Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

№ 2э.2

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Минск 2023

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2э.2

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучить характеристики векторного поля: поток Φ_E через ориентированную поверхность и циркуляцию Γ_E вдоль ориентированного контура.
2. Проверить теорему Гаусса для поля вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля в интегральной форме.
3. Проверить равенство нулю циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля вдоль произвольного ориентированного контура.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Всякий заряд (частица или тело, обладающее зарядом) изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства – создает **электрическое поле**, которое проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку другой заряд испытывает действие силы со стороны этого поля.

Основной характеристикой электрического поля является напряженность.

Напряженность $\vec{E}$ электрического поля в некоторой его точке – векторная физическая величина, являющаяся <u>силовой</u> характеристикой электрического поля и равная отношению силы $\vec{F}$, действующей со стороны поля на помещенный в данную точку неподвижный точечный пробный заряд $q_{\text{пр}}$, к этому заряду:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_{\text{пр}}}. \tag{1}$$

В СИ $[E]$ = В/м.

Электростатическим полем называется электрическое поле, создаваемое неподвижными в выбранной системе отсчета зарядами. Кроме напряженности важной характеристикой электростатического поля является потенциал.

Потенциал $\varphi(\vec{r})$ точки электростатического поля – скалярная физическая величина, являющаяся <u>энергетической</u> характеристикой этого поля в данной точке и равная отношению потенциальной энергии $W^p(\vec{r})$, которой обладает находящийся в данной точке пробный точечный заряд $q_{\text{пр}}$, к этому заряду:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W^p(\vec{r})}{q_{\text{пр}}}. \tag{2}$$

В СИ $[\varphi]$ = В.

Связь напряженности <u>электростатического</u> поля и потенциала: вектор напряженности в данной точке с радиус-вектором $\vec{r}$ электростатического поля равен градиенту потенциала в этой точке поля с обратным знаком:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\varphi(\vec{r}). \tag{3}$$

В декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК) равенство (3) принимает вид:

$$E_x(\vec{r})\cdot\vec{e}_x+E_y(\vec{r})\cdot\vec{e}_y+E_z(\vec{r})\cdot\vec{e}_z=-\left(\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x}\cdot\vec{e}_x+\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y}\cdot\vec{e}_y+\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}\cdot\vec{e}_z\right), \qquad (4)$$

где $E_x(\vec{r})$, $E_y(\vec{r})$, $E_z(\vec{r})$ – проекции напряженности $\vec{E}$ в точке электростатического поля с радиус-вектором $\vec{r}$ на координатные оси ДПСК;

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – ортонормированный базис ДПСК.

Стационарным векторным полем (например, полем вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля) называется область пространства, в каждой точке которой задан не зависящий от времени вектор $\vec{E}$, т. е. определена векторная функция координат $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки области пространства.

Силовая линия векторного поля $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$ − это направленная линия, в каждой точке которой вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к силовой линии. Густота силовых линий (т. е. число силовых линий, пересекающих перпендикулярную к ним плоскую поверхность единичной площади) в некоторой точке поля прямо пропорциональна модулю E вектора $\vec{E}$ в этой точке.

Интегральными характеристиками векторного поля, описывающими основные его свойства, являются:

1) поток Φ_E через ориентированную поверхность,
2) циркуляция Γ_E вдоль ориентированного контура.

Пусть в окрестности какой-либо точки векторного поля $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$ находится малый плоский элемент (dS) некоторой поверхности (S), в пределах которого данное поле можно считать однородным, т. е. вектор $\vec{E}$ в каждой точке элемента (dS) одинаков (рис. 1). Ориентируем этот элемент (dS) заданием единичного вектора нормали $\vec{n}$ ($|\vec{n}|=1$), проведенного перпендикулярно к (dS). Поскольку малый элемент (dS) поверхности является плоским, то вектор нормали $\vec{n}$ к (dS) можно провести как в одном направлении, так и в противоположном. Введем в рассмотрение **вектор ориентированного малого элемента поверхности** $\overrightarrow{dS}$, равного

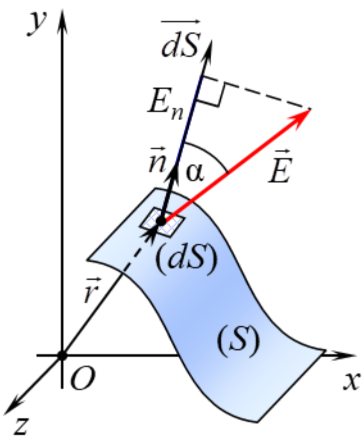


Рис. 1

$$\overrightarrow{dS}=dS\cdot\vec{n}. \qquad (5)$$

где dS – площадь малого элемента (dS) поверхности (S).

Тогда **потоком (элементарным)** $d\Phi_E$ векторного поля $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$ через малый ориентированный элемент поверхности называется число, равное скалярному произведению векторов $\vec{E}$ и $\overrightarrow{dS}$:

$$d\Phi_E=\left(\vec{E},\overrightarrow{dS}\right)=\left(\vec{E},\vec{n}\right)\cdot dS=E\cdot\cos\alpha\cdot dS=E_n\cdot dS, \qquad (6)$$

где α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$;

$E_n = \left(\vec{E}, \vec{n}\right) = E \cdot \cos\alpha$ – проекция $\vec{E}$ на направление единичного вектора нормали $\vec{n}$ (или $\overrightarrow{dS}$).

Пусть в области векторного поля $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ находится гладкая или кусочно-гладкая поверхность (S) конечных размеров (рис. 1). Ориентированной является гладкая двусторонняя поверхность (S), в каждой точке которой задан единичный вектор $\vec{n}$, направленный по нормали к одной из сторон этой поверхности. **Поток** Φ_E векторного поля $\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r}\right)$ через произвольную ориентированную поверхность (S) – это число, равное значению поверхностного интеграла

$$\Phi_E = \int\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS}\right) = \int\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \vec{n}\right) \cdot dS, \tag{7}$$

где $\overrightarrow{dS} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор ориентированного малого элемента (dS) поверхности (S);

dS – площадь малого элемента (dS) поверхности (S), в пределах которого векторное поле можно считать однородным;

$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к малому элементу (dS) поверхности (S).

В СИ $[\Phi_E]$ = В·м.

С учетом определения скалярного произведения векторов поток (7) векторного поля равен

$$\Phi_E = \int\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \vec{n}\right) \cdot dS = \int\limits_{(S)} E \cdot \cos\alpha \cdot dS = \int\limits_{(S)} E_n \cdot dS, \tag{8}$$

где α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$ (рис. 1);

$E_n = E \cdot \cos\alpha$ – проекция $\vec{E}$ на направление единичного вектора нормали $\vec{n}$.

Согласно определению (7) поток Φ_E – величина алгебраическая, т. к. он может принимать положительные значения ($\Phi_E > 0$), отрицательные значения ($\Phi_E < 0$) или быть равным нулю ($\Phi_E = 0$) при $\vec{E} \neq \vec{0}$.

Формула (7) определяет поток Φ_E через двустороннюю поверхность (S) с точностью до знака («+» или «–») в зависимости от выбора стороны поверхности, к которой задается единичный вектор нормали $\vec{n}$. Если поверхность (S) ориентировать заданием единичного вектора нормали $\vec{n}_1$ к ее верхней стороне (рис. 2), то поток Φ_{E1} в этом случае будет отличаться только знаком от потока Φ_{E2} через ту же самую поверхность (S), но ориентированную выбором единичного вектора нормали $\vec{n}_2$ к нижней стороне ($\vec{n}_2 \uparrow\downarrow \vec{n}_1$):

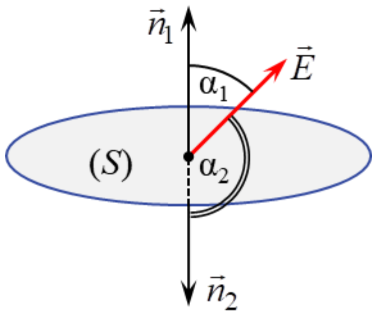


Рис. 2

$$\Phi_{E1} = \int\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \vec{n}_1\right) \cdot dS = \int\limits_{(S)} E \cdot \cos\alpha_1 \cdot dS = \int\limits_{(S)} E \cdot \cos\left(\pi - \alpha_2\right) \cdot dS =$$
$$= -\int\limits_{(S)} E \cdot \cos\alpha_2 \cdot dS = -\int\limits_{(S)} \left(\vec{E}, \vec{n}_2\right) \cdot dS = -\Phi_{E2}. \tag{9}$$

В случае замкнутой поверхности (сферы, поверхности параллелепипеда или любой другой ограничивающей объемное тело поверхности) единичный вектор нормали $\vec{n}$ проводится к внешней стороне этой поверхности, т. е. наружу ограничиваемой ею пространственной области. Для обозначения поверхностного интеграла по замкнутой поверхности (S) используется символ $\oint\limits_{(S)}$.

Поток Φ_E векторного поля $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ через произвольную ориентированную поверхность (S) прямо пропорционален разности числа выходящих $N_{\text{выход}}$ из этой поверхности и входящих $N_{\text{вход}}$ в нее силовых линий этого поля:

$$\Phi_E \sim \left(N_{\text{выход}} - N_{\text{вход}}\right). \qquad (10)$$

При этом выходящей из ориентированной поверхности (S) является такая силовая линия, направление которой в точке ее пересечения с (S) образует острый угол с единичным вектором нормали $\vec{n}$ к этой поверхности (рис. 3). Если силовая линия пересекает ориентированную поверхность (S) так, что направление линии образует с единичным вектором нормали $\vec{n}$ к этой поверхности тупой угол, то такая силовая линия является входящей.

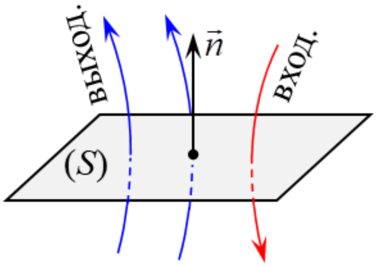


Рис. 3

Теорема Гаусса для поля вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля в вакууме в интегральной форме: поток вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность (S) равен алгебраической сумме зарядов $q_{\text{охв}}$, охватываемых этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную ε_0:

$$\oint\limits_{(S)} (\vec{E}, \overrightarrow{dS}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q_{\text{охв}}. \qquad (11)$$

Принимая во внимание связь потока Φ_E поля вектора $\vec{E}$ через произвольную ориентированную поверхность (S) с числом пересекающих эту поверхность силовых линий данного поля (10), из теоремы Гаусса (11) следует:

- если замкнутая поверхность охватывает электрические заряды, то поток вектора напряженности через эту поверхность отличен от нуля, а значит, общее число силовых линий, пересекающих эту поверхность не равно нулю, т. е. $N_{\text{вых}} \neq N_{\text{вход}}$;
- если внутри пространственной области, ограниченной замкнутой поверхностью заряды отсутствуют, то число выходящих линий равно числу линий входящих $N_{\text{вых}} = N_{\text{вход}}$.

Поэтому содержательный смысл теоремы Гаусса для поля вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля в вакууме в интегральной форме заключается в следующем: в общем случае силовые линии электрического поля не являются замкнутыми – они начинаются на положительных электрических зарядах и оканчиваются на отрицательных.

Гладкая или кусочно-гладкая замкнутая кривая (контур) считается ориентированной, если вдоль нее выбрано направление обхода, т. е. в каждой точке этой кривой задан единичный вектор $\vec{\tau}$ ($|\vec{\tau}|=1$), направленный по касательной к кривой в сторону обхода.

Циркуляция Γ_E векторного поля $\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})$ вдоль замкнутой ориентированной кривой (L) – это число, равное значению линейного интеграла:

$$\Gamma_E = \oint\limits_{(L)} \left(\vec{E},\overrightarrow{d\ell}\right) = \oint\limits_{(L)} \left(\vec{E},\vec{\tau}\right)\cdot d\ell, \tag{12}$$

где $\overrightarrow{d\ell} = d\ell\cdot\vec{\tau}$ – вектор ориентированного малого элемента замкнутой кривой (L) (рис. 4);

$d\ell$ – длина малого элемента ($d\ell$) замкнутой кривой (L), в пределах которого векторное поле можно считать однородным;

$\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к кривой (L) в некоторой точке элемента ($d\ell$), по направлению совпадающий с направлением обхода вдоль (L).

В СИ $[\Gamma_E]$ = В.

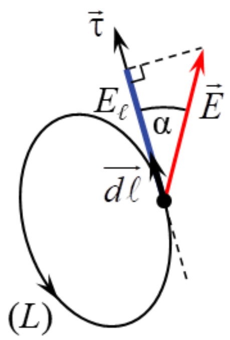


Рис. 4

С учетом определения скалярного произведения векторов циркуляция (12) векторного поля равна

$$\Gamma_E = \oint\limits_{(L)} E\cdot\cos\alpha\cdot d\ell = \oint\limits_{(L)} E_\tau\cdot d\ell, \tag{13}$$

где α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{\tau}$ (рис. 4);

$E_\tau = \left(\vec{E},\vec{\tau}\right) = E\cdot\cos\alpha$ – проекция $\vec{E}$ на направление единичного вектора касательной $\vec{\tau}$ или вектора ориентированного малого элемента $\overrightarrow{d\ell}$ кривой (L).

Работа A силы $\vec{F}$ электрического поля при движении в нем точечного заряда q по замкнутой траектории (L), равна произведению этого заряда q на циркуляцию Γ_E векторного поля напряженности $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$ вдоль замкнутой ориентированной кривой (L), совпадающей с траекторией движения данного заряда:

$$A = \oint\limits_{(L)} \left(\vec{F},d\vec{r}\right) = \left|\begin{array}{c} \vec{F} = q\cdot\vec{E} \\ d\vec{r} = \overrightarrow{d\ell} \end{array}\right| = \oint\limits_{(L)} \left(q\cdot\vec{E},\overrightarrow{d\ell}\right) = q\cdot\oint\limits_{(L)} \left(\vec{E},\overrightarrow{d\ell}\right) = q\cdot\Gamma_E. \tag{14}$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля в интегральной форме: циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля вдоль любой замкнутой ориентированной кривой (L) всегда равна нулю:

$$\oint\limits_{(L)} \left(\vec{E},\overrightarrow{d\ell}\right) = 0. \tag{15}$$

С учетом (14) из теоремы о циркуляции (15) получается, что работа сил электростатического поля при движении в нем точечного заряда q по замкнутой траектории (L) всегда равна нулю. Следовательно, силы электростатического поля являются **консервативными**.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Прямое изучение электростатических полей сопряжено с рядом технических трудностей. Поэтому широко используется **метод моделирования**: исследуемое электростатическое поле $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ заменяется на эквивалентное ему поле стационарных токов $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ в слабо проводящей среде ($\vec{j}$ – плотность тока). При этом расположение и форма электродов – источников поля $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ – полностью совпадают с расположением и формой источников моделируемого поля $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ – электрических зарядов, а в каждой точке поля $\vec{E}(\vec{r}) \uparrow\uparrow \vec{j}(\vec{r})$. Более подробно метод моделирования электростатических полей рассмотрен в методических указаниях к лабораторным работам 2э.1, 2э.3 и 2э.4.

Изучать свойства электростатического поля удобно на примере плоского поля, в каждой точке которого векторы напряженности $\vec{E}$ являются компланарными, т. е. лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. В этом случае напряженность зависит только от двух координат и при ее определении требуются измерения только в одной из плоскостей. В данной лабораторной работе для проверки теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля в интегральной форме выбрано **поле плоского цилиндрического конденсатора**.

<u>Лабораторная установка</u> (рис. 5) <u>состоит из</u>: планшета (1) с установленным на нем макетом плоского электростатического поля; источника постоянного тока (2); двойного зонда (3), соединенного с цифровым вольтметром (4). Макет представляет собой горизонтальный лист электропроводной бумаги (5), на котором закреплены подсоединенные к источнику постоянного тока плоские металлические электроды (6). Электропроводная бумага накрыта пластиной из органического стекла с отверстиями для щупов двойного зонда. Плоскостью моделируемого плоского поля напряженности $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ является плоскость электропроводной бумаги, а его источниками (электрическими зарядами) – электроды (6).

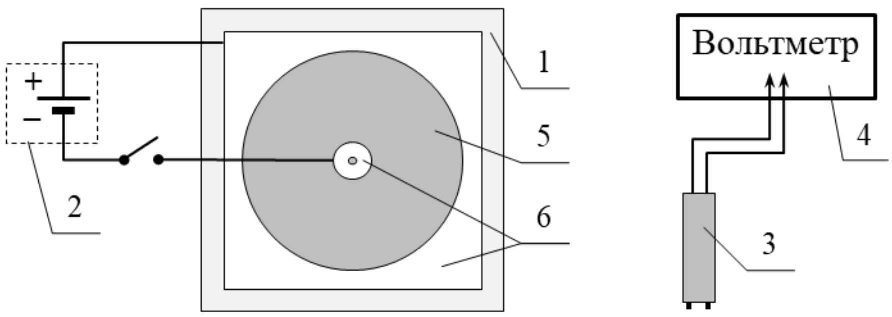


Рис. 5

С помощью двойного зонда в любой точке плоского поля можно определить проекцию напряженности $\vec{E}$ **на направление** (например, на ось Ox) **вдоль точек контакта щупов зонда** с электропроводной бумагой (рис. 6). Действительно, из связи напряженности электростатического поля и потенциала (4) следует, что проекция E_x вектора $\vec{E}$ на ось Ox равна

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Если расстояние d между щупами двойного зонда достаточно малое ($d = \Delta x$), то

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} = \frac{U}{d}, \tag{16}$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение), измеряемая вольтметром, к которому подключен двойной зонд.

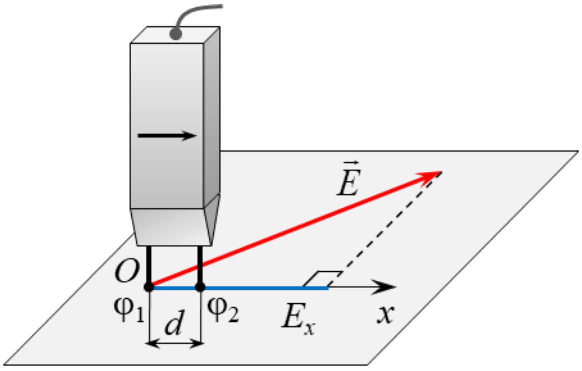
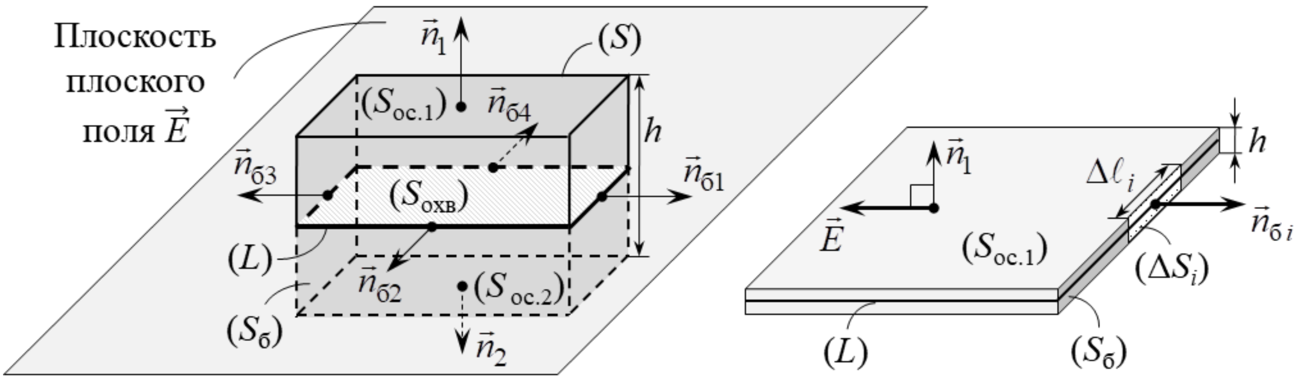


Рис. 6

Для проверки теоремы Гаусса (11) для поля вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля в вакууме в интегральной форме необходимо выбрать **замкнутую поверхность** конечных размеров – гауссову поверхность. В качестве таковой в данном случае предлагается выбрать поверхность (S) прямоугольного параллелепипеда высотой h, расположенного симметрично относительно плоскости плоского поля вектора (рис. 7, *а*). Поверхность ($S_{охв}$) – часть плоскости плоского поля $\vec{E}$, охватываемая гауссовой поверхностью (S).



а *б*

Рис. 7

Поскольку замкнутую поверхность (S) можно представить в виде совокупности поверхностей двух оснований ($S_{ос.1}$), ($S_{ос.2}$) и боковой поверхности ($S_б$)

$$(S) = (S_{ос.1}) \cup (S_{ос.2}) \cup (S_б),$$

то поток (7) вектора $\vec{E}$ через ориентированную гауссову поверхность (S) равен сумме потоков через все ее части:

$$\oint\limits_{(S)}\left(\vec{E},\overrightarrow{dS}\right)=\oint\limits_{(S)}\left(\vec{E},\vec{n}\right)\cdot dS=\int\limits_{(S_{\text{ос.1}})}\left(\vec{E},\vec{n}_1\right)\cdot dS+\int\limits_{(S_{\text{ос.2}})}\left(\vec{E},\vec{n}_2\right)\cdot dS+\int\limits_{(S_{\text{б}})}\left(\vec{E},\vec{n}_{\text{б}}\right)\cdot dS. \quad (17)$$

где $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_{\text{б}}$ – единичный вектор нормали к внешней стороне малого элемента поверхности (S_1), (S_2) и ($S_{\text{б}}$) соответственно.

Выберем высоту h поверхности (S) прямоугольного параллелепипеда настолько малой, чтобы ее основания ($S_{\text{ос.1}}$) и ($S_{\text{ос.2}}$) находились практически в области плоского поля вектора $\vec{E}$ (рис. 7, *б*). Тогда во всех малых элементах поверхностей ($S_{\text{ос.1}}$) и ($S_{\text{ос.2}}$) вектор $\vec{E}$ перпендикулярен $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Поэтому

$$\int\limits_{(S_{\text{ос.1}})}\left(\vec{E},\vec{n}_1\right)\cdot dS=\int\limits_{(S_{\text{ос.1}})}E\cdot\cos\left(\pi/2\right)\cdot dS=0,$$
$$\int\limits_{(S_{\text{ос.2}})}\left(\vec{E},\vec{n}_2\right)\cdot dS=\int\limits_{(S_{\text{ос.2}})}E\cdot\cos\left(\pi/2\right)\cdot dS=0. \quad (18)$$

С учетом (18) поток (17) вектора $\vec{E}$ через гауссову поверхность (S) равен потоку через ее боковую поверхность ($S_{\text{б}}$):

$$\oint\limits_{(S)}\left(\vec{E},\overrightarrow{dS}\right)=\int\limits_{(S_{\text{б}})}\left(\vec{E},\vec{n}_{\text{б}}\right)\cdot dS=\int\limits_{(S_{\text{б}})}E_n\cdot dS, \quad (19)$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на направление единичного вектора нормали $\vec{n}_{\text{б}}$ к внешней стороне малого элемента (dS) поверхности ($S_{\text{б}}$) (см. формулу (8)).

Если всю боковую поверхность ($S_{\text{б}}$) прямоугольного параллелепипеда мысленно разбить на N малых элементов в виде прямоугольников высотой h и одинаковой длины $\Delta\ell_i=\Delta\ell$ (рис. 7, *б*), то значение определенного интеграла в выражении (19) можно приближенно представить в виде дискретной суммы

$$\oint\limits_{(S)}\left(\vec{E},\overrightarrow{dS}\right)=\int\limits_{(S_{\text{б}})}E_n\cdot dS\approx\sum_{i=1}^{N}\left(E_{ni}\cdot\Delta S_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(E_{ni}\cdot h\cdot\Delta\ell_i\right)=h\cdot\Delta\ell\cdot\sum_{i=1}^{N}E_{ni}, \quad (20)$$

где E_{ni} – проекция $\vec{E}$ на направление $\vec{n}_{\text{б}i}$ к i-му малому элементу (ΔS_i);

$\Delta S_i=h\cdot\Delta\ell_i$ – площадь i-го малого элемента.

Согласно теореме Гаусса (11)

$$\oint\limits_{(S)}\left(\vec{E},\overrightarrow{dS}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot q_{\text{охв}},$$

где $q_{\text{охв}}$ – охватываемый замкнутой поверхностью (S) заряд, поэтому с учетом (20)

$$h\cdot\Delta\ell\cdot\sum_{i=1}^{N}E_{ni}\approx\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot q_{\text{охв}},$$

$$\sum_{i=1}^{N}E_{ni}\approx\frac{q_{\text{охв}}}{\varepsilon_0 h\cdot\Delta\ell}. \quad (21)$$

В условиях данной лабораторной работы электрические заряды – источники моделируемого плоского поля вектора напряженности $\vec{E}$ – имеют конфигурацию электродов (6) на макете (рис. 5). Поэтому можно ввести **постоянную** величину λ = const, имеющую смысл заряда, приходящегося на единицу длины электрода в перпендикулярном плоскости поля направлении (в условиях данной лабораторной работы значение λ не известно). Тогда $q_{\text{охв}} = \lambda_{\text{охв}} h$ и

$$\sum_{i=1}^{N} E_{ni} \approx \frac{\lambda_{\text{охв}}}{\varepsilon_0 \cdot \Delta\ell}. \tag{22}$$

Пусть высота h гауссовой поверхности (S) и ее боковой поверхности ($S_б$) мала так, что измерение всех E_{ni} достаточно проводить только вдоль замкнутой линии (L), являющейся сечением гауссовой поверхности (S) плоскостью плоского векторного поля $\vec{E}$ (рис. 7, *а* и *б*). При этом контур (L) ограничивает поверхность ($S_{\text{охв}}$) – часть плоскости плоского поля $\vec{E}$, охватываемой гауссовой поверхностью (S). Тогда, принимая во внимание возможность измерения проекции вектора напряженности с помощью двойного зонда, его нужно расположить так, чтобы точки контакта щупов зонда с электропроводной бумагой находились вдоль нормали $\vec{n}_{бi}$ к i-му малому элементу (ΔS_i) боковой поверхности ($S_б$), а стрелка на зонде указывала направление $\vec{n}_{бi}$ (рис. 8). В этом случае согласно (16)

$$E_{ni} \approx \frac{\varphi_{1i} - \varphi_{2i}}{d} = \frac{U_i}{d}, \tag{23}$$

где d – расстояние между щупами двойного зонда;

$\varphi_{1i} - \varphi_{2i} = U_i$ – разность потенциалов (напряжение), измеряемая вольтметром, к которому подключен двойной зонд. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} E_{ni} \approx \frac{1}{d} \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i. \tag{24}$$

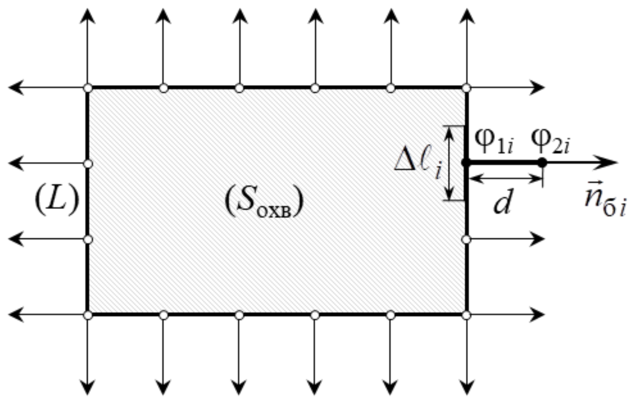


Рис. 8

Подставив (24) в выражение (20), получаем, что поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность (S) прямо пропорционален алгебраической сумме (с учетом знака слагаемых) разностей потенциалов между щупами двойного зонда, измеренных на всех N малых элементах боковой поверхности ($S_б$) малой высоты h (т. е. вдоль замкнутой линии (L) сечения плоскостью плоского векторного поля гауссовой поверхности (S)):

$$\oint_{(S)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS}\right) \approx \frac{h \cdot \Delta\ell}{d} \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i. \tag{25}$$

Приравняем правые части выражений (22) и (24) и учтем, что в условиях данной лабораторной работы длина $\Delta\ell$ малых элементов боковой поверхности ($S_б$) равна расстоянию d между щупами двойного зонда $\Delta\ell = d$:

$$\frac{1}{d} \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{\lambda_{\text{охв}}}{\varepsilon_0 \cdot \Delta\ell},$$

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{\lambda_{\text{охв}}}{\varepsilon_0}, \tag{26}$$

где U – алгебраическая сумма (с учетом знака слагаемых) разностей потенциалов между щупами двойного зонда, измеренных на всех N малых элементах боковой поверхности ($S_б$) гауссовой поверхности (S).

Таким образом, из выражений (25) и (26) следует:

- если замкнутая поверхность (S) **охватывает** заряд, когда поверхность ($S_{\text{охв}}$) содержит внутренний электрод макета (см. рис. 7, *а*), то $\lambda_{\text{охв}} \neq 0$ и алгебраическая сумма U разностей потенциалов, измеренных на всех N малых элементах поверхности, также отлична от нуля $U \neq 0$;
- если замкнутая поверхность (S) **не охватывает** заряд, когда поверхность ($S_{\text{охв}}$) не содержит внутренний электрод макета, то $\lambda_{\text{охв}} = 0$ и $U = 0$.

В данной лабораторной работе проверка теоремы Гаусса заключается в следующем.

Если две **разные** замкнутые поверхности (S_1) и (S_2) охватывают один и тот же электрод на макете, то $\lambda_{\text{охв.1}} = \lambda_{\text{охв.2}} \neq 0$, то потоки вектора $\vec{E}$ через них должны быть одинаковыми, поскольку согласно теореме они определяются только зарядом. Следовательно, $U_1 \approx U_2$.

Если замкнутая поверхность (S_3) **не охватывает** заряд, то поток вектора $\vec{E}$ через нее должен быть равен нулю, т. е. $U_3 \ll U_1$.

Для проверки теоремы о циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля в интегральной форме (15) в данной лабораторной работе ориентированной замкнутой кривой является прямоугольный контур (L), направление обхода по которому выбирается произвольно. Если контур (L) мысленно разбить на N малых элементов в виде отрезков одинаковой длины $\Delta\ell_i = \Delta\ell$ (рис. 9), то значение линейного интеграла в определении циркуляции (12) с учетом (13) можно приближенно представить в виде дискретной суммы

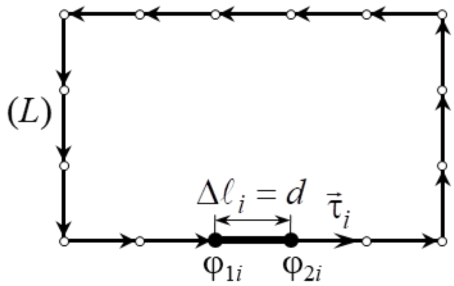


Рис. 9

$$\oint_{(L)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{d\ell}\right) = \oint_{(L)} \left(\vec{E}, \vec{\tau}\right) \cdot d\ell = \oint_{(L)} E_\tau \cdot d\ell \approx \sum_{i=i}^{N} \left(E_{\tau i} \cdot \Delta\ell_i\right) = \Delta\ell \cdot \sum_{i=i}^{N} E_{\tau i}, \tag{27}$$

где $E_{\tau i}$ – проекция $\vec{E}$ на направление единичного вектора касательной $\vec{\tau}_i$ к контуру (L), проведенного в точке начала i-го малого элемента ($\Delta\ell_i$) контура в направлении выбранного обхода вдоль (L) (на рис. 9 направление обхода выбрано против часовой стрелки).

Тогда, принимая во внимание возможность определения проекции вектора напряженности с помощью двойного зонда, его нужно расположить так, чтобы точки контакта щупов зонда с электропроводной бумагой находились вдоль касательной $\vec{\tau}_i$ к i-му малому элементу ($\Delta\ell_i$) контура (L), а стрелка на зонде указывала направление $\vec{\tau}_i$. В этом случае согласно (16)

$$E_{\tau i} \approx \frac{\varphi_{1i} - \varphi_{2i}}{d} = \frac{U_i}{d}, \qquad (28)$$

где d – расстояние между щупами двойного зонда (рис. 9);

$\varphi_{1i} - \varphi_{2i} = U_i$ – разность потенциалов (напряжение), измеряемая вольтметром, к которому подключен двойной зонд.

Подставляя (28) в выражение (27) с учетом $\Delta\ell = d$, получаем, что циркуляция вектора $\vec{E}$ вдоль ориентированной замкнутой кривой (L) равна алгебраической сумме (с учетом знака слагаемых) разностей потенциалов между щупами двойного зонда, измеренных на всех N малых элементах контура (L):

$$\oint\limits_{(L)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{d\ell}\right) \approx \sum_{i=1}^{N} U_i. \qquad (29)$$

Согласно теореме (15) циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля вдоль любой замкнутой ориентированной кривой (L) всегда равна нулю:

$$\oint\limits_{(L)} \left(\vec{E}, \overrightarrow{d\ell}\right) = 0,$$

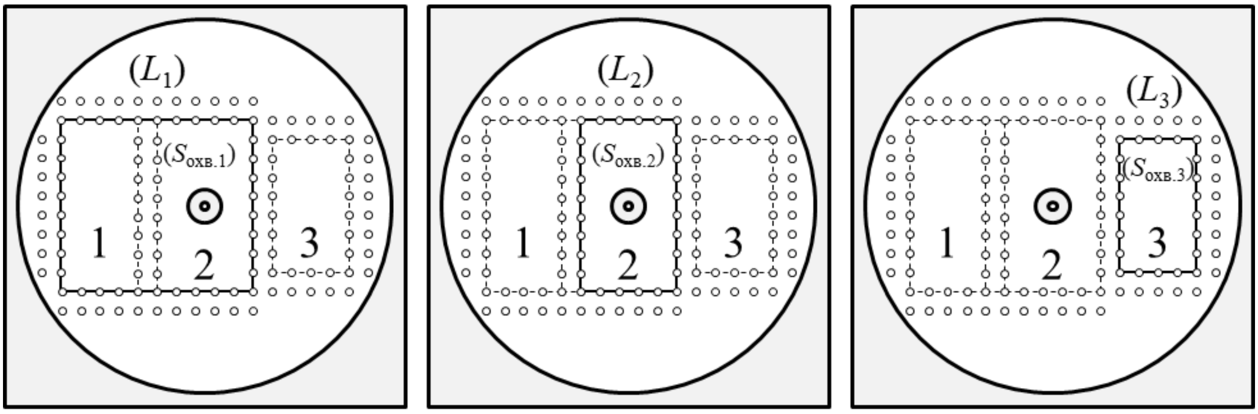
поэтому с учетом (29) для **любого** контура (охватывающего или не охватывающего заряды (электрод)) должно выполняться равенство

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = 0. \qquad (30)$$

где U – алгебраическая сумма (с учетом знака слагаемых) разностей потенциалов между щупами двойного зонда, измеренных на всех N малых элементах контура (L).

Подготовка лабораторной установки к работе и методика измерений

1. Подключить макет и вольтметр к сети 220 В.
2. Перевести тумблер «Сеть» в верхнее положение».
3. Выбрать на макете **охватывающую** заряд замкнутую поверхность (S_1), которая пересекает плоскость поля напряженности $\vec{E}$ (поверхность электропроводной бумаги) по замкнутой линии (L_1), которая является объединением контуров 1 и 2 на макете, и ограничивает поверхность ($S_{\text{охв.1}}$), **содержащую** внутренний электрод (рис. 10, *а*).
4. Расположить двойной зонд так, чтобы точки контакта щупов зонда с электропроводной бумагой находились на нормали $\vec{n}_{бi}$ к i-му малому элементу, а стрелка на зонде указывала направление $\vec{n}_{бi}$ (рис. 8). Показания U_i вольтметра (с учетом знака) внести в соответствующую ячейку строки № 1 табл.

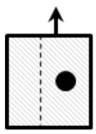
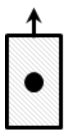
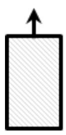
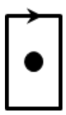
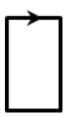


а *б* *в*

Рис. 10

5. Повторить п. 4 для всех остальных элементов. Все значения U_i с учетом знака внести в соответствующую ячейку строки № 1 табл. в виде перечисления (например: +0,157; – 0,082; – 0,331; ...).

Таблица

№	U_i, В		$U = \sum_{i=1}^{N} U_i$, В
1.	 (S_1)		
2.	 (S_2)		
3.	 (S_3)		
4.	 (L_2)		
5.	 (L_3)		

6. Выбрать на макете **другую охватывающую** заряд замкнутую поверхность (S_2), которая пересекает плоскость поля напряженности $\vec{E}$ (поверхность электропроводной бумаги) по контуру (L_2), который ограничивает поверхность ($S_{охв.2}$), **содержащую** внутренний электрод (рис. 10, *б*).

7. Выполнить пп. 4, 5. Полученные результаты внести в соответствующую ячейку строки № 2 табл.

8. Выбрать на макете **не охватывающую** заряд замкнутую поверхность (S_3), которая пересекает плоскость поля напряженности $\vec{E}$ (поверхность электропроводной бумаги) по контуру (L_3), который ограничивает поверхность ($S_{\text{охв.3}}$), **не содержащую** внутренний электрод (рис. 10, *в*).

9. Выполнить пп. 4, 5. Полученные результаты внести в соответствующую ячейку строки № 3 табл.

10. Выбрать на макете контур (L_2), который **охватывает** заряд (внутренний электрод) (рис. 10, *б*), и задать направление обода вдоль этого контура (например, против часовой стрелки).

11. Расположить двойной зонд так, чтобы точки контакта щупов зонда с электропроводной бумагой находились на касательной $\vec{\tau}_i$ к i-му малому элементу ($\Delta\ell_i$) контура (L_2), а стрелка на зонде указывала направление $\vec{\tau}_i$. (рис. 9). Показания U_i вольтметра (с учетом знака) внести в соответствующую ячейку строки № 4 табл.

12. Повторить п. 11 для всех остальных элементов контура (L_2). Все значения U_i внести в соответствующую ячейку строки № 4 табл. в виде перечисления.

13. Выбрать на макете контур (L_3), который **не охватывает** заряд (внутренний электрод) (рис. 10, *в*), и задать направление обода вдоль этого контура.

14. Выполнить пп. 11, 12. Полученные результаты внести в соответствующую ячейку строки № 5 табл.

15. Перевести тумблер «Сеть» в нижнее положение.

16. Отключить макет и вольтметр от сети 220 В.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. По данным строк № 1 и 2 табл. вычислить алгебраическую сумму U_1 и U_2 разностей потенциалов. Результаты внести в соответствующие ячейки табл.

2. Сравнить U_1 и U_2 на предмет их равенства.

3. По данным строки № 3 табл. вычислить алгебраическую сумму разностей потенциалов U_3. Результат внести в соответствующую ячейку табл.

4. Вычислить отношение U_3 / U_1 и сделать заключение о малости величины этого отношения. При этом необходимо учитывать следующее: если одно число меньше второго хотя бы в 10 раз (меньше на порядок), то оно может считаться пренебрежимо малым по сравнению со вторым числом.

5. Сделать вывод о выполнении теоремы Гаусса для поля вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля в интегральной форме.

6. По данным строк № 4 и 5 табл. вычислить алгебраическую сумму U_4 и U_5. Результаты внести в соответствующие ячейки табл.

7. Вычислить отношение U_4 / U_1 и U_5 / U_1. Сделать заключение о малости величин этих отношений и вывод о выполнении равенства нулю циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля вдоль произвольного ориентированного контура.

ЗАДАНИЕ

1. Изучить лабораторную установку и методику измерений.

2. Следуя указаниям в подразделе «**Подготовка лабораторной установки к работе и методика измерений**» определить значения U_i. Полученные результаты внести в табл.

3. Перевести расположенный на макете тумблер в положение «Выкл.».

4. Отключить макет и вольтметр от сети 220 В.

5. Следуя указаниям раздела «**Обработка результатов измерений**» вычислить алгебраические суммы U_1, U_2, U_3, U_4 и U_5.

6. Произвести анализ полученных результатов и сделать вывод в соответствии с целью работы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение потока векторного поля $\vec{E}$ через произвольную ориентированную поверхность. Когда поверхность считается ориентированной?

2. Как поток векторного поля $\vec{E}$ через произвольную ориентированную поверхность связан с числом силовых линий поля, пересекающих эту поверхность?

3. Сформулируйте теорему Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной форме и запишите формулу, выражающую ее. Каков содержательный смысл этой теоремы?

4. Дайте определение циркуляции векторного поля $\vec{E}$ вдоль ориентированной замкнутой кривой. В каком случае замкнутая кривая считается ориентированной?

5. Как связана работа силы электрического поля при движении в нем точечного заряда по замкнутой траектории (L) с циркуляцией вектора напряженности этого поля вдоль замкнутой ориентированной кривой (L), совпадающей с траекторией движения данного заряда?

6. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля в интегральной форме и запишите формулу, выражающую ее. Какой вывод о характере электростатического поля можно сделать из этой теоремы?

7. Обоснуйте возможность проверки теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции вектора напряженности $\vec{E}$ в условиях данной лабораторной работы.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И. В. Курс физики : учеб. пособие для вузов. В 3 т. Том 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев. – 7-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 468 с..

2. Иродов, И. Е. Электромагнетизм. Основные законы : учеб. пособие / И. Е. Иродов . – 12-е изд. – М. : Лаборатория знаний, 2021. – 322 с.

3. Сивухин, Д. В. Общий курс изики : учеб. пособие для вузов. В 5 т. Том III. Электричество / Д. В. Сивухин. – 6-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2020. – 565 С.