Аппроксимация функций

Тема 3

Среднеквадратическое приближения функций

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Среднеквадратичные аппроксимация функций используются обычно в случаях, когда

- приближаемая функция не обладает достаточной гладкостью и для нее не удается построить подходящего интерполяционного многочлена,
- или же значения функции известны в достаточно большом числе точек, но со случайными ошибками.

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Мерой отклонения при среднеквадратичном приближении является евклидова норма:

1. Если функция $f(x)$ задана в некоторых точках x_j ($j = 0,1, 2,\ldots,m$) отрезка $[a,b]$ (причем $m > n$), то *норма разности значений функций* на дискретном множестве $\{x_j\}$ определяется формулой

$$\left\| f(x_k) - \varphi(x_k, c_0, c_1, \ldots, c_n) \right\|_E = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(f(x_k) - \varphi(x_k, c_0, c_1, \ldots, c_n) \right)^2 \right)^{1/2}$$

(«сумма квадратов отклонений во всех узлах»)

Среднеквадратичная аппроксимация функций

2. Если *f(x)* задана во всех точках некоторого отрезка [a,b] и обе функции *f(x)* и *φ (x)* интегрируемы с квадратом на [a,b], то ***норма разности значений функций*** определяется формулой:

$$\left\| f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n) \right\|_E = \left(\int_a^b (f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n))^2 dx \right)^{1/2}$$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Задача о ***наилучшем среднеквадратичном приближении*** состоит в нахождении параметров c_i , минимизирующих норму

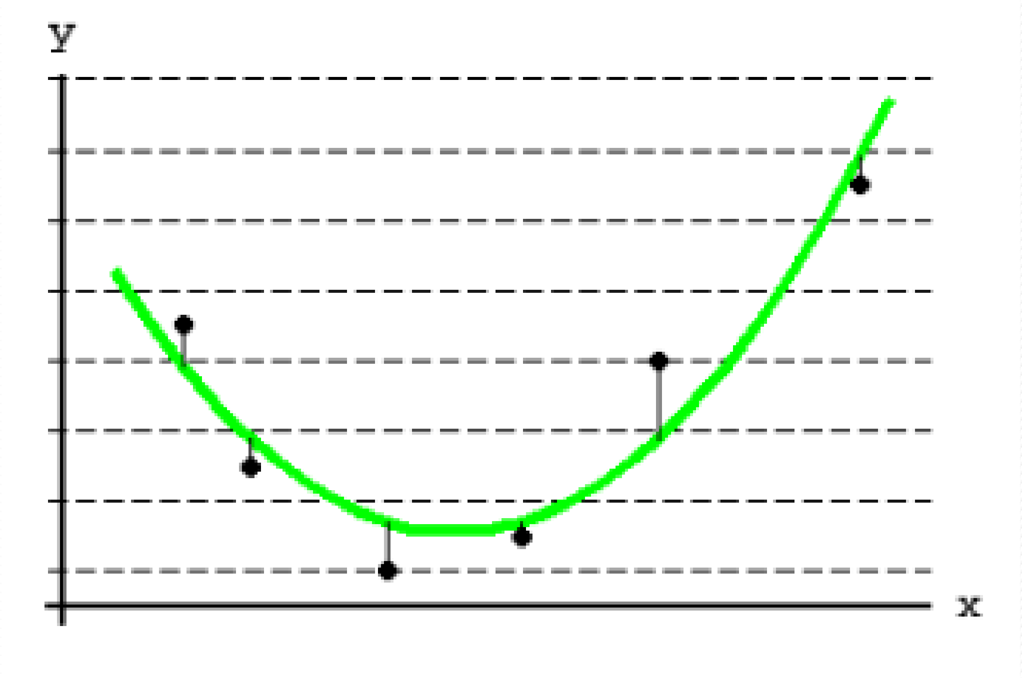
$$\left\| f(x) - \varphi(x, c_0, c_1, \ldots, c_n \right\|_E$$

для функции ***φ (x)***, принадлежащей некоторому классу функций.

Обычно этот класс достаточно узок - его выбирают по ряду соображений профессионально-теоретического характера, либо исходя из формы графика исходной «табличной» функции $\left(x_j, f(x_j)\right) \quad j = 0,1,2,\ldots,n$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Такую задачу можно графически интерпретировать как минимизацию длин отрезков отклонений заданных точек $\left(x_j, f(x_j)\right)$ $j = 0,1,2,\ldots,n$ от кривой ***y* = *φ* (*x*)**, принадлежащей некоторому классу функций:



Среднеквадратичная аппроксимация функций

При линейной аппроксимации *многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения*

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

существует при условии линейной независимости системы функций $\{\varphi_k(x)\}, k = 0,1,\ldots,n$

На практике чаще применяют среднеквадратичное приближение алгебраическими многочленами в дискретном варианте.

При этом желательно, чтобы число ***m*** узлов, в которых известны значения функции было больше степени многочлена ***n*** хотя бы в полтора-два раза.

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Способ решения задачи среднеквадратичного приближения называется *методом наименьших квадратов* (МНК), и заключается в построении такого многочлена $P_n^*(x)$, для которого сумма квадратов отклонений его значений в узлах от табличных значений была бы минимальной –

$$\min_{c_0, c_1, c_2, \dots, c_n} S(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n) =$$

$$= \min_{c_0, c_1, c_2, \dots, c_n} \left(\sum_{k=0}^{m} \left(P_n(x_k, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n) - f(x_k) \right)^2 \right)$$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Необходимое условие *локального экстремума* функции имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial c_i} = \sum_{k=0}^{m} 2\left(c_0 + c_1 x_k + c_2 x_k^{\ 2} + \ldots + c_n x_k^{\ n} - f(x_k)\right) \cdot x_k^{\ i} = 0, \qquad i = \overline{0,1,n}$$

что приводит к следующей системе линейных уравнений (*нормальной системе*) для нахождения коэффициентов многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения $P_n(x)$ в *степенной форме*

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

$$\begin{cases}
c_0 \sum_{i=0}^{m} 1 + c_1 \sum_{i=0}^{m} x_i + c_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + \ldots + c_n \sum_{i=0}^{m} x_i^n = \sum_{i=0}^{m} f(x_i) \\
c_0 \sum_{i=0}^{m} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^3 + \ldots + c_n \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{m} x_i \cdot f(x_i) \\
c_0 \sum_{i=0}^{m} x_i^2 + c_1 \sum_{i=0}^{m} x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^4 + \ldots + c_n \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+2} = \sum_{i=0}^{m} x_i^2 \cdot f(x_i) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_0 \sum_{i=0}^{m} x_i^n + c_1 \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} + c_2 \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+2} + \ldots + c_n \sum_{i=0}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=0}^{m} x_i^n \cdot f(x_i)
\end{cases}$$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Коэффициентами системы являются суммы степеней чисел x_i, а правыми частями – суммы произведений значений функции в узлах и степеней x_i.

Для формирования матрицы этой системы достаточно вычислить только элементы первой строки и последнего столбца, остальные элементы заполняются с помощью циклического сдвига элементов предыдущей строки.

Можно доказать, что если среди узлов нет совпадающих и $n \le m$, то определитель системы не равен нулю и решение системы единственно.

Если $m=n$, многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения равен интерполяционному многочлену Лагранжа:

$$P_n(x) = L_n(x)$$

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Выбор степенных функций в качестве не является оптимальным с точки зрения решения нормальной системы, т.к. в этом случае матрица системы часто *плохо обусловлена*.

Для отрезка [0,1], например, элементами матрицы являются величины

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$$

Напомним, что такая матрица называется *матрицей Гильберта*, ее число обусловленности $condG \approx e^{3.5n}$

при $n = 5$ оно имеет порядок 10^7, при $n = 9$ – превышает 10^{13}. т.е. система $\{x^k\}$ почти линейно зависима на отрезке [0,1].

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Поэтому на практике для построения многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения не рекомендуется использовать степенные функции для $n > 4$, т.к. добавление новых функции x^k будет ухудшать качество аппроксимации. При этом желательно, чтобы число точек m было больше степени многочлена n хотя бы в *полтора-два раза*.

Для того чтобы найти коэффициенты многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения с высокой точностью рекомендуется для решения системы применять методы, использующие ортогональные преобразования, либо воспользоваться системами ортогональных многочленов в качестве $\{x^k\}$.

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Пример 1. Постройте для функции $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{5}\right)$ заданной в $m = 10$ узлах, многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения степени $n = 1$.

Сравните результат с полученным командой ***FindFit***[ ].

```
For[i = 0, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ

  xdata[i] = a + i × h;

  ydata[i] = N[Exp[(-1/15) xdata[i]^2 + 1/5]];
              ··· показательная функция

  XDT = Append[XDT, xdata[i]];
        добавить в конец

  YDT = Append[YDT, ydata[i]];];
        добавить в конец
```

Среднеквадратичная аппроксимация функций

```
MatrixForm[N[XDT]]
```
матричная ф··· численное

trixForm=

$$\begin{pmatrix} 0. \\ 0.6 \\ 1.2 \\ 1.8 \\ 2.4 \\ 3. \\ 3.6 \\ 4.2 \\ 4.8 \\ 5.4 \\ 6. \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[N[YDT]]
```
матричная ф··· численное

trixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.2214 \\ 1.19244 \\ 1.1096 \\ 0.984127 \\ 0.831936 \\ 0.67032 \\ 0.514788 \\ 0.376815 \\ 0.262895 \\ 0.17482 \\ 0.110803 \end{pmatrix}$$

Вычисляем аппроксимирующую линейную функцию:

```
g[x_] := a + b x x;

g[x]
```

1.29978 – 0.207505 x

Среднеквадратичная аппроксимация функций

```
data = Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]
```

таблиц··· численное приб··· численное приближение

```
{{0., 1.2214}, {0.6, 1.19244}, {1.2, 1.1096},
 {1.8, 0.984127}, {2.4, 0.831936}, {3., 0.67032}, {3.6, 0.514788},
 {4.2, 0.376815}, {4.8, 0.262895}, {5.4, 0.17482}, {6., 0.110803}}
```

```
Clear[a, b]; rules = FindFit[data, a + b x, {a, b}, x]; y = a + b x /. rules
```

очистить найти параметры соответствия

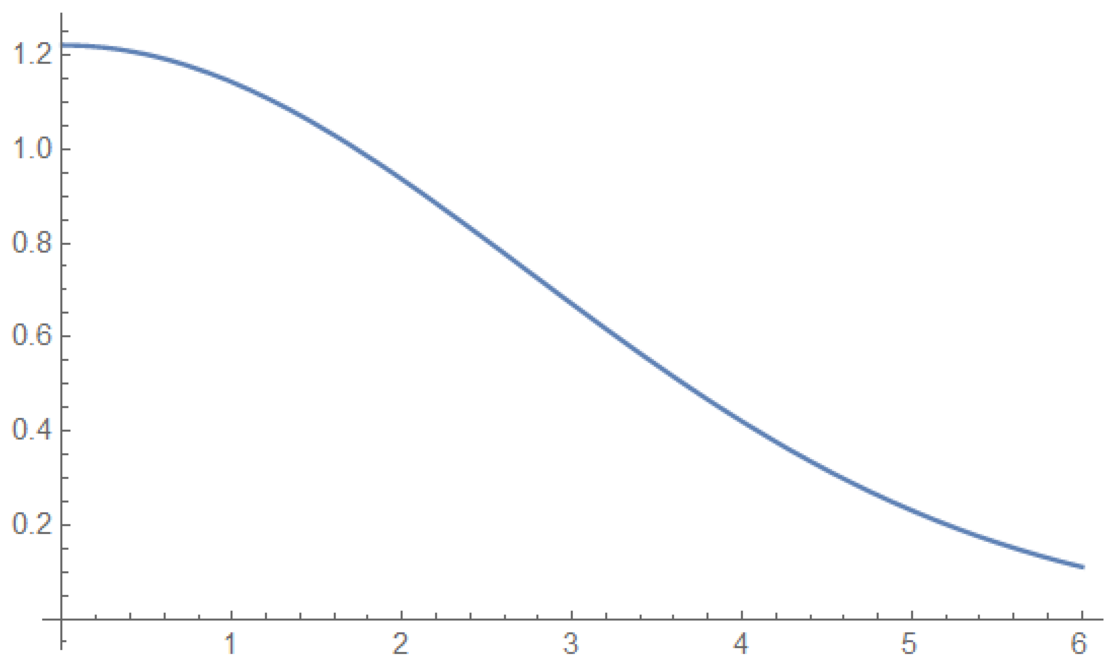
```
1.29978 - 0.207505 x
```

Среднеквадратичная аппроксимация функций

Выведем график предлагаемой функции, узловые точки и график полученной прямой:

$$gr1 := \text{Plot}\left[\text{N}\left[\text{Exp}\left[-\frac{x^2}{15} + \frac{1}{5}\right]\right], \{x, 0, 6\}\right];$$

gr1



Среднеквадратичная аппроксимация функций

```
gr2 := ListPlot[Table[{N[xdata[i]], N[ydata[i]]}, {i, 0, n}]];
```

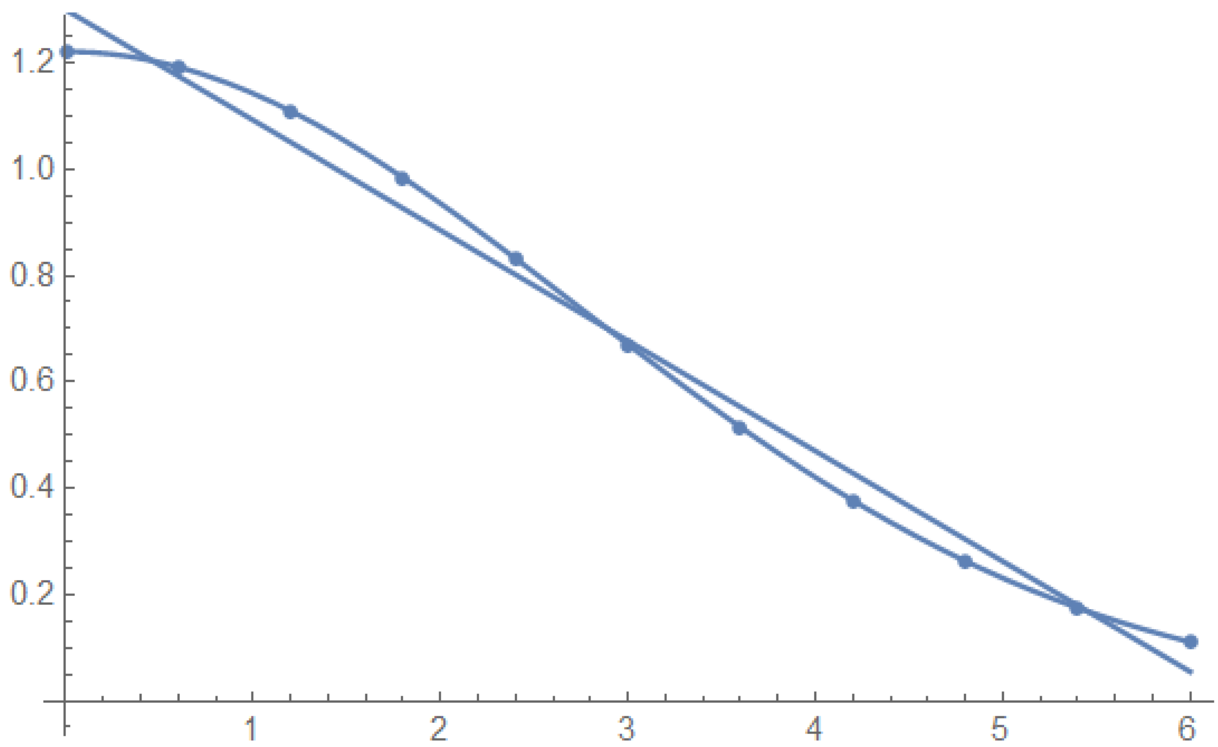
диаграмма··· таблиц··· численное приб··· численное приближение

```
gr3 := Plot[y, {x, 0, 6}]
```

график функции

```
Show[{gr1, gr2, gr3}]
```

показать



Среднеквадратичная аппроксимация функций

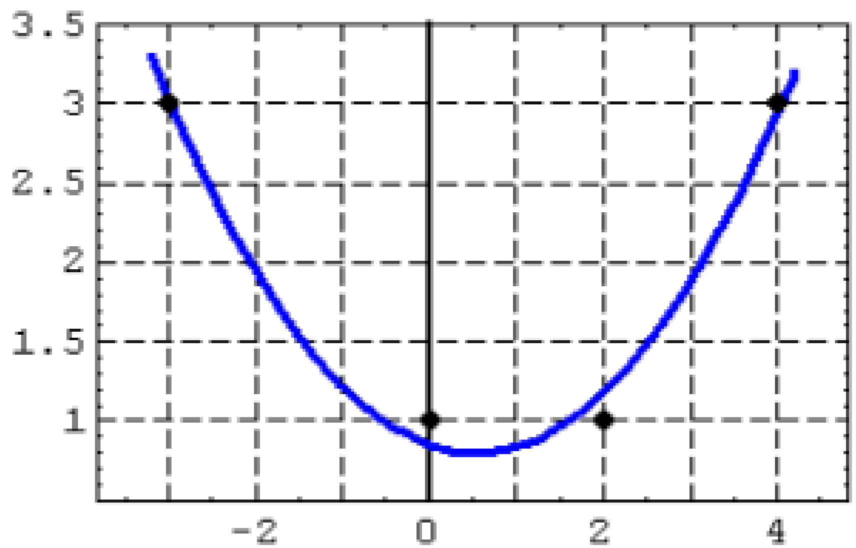
Пример 2. Используйте метод наименьших квадратов для построения параболы по четырем точкам

$$(-3,3),\quad (0,1),\quad (2,1),\quad (4,3)$$

Парабола и ее график:

```
p[a, b, c, x]
```

$0.850519 - 0.192495\,x + 0.178462\,x^2$

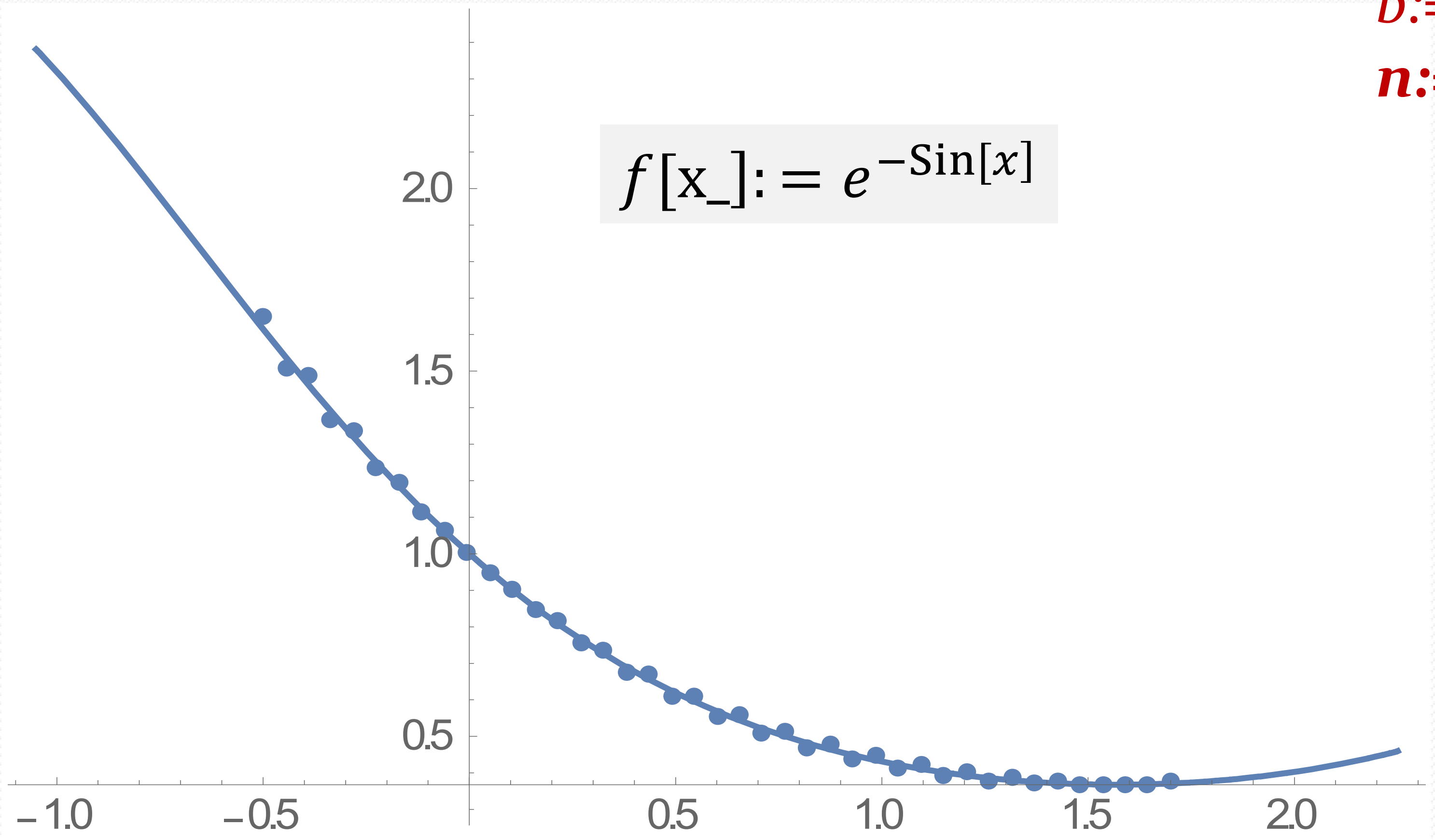


Функция задана в 41 узле с погрешностями

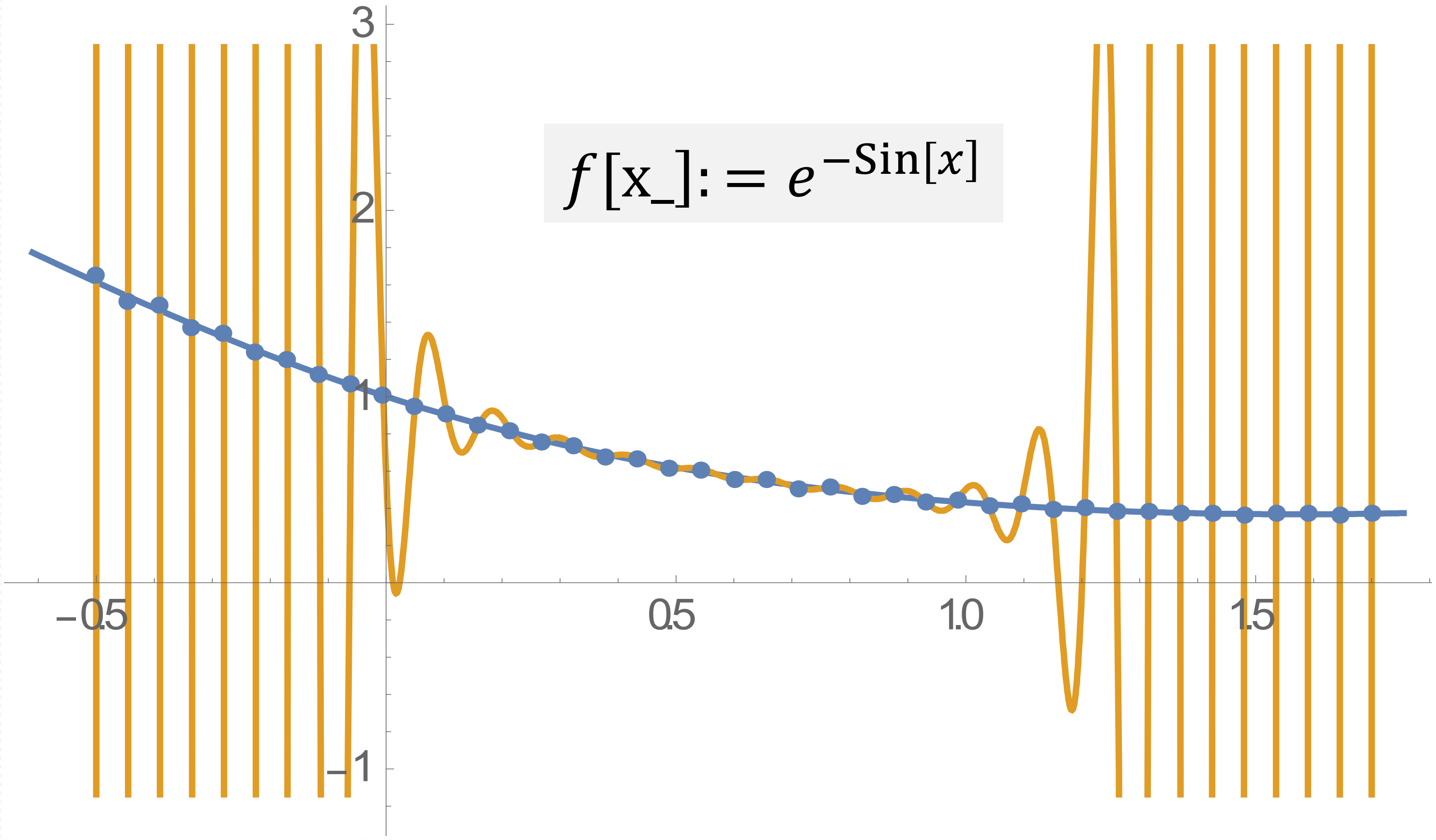
a:=-0.5

b:=1.7

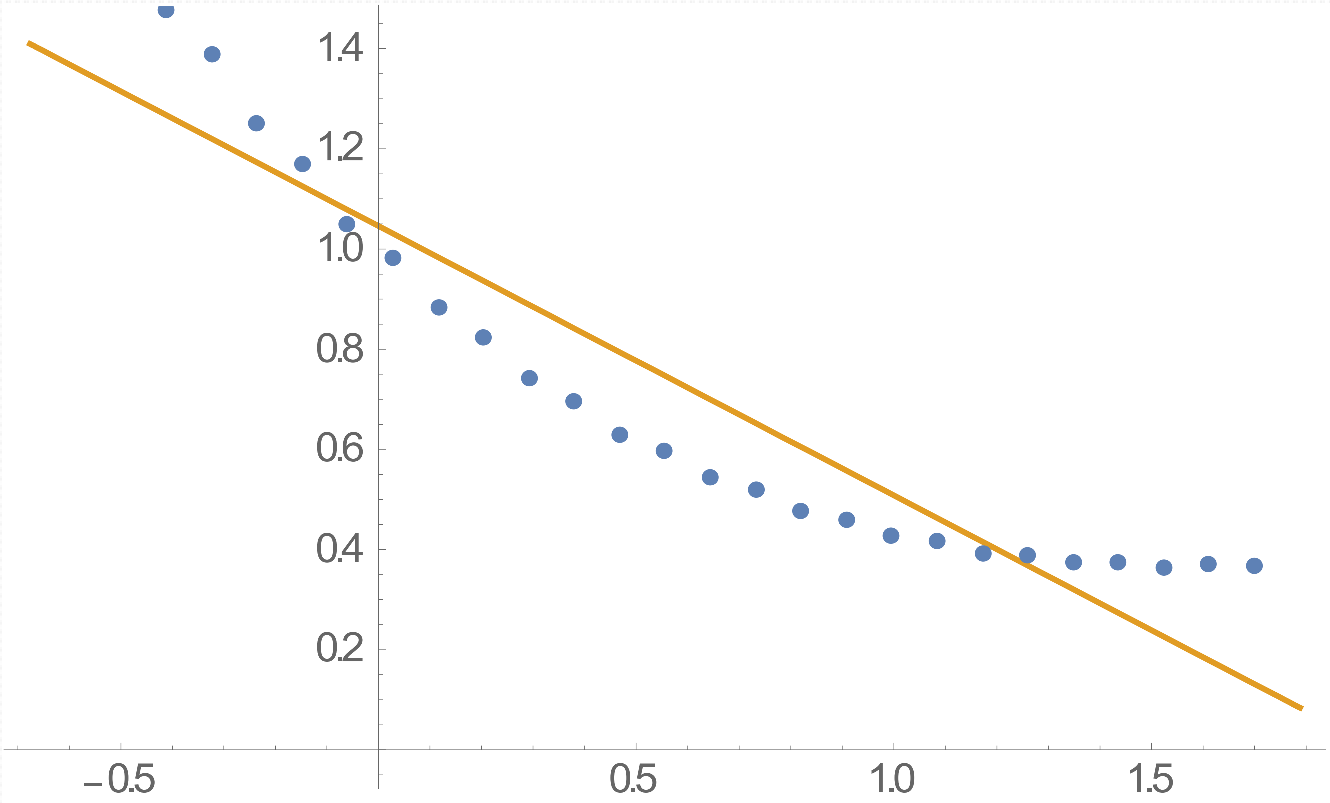
n:=40



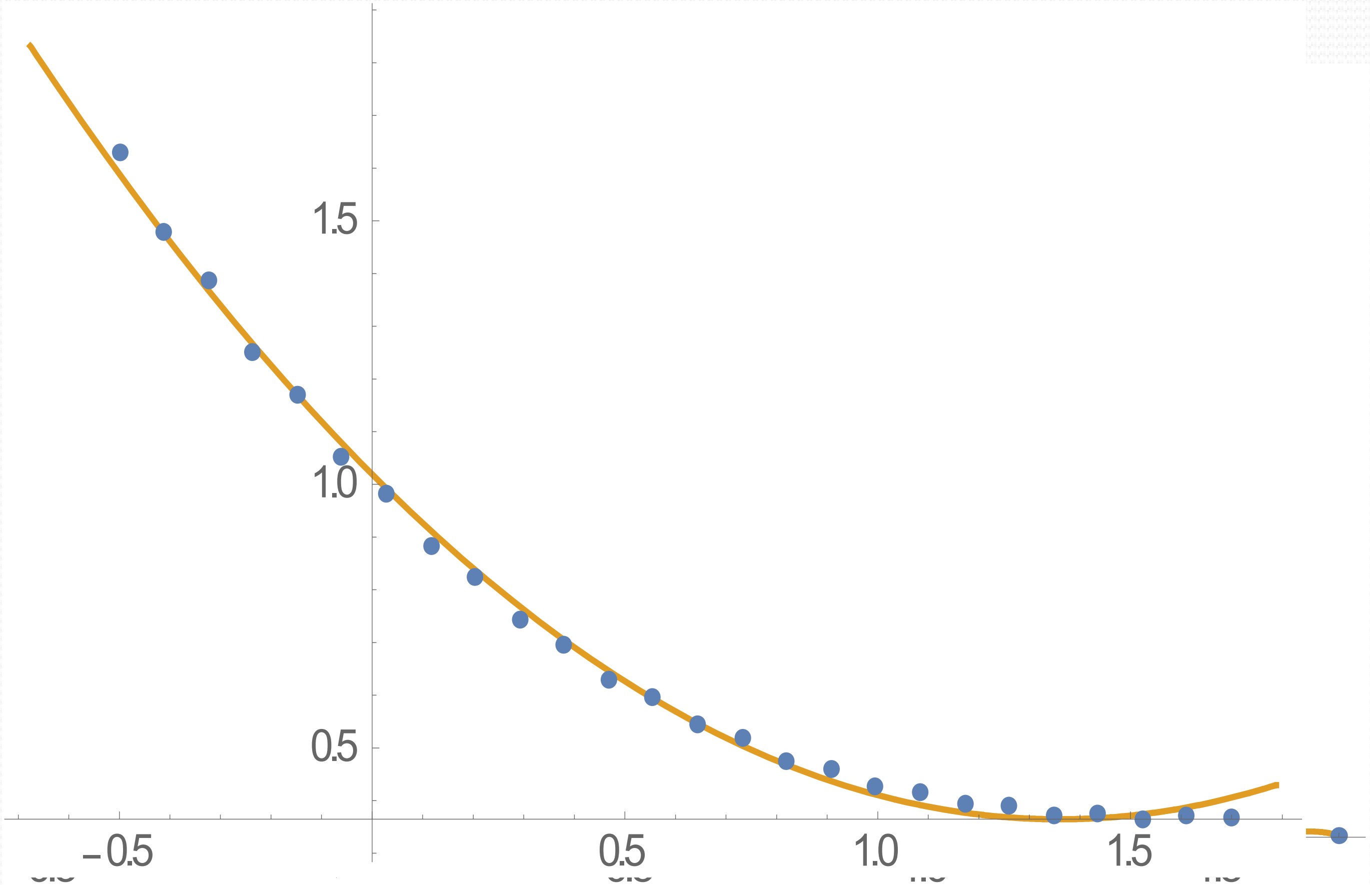
Интерполяционный многочлен 40-й степени



МНК: $P_1(x) = 1.04588 - 0.537899x$



МНК: $P_2(x) = 1.01912 - 0.962667x + 0.353974x^2$



Основные функции пакета Mathematica, используемые для приближения функций.

InterpolatingPolinomial [*data*, x]

строит интерполяционный многочлен *по формуле Ньютона* от переменной ***x*** для функции, заданной таблицей значений *data*.

В общем случае *data* представлен списком {{x_1, y_1}, {x_2, y_2}, ...}. Список {{1, y_1}, {2, y_2}, ...} можно задать как {y_1, y_2, ...}.

FindFit [*data, expr, pars, vars*]

применяется при интерполировании экспериментальных данных *методом наименьших квадратов*.

Интерполирующая функция строится в виде выражения *expr* от переменных *vars*. Аргумент *pars* – список параметров, значения которых нужно найти. Исходные данные *data* могут быть заданы списком {{x_1, y_1}, {x_2, y_2}, ...}.

Interpolation[*data*, **Method->“Spline”**]

Результат возвращает в виде объекта *InterpolatingFunction*, который в системе Mathematica может быть использован как любая другая обычная функция.

SplineFit[data,**Cubic**]

Возвращает интерполяционный кубический сплайн в виде объекта *SplineFunction[type, domain, interval]*, который дает параметрическое представление интерполяционной кривой в виде $\{x[t], y[t]\}$. Параметр принимает значения из области *domain*. Если дать определенное значение параметра в качестве аргумента этого объекта, то он возвращает координаты соответствующей точки кривой.