

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2м.2

**ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА
С ПОМОЩЬЮ ПРИБОРА ОБЕРБЕКА**

МЕТОДИЧЕСКОЕ УКАЗАНИЕ

Минск 2022

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2м.2

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ПРИБОРА ОБЕРЬЕКА.

Цель работы:

1. Изучить метод измерения момента инерции крестообразного маятника относительно оси вращения.
2. Проверить уравнения динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
3. Проверить свойство аддитивности момента инерции.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

Тело, изменением формы которого в процессе движения можно пренебречь, называют абсолютно твердым. В дальнейшем для краткости мы будем называть такое тело просто твердым. Число степеней свободы твердого тела равно шести. Это означает, что требуется *шесть независимых величин*, однозначно определяющих в каждый момент времени положение тела в пространстве. В качестве таких можно взять три декартовых координаты центра масс тела и три угла, определяющих его ориентацию в пространстве. В соответствии с этим для описания движения твердого тела в общем случае требуется *шесть независимых уравнений движения*. Их можно представить в виде двух независимых векторных уравнений:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (2)$$

где m – масса тела, \vec{v}_c – скорость его центра масс, \vec{F} – результирующая внешних сил, действующих на тело, \vec{L} – момент импульса тела относительно некоторой точки, \vec{M} – суммарный момент внешних сил относительно *той же точки*. Соотношение (1) представляет собой уравнение динамики движения центра масс тела. Соотношение (2) называют уравнением моментов, которое дает динамическое описание изменения ориентации *тела* в пространстве.

Зная законы действующих сил и начальные условия, можно с помощью этих уравнений полностью решить задачу о движении тела, то есть найти как скорость, так и положение каждой точки твердого тела в любой момент времени. Однако решение уравнений (1) и (2) в общем случае представляет собой весьма сложную задачу.

При ограничении свободы движения число независимых уравнений, требующихся для описания движения, уменьшается. Одним из частных случаев движения твердого тела является его вращение относительно неподвижной оси. В этом случае изменение положения тела в пространстве описывается только одной величиной – углом поворота тела вокруг этой оси.

Для описания такого движения достаточно использовать лишь одно скалярное уравнение – проекцию уравнения (2) на ось вращения z :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (3)$$

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси OZ с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 1). Найдём проекцию момента импульса тела на ось OZ . Разбив мысленно тело на элементарные массы Δm_i , и учитывая, что скорость i -ой элементарной массы при ее вращательном движении равна $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, получаем

$$L_z = I\omega_z. \quad (4)$$

Здесь $I = I_z$ – момент инерции тела, ω_z – угловая скорость тела относительно оси OZ . С учетом (4) уравнение моментов (3) будет иметь вид: $\frac{d(I\omega_z)}{dt} = M_z$, а так как для закрепленной оси OZ момент инерции тела есть величина *постоянная*, то

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z. \quad (5)$$

Это и есть основное *уравнение динамики вращательного движения* твердого тела вокруг неподвижной оси OZ .

Проекции L_z и M_z – моментами импульса и силы относительно оси OZ , соответственно. Интегрирование уравнения (5), с учетом начальных условий, позволяет полностью решить задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси – найти зависимость от времени угла поворота $\varphi(t)$.

Экспериментальная установка

Уравнение (5) может быть *экспериментально* проверено на приборе (маятнике) Обербека. Маятник Обербека (рис. 2) состоит из шкива A диаметром d , к которому прикреплены четыре одинаковых стержня B , расположенных под углом 90° друг к другу.

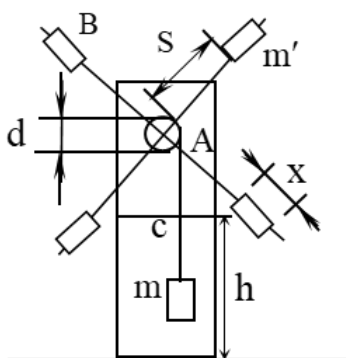


Рис.2

На перпендикулярных стержнях могут закрепляться одинаковые грузы массой m' каждый, которые перемещаются вдоль стержней, изменяя, таким образом, момент инерции маятника. На стержни нанесены деления, позволяющие измерять расстояния от грузов m' до оси вращения.

Определение уравнений динамических процессов системы.

Маятник выводится из состояния покоя при помощи груза массой m , подвешенного на нити, намотанной на шкив. На поступательно движущийся груз действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости \vec{T} , приложенная со стороны нити (рис. 3).

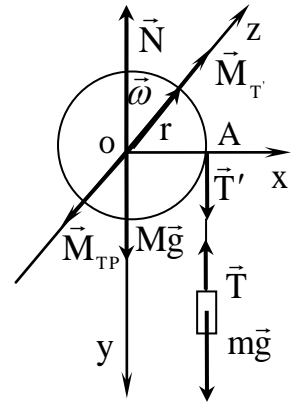


Рис.3

На шкив маятника A действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} , сила трения в опоре и сила упругости нити \vec{T}' . Моменты сил $M\vec{g}$ и \vec{N} относительно точки O равны нулю, так радиус-вектор точки приложения каждой из этих силы равен нулю, при симметричном расположении грузов m' (и без них) относительно оси OZ . Модули моментов сил трения и упругости (до момента соприкосновения груза со столом) относительно оси OZ равны соответственно M_{TP} и rT' , где r – радиус шкива.

Описание движения системы маятник-нить-груз значительно упростится, если пренебречь массой нити. В этом случае можно считать, что $T' = T$ и для описания движения системы достаточно двух уравнений:

второй закон Ньютона для поступательного движения груза

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T, \quad (6)$$

основной закон динамики вращательного движения для крестообразного маятника

$$I \frac{d\omega}{dt} = rT - M_{TP}, \quad (7)$$

где v и ω – модули скорости груза и угловой скорости маятника, I – момент инерции маятника относительно оси OZ . Здесь учтено также, что

$$v_y = v, \omega_z = \omega, \vec{T}_y = -\vec{T}, \quad M_{TPZ} = -M_{TP}, \quad M_{T'Z} = rT.$$

Определение уравнений кинематических процессов системы.

В предположении, что нить *нерастяжима* и отсутствует ее *проскальзывание* при раскручивании шкива, можно принять, что модуль скорости груза равна линейной скорости точки шкива в месте касания нити:

$$v = \omega \cdot r. \quad (8)$$

Таким образом, устанавливается связь между переменными v и ω , входящим в уравнения (6) и (7).

Сначала груз m удерживается на площадке C (рис.2), расположенной на высоте h от поверхности стола, причем h можно произвольно изменять. Если площадку убрать, то груз m начнет двигаться вниз.

Пусть t_y – время движения груза m до удара о стол. Так как начальная скорость груза равна нулю, а его движение равноускоренное, то из известного кинематического закона получаем ускорение груза:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2h}{t_y^2}. \quad (9)$$

Подставляя величину скорости из (8) уравнение (9), находим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt_y^2}. \quad (10)$$

Определение момента инерции маятника из основного уравнения динамики.

После соприкосновения груза со столом сила упругости T обращается в нуль (нить должна в момент соприкосновения соскользнуть со шкива). Дальнейшее вращение крестовины под действием сил трения в опоре становится замедленным. Основное уравнение динамики вращательного движения маятника имеет вид:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -M_{mp}. \quad (11)$$

Полагая, что в течение всего времени вращения маятника момент сил трения в опоре *не изменяется*, т.е. $M_{mp} = const$, выполняем интегрирование уравнения (11) после разделения переменных:

$$I \int_{\omega(t_y)}^0 d\omega = -M_{mp} \int_{t_y}^{t_y+t_g} dt, \quad (12)$$

где t_g – время вращения крестовины до остановки *от момента* соприкосновения груза со столом; $\omega(t_y)$ – угловая скорость крестовины в момент удара груза о стол.

Учитывая теперь, что $\upsilon_1 = at_y$, из уравнения (8) находим

$$\omega(t_y) = \frac{at_y}{r} = \frac{2h}{rt_y}. \quad (13)$$

В результате интегрирования уравнения (12) получаем

$$I\omega(t_y) = M_{mp}t_g. \quad (14)$$

С учетом (13) получаем выражение для момента силы трения:

$$M_{mp} = I \frac{2h}{rt_y t_g}. \quad (15)$$

Тогда систему уравнений (6), (7) можно представить в виде

$$m \frac{2h}{t_y^2} = mg - T, \quad (16)$$

$$I \frac{4h}{t_y^2 d} = \frac{Td}{2} - I \frac{4h}{d \cdot t_y t_g}, \quad (17)$$

здесь $d = 2r$ – диаметр шкива.

Уравнения (16) и (17) образуют полную систему двух уравнений с двумя неизвестными I и T . Все остальные входящие в них величины, определяются экспериментально в прямых измерениях.

Исключив из (17) с помощью (16) неизвестную величину T , получаем формулу для измерения момента инерции крестообразного маятника относительно оси вращения

$$I = \frac{(gt_y^2 - 2h)t_g}{8h(t_y + t_g)} \cdot md^2. \quad (18)$$

Проверка основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела.

Изменение величины массы подвешенного к нити груза, позволяет изменять силы упругости нити и трения в опоре. *При отсутствии масс* на крестовине, отношение модулей суммарного момента сил и углового ускорения маятника должно оставаться неизменным, $\frac{rT - M_{TP}}{\beta} = I = const$. Данное соотношение позволяет определять величину момента инерции экспериментально.

Момент инерции крестообразного маятника является мерой его инертных свойств, то есть его собственной характеристикой, которая не может зависеть от внешних тел, например, грузов на подвесе.

С другой стороны, момент инерции, как величина, может быть вычислен из основного уравнения динамики вращательного движения. Проведя опыт с различными грузами m_1, m_2, m_3 , мы получим в результате расчетов по формуле (18) *примерно одинаковые* значения моментов инерции маятника I_1, I_2, I_3 .

Таким образом, можно сделать заключение о справедливости уравнения вращательного движения маятника (5).

Результаты косвенных измерений *считаются одинаковыми* в пределах погрешностей, если пересекаются их доверительные интервалы. Практически это легко установить, отложив на вещественной оси в выбранном масштабе средние значения величин моментов инерции $\langle I_1 \rangle, \langle I_2 \rangle, \langle I_3 \rangle$, окруженные соответствующими доверительными интервалами $(\langle I_1 \rangle - \Delta I, \langle I_1 \rangle + \Delta I)$, $(\langle I_2 \rangle - \Delta I, \langle I_2 \rangle + \Delta I)$, $(\langle I_3 \rangle - \Delta I, \langle I_3 \rangle + \Delta I)$.

Проверка свойства аддитивности момента инерции

Аддитивность момента инерции состоит в том, что величина момента инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерций всех частей этого тела относительно той же оси.

Обозначим момент инерции маятника без грузов m' на стержнях (рис.2) через I_0 , а с симметрично закрепленными на них четырьмя грузами – через I .

Пренебрегая размерами грузов по сравнению с размерами стержней, в соответствии со свойством аддитивности момента инерции можно записать

$$I = I_0 + 4m'l^2, \quad (19)$$

где l – расстояние от центра, закрепленного на стержне груза до оси вращения, m' – масса одного груза.

Измеряя экспериментально момент инерции обратного маятника с грузами по формуле (18) сравнивают полученную величину I с отдельно вычисленной суммой $I = I_0 + 4m'l^2$. В случае совпадения этих величин с точностью до абсолютной погрешности делают заключение о выполнении свойства аддитивности момента инерции.

Порядок выполнения работы

А. Измерение момента инерции крестообразного маятника без грузов и проверка уравнения динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

1. Снять со стержней маятника цилиндрические грузы.
2. Измерить диаметр шкива d штангенциркулем.
3. Измерить массу m_1 груза, подвешенного к нити.
4. Намотать на шкив нить с грузом так, чтобы находясь на площадке, груз натягивал нить.
5. Привести груз в движение, освободив площадку и одновременно включить *первый* секундомер. Измерить время t_y движения груза до его удара о стол первым секундомером.
6. В момент удара о стол включить *второй* секундомер и измерить время t_6 вращения маятника до остановки.

Внимание! К моменту удара нить должна соскользнуть со шкива.

7. Вычислить момент инерции крестообразного маятника без грузов m' по формуле (18).
8. Повторить действия по пунктам 1–7 для груза m_2 , а затем – m_3 .
9. Убедиться в равенстве (в пределах погрешностей) моментов инерции I_1, I_2, I_3 , измеренных при проведении опытов с массами m_1, m_2, m_3 соответственно.
10. Полученные данные внести в Таблицу 1.

Таблица 1

№ п/п	m	Δm	d	Δd	t_y	Δt_y	t_6	Δt_6	h	Δh	I	ΔI
1		–		–		–		–				
2												
3												

Б. Проверка свойства аддитивности величины момента инерции крестообразного маятника.

1. Надеть грузы m' на стержни и расположить их на одинаковом расстоянии l от оси вращения. После закрепления убедиться, что маятник находится в состоянии безразличного равновесия (сбалансирован).
2. Подвесить к нити какой – либо груз m и провести все измерения, необходимые для определения момента инерции маятника, в соответствии с п. 1-7 из Задания А.

3. Рассчитать по формуле (18) момент инерции маятника I с закрепленными на стержнях грузами m' для выбранных расстояний l .
4. Выбрав измеренное значение момента инерции маятника без грузов I_0 сложить его с величиной произведения $4m'l^2$.
5. В случае совпадения раздельно вычисленных величин $I = I_0 + 4m'l^2$, с точностью до абсолютной погрешности, делают заключение о выполнении свойства аддитивности момента инерции крестообразного маятника.
6. Полученные данные внести в Таблицу 2.

Таблица 2

№ п/п	m_l	m'	Δm	d	Δd	t_y	Δt_y	t_{ϵ}	Δt_{ϵ}	h	Δh	l	Δl	I	I_0	ΔI
1																
2			—		—		—		—							
3																

Контрольные вопросы

1. С какими физическими величинами вы познакомились при изучении теории и в процессе выполнения работы? Дайте определение этих величин.
2. Какие физические законы необходимо знать для понимания настоящей лабораторной работы? Сформулируйте эти законы в математической и словесной формах.
3. Получите выражение для момента силы трения (15).
4. Получите расчетную формулу (18), сформулировав все необходимые для него упрощающие предположения.
5. Каким образом на приборе Обербека можно проверить уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси? Какие экспериментальные данные подтверждают справедливость этого уравнения?
6. Является ли момент инерции аддитивной величиной? Ответ подтвердите с помощью полученных экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики : [учебное пособие] : в 5 кн. Кн. 1 : Механика / И.В.Савельев. – М. : Астрель : АСТ, 2008. – 336 с. : ил.
2. Наркевич И.И. Физика : учебник [утв. МО РБ] / И. И. Наркевич, Э.И.Волмянский, С. И. Лобко. – Минск : Новое знание, 2004. – 680 с.