Численные методы решения задачи Коши для дифференциальных уравнений

Тема 6

Уравнение первого порядка, разрешенное относительно старшей производной:

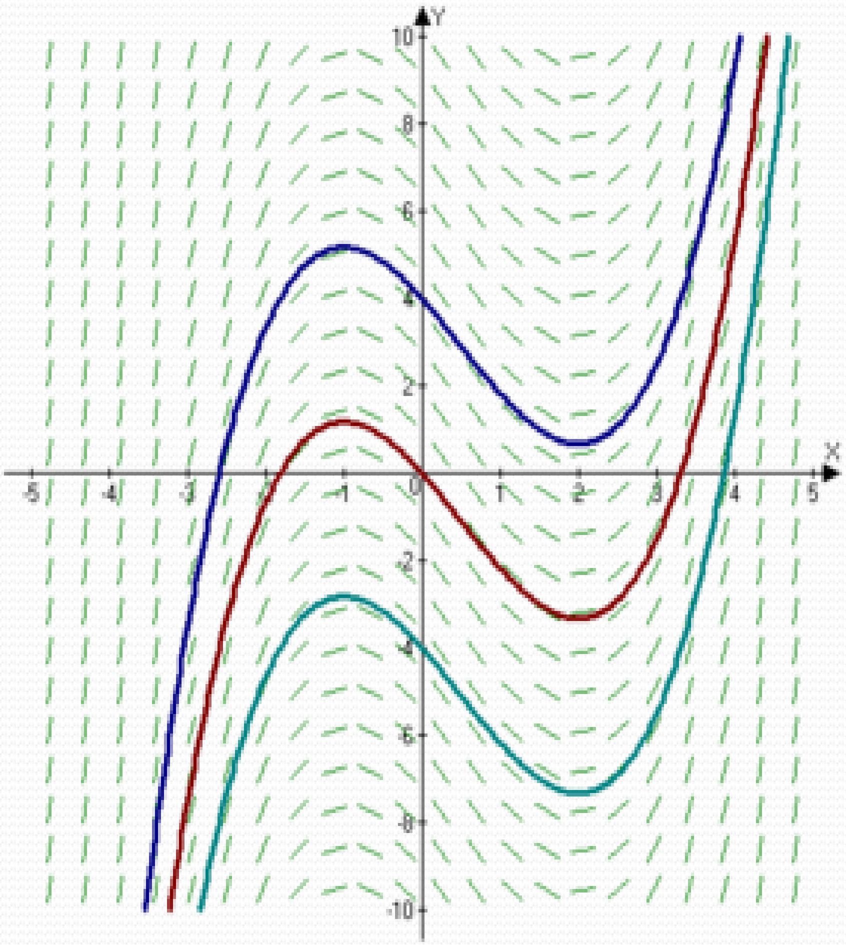
$$y' = f\left(x, y(x)\right)$$

Решением дифференциального уравнения является всякая функция $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, которая после её подстановки в уравнение, превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка содержит неопределенную постоянную $\boldsymbol{C}$:

$$y = \varphi\left(x, C\right)$$

Геометрическое представление решения дифференциального уравнения 1-го порядка.



Графическое представление - **семейство «параллельных» кривых** $\boldsymbol{y = \varphi(x) + C}$,

где каждому числу С соответствует определенная кривая семейства – *интегральная кривая.*

- Интегральные кривые для

$$y' = x^2 - x - 2$$

$$y = x^3/3 - x^2/2 - 2x + C$$

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольной константе придать определенное значение:

$$y = \varphi(x, C^*)$$

Для выделения *частного решения* из общего решения дифференциального уравнения первого порядка следует задать дополнительное условие (*начальное условие*) – *значение решения в одной точке (начальной точке)* :

$$y(x_0) = \varphi(x_0) = y_0$$

Постановка задачи Коши для ОДУ первого порядка

Требуется найти решения дифференциального уравнения

$$y' = f\big(x, y(x)\big)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad .$$

Будем считать, что решение задачи Коши существует и единственно, т.е. задача поставлена корректно и функция $f(x,y)$ удовлетворяет всем необходимым требованиям в некоторой области.

Постановка задачи численного решения Коши для ОДУ первого порядка

Решение задачи Коши численными методами :

не определяя функцию $y = \varphi(x)$, найти по заданному числу y_0 для некоторой последовательности аргументов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ такие значений $y_1, \ldots, y_n$, что

$$y_i = \varphi(x_i), i = 1,2,\ldots,n$$

(т.е. построить таблицу приближенных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решения уравнения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.)

Численное решение задачи Коши

Введем равномерную *сетку* с шагом *h* (*h*>0), т.е. рассмотрим множество точек (*узлов сетки*) $x_i = x_0 + kh,\ k=1,2,\ \dots,n.$

Дифференциальное уравнение заменим некоторым разностным

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \dots, y_{k-p+1})$$

Выбор функции **Ф** определяет *метод численного решения*:

явный метод (явную формулу для вычисления y_{k+1}) - если она не зависит от y_{k+1},

неявный (надо решать нелинейное уравнение на каждом шаге для нахождения $\boldsymbol{y_{k+1}}$) - в противном случае .

.

Численное решение задачи Коши

Метод, дающий формулу для вычисления y_{k+1} по m предыдущим значениям $y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-m+1}$,

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-m+1})$$

называется *m-шаговым.*

Существуют две группы численных методов решения задачи Коши:

- одношаговые (или методы Рунге -Кутта)
- многошаговые разностные методы.

Классификация численных методы решения задачи Коши для ОДУ

- ОДНОШАГОВЫЕ : $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k)$$
- МНОГОШАГОВЫЕ: $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-m+1})$$

- ЯВНЫЕ: $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_k, \ldots, y_{k-p+1})$$
- НЕЯВНЫЕ: $$y_{k+1} = \Phi(x_k, y_{k+1}, y_k, \ldots, y_{k-p+1})$$

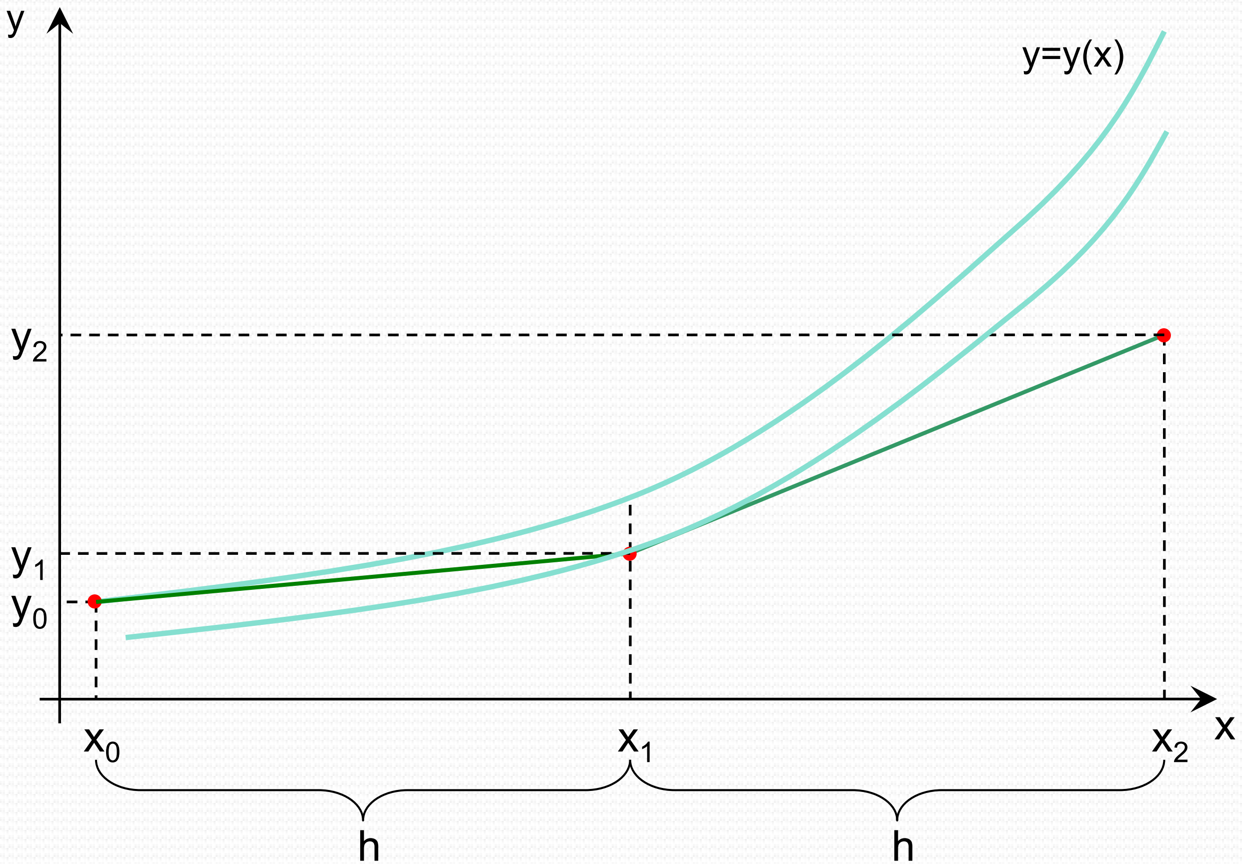
Метод Эйлера – простейший метод из группы методов Рунге-Кутты.

Метод Эйлера является *явным одношаговым* методом *первого порядка точности* (***O(h)***):

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

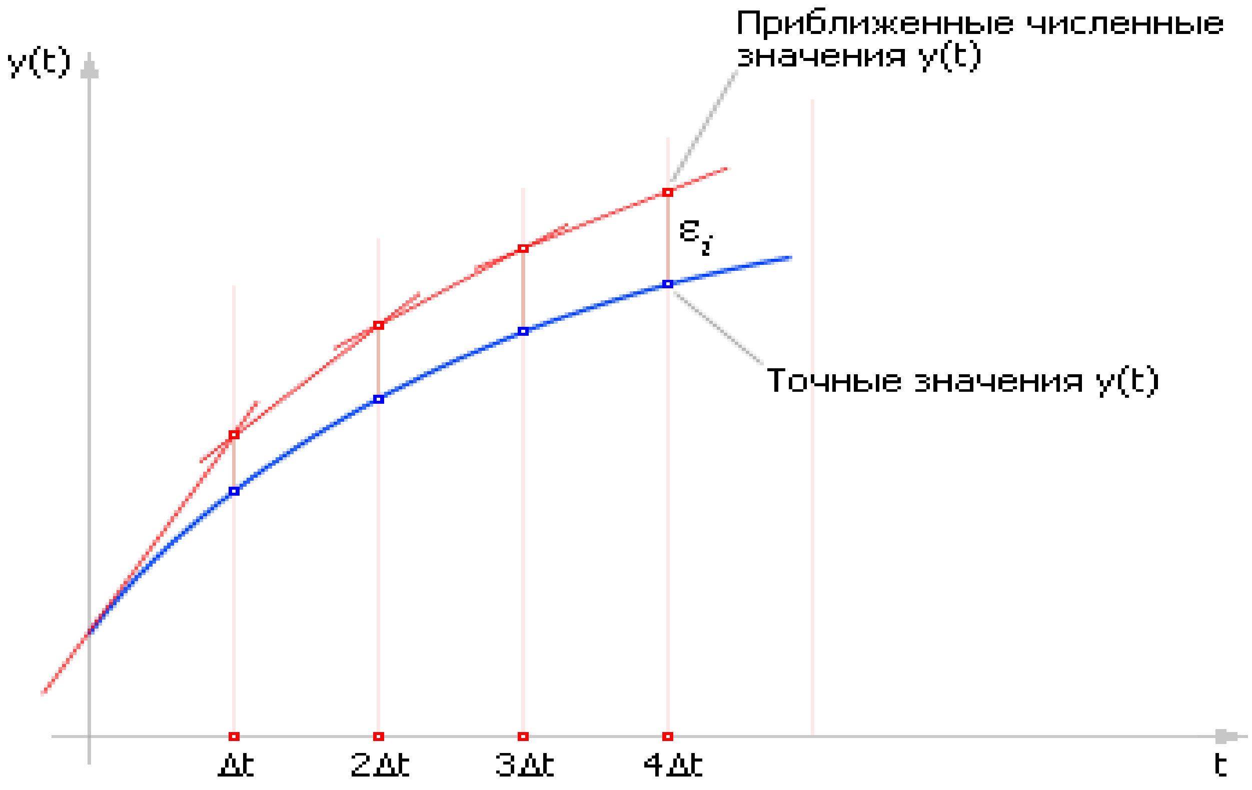
Метод Эйлера *не является устойчивым* методом, поэтому он применяется только для ОДУ, решением которых являются достаточно гладкие функции.

Графическая интерпретация метода Эйлера



От начальной точки (x_0, y_0) проводим касательную к графику до пересечения с линией $x=x_1$. Получаем новую точку (x_1, y_1).

Нарастание суммарной ошибки в методе Эйлера



Из графика видно, что с увеличением количества шагов погрешность возрастает.

Если величину шага h уменьшить, то результат получится более точным.

Одношаговые методы Рунге-Кутты

Идея методов основана на вычислении приближённого решения y_{i+1} в узле x_{i+1} в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ значений функции в промежуточных точках:

$$y_{i+1} = y_i + h[\alpha_1 f(x_i, y_i) + \alpha_2 f(x_i + \beta_1 h, y_i + \beta_2 h k_1) +$$

$$+ \alpha_3 f(x_i + \gamma_1 \cdot h, y_i + \gamma_2 \cdot h k_2) + \ldots],$$

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + \beta_1 h, y_i + \beta_2 h k_1),$$

$$k_3 = f(x_i + \gamma_1 \cdot h, y_i + \gamma_2 \cdot h k_2), \ldots.$$

Коэффициенты подбирают таким образом, чтобы достичь максимального совпадения с разложением решения в ряд Тейлора по степеням h. В зависимости от старшей степени h^p, с которой учитываются члены ряда, получают разностные схемы разных порядков точности.

Метод Эйлера соответствует случаю $p=1$.

Наиболее известные методы второго порядка ($p=2$) – *метод Эйлера – Коши* и модифицированный метод Эйлера.

Их глобальная точность - $O(h^2)$.

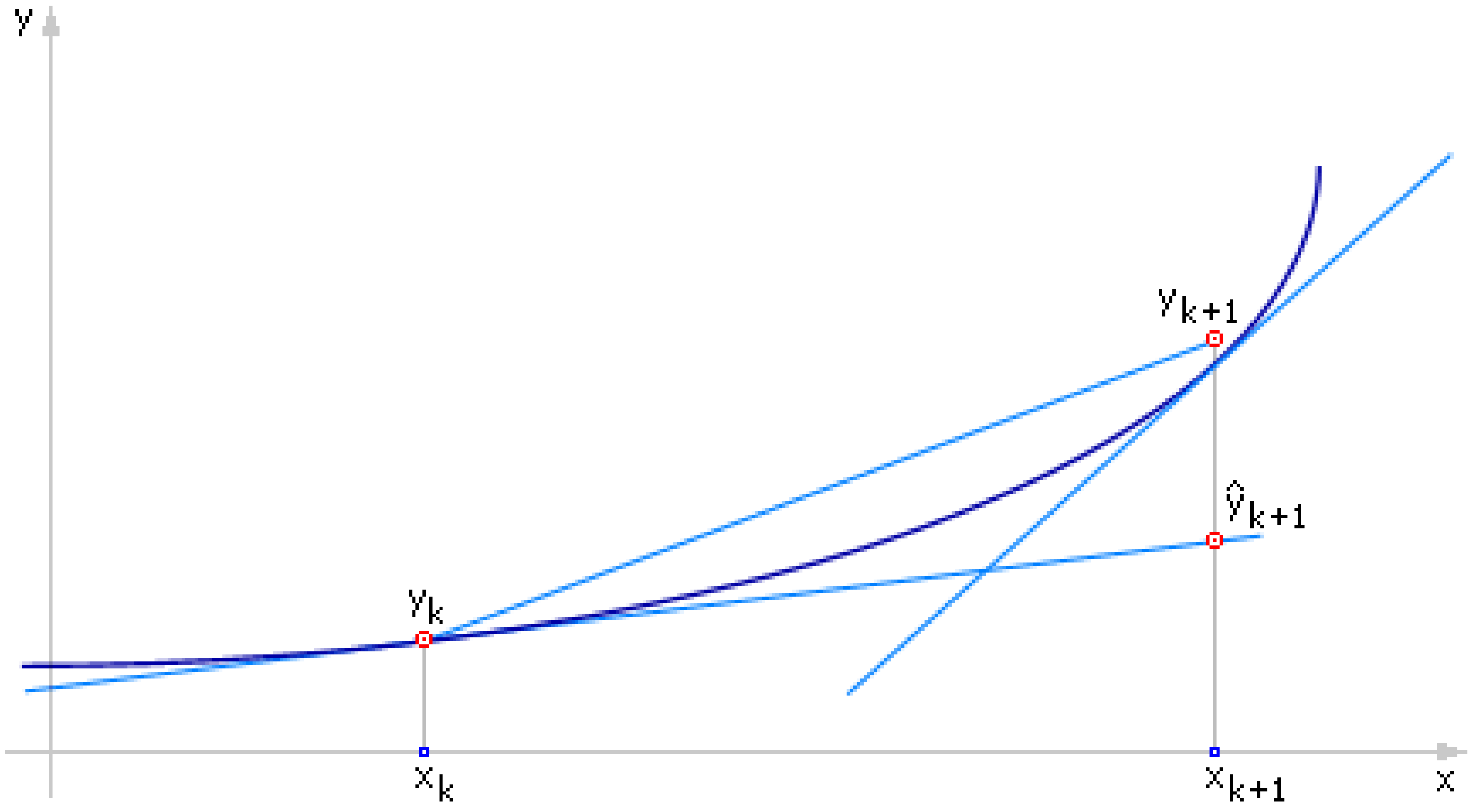
Метод Эйлера-Коши

В этом методе первую *половину шага* совершают с тангенсом угла наклона касательной в предыдущей точке точке, а вторую *половину шага* – с тангенсом угла наклона в последующей точке:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right)$$

Метод Эйлера-Коши является *неявным.*

Геометрическая интерпретация метода Рунге-Кутты второго порядка (метод Эйлера-Коши)



Для его простейшей реализации находится приближенное значение y_{i+1} методом Эйлера, подставляется в правую часть формулы Эйлера-Коши и находится уточненное значение y_{i+1}.

$$\widetilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + h/2 \cdot \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}) \right)$$

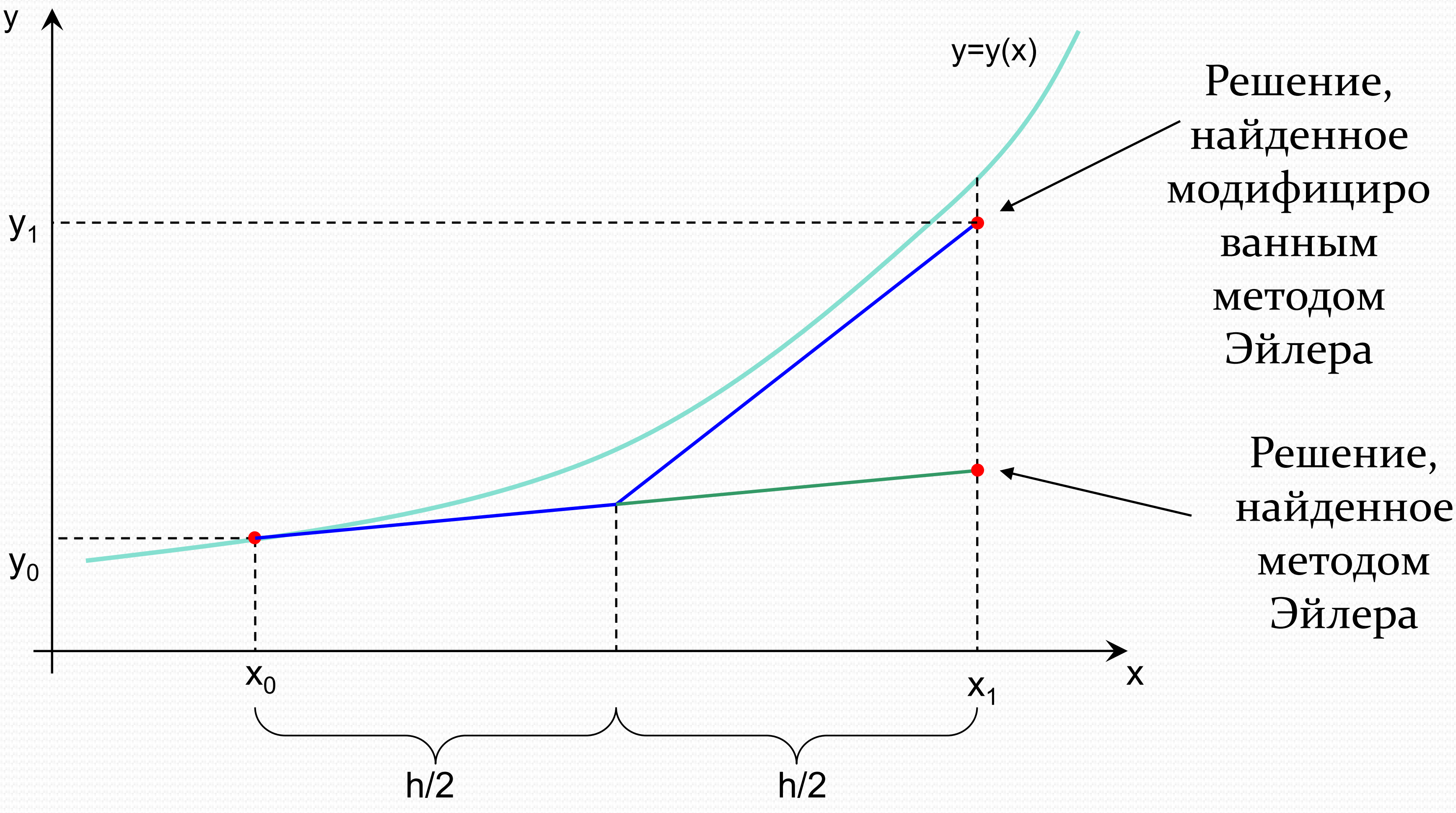
Модифицированный метод Эйлера

В этом методе *«пробный» шаг* совершают с тангенсом угла наклона касательной в предыдущей точке точке, а вторую *«окончательный» шаг* – с тангенсом угла наклона в «пробной» точке:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left(f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right)$$

Метод *явным.*

Модифицированный метод Эйлера



Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Наиболее часто в вычислительной практике используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка следующего вида:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[k_1(x_i, y_i) + 2k_2(x_i, y_i) + 2k_3(x_i, y_i) + k_4(x_i, y_i)\right]$$

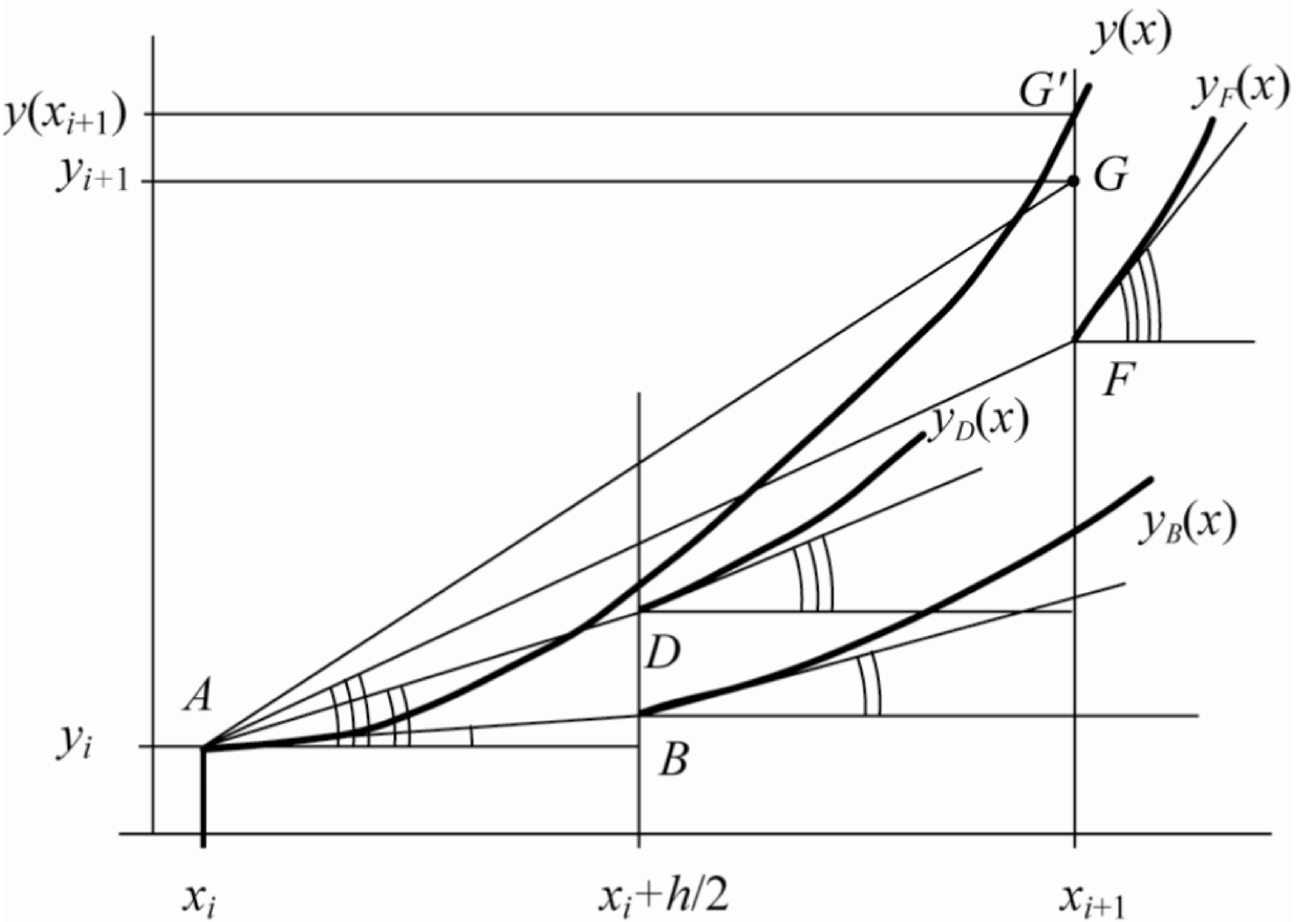
где

$$k_1 = f(x, y),$$

$$k_2 = f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hk_1}{2}),$$

$$k_3 = f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hk_2}{2}),$$

$$k_4 = f(x + h, y + \frac{hk_3}{2}).$$



$y(x)$
$y(x_{i+1})$
G'
$y_F(x)$
y_{i+1}
G
F
$y_D(x)$
$y_B(x)$
D
A
y_i
B
x_i
$x_i+h/2$
x_{i+1}

Многошаговый метод Адамса

Многошаговый метод (*4-шаговый*) - для расчета последующей точки необходимо знать координаты *четырех предыдущих точек:*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\right)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

В задаче Коши известна только *одна* начальная точка. Поэтому *три последующие точки* вычисляются с использованием одношаговых методов, а затем используется *4-шаговый метод Адамса*.

Данный метод является явным, имеет 4-й порядок точности.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

Любое *дифференциальное уравнение высшего порядка* можно привести к ***системе дифференциальных уравнений 1-го порядка*** путем замены переменных.

Рассмотрим дифференциальное уравнение **2-го порядка**:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Заданы ***начальные условия***: x_0, y_0, y'_0

Разрешим уравнение относительно старшей производной:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

Заменим первую производную y' функцией z.

Тогда $y''=z'$, а $y'_o = z_o$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Решаем полученную систему известными методами.

Пример решения ОДУ 2-го порядка

$$2x^4 y'' - 3{,}5 y' x + y = 0, \quad y(2) = 4.5, \quad y'(2) = 3.2$$

Разрешим уравнение относительно старшей производной :

$y'' = 1{,}75 \dfrac{y'}{x^3} - \dfrac{y}{2x^4}.$ *Произведем замену* $y' = z$

Получим систему :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 1{,}75 \dfrac{z}{x^3} - \dfrac{y}{2x^4} \end{cases} \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 4.5, \quad z_0 = 3.2$$

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений *1-го порядка*:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, y', z') = 0 \\ F_2(x, y, z, y', z') = 0 \end{cases}$$

С известными начальными условиями $\boldsymbol{x_0, y_0, z_0}$.

Оба уравнения необходимо разрешить относительно старшей производной:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

Систему можно решить любым методом, применимым для решения ОДУ первого порядка:

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$
$$z_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

Метод Эйлера-Коши:

$$\widetilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$\widetilde{z}_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left(f_1(x_i, y_i, z_i) + f_1(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}, \widetilde{z}_{i+1})\right)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} \cdot \left(f_2(x_i, y_i, z_i) + f_2(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}, \widetilde{z}_{i+1})\right)$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$k_1 = h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$l_1 = h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = h \cdot f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2})$$

$$l_2 = h \cdot f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2})$$

$$k_3 = h \cdot f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2})$$

$$l_3 = h \cdot f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2})$$

$$k_4 = h \cdot f_1(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

$$l_4 = h \cdot f_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6} \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$