Аппроксимация функций

Тема 3

Методы интерполирования и приближения функций

Аппроксимация функций

Способы задания функций:

- Табличный - $\{(x_k, y_k = f(x_k)), k = 1,2,\ldots,n\}$
- Графический
- Аналитический:
  - Явный - $y = f(x)$
  - Неявный - $F(x, y(x)) = 0$
  - Параметрический - $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
- Представление в виде ряда - $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$
- Интегральное представление- $f(x) = \int_a^x g(t)dt$ или $f(x) = \int_a^b g(t,x)dt$
- Решение ОДУ - $F(x, y(x), y'(x)) = 0$
- Программное задание

Аппроксимация функций

Аппроксимацией называется проблема приближения функции общего вида *классом более простых функций* и возникает в двух принципиально различных случаях:

1. известна лишь ***частичная информация о функции*** (точная или приближенная). Например, таблица значений функции и, возможно, таблица значений производных при некоторых дискретных значениях аргумента.

Требуется восстановить по имеющимся данным *аналитический* вид зависимости.

Аппроксимация функций

2. функция *известна* (задана либо аналитически, но регулярные вычисления слишком трудоемки даже при использовании ЭВМ, либо неявно - в любом случае существует возможность вычислить ограниченное количество значений функции в некотором диапазоне значений аргумента).

Замена более простой функцией необходима для облегчения как вычисления значений, так и выполнения операций дифференцирования и интегрирования (как аналитического, так и численного)

Аппроксимация функций

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек

$$\{x_j, \; j = 0,1,2,\ldots,m\}$$

(это множество называется *сеткой*, а точки – *узлами сетки*) , то *аппроксимация* называется ***точечной***.

При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке [a,b]) *аппроксимация* называется ***непрерывной*** (или интегральной).

Аппроксимация на всем отрезке [a, b] называется ***глобальной***, а на отдельных участках отрезка [a, b] – ***кусочной*** или ***локальной***.

Аппроксимация функций

При аппроксимации (приближении) функции решаются следующие основные задачи:

– выбор критерия близости функций;

– выбор вида аппроксимирующей функции;

– вычисление параметров аппроксимирующей функции, обеспечивающих наименьшее отклонение от исследуемой зависимости в указанном смысле.

Аппроксимация функций

Близость исходной функции *f(x)* и более простой аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ обеспечивают путем введения в аппроксимирующую функцию ***свободных параметров*** c_0, c_1, c_2, …, c_n и соответствующим их выбором.

Если $\varphi(x, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ нелинейно зависит от параметров, то аппроксимация называется ***нелинейной***.

В случае ***линейной аппроксимации*** $\varphi(x, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ представима в виде так называемого ***обобщенного многочлена***

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

по некоторой системе функций $\{\varphi_k(x)\}, k = 0,1,\ldots,n$.

Аппроксимация функций

Само понятие ***близости*** или ***меры отклонения*** аппроксимирующей функции от заданной и способ выбора наилучших значений параметров c_i определяется конкретным видом аппроксимации:

- *Интерполяция* требует равенства в узлах значений исходной и аппроксимирующей функций;

- *Среднеквадратичная аппроксимация* использует евклидову норму разности значений исходной и аппроксимирующей функций;

- *Равномерная аппроксимация* использует чебышевскую норму разности значений исходной и аппроксимирующей функций.

Интерполяция функций

Интерполяция. «Близость» *интерполирующей функции* $\varphi(x)$ к исходной функции $f(x)$ состоит в том, что их значения *совпадают на заданной системе точек* $\boldsymbol{x_j}$ $(j = 0,1,2,\ldots,n)$, называемых *узлами*.

Значения аппроксимирующих параметров $\boldsymbol{c_i}$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\varphi(x_j, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f(x_j), \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x_j) = f(x_j) \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$

в случае линейной интерполяции.

Интерполяция функций

Для того чтобы задача линейной интерполяции имела единственное решение, необходимо и достаточно чтобы *определитель системы не равнялся нулю* при любом расположении узлов x_i :

$$\det\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0, x_k \neq x_j \quad k, j = 0,1,\dots,n.$$

Интерполяция функций

На практике наиболее часто применяют следующие виды интерполяции :

- алгебраическими многочленами ***$P_n(x)$*** (т.е. степенями *x*)

$$\{\varphi_k(x) = x^k\}, \quad k = 0,1,\dots,n$$

,

- тригонометрическими многочленами ***$T_n(x)$***

$$\{\varphi_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx\}, \quad k = 0,1,\dots,n$$

,

- кусочно-полиномиальными функциями ***$S_n(x)$*** (сплайнами).

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Среднеквадратичное приближение. Мерой отклонен при среднеквадратичном приближении является евклид норма:

1. Если функция ***f(x)*** задана в некоторых точках x

($j = 0,1, 2,\ldots,m$) отрезка $[a,b]$ (причем $m > n$), то ***норма разности значений функций*** на дискретном множестве $\{$ определяется формулой

$$\|f(x_k) - \varphi(x_k, c_0, c_1, \ldots, c_n)\|_E = \left(\sum_{k=1}^{m} (f(x_k) - \varphi(x_k, c_0, c_1, \ldots, c_n))^2\right)^{1/2}$$

(«сумма квадратов отклонений во всех узлах»)

Среднеквадратичная аппроксимация функций

2. Если *f(x)* задана во всех точках некоторого отрезка [a,b] и обе функции *f(x)* и *φ (x)* интегрируемы с квадратом на [a,b], то ***норма разности значений функций*** определяется формулой:

$$\left\| f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n) \right\|_E = \left(\int_a^b (f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n))^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Задача о ***наилучшем среднеквадратичном приближении*** состоит в нахождении параметров $\boldsymbol{c_i}$,

минимизирующих норму

$$\left\| f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n \right\|_E$$

для функции $\boldsymbol{\varphi}$ ***(x)***, принадлежащей некоторому классу функций.

Обычно этот класс достаточно узок - его выбирают по ряду соображений профессионально-теоретического характера, либо исходя из формы графика исходной «табличной» функции $\left(x_j, f(x_j)\right) \quad j = 0,1,2,\ldots,n$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

При линейной аппроксимации *многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения* существует при условии линейной независимости системы функций

$$\{\varphi_k(x)\}, k = 0,1,\ldots,n$$

На практике чаще применяют среднеквадратичное приближение алгебраическими многочленами в дискретном варианте.

При этом желательно, чтобы число ***m*** узлов, в которых известны значения функции было больше степени многочлена ***n*** хотя бы в полтора-два раза.

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Среднеквадратичные аппроксимация функций используются обычно в случаях, когда

- приближаемая функция не обладает достаточной гладкостью и для нее не удается построить подходящего интерполяционного многочлена,
- или же значения функции известны в достаточно большом числе точек, но со случайными ошибками.

Равномерная аппроксимация функций

Равномерное приближение. Мерой близости аппроксимирующей функции к исходной при равномерном приближении является чебышевская норма, которая равна максимальному уклонению этих функций друг от друга на отрезке [a,b]:

$$\left\| f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n) \right\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n) \right|$$

Равномерная аппроксимация функций

Наилучшее равномерное приближение определяется условием

$$\min_{\varphi(x,c_0,c_1,\ldots,c_n)} \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \varphi(x,c_0,c_1,\ldots,c_n) \right|$$

где минимум ищется на множестве функций *φ $(x, c_o, c_1, \ldots c_n)$*.

Доказано, что среди всех алгебраических многочленов *n* -й степени $P_n(x)$ существует, и притом единственный, *многочлен наилучшего равномерного приближения* ***$P^*_n(x)$***, для которого

$$\left\| f(x_k) - P_n^*(x) \right\|_{C[a,b]} < \left\| f(x_k) - P_n(x) \right\|_{C[a,b]}$$

Равномерная аппроксимация функций

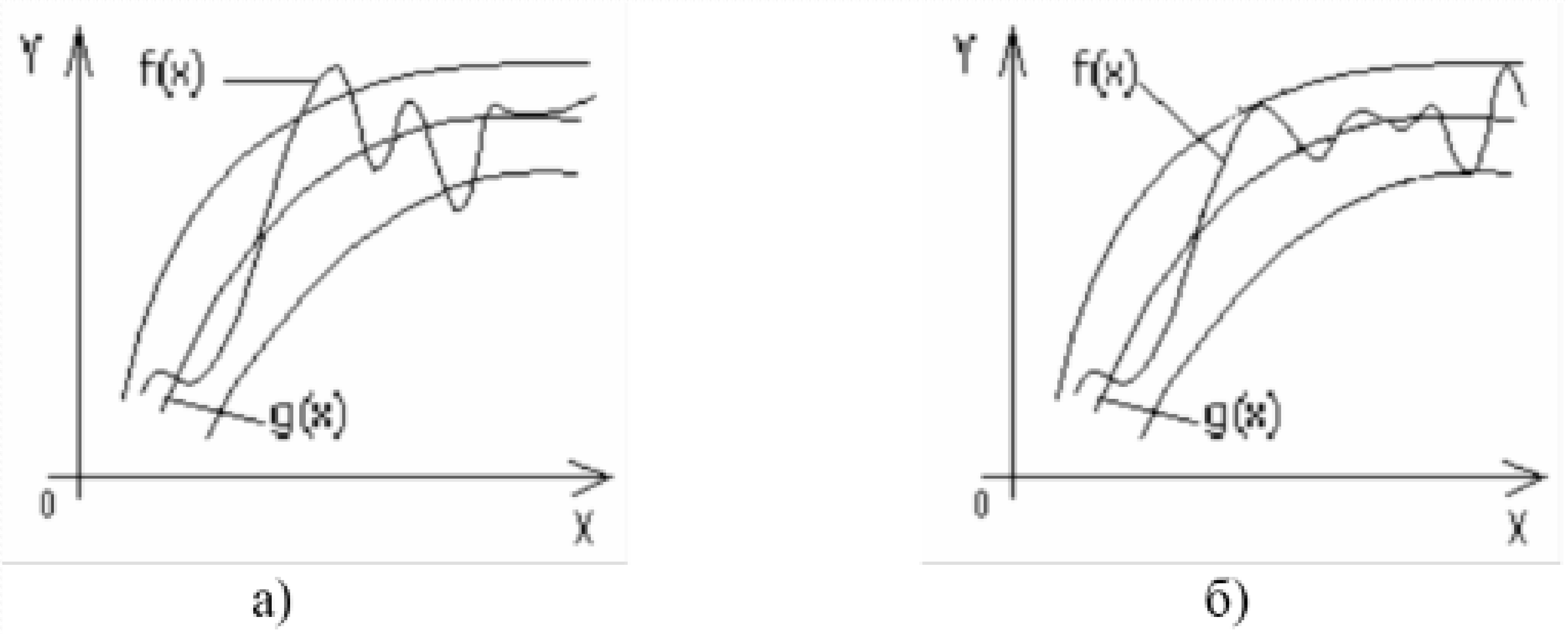
Построение многочлена наилучшего равномерного приближения в общем случае вызывает большие затруднения. Поэтому на практике ограничиваются построением многочлена, близкого к наилучшему и дающего равномерное приближение заданной функции $f(x)$ с требуемой точностью **ε**, т.е. удовлетворяющего условию

$$\left\| f(x_k) - P_n^*(x) \right\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

Таким многочленом является *интерполяционный многочлен* с узлами, особым образом расположенными на отрезке $[a,b]$.

Аппроксимация функций

Принципиально различие *среднеквадратичного* (а) и *равномерного* (б) приближений показано на рис.:



Интерполирование алгебраическими многочленами

Пусть функция *f(x)* задана таблицей значений

$$\left(x_j, f(x_j)\right) \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$

в некоторых точках *(узлах интерполирования)* отрезка $[a,b]$:

Задачей интерполирования функции алгебраическими многочленами является построение многочлена

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

степени не выше n, значения которого совпадают со значениями функции в этих точках.

Интерполирование алгебраическими многочленами

Коэффициенты интерполяционного многочлена можно найти путем решения СЛАУ, получающейся из условий интерполирования:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + \ldots + a_n x_0{}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1{}^2 + \ldots + a_n x_1{}^n = f(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n{}^2 + \ldots + a_n x_n{}^n = f(x_n) \end{cases}$$

Интерполирование алгебраическими многочленами

Эта система имеет единственное решение, так как ее определитель (*определитель Вандермонда*) не равен нулю, если рассматриваемые узлы интерполирования различны:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$$

Формы записи алгебраического многочлена

Запись алгебраического многочлена в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

называется *степенной* и является стандартной для математических текстов.

Она очень удобна для дифференцирования и интегрирования полинома, но вычисление его значения непосредственно по формуле может привести к потере значащих цифр при больших значениях аргумента.

Формы записи алгебраического многочлена

Смещенной или *центрированной* степенной формой многочлена называется запись его в виде

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - c_1) + b_2(x - c_1)^2 + \ldots + b_n(x - c_1)^n$$

Фактически смещенная форма представляет собой разложение полинома в ряд Тейлора в окрестности точки c_1

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Формы записи алгебраического многочлена

Обобщением смещенной формы многочлена является *форма Ньютона:*

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - c_1) + d_2(x - c_1)(x - c_2) + \ldots +$$
$$+ d_n(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$$

Формы записи алгебраического многочлена

При совпадающих узлах она становится смещенной, а при нулевых узлах - степенной.

Многочлен называется *факторизованным*, если он записан в виде

$$P_n(x) = (x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$$

где c_k - нули многочлена.

Эта форма записи соответствует форме Ньютона, в которой старший коэффициент равен единице, а остальные - нулю.

Формы записи алгебраического многочлена

Запишем многочлен $P_n(x)$ в более удобном для вычислений виде:

$$P_n(x) = d_0 + (x - c_1)(d_1 + (x - c_2)(d_2 + (x - c_3)(d_3 +$$
$$+ \ldots (x - c_{n-1})(d_{n-1} + (x - c_n)d_n)\ldots)))$$

Этот алгоритм называется *схемой Горнера* и является самым экономным для реализации на ЭВМ. Вычисление значения многочлена с его помощью требует всего *n* умножений и *2n* сложений. Для сравнения - вычисление многочлена в стандартной форме требует в общем случае *2n - 1* умножений и *n* сложений.

Интерполирование алгебраическими многочленами

Интерес представляют формы записи интерполяционного многочлена, не использующие непосредственное решение системы.

Наиболее часто применяют интерполяционные многочлены:

- в форме **Лагранжа,** позволяющей представить многочлен в виде линейной комбинации значений функции в узлах,
- в форме **Ньютона,** которая выражает многочлен через значение $f(x)$ в одном из узлов и через *разделенные разности* функции $f(x)$, построенные по узлам x_j .

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционная формула Лагранжа **:**

$$L_k(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\prod\limits_{j=0,\,j\neq k}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{j=0,\,j\neq k}^{n}(x_k-x_j)}=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x), \qquad l_k(x_j)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}$$

представляет многочлен в виде линейной комбинации значений функции в узлах с коэффициентами – многочленами степени n, зависящими только от узлов.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Недостатком *формы Лагранжа* интерполяционного многочлена является то, что при добавлении новых узлов интерполяционный многочлен надо строить заново.

Но он удобен при одновременном интерполировании нескольких функций, заданных в одних и тех же узлах, т.к. коэффициенты $l_k(x)$ одинаковы для всех функций и зависят только от узлов:

$$l_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пример. Постройте для функции $f(x) = \sin \pi x$, заданной в неравноотстоящих узлах интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени.

Вычислим значения функции в трех узлах:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/6, \quad x_3 = 1/2$$

и составим таблицу

x	*f(x)*
0	0
1/6	1/2
1/2	1

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= 0\cdot\frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(0-1/6)(0-1/2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-0)(x-1/2)}{(1/6-0)(1/6-1/2)} + 1\cdot\frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/2-0)(1/2-1/6)} =$$

$$= -\frac{x(x-1/2)}{1/9} + \frac{x(x-1/6)}{1/6} = -3x^2 + 7x/2$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

```
xlst = {0, 1 / 6, 1 / 2}; ylst = {0, 1 / 2, 1};
```

```
n = Length[xlst] - 1; Array[xdata, {n + 1, 0}]; Array[ydata, {n + 1, 0}];
```
длина массив массив

```
For[i = 0, i ≤ n, i++, xdata[i] = xlst[[i + 1]];
```
цикл ДЛЯ

```
  ydata[i] = ylst[[i + 1]]];
```

$$\text{pln} = \sum_{i=0}^{n} \text{ydata}[i] \times \prod_{j=0}^{n} \text{If}\left[i \neq j, \frac{x - \text{xdata}[j]}{\text{xdata}[i] - \text{xdata}[j]}, 1\right];$$

условный оператор

```
lgr2[x_] := Collect[pln, x];
```
сгруппировать

```
lgr2[x]
```

$$\frac{7\,x}{2} - 3\,x^2$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционная формула Ньютона является разностным аналогом формулы Тейлора. При ее построении использует значение $f(x)$ в одном из узлов и ***разделенные разности*** функции $f(x)$, построенные по *всем узлам* x_j , в предположении, что среди них нет совпадающих.

Интерполяционный многочлен Ньютона

Разделенными разностями первого порядка называются отношения

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

…………..

$$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

По этим разделенным разностям первого порядка можно построить *разделенные разности второго порядка.*

Интерполяционный многочлен Ньютона

Разделенные разности второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$

$$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Аналогично определяются разделенные разности более высокого $(k+1)$-го порядка по уже известным разностям порядка k:

$$f(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}, x_{j+k+1}) = \\ = \frac{f(x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+k+1}) - f(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}$$

При вычислении разделенных разностей для наглядности принято записывать их в виде следующей таблицы:

Интерполяционный многочлен Ньютона

x_0	$f(x_0)$				
		$f(x_0,x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$		
		$f(x_1,x_2)$		…	
x_2	$f(x_2)$		…		$f(x_0,x_1,\dots,x_n)$
		…		…	
…	…		$f(x_{n-1},x_{n-1},x_n)$		
…	…	$f(x_{n-1},x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

Интерполяционный многочлен Ньютона

Заметим, что добавление нового узла не изменит уже вычисленных коэффициентов и таблица будет просто **дополнена новым столбцом и новой наклонной строкой** разделенных разностей.

Используя выделенную <u>верхнюю</u> <u>наклонную строку</u> в построенной таблице разделенных разностей, можно записать ***интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования вперед***.

Используя <u>нижнюю</u> <u>наклонную</u> <u>строку</u> - ***многочлен Ньютона для интерполирования назад .***

Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона

для интерполирования вперед:

$$N_n^{(в)}(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \\ + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

для интерполирования назад:

$$N_n^{(н)}(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + \\ + f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \\ + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

После определения коэффициентов полинома Ньютона, вычисление его значений при конкретных аргументах *x* наиболее экономично проводить по *схеме Горнера*, получаемой путем последовательного вынесения за скобки множителей $(x - x_i)$ в формулах :

$$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)[f(x_0, x_1) + (x - x_1)[f(x_0, x_1, x_2) + \\ + \ldots + (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n)]..].$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Составить таблицу разделенных разностей и построить интерполяционный многочлен Ньютона по следующим данным:

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	5

X_i	$f(x_j)$	$f(x_j,x_{j+1})$	$f(x_j,x_{j+1},x_{j+2})$	$f(x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+2})$
0	1			
		1		
2	3		-2/3	
		-1		3/10
3	2		5/6	
		3/2		
5	5			

Интерполяционный многочлен Ньютона

Многочлен Ньютона для интерполирования вперед записываем, используя верхнюю наклонную строку построенной таблицы:

$$N_3^{(B)}(x) = 1 + 1 \cdot x + (-\tfrac{2}{3}) \cdot x \cdot (x-2) + \tfrac{3}{10} \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-3).$$

Для интерполирования в конце таблицы запишем многочлен с коэффициентами, расположенными в нижней наклонной строке таблицы:

$$N_3^{(H)}(x) = 5 + \tfrac{3}{2} \cdot (x-5) + \tfrac{5}{6}) \cdot (x-5) \cdot (x-3) + \tfrac{3}{10} \cdot (x-5) \cdot (x-3) \cdot (x-2).$$

Если преобразовать оба многочлена в степенную форму, то получим одинаковый результат, что подтверждает единственность интерполяционного многочлена:

$$P_3(x) = 1 + \tfrac{62}{15} \cdot x - \tfrac{13}{6} \cdot x^2 + \tfrac{3}{10} \cdot x^3. \qquad \nabla$$