

Численные методы линейной алгебры.

Тема 2

К численным методам линейной алгебры

относятся численные методы решения четырёх основных задач ЛА:

- решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);
- вычисление определителей квадратных матриц;
- нахождение обратной матрицы;
- нахождение собственных значений и векторов матриц (решение спектральной задачи линейной алгебры).

Исследование ряда научно-технических, экономических и прочих проблем приводит к *математическим моделям* непосредственно в форме систем линейных алгебраических уравнений.

Однако гораздо чаще они появляются в процессе *математического моделирования* как **промежуточный этап при решении более сложной задачи**, например, после дискретизации (и, если необходимо, линеаризации) *интегральных, дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений* или систем уравнений такого сорта.

В силу этого **задачи линейной алгебры являются наиболее часто решаемыми математическими задачами в процессе математического моделирования.**

Прямые методы решения систем
линейных алгебраических
уравнений (СЛАУ). Исследование
погрешностей решения СЛАУ
прямыми методами.

- Постановка задачи решения СЛАУ. Классификация систем линейных уравнений. Прямые и итерационные методы решения.
- Нормы векторов и матриц. Обусловленность задачи решения СЛАУ. Число обусловленности.
- **Метод Гаусса**: основная идея и схемы реализации (схема единственного деления и с выбором главных элементов). Алгоритмизация метода Гаусса. LU-разложение матрицы и его использование.
- **Метод прогонки**. Алгоритм и трудоемкость метода.
- Вычисление определителя и обратной матрицы.

Система линейных уравнений (общие сведения)

Решение СЛАУ — одна из классических задач линейной алгебры, во многом определившая её объекты и методы.

Система линейных алгебраических уравнений (*линейная система*, также употребляются аббревиатуры **СЛАУ**, **СЛУ**) — система уравнений, каждое уравнение в котором является **линейным** — *алгебраическим уравнением первой степени*.

В классическом варианте коэффициенты при переменных, свободные члены и неизвестные считаются *вещественными* числами, но все методы и результаты сохраняются (либо естественным образом обобщаются) на случай *комплексных чисел*.

Пример 1

Система из **двух уравнений** с **двумя неизвестными** имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 + 9x_2 = 15. \end{cases}$$

Чтобы найти неизвестные **x_1** , **x_2** нужно

1. Решить первое (верхнее) уравнение относительно **x_1** :

$$x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2,$$

2. Затем подставить полученное решение во второе (нижнее) уравнение и получить уравнение только с **x_2** :

$$4\left(3 - \frac{3}{2}x_2\right) + 9x_2 = 15.$$

3. Найти **x_2** , решив это уравнение. Потом подставить **x_2** в выражение для **x_1** .

Решение получено:

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$$

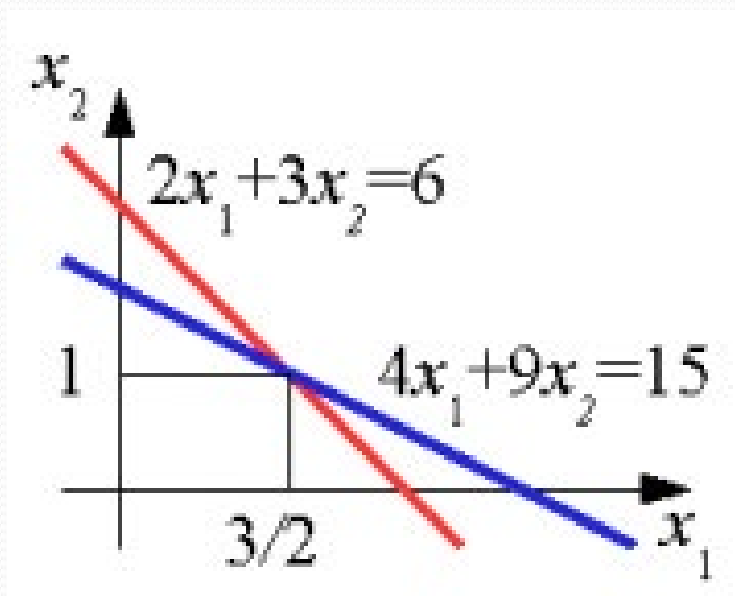
Пример 1

Данную систему можно наглядно изобразить на графике в виде двух прямых :

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \text{ и } y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{3}$$

Точка их пересечения является решением

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 + 9x_2 = 15. \end{cases}$$



Пример 2

Швейная фабрика в течении **трех дней** производила **костюмы, плащи и куртки**.

Известны: **объемы выпуска продукции** за три дня и **денежные затраты на производство** за эти три дня. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

День	Объем выпуска продукции(единиц)			Затраты (тыс.усл. ед)
	Костюмы	Плащи	Куртки	
I	50	10	30	176
II	35	25	20	168
III	40	20	30	184

Пример 2

Зная затраты на каждый день и количество произведенной продукции за день, составим систему линейных уравнений:

$$50x + 10y + 30z = 176;$$

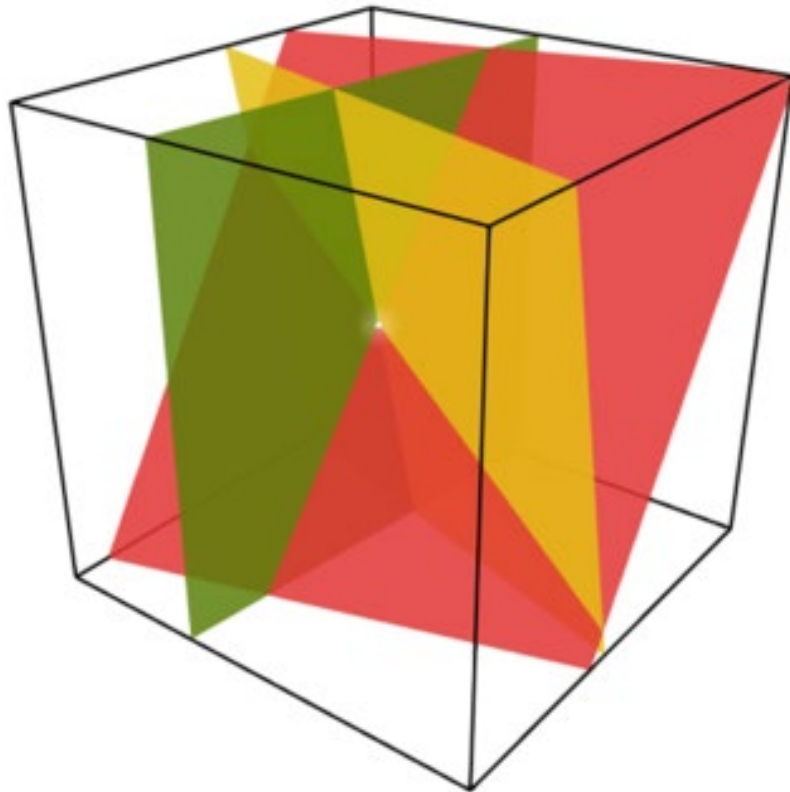
$$35x + 25y + 20z = 168;$$

$$40x + 20y + 30z = 184.$$

Решим систему и найдем себестоимость производства одного костюма - **1,8 тыс.усл.ед**,
производства одного плаща - **2,6 тыс.усл.ед** и
производства одной куртки - **2 тысячи усл.ед**.

Система линейных уравнений

Пример 2



Система линейных уравнений от трёх переменных определяет набор *плоскостей*:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Точка их пересечения является решением

Система линейных уравнений (общие сведения)

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь m — количество уравнений, а n — количество переменных x_1, x_2, \dots, x_n (неизвестных, которые надо определить), коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ и свободные члены b_1, b_2, \dots, b_m предполагаются известными.

Индексы коэффициентов: первый индекс (i) обозначает номер уравнения, второй (j) — номер переменной, при которой стоит этот коэффициент.

Система линейных уравнений (общие сведения)

В матричной форме система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Здесь \mathbf{A} — это матрица системы, \mathbf{x} — столбец неизвестных, а \mathbf{b} — столбец свободных членов.

Система линейных уравнений (общие сведения)

Если к матрице **A** приписать справа столбец свободных членов, то получившаяся матрица называется **расширенной**

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1(n+1)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & a_{m(n+1)} \end{array} \right]$$

С этой матрицей можно обращаться так же, как и с системой - **переставлять строки, прибавлять кратное одной строки к другой, исключая неизвестные и приводя матрицу к треугольному или диагональному виду.**

Система линейных уравнений (общие сведения)

Система называется **однородной**, если все её свободные члены равны нулю ($b_1, b_2, \dots, b_m = 0$), иначе — **неоднородной**.

Квадратная система линейных уравнений — система, у которой количество уравнений совпадает с числом неизвестных ($m=n$).

Система, у которой число неизвестных больше числа уравнений является ($n>m$) **недоопределённой**, если уравнений больше, чем неизвестных ($m>n$), то система является **переопределённой**.

Такие системы линейных алгебраических уравнений также называются **прямоугольными**.

Система линейных уравнений (общие сведения)

Решение системы линейных алгебраических уравнений — совокупность n чисел c_1, c_2, \dots, c_n , таких что их соответствующая подстановка вместо x_1, x_2, \dots, x_n в систему обращает все её уравнения в **тождества**.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если у неё нет ни одного решения. Решения считаются различными, если хотя бы одно из значений переменных не совпадает. Совместная система с единственным решением называется **определённой**, при наличии более одного решения — **недоопределённой**.

Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений)

[illegible]
$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений (общие сведения)

Метод Крамера. Решение системы может быть записано по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n$$

где $\Delta = \det(A)$, а Δ_i — определитель, получающийся из определителя матрицы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов b .

Казалось бы, формулы Крамера полностью решают задачу построения решения системы линейных уравнений. Однако, на практике они не используются.

Это объясняется тем, что **непосредственное вычисление определителя** требует более $n!$ арифметических операций что уже при $n = 30$ недоступно даже для самых мощных ЭВМ.

Система линейных уравнений (общие сведения)

Матричный метод решения. Решение системы с невырожденной матрицей может быть получено по формуле:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Для нахождения **обратной матрицы** A^{-1} наиболее распространённым методом – **методом алгебраических дополнений** – потребуется вычислить определитель матрицы A и n^2 алгебраических дополнений (каждое из которых – определитель $(n-1)$ -го порядка!).

Система линейных уравнений

На сегодняшний день есть необходимость в методах решения *систем большего порядка* – в приложениях приходится иметь дело с системами уравнений, размерности которых могут достигать значений $10^6 - 10^7$!

Системы такой размерности трудно себе представить! Еще труднее себе представить как такие системы решаются. В самом деле, если хранить матрицу A в памяти ЭВМ, то на это потребуется $Q = 8n^2$ байт памяти, если для хранения одного числа отводится 8 байт (как для чисел типа double).

При $n = 10^6$ получаем $Q = 8$ Терабайт.

Система линейных уравнений

Можно предположить, что для решения СЛАУ очень большой размерности нужны суперкомпьютеры. Однако, это не так по нескольким причинам:

- **Заполненность матриц** (наличием большого числа нулевых коэффициентов в СЛАУ).
- **Типы численных методов решения СЛАУ**
(существуют итерационные методы решения СЛАУ).
- **Точность решения** (в практических ситуациях не всегда нужна высокая точность решения).

Система линейных уравнений

Заполненность матриц. В приложениях приходится иметь дело с двумя типами матриц: с **плотными** и **разреженными** матрицами.

Матрицы, наличием нулевых элементов в которых можно пренебречь, называют **плотными** матрицами. Они хранятся в ЭВМ в виде двумерного массива и обращение к элементу этой матрицы требует небольших накладных расходов.

Матрицы, содержащие относительно небольшое число ненулевых элементов называют **разреженными матрицами**. СЛАУ с разреженными матрицами коэффициентов часто возникают при решении дифференциальное уравнение в частных производных.

Система линейных уравнений

Разреженные матрицы хранятся в памяти ЭВМ в специальном формате, причем хранятся только ненулевые элементы.

Примером такой матрицы является матрица достаточно большого размера n , на каждой строке которой имеется лишь небольшое число m ненулевых элементов. При $n = 106$, $m \approx 10$ для их хранения требуется ≈ 100 Мегабайт памяти.

Обращение к произвольному элементу a_{ij} такой матрицы требует больших накладных расходов, но, в зависимости от формата хранения, требует небольших расходов для доступа ко всем ненулевым элементам строки или столбца.

Система линейных уравнений

Помимо того, что для большинства вычислительных задач, встречающихся в настоящее время на практике, характерным является большой порядок n матрицы A , следует отметить еще одну особенность - серийность задачи.

Обычно требуется решить не одну, а целую серию СЛАУ с одной и той же или близкими матрицами и с разными правыми частями.

В связи с этим важное значение для сравнительного анализа численных методов решения задач линейной алгебры имеют оценки трудоемкости описываемых методов для решения подобных задач.

Методы решения СЛАУ

Методы решения СЛАУ делят на **прямые** (точные) методы и **итерационные** методы решения

К **прямым методам** относятся алгоритмы, которые в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить **точное** решение системы **за конечное число арифметических действий**. Т.е. метод называется прямым, если для нахождения решения требуется конечное число операций $+$, $-$, $*$, $/$ (и извлечений квадратного корня).

Например, **матричный метод** и **метод Крамера** являются прямыми методами.

Методы решения СЛАУ

Прямые методы только теоретически позволяют найти точное решение задачи.

При расчетах на ЭВМ из-за представления чисел конечным числом разрядов и большого числа операций (для плотных матриц прямые методы требуют порядка $O(n^3)$ операций) происходит накоплению погрешностей округления, иногда настолько значительное, что приводит к бессмысленному результату.

Некоторые **прямые методы**:

- **Метод Гаусса и его модификации:** Метод LU – разложения, метод Гаусса — Жордана, метод оптимального исключения неизвестных
- **Метод прогонки**

Методы решения СЛАУ

Итерационные методы позволяют за конечное число операций отыскать лишь **приближенное решение**, но **зато** позволяют получить его **с заданной точностью (!)**.

Они реализуются, чаще всего, как одношаговые или двухшаговые рекуррентные формулы и генерируют последовательность векторов-приближений, сходящуюся к решению. Итерационные методы не требуют обязательного хранения матрицы A - требуется уметь вычислять лишь произведение A на заданный вектор и не редки случаи, когда это можно сделать без хранения A .

Методы решения СЛАУ

Итерационные методы оказываются выгодными, если:

- нужна невысокая точность решения;
- при решении больших и сверхбольших систем;
- при решении СЛАУ со специальными матрицами.

Некоторые **итерационные методы**:

- **Метод Якоби** (метод простой итерации)
- **Метод Зейделя**
- Метод релаксации
- Многосеточный метод

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Согласно теореме Кронекера-Капелли система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов A имеет единственное решение, если определитель $\det(A)$ **не равен нулю**.

Такая матрица имеет обратную и называется **невырожденной**. Матрица, не имеющая обратной, называется соответственно **вырожденной**, у такой матрицы определитель равен нулю.

На практике встречаются матрицы (и соответствующие системы уравнений), **«близкие» к вырожденным**. Рассмотрим особенности решения таких систем на примере.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Пример 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,001 \\ 7,001 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,999 \\ 1,001 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1,001 & 2,001 \\ 2,001 & 3,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,003 \\ 0,997 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений считается хорошо обусловленной, если **малые изменения** в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают **малые изменения** в решении.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Пример 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3,999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7,999 \end{bmatrix}. \quad (1) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3,999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,001 \\ 7,998 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,999 \\ 4,000 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1,001 & 2,001 \\ 2,001 & 3,998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7,999 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,994 \\ 0,001388 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений считается **плохо обусловленной**, если **малые изменения** в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают **большие изменения** в решении.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Ошибки округления, совершенные в процессе вычислений, почти всегда приводят к тому, что вычисленное решение x^* в определенной степени отличается от теоретического решения $X = A^{-1} \cdot B$.

Для анализа реакции решения на «возмущение» системы используют два вектора

- **вектор ошибки** : $\Delta X = X^* - X$
- **вектор невязки** : $r = AX^* - B$.

Из теории матриц известно, что если **одна из этих величин равна нулю**, то и **другая также должна быть равна нулю**.

Но они не обязаны одновременно быть “малыми”. Поэтому, к сожалению, если **мала невязка**, **нельзя сделать вывод**, что и **ошибка мала**.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Если значение определителя матрицы A **не слишком близко к нулю**, то и невязка, и погрешность полученного решения будут достаточно **малы**.

В противном случае **по значению невязки нельзя судить о величине погрешности**.

Для матрицы, определитель которой не равен нулю, **обратная матрица** называется **устойчивой**, если малым изменениям элементов матрицы отвечают малые изменения элементов обратной матрицы, иначе обратная матрица называется **неустойчивой**.

Матрица называется **хорошо обусловленной**, если обратная матрица устойчива, в противном случае матрица называется **плохо обусловленной**.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Для большинства алгоритмов решения систем влияние ошибок округления можно учесть, используя **принцип эквивалентных возмущений**: считают, что

**процесс решения исходной системы
с учетом погрешностей округления
эквивалентен**

**точному решению некоторой возмущенной
системы:**

$$(A + \delta A)(\vec{x} + \delta \vec{x}) = (\vec{b} + \delta \vec{b})$$

Каждому вычислительному алгоритму соответствует своя **матрица эквивалентных возмущений**.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Если матрица линейной системы уравнений **плохо обусловлена**, то незначительные изменения ее коэффициентов могут приводить к **большим изменениям решения**.

Связь между величиной невязки и величиной ошибки определяется **числом обусловленности матрицы A** - характеристикой, не связанной с каким-либо численным алгоритмом и **отражающей только свойства системы**.

Это число обозначают $\mathit{cond}(A) = \nu(A) = \mu(A)$.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Свойства числа обусловленности:

- $\text{Cond}(A) \geq 1$;
- $\text{Cond}(A) = 1$ для единичной матрицы;
- $\text{Cond}(kA) = k\text{Cond}(A)$.

Число обусловленности $\text{Cond}(A)$ оценивает **близость** матрицы коэффициентов A **к вырожденной**.

Если $\text{Cond}(A) \geq 1000$ – матрица A **плохо обусловлена**.

Если $1 \leq \text{Cond}(A) \leq 100$ – матрица A считается **хорошо обусловленной**.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Для оценки величины погрешностей и обусловленности систем используют *нормы векторов* и согласованные с ним *нормы матриц*.

Наиболее употребительными на практике являются следующие векторные нормы:

- **абсолютная векторная норма или 1-норма** - ,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- **максимальная векторная норма или ∞ -норма** -

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Согласованные с векторными соответствующие матричные нормы:

- **столбцовая матричная норма или 1-норма** - максимальная сумма модулей элементов каждого из столбцов матрицы

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- **строчная матричная норма или ∞ -норма** - максимальная сумма модулей элементов каждой из строк матрицы

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Число обусловленности обозначают $\text{cond}(A)$ и определяют по формуле:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Установлено, что **относительная невязка** и **относительные эквивалентные возмущения системы** имеют величину, сравнимую с ошибкой округления, независимо от того, насколько плохо обусловлена матрица:

$$\frac{\|b - Ax^*\|}{\|Ax\|} = O(\beta^{-t}), \quad \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = O(n \cdot \beta^{-t})$$

Здесь β – основание системы представления чисел с плавающей точкой, а t – число цифр мантиссы.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Для **относительной погрешности решения системы**

$$A \cdot (\vec{x} + \delta\vec{x}) = (\vec{b} + \delta\vec{b})$$

справедливы неравенства:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = O(\text{cond}(A) \cdot \beta^{-t})$$

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Для **относительной погрешности решения системы**

$$(A + \delta A) \cdot (\vec{x} + \delta \vec{x}) = (\vec{b} + \delta \vec{b})$$

справедливы неравенства:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Отсюда видно, что на точность решения влияют *два фактора*: *число обусловленности матрицы и эквивалентные возмущения*. Относительная ошибка будет мала, если мало число *$\text{cond}(A)$* , но она может быть очень велика, если матрица почти вырождена.

При решении *плохо обусловленных систем* традиционные вычислительные методы могут приводить к большим ошибкам при незначительной погрешности коэффициентов. Для решения таких систем требуются специальные алгоритмы.

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

**Пример 3
(продолжение)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix}, \quad \det A = -0.001, \quad \|A\| = 5.999$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-0.001} \begin{bmatrix} 3.999 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3999 & 2000 \\ 2000 & -1000 \end{bmatrix}, \quad \|A^{-1}\| = 5999$$

$$\text{cond}A = 5.999 * 5999 = 35988$$

$$\frac{\|\Delta X\|_{\infty}}{\|X^*\|_{\infty}} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta B\|_{\infty}}{\|B\|_{\infty}}$$

$$\frac{\|\Delta X\|_{\infty}}{\|X\|_{\infty}} \leq 35988 \cdot \frac{\|\Delta B\|_{\infty}}{\|B\|_{\infty}}$$

$$\frac{5.999}{2} \leq 35988 \cdot \frac{0.001}{2}$$

$$2.999 \leq 17.9$$

Исследование погрешностей решения СЛАУ прямыми методами

Пример 4. Матрица Гильберта — хороший пример плохо обусловленной матрицы:

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right), \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\det(H_n) \approx 0.6 n^{-1/4} (2\pi)^n 4^{-n^2}, \quad \text{cond}_2(H_n) = O(2.2^{4n} / \sqrt{n}).$$

n	4	8	10	12	15
cond ₂	1.6e+5	1.5e+10	1.60e+13	1.7e+016	2.5e+17
err ₂	1.9e-13	1.0e-7	2.7e-4	0.08	1.3

Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса

Наиболее распространенным методом решения систем линейных алгебраических уравнений является ***метод Гаусса***.

Это метод последовательного исключения переменных, которым с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода — в китайском трактате «Математика в девяти книгах» (написанных в X век до н. э. — II век до н. э.)

Алгоритм метода Гаусса состоит из двух этапов:

Первый этап называется *прямым ходом* метода и заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений, т.е. в приведении матрицы **A** к верхнему треугольному виду $U_{n(n+1)}^{(n)}$ (ниже главной диагонали все нули).

Для этого на первом шаге разделим первое уравнение системы на **a_{11}** (предположим, что коэффициент **$a_{11} \neq 0$** , в противном случае осуществляем перестановку уравнений системы).

Элементы, на которые осуществляется деление, называются *ведущими элементами метода Гаусса*.

Прямой ход метода Гаусса заканчивается после n шагов определением верхней треугольной матрицы:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & U_{12}^{(1)} & U_{13}^{(1)} & \dots & U_{1n}^{(1)} & U_{1(n+1)}^{(1)} \\ 0 & 1 & U_{13}^{(2)} & \dots & U_{1n}^{(2)} & U_{1(n+1)}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & U_{1(n+1)}^{(n)} \end{array}$$

Второй этап - *обратный ход* метода Гаусса - заключается в последовательном определении компонент решения, начиная с x_n и заканчивая x_1 , по следующим формулам:

$$x_n = U_{n(n+1)}^{(n)}, \quad x_k = U_{k(n+1)}^{(k)} - \sum_{i=k+1}^n U_{ki}^{(k)} x_i, \quad k = n-1, \dots, 1.$$

```
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        a(i,k) = a(i,k)/a(k,k);
        for j = k+1:n
            a(i,j) = a(i,j) - a(i,k)*a(k,j);
        end
    end
end
```

Этот алгоритм называется *kij* алгоритмом;

Описанный выше метод может быть реализован лишь в том случае, когда *все ведущие элементы* метода Гаусса *отличны от нуля*.

Условия применимости метода Гаусса

Теорема Для того, чтобы все ведущие элементы метода Гаусса были отличны от нуля необходимо и достаточно, чтобы **все главные миноры матрицы A** были **ненулевыми**.

Если же на **k -м** шаге коэффициент **ведущий элемент** $a_{kk}^{(k)} = 0$, то среди преобразованных уравнений системы с номерами $i = (k + 1), \dots, n$ существует хотя бы одно, у которого коэффициент $a_{ik}^{(k)} \neq 0$, и его можно поменять местами с **k -м**.

Для СЛАУ с невырожденной матрицей это всегда осуществимо.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Метод Гаусса с выбором главного элемента заключается в том, что при прямом ходе на каждом шаге производится выбор наибольшего по модулю элемента в качестве *ведущего*. Это достигается перестановкой строк и/или столбцов матрицы коэффициентов. Наиболее распространённой в вычислительной практике является стратегия выбора *главного элемента столбца* - нахождение максимального по модулю элемента k -го столбца матрицы и использование его в качестве ведущего элемента на k -м шаге исключения.

В этом случае *уменьшается погрешность* при делении и последующем вычитании при преобразованиях.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Пример 5

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 36 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 47 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 37 \end{cases}$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix}$$

Выбираем строку с максимальным коэффициентом a_{ii} и меняем ее с первой.

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 36 \\ 37 \end{bmatrix}$$

Нормируем уравнения относительно коэффициента при x_1

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{4}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{47}{5} \\ \frac{36}{2} \\ \frac{37}{2} \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Вычитаем **1** уравнение из **2** и **3**



$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1.6 & 0.3 \\ 0 & 1.1 & 1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 8.6 \\ 9.1 \end{bmatrix}$$

Выбираем строку с наибольшим коэффициентом при **a_{i2}** (уравнение **1** не рассматривается) и перемещаем ее на место **2**.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & \boxed{1.6} & 0.3 \\ 0 & 1.1 & 1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 8.6 \\ 9.1 \end{bmatrix}$$

Нормируем **2** и **3** уравнения относительно коэффициента при **x_2**



$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.1875 \\ 0 & 1 & 1.636 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.375 \\ 8.272 \end{bmatrix}$$

Вычитаем **2** уравнение из **3**



$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.1875 \\ 0 & 0 & 1.4489 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.375 \\ 2.897 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Нормируем уравнение 3 относительно коэффициента при x_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.166 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.333 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Прямой ход завершен.

$$x_3 = 2$$

Подставляем полученное значение x_3 в уравнения 2 и 1 получаем

$$\begin{aligned} x_2 &= 5.333 - 0.1666 \cdot 2 = 5.333 - 0.333 = 5 \\ x_1 + 0.4 \cdot x_2 &= 9.4 - 0.2 \cdot 2 = 9.4 - 0.4 = 9 \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение $x_2=5$ в уравнение 1, найдем

$$x_1 = 9 - 0.4 \cdot 5 = 9 - 2 = 7$$

Таким образом, решением системы уравнений является вектор:

$$X = [7 \quad 5 \quad 2]^T$$

Модификация метода Гаусса

Метод оптимального исключения. В данном методе операции *прямого* и *обратного* хода метода Гаусса выполняются попеременно.

1	...	0	$a_{1(k+1)}^{(k)}$...	$a_{1n}^{(k)}$	$a_{1(n+1)}^{(k)}$
...
0	...	1	$a_{k(k+1)}^{(k)}$...	$a_{kn}^{(k)}$	$a_{k(n+1)}^{(k)}$
$a_{(k+1)1}^{(k)}$...	$a_{(k+1)k}^{(k)}$	$a_{(k+1)(k+1)}^{(k)}$...	$a_{(k+1)n}^{(k)}$	$a_{(k+1)(n+1)}^{(k)}$
...
$a_{n1}^{(k)}$...	$a_{nk}^{(k)}$	$a_{n(k+1)}^{(k)}$...	$a_{nn}^{(k)}$	$a_{n(n+1)}^{(k)}$

В результате прямого хода матрица системы приводится к диагональному виду с единицами на главной диагонали и столбец правой части является вектором решения.

Модификация метода Гаусса

Метод Гаусса-Жордана. Эта модификация метода Гаусса незначительно отличается от метода оптимального исключения:

1	...	0	$a_{1(k+1)}^{(k)}$...	$a_{1n}^{(k)}$	$a_{1(n+1)}^{(k)}$
...
0	...	1	$a_{k(k+1)}^{(k)}$...	$a_{kn}^{(k)}$	$a_{k(n+1)}^{(k)}$
0	...	0	$a_{(k+1)(k+1)}^{(k)}$...	$a_{(k+1)n}^{(k)}$	$a_{(k+1)(n+1)}^{(k)}$
...
0	...	0	$a_{n(k+1)}^{(k)}$...	$a_{nn}^{(k)}$	$a_{n(n+1)}^{(k)}$

Как и в методе оптимального исключения, матрица системы приводится к диагональному виду.

Компактная схема метода Гаусса (Метод LU – разложения)

LU - разложение. Матрицу A можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы (включая диагональ) **L (*lower*)** и верхней треугольной матрицы **U (*upper*)**, т.е. **$A=LU$.**

Это равенство равносильно n^2 числовым равенствам

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} \times U_{kj} \quad (i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n)$$

Компактная схема метода Гаусса

Разложение матрицы A на множители обычно получают посредством алгоритма, который называется **компактной схемой** метода Гаусса. Элементы l_{im} и U_{mj} могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} l_{i1} &= a_{i1}, & U_{1j} &= a_{1j} / l_{11}, & i &= 1, \dots, n, & j &= 2, \dots, n, \\ l_{im} &= a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} \times U_{km}, & m &= 2, \dots, n, & i &= m, \dots, n, \\ U_{mj} &= (a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} \times U_{kj}) / l_{mm}, & j &= m+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Компактная схема метода Гаусса

Если матрица A является **положительно определенной**, то ее всегда можно разложить в произведение нижней треугольной матрицы **L** , на главной диагонали которой стоят единицы, и верхней треугольной матрицы **U** с неравными нулю диагональными элементами.

Тогда решение системы **$Ax=b$** сводится к последовательному решению двух систем -

$$**$Ly=b$** и **$Ux=y$** .$$

Рассмотренный метод можно применять к решению серии систем с одной и той же матрицей.

Решение систем с трехдиагональными матрицами

Матрица коэффициентов линейной системы называется *трехдиагональной*, если *отличные от нуля* коэффициенты она имеет только на главной и двух примыкающих к ней диагоналях:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Решение систем с трехдиагональными матрицами

Для решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами применяется модификация метода Гаусса, называемая *методом прогонки*.

Произвольную систему с такой матрицей можно записать в следующем виде:

[illegible]

Решение систем с трехдиагональными матрицами

Метод прогонки состоит из двух этапов:

первый – *прямая прогонка*, второй – *обратная прогонка*.

Система может быть записана в краткой форме:

$$\begin{cases} a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, & i = \overline{1, n}, \\ a_1 = 0, & c_n = 0. \end{cases}$$

На первом этапе систему преобразуют так, чтобы ее ненулевые коэффициенты оставались только на главной диагонали и над ней, а именно, к виду

$$\begin{cases} x_i = L_i x_{i+1} + M_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ x_n = M_n. \end{cases}$$

Решение систем с трехдиагональными матрицами

Числа L_i и M_i называются *прогоночными коэффициентами* и вычисляются по рекуррентным формулам:

$$L_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad M_1 = \frac{d_1}{b_1},$$

$$L_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i L_{i-1}}, \quad M_i = \frac{d_i - a_i M_{i-1}}{b_i + a_i L_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n}.$$

На втором этапе (обратная прогонка) последовательно находят неизвестные, начиная с x_n , по формулам:

$$x_n = M_n, \quad x_i = L_i x_{i+1} + M_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Решение систем с трехдиагональными матрицами

Если выполняются неравенства $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$, $i = 1, \dots, n$,
причем хотя бы для одного значения i неравенство
 $a_i \neq 0, |c_i| \neq 0$ является строгим, то знаменатели всех
прогоночных коэффициентов не обращаются в нуль и
*система линейных уравнений имеет единственное
решение.*

Количество арифметических операций, которое
нужно выполнить для получения решения системы n
уравнений методом прогонки, пропорционально $O(n)$.