделирование

Рассмотрим этапы «моделирования»:

«Физическая модель» :

$$плотность = \frac{масса}{объём}$$

«Математическая модель»:

$$\hat{p} = \frac{\hat{m}}{\hat{v}} = \frac{m + \Delta m}{v + \Delta v}$$

Объект исследования – состоит из 3-х частей: шар, цилиндр и тело вращения с известной формой образующей:

$$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3{}_{шара}$$

$$V_{цилиндра} = \pi \cdot R^2{}_{цил} \cdot H_{цил}$$

$$V_{телавращ} = \pi \int_0^{H_{тела}} g^2(y)dy, \qquad x = g(y) - ур.образующей$$

Вычислительная погрешность

Рассмотрим погрешность вычисления объема шара, вызванную неточным измерением радиуса:

$$\left(V_{шара} + \Delta v_{шара}\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(R_{шара} + \Delta r_{шара}\right)^3$$

$$\left(V_{шара} + \Delta v_{шара}\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(R_{шара} + \Delta r_{шара}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(R_ш^3 + 3R_ш^2 \Delta r_ш + 3R_ш \Delta r^2{}_ш + \Delta r^3{}_ш\right) \approx$$

$$\approx \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(R_ш^3 + 3R_ш^2 \Delta r_ш + \ldots\right) \approx \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_ш^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3R_ш^2 \cdot \Delta r_ш =$$

$$= V_{шара} + \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3R_ш^2 \cdot\right) \Delta r_ш$$

$$\Delta v_{шара} = \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3R_ш^2 \cdot\right) \Delta r_ш$$

Вычислительная погрешность

Рассмотрим погрешность вычисления объема цилиндра, вызванную неточным измерением радиуса и высоты:

$$\left(V_{цил} + \Delta v_{цил}\right) = \pi \cdot \left(R_{цил} + \Delta r\right)_{цил}^{\;2} \cdot \left(H_{цил} + \Delta h_{цил}\right)$$

$$\left(V_{цил} + \Delta v_{цил}\right) = \pi \cdot \left(R_ц + \Delta r_ц\right)^2 \left(H_ц + \Delta h_ц\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(R_ц^2 \cdot H_ц + 2R_ц \cdot H_ц \cdot \Delta r_ц + H_ц \cdot \Delta r_ц^2 + R_ц^2 \cdot \Delta h_ц + 2R_ц \cdot \Delta h_ц \cdot \Delta r_ц + \Delta h_ц \cdot \Delta r_ц^2\right) \approx$$

$$\approx \pi \cdot \left(R_ц^2 \cdot H_ц + 2R_ц \cdot H_ц \cdot \Delta r_ц + + R_ц^2 \cdot \Delta h_ц + \ldots\right) =$$

$$= \pi \cdot R_ц^2 \cdot H_ц + \left(\pi \cdot 2R_ц \cdot H\right)_ц \cdot \Delta r_ц + \left(\pi \cdot R_ц^2\right) \cdot \Delta h_ц$$

$$\Delta v_{цил1} = \left(\pi \cdot 2R_ц \cdot H\right)_ц \cdot \Delta r_ц$$

$$\Delta v_{цил2} = \left(\pi \cdot R_ц^2\right) \cdot \Delta h_ц$$

Вычислительная погрешность

Погрешность вычисления объема тела вращения складывается из:

- неустранимой погрешности измерения высоты,
- погрешности аппроксимации функции,
- погрешности численного метода интегрирования.

$$V_{телавращ} = \pi \int_0^{H_{тела}+\Delta h} \hat{g}^2(y)dy, \qquad x = \hat{g}(y) - ур.образующей$$

Вычислительная погрешность

Погрешность вычисления объема шара вызвана помимо неточного измерения радиуса

- невозможностью «точно» записать значения рациональной дроби (4/3);
- невозможностью «точно» записать значения иррационального числа («пи»):

$$\left(V_{шара} + \Delta v_{шара}\right) = \left(\frac{4}{3} + \Delta_{\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(\pi + \Delta_{\pi}\right) \cdot \left(R_{шара} + \Delta r_{шара}\right)^{3} = f\left(\frac{4}{3}, \pi, R\right)$$

Введение в численные методы. Погрешности

При анализе погрешностей возникают две задачи:

прямая - зная точность исходных данных, требуется ***оценить точность полученного результата***, и

обратная – требуется ***определить точность, с которой необходимо задавать исходную информацию***, чтобы обеспечить требуемую точность решения.

- И в том, и в другом случае необходимо представление о точных и приближенных числах, абсолютной и относительной погрешностях, о представлении чисел в ЭВМ и накоплении погрешности при их выполнении.

Прямая задача теории погрешностей

Для оценки влияния погрешностей округления на результат вычислений по некоторому алгоритму (*прямая задача теории погрешностей*), предполагают, что этот результат является действительной функцией от входных параметров:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Поскольку входные данные $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n$ не точные, то $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots \hat{x}_n)$ - приближенное значение результата.

Если $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, то по формуле конечных приращений Лагранжа имеем следующую оценку погрешности:

$$\Delta y = y - \hat{y} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots \hat{\theta}_n)}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

$$m_k = \max \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_k}$$

Здесь точка $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots \hat{\theta}_n)$ расположена между $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots \hat{x}_n)$ и $(x_1, x_2, \dots x_n)$

Оценка показывает, что накопление погрешностей округления зависит от величины входных параметров и от характера алгоритма.

Коэффициенты
$$K_i = \frac{x_i}{f(x_1, x_2, \ldots x_n)} \cdot \frac{\partial f(\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n)}{\partial x_i}$$

являются коэффициентами усиления относительных погрешностей входных данных.

Если значения всех коэффициентов усиления ограничены по абсолютной величине единицей, то накопления погрешностей не происходит.

Коэффициенты ***Ki*** часто называют ***числами обусловленности*** задачи.

Обратная задача теории погрешностей

Для случая дифференцируемой функции одной переменной грубое решение обратной задачи очевидно:

если $y = f(x)$, то $|\Delta y| = |f'(x^*)| \cdot \Delta(x)$ откуда

$$|\Delta x| \approx \frac{\Delta y}{|f'(x^*)|}$$

Для функций большего числа переменных обратная задача, вообще говоря, некорректна. Для ее решения нужны дополнительные условия. Например, можно применить принцип равных влияний, состоящий в предположении, что частные дифференциалы одинаково влияют на погрешность значения функции.

Основы теории погрешностей

При численном решении задач **числа** задаются ограниченным набором цифр в некоторой позиционной системе счисления (десятичной, двоичной), то в численных методах:

- числовая прямая заменяется дискретной системой чисел (сеткой) и перестает быть «непрерывной»;
- функция непрерывного аргумента заменяется таблицей её значений в узлах сетки;
- операции анализа, действующие над непрерывными функциями, заменяются алгебраическими операциями над значениями функций в сетке.

Основы теории погрешностей

В численных методах оперируют двумя видами чисел - *точными* и *приближенными*.
К точным относятся числа, которые дают истинное значение исследуемой величины. К приближенным относятся числа, близкие к истинному значению, причем степень близости определяется погрешностью вычислений.

Пусть a - точное, вообще говоря, неизвестное значение некоторой величины, a^* - известное приближенное значение этой величины.

Величина $\Delta(a^*) = |a - a^*|$ называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа a^*,

величина $\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$ называется его *относительной погрешностью.*

Основы теории погрешностей

Поскольку точное значение a определяемой величины неизвестно, то и погрешности $\Delta(a^*)$ и $\delta(a^*)$ тоже неизвестны. Однако, бывают известны **оценки** Δ и δ сверху и снизу этих величин, т.е. для чисел Δ и δ выполнены неравенства:

$$\boldsymbol{\Delta(a^*) \le \Delta,\ \Delta\delta(a^*) \le \delta}$$

Числа Δ и δ называются *предельной абсолютной и предельной относительной погрешностью* приближенного числа a^*.

Практическое применение изложенного состоит в нахождении для числа a приближения $\underline{\Delta}$ с недостатком и приближения $\Delta\_$ с избытком, для которых $\underline{\Delta} \le a \le \Delta\_$.

В этом случае говорят, что имеется *интервал приближения величины а.*

Основы теории погрешностей

Предельной относительной погрешностью числа a называется любое число δ_a не меньшее его относительной погрешности $\Delta\delta(a^*)$:

$$\boldsymbol{\delta(a^*) \leq \delta_a}$$

$$\frac{\Delta a^*}{|a^*|} \leq \delta_a \Leftrightarrow |a^* - a| \leq \delta_a |a^*|$$

$$a^* - |a^*|\delta_a \leq a \leq a^* + |a^*|\delta_a$$

$$\boldsymbol{a = a^*(1 \pm \delta_a)}$$

Основы теории погрешностей

Запись приближенных чисел должна подчиняться правилам, связанным с понятиями о верных значащих цифрах.

Пусть $a = \overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots, a_i}$

Первая слева отличная от нуля цифра числа a и все расположенные справа от нее, называются значащими.

Пример:

числа 0.00028745 и 200.37500 имеют соответственно

5 и 8 *значащих* цифр.

Пример: $a = 124{,}705318$

$a^*{}_1 = 124{,}70$ – ноль – значащая цифра

$a^*{}_2 = 124{,}700000$ – первый ноль – значащая цифра, а остальные нет

Основы теории погрешностей

Цифра a_i числа, записанного в десятичной системе, называется верной в широком смысле, если абсолютная погрешность числа <u>не превосходит одной единицы</u> соответствующего разряда десятичного числа:

$$\Delta_a \leq 1 \cdot 10^i$$

Цифра a_i является верной в узком (= строгом) смысле, если предельная абсолютная погрешность не превышает половины единицы разряда в котором находится эта цифра:

$$\Delta_a \leq \frac{1}{2} \cdot 10^i$$

Цифры, не являющиеся верными, называются *сомнительными*. Если верная цифра a_i - значащая, то она называется *верной значащей цифрой*.

Основы теории погрешностей

Пусть $a = \overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots, a_i}$

Цифра a_i является верной в узком (= строгом) смысле, если предельная абсолютная погрешность не превышает половины единицы разряда в котором находится эта цифра.

$$\Delta_a \leq \frac{1}{2} \cdot 10^i$$

Цифра a_i является верной в широком смысле, если предельная абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда в котором находится эта цифра.

$$\Delta_a \leq 1 \cdot 10^i$$

Основы теории погрешностей

Вид записи приближенного числа должен показывать его абсолютную погрешность, которая не должна превосходить единицы последнего разряда, сохраняемого при записи.

Другими словами, приближенные числа принято записывать таким образом, чтобы все цифры числа, кроме нулей впереди, если они есть, были значащими и верными цифрами.

Пример. Числа a_1=34,174562 и a_2=375,16342 содержат пять верных цифр. Определить их абсолютную погрешность.

В числе a_1 последняя верная значащая цифра 4 находится на третьем месте после запятой, т.е. i=-3. Следовательно, по определению $\Delta(a_1) = 10^{-3}$ = 0,001. Во втором числе a_2 последняя значащая цифра 6 имеет индекс i=-2. Следовательно, $\Delta(a_2) = 10^{-2}$ = 0,01.

Основы теории погрешностей

Теоремы о погрешностях суммы/разности.

Теорема 1. *Абсолютная погрешность алгебраической суммы* приближённны х чисел не превосходит *суммы их абсолютных погрешностей*:

$$U = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n \qquad \Delta U \leq \Delta a_1 + \Delta a_2 + \cdots + \Delta a_n$$

$$|\Delta U| = |\pm \Delta a_1 \pm \Delta a_2 \pm \cdots \pm \Delta a_n| \leq |\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \cdots + |\Delta a_n|$$

Следствие 1:

Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме их предельных абсолютных погрешностей:

$$\Delta_u = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \cdots + \Delta_{a_n}$$

Основы теории погрешностей

Следствие 2:

Предельная погрешность суммы приближённых чисел *одного и того же знака* не превышает *наибольшей* из предельных относительных погрешностей этих чисел.

Основы теории погрешностей

Из полученных результатов вытекает следующее правило сложения приближенных *чисел различной абсолютной точности:*

- 1) выделяются числа, имеющие наибольшую абсолютную погрешность (числа наименьшей точности);
- 2) более точные числа округляются таким образом, чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в выделенном числе (запасной знак);
- 3) производится сложение или вычитание всех чисел с учетом сохраненных знаков;
- 4) полученный результат округляется на один знак

Основы теории погрешностей

Теоремы о погрешностях произведения/частного, степени.

Теорема 1. Абсолютная погрешность произведения приближённых чисел a_i, $\left(i = \overline{1, b}, a_i \neq 0\right)$ не превышает *взвешенной суммы* абсолютной погрешности сомножителей:

$$U = a_1 a_2 \dots a_n,, \Delta U = \frac{U}{m}(\Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots + \Delta a_n), m{=}min\{a_i\}.$$

Теорема 2. Относительная погрешность произведения нескольких приближённых чисел ($\neq 0$) не превосходит суммы относительных погрешностей сомножителей:

$$\delta_u = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_n}.$$

Основы теории погрешностей

Следствие 1: Предельная относительная погрешность произведения $u = a_1 a_2 \dots a_n \quad (a_i \neq 0)$ равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел $\delta_u = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_n}$.

Следствие 2: Предельная относительная погрешность m-ой степени приближённого числа равна: $\delta_{a^m} = m\delta_a$

Следствие 3: Предельная относительная погрешность $\sqrt[k]{a} \quad (k \in N)$ равна $\delta_{\sqrt[k]{a}} = \frac{1}{k}\delta_a$

Теорема. Относительная погрешность частного $u = \frac{a_1}{a_2} \quad (a_2 \neq 0)$ не превышает $\delta_u = \frac{\delta_{a_1} + \delta_{a_2}}{1 - \delta_{a_2}}$, если $\delta_{a_2} \ll 1$, то $\delta_u = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$.

Основы теории погрешностей

Из соотношений следует правило умножения приближенных чисел различной абсолютной точности:

- 1) выделяется число с наименьшим количеством верных значащих цифр;
- 2) оставшиеся сомножители округляются таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр в выделенном числе;
- 3) в произведении сохраняется столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет выделенное число.

Основы теории погрешностей

Правило подсчета верных цифр

1. При сложении и вычитании приближенных чисел младший сохраненный десятичный разряд результата должен являться старшим среди десятичных разрядов, выражаемых последними верными значащими цифрами исходных данных.

2. При умножении и делении в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При возведении приближенного числа в квадрат или куб в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет основание степени.

Основы теории погрешностей

4. При извлечении квадратного и кубического корней из приближенного числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет подкоренное число.

5. При вычислении промежуточных результатов следует сохранить на одну-две значащие цифры больше, чем рекомендуют правила 1 – 4. В окончательном результате эти «запасные» цифры отбрасываются.

6. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с m верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которое согласно предыдущим правилам обеспечивает $m+1$ верную цифру в результате.

Основы теории погрешностей

Выбранный приближенный метод реализуется неточно из-за ошибок округления, возникающих при вычислениях на реальном компьютере.

Изменение результатов вычислений, вызванное ошибками округления, называется *погрешностью округления* и сильно зависит от числа значащих цифр, используемых для записи чисел в ЭВМ. Учет этого вида погрешности является наиболее сложным.

При вычислениях в ЭВМ чаще всего используется представления числа в форме с плавающей запятой, т.е. в виде $\boldsymbol{a=M\,\beta^{p}}$, где $\boldsymbol{\beta}$ - основание системы счисления, $\boldsymbol{p}$ - порядок числа, $\boldsymbol{M}$ - мантисса числа .