Численные методы линейной алгебры.

Тема 2

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система линейных уравнений (общие сведения)

В матричной форме система линейных алгебраических уравнений может быть представлена в виде:

$x^{(n)}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

Здесь A — это матрица системы, $\vec{x}$ — столбец неизвестных, а $\vec{b}$ — столбец свободных членов.

Методы решения СЛАУ

К ***прямым*** (или **точным**) методам решения СЛАУ относятся алгоритмы, которые **в предположении, что вычисления ведутся без округлений,** позволяют получить точное решение системы **за конечное число арифметических действий.**

Некоторые *прямые* методы:

- **Метод Гаусса**
- Метод Гаусса — Жордана
- Метод Крамера
- Матричный метод
- **Метод прогонки**

Методы решения СЛАУ

Итерационные методы, в отличии от *прямых*, даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют за конечное число операций получить *лишь приближенное решение* системы. Но *зато* позволяют получить его *с заданной точностью.*

Они реализуются, чаше всего, как *одношаговые* или *двухшаговые* рекуррентные формулы. Методы основаны на использовании повторяющегося цикла вычислений и задают бесконечный процесс последовательного нахождения приближенных решений системы.

Цикл вычислений, приводящий к очередному приближенному решению, называют *итерацией*.

Методы решения СЛАУ

Итерационные методы (*ИМ*) оказываются выгодными, если:

- нужна невысокая точность решения;
- при решении больших и сверхбольших систем (Итерационные методы применяются для решения систем высокого порядка ($n \sim 10^6$));
- при решении СЛАУ со специальными матрицами.

Некоторые итерационные методы:

- **Метод Якоби** (метод простой итерации)
- **Метод Зейделя**
- Метод релаксации
- Многосеточный метод

Итерационные методы решения СЛАУ

Итерационные (или приближенные) ***методы*** рассматривают точное решение системы как предел сходящегося процесса вычисления последовательных приближений $\vec{x}^{(n)}$, где n - номер итерации.

Обычно задается точность **ε** и вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка

$$\left\|\Delta\vec{x}\right\| = \left\|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^{\,точн}\right\| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{\left\|\Delta\vec{x}\right\|}{\left\|\vec{x}^{(точн)}\right\|} < \varepsilon.$$

Качество различных *итерационных методов* сравнивают по необходимому числу итераций ***n*(ε)**, которое необходимо провести для получения заданной точности **ε**.

Итерационные методы решения СЛАУ

Погрешности округления в процессе вычислений *итерационными методами* практически <u>не накапливаются</u>.

Ошибки, накопленные на *k*-ой итерации, отражаются в *k*-ом приближении. Следующая *(k+1)* итерация, находя более точное *(k+1)* приближение, компенсирует тем самым ошибки *k*-ой итерации.

Т.е. параллельно процессу накопления ошибок округления в одной итерации идет обратный процесс самоисправления ошибок предыдущих итераций. Поэтому *итерационные методы* <u>предпочтительны</u> при решении <u>плохо обусловленных систем</u>.

Итерационные методы решения СЛАУ

Для решения ***итерационным методом*** система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из вида

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

должна быть приведена к эквивалентному виду

$$\vec{x} = G\vec{x} + \vec{f}$$

где ***G*** - некоторая матрица, ***f*** - преобразованный вектор свободных членов.

Итерационные методы решения СЛАУ

Поскольку основная идея *итерационных методов* решения системы линейных уравнений состоит в построении последовательности векторов

$$\left\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}, \ldots\right\}$$

сходящейся к ее решению $\vec{x}$, то используем для этой цели эквивалентную форму:

$$\vec{x}^{(k)} = G\vec{x}^{(k-1)} + \vec{f}$$

Для проведения *первой итерации* требуется задать некоторое приближенное решение $\vec{x}^{(0)}$, называемое *начальным приближением*.

Итерационные методы решения СЛАУ

Определение 1. Последовательность векторов

$$\left\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}, \ldots\right\}$$

называется *сходящейся к вектору* $\vec{x}$, если

$$\left\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\right\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Если же выполнена оценка

$$\left\|\vec{x} - \vec{x}^{(k+1)}\right\| \le q\left\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\right\|, \quad k \ge 0, q < 1,$$

то говорят, что итерационный метод *линейно сходится* или *сходится со скоростью геометрической прогрессии с основанием **q***.

Сходимость итерационных методов решения СЛАУ

Отметим, что *из сходимости последовательности векторов по любой норме* вытекает ее *покомпонентная сходимость:*

т.е. если

$$\left\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}, \ldots\right\} \to \vec{x}, \quad k \to \infty$$

то для каждого *i = 1,…, n*

$$x_i^{(k)} \to x_i, \quad k \to \infty$$

Сходимость итерационных методов решения СЛАУ

Теорема. Для сходимости последовательности векторов при любом начальном приближении ***необходимо и достаточно***, чтобы *все собственные значения* λ_i матрицы G были по абсолютной величине *меньше единицы:*

$$|\lambda_i| < 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

(или же ее *спектральный радиус*, равный максимальному по модулю собственному значению, был меньше единицы)

$$\rho(G) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| < 1.$$

СПРАВКА: Собственные значения и собственные векторы матрицы (спектр матрицы)

Собственным значением матрицы [A] называется такое число **λ**, для которого существует собственный вектор, т.е. уравнение

$$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

имеет ненулевое решение .

Уравнение $\left|A - \lambda E\right| = 0$ определяет ***n*** *собственных значений.*

Уравнение $\left(A - \lambda E\right) \cdot \vec{x} = 0$ позволяет найти

собственный вектор для каждого **λ.**

Решение спектральной задачи в Mathematica

Пример 1.

Eigenvalues[A]	Вычисляет собственные значения матрицы
Eigenvectors[A]	Вычисляет собственные векторы матрицы

$$M := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvals}(M) = \begin{pmatrix} 9.348 \\ 3.73 \\ 1.921 \end{pmatrix}$$

$$X := \mathrm{eigenvecs}(M) = \begin{pmatrix} -0.365 & -0.776 & 0.515 \\ -0.637 & -0.195 & -0.746 \\ -0.679 & 0.6 & 0.423 \end{pmatrix}$$

Сходимость итерационных методов решения СЛАУ

На практике это трудно проверить и обычно пользуются *достаточными условиями сходимости :*

1. Итерации сходятся, если *какая-нибудь норма матрицы меньше единицы*, т.е.

$$\|G\|_1 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |g_{ij}| = \alpha < 1$$

или

$$\|G\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |g_{ij}| = \beta < 1$$

Чем меньше норма матрицы G, тем быстрее сходится итерационный процесс.

Сходимость итерационных методов решения СЛАУ

Преобразование системы можно осуществить, просто решая каждое ***i***-е уравнение *эквивалентной системы*

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Dx = -(A - D)x + b$$

относительно $\boldsymbol{x_i}$:

$$x_i = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right]$$

2. Если ***A*** - матрица с доминирующей диагональю,

т.е. $\left|a_{ii}\right| > \sum_{j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|$, то строчная норма матрицы $\left\|G\right\|_{\infty} < 1$

и итерации **сходятся**.

Сходимость итерационных методов решения СЛАУ

Если условие *диагонального преобладания*

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j \neq i}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

не выполняется, необходимо соответствующим образом преобразовать СЛАУ.

Это можно сделать, выполнив эквивалентные преобразования над строками системы:

- перестановка строк;
- линейная комбинация строк.

Решения СЛАУ итерационными методами

Пример 2.

$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - 6x_2 + 4x_3 = -2$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2$$

Решения СЛАУ итерационными методами

$$x_1 = \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{2}{5}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|G\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |g_{ij}| = \max\{\frac{11}{30}, 1, \frac{13}{15}\} = 1,$$

$$\|G\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |g_{ij}| = \max\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{3}{5}\} = \frac{5}{6} < 1.$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Два наиболее распространенных классических итерационных метода – это **метод Якоби** и **метод Зейделя.**

Оба используют преобразованную систему

$$x_i = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right]$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод Якоби использует следующий алгоритм построения приближений:

$$x_i^{(k)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - b_i\right]$$

Если ***A*** - матрица с доминирующей диагональю, то метод Якоби *сходится при любом начальном приближении* $x^{(0)}$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Методом Зейделя называется модификация метода Якоби, в которой при ***k*-ой** итерации для вычисления следующего $x_i^{(k)}$ используются уже вычисленные на этом шаге $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, .., x_{i-1}^{(k)}$, :

$$x_i^{(k)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - b_i\right]$$

Это приводит, как правило, к *ускорению сходимости*.

Итерационные методы решения СЛАУ

Приведенные выше методы Якоби и Зейделя относятся к *одношаговым итерационным методам* - для нахождения $x^{(k+1)}$ требуется помнить только одну предыдущую итерацию $x^{(k)}$.

Матричная стандартная форма записи итерационных методов :

$$B_{k+1}\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau_{k+1}}+Ax^{(k)}=b$$

B_{k+1} - *матрица, задающая тот или иной итерационный метод,* τ_{k+1} - *итерационный параметр*.

Итерационные методы решения СЛАУ

Итерационный метод называют ***явным***, если $\boldsymbol{B_{k+1}}$ - единичная матрица и ***неявным*** в противоположном случае.

Итерационный метод называется ***стационарным***, если $\boldsymbol{B_{k+1}=B}$ и $\tau_{k+1} = \tau_k$ (т.е. не зависят от номера итерации) и ***нестационарным*** в противоположном случае.

Согласно этой классификации метод Якоби является одношаговым явным стационарным методом с диагональной матрицей $\boldsymbol{B=D_A}$ $(b_{ii} = a_{ii})$, а метод Зейделя - неявным методом с нижней треугольной матрицей $\boldsymbol{B= D_A+L_A}$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Для ***окончания итерационного процесса*** на практике используют три способа.

При <u>первом</u> определяют ***величину стабилизации*** и прекращают вычисления, если она меньше **ε**, т.е.

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\max\left\{ \left\| x^{(k)} \right\|, \left\| x^{(k+1)} \right\| \right\}} \le \varepsilon$$

Недостатком этого способа является то, что *при медленно сходящихся итерациях величина стабилизации может быть малой, хотя приближенное решение сильно отличается от точного.*

Итерационные методы решения СЛАУ

При втором способе вычисляют ***нормы невязки :***

до начала итераций (для начального приближения)

и *на каждой итерации*.

Итерации прекращают при выполнении неравенства

$$\frac{\left\| Ax^{(k)} - b \right\|}{\left\| Ax^{(0)} - b \right\|} \le \varepsilon$$

.

Итерационные методы решения СЛАУ

При третьем способе предварительно оценивается число итераций, необходимое для получения заданной точности ε.

Если для погрешности итерационного метода выполняются оценки

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \le q^k \left\| x^{(0)} - x \right\| \quad \text{где} \quad q \in (0,1) \ ,$$

(т.е. метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем ***q***), тогда, зная величину *q*, можно определить число итераций *n*, решив неравенство $q^n < \varepsilon$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Число итераций ***n*** , достаточное для того, чтобы начальная погрешность уменьшилась в заданное число раз (**1/ε**):

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/q)}$$

Целая часть числа ***n₀(ε)*** называется *минимальным числом итераций, необходимым для получения заданной точности* **ε**. Величину *ln(1/q)* называют *скоростью сходимости итерационного метода.*

Она целиком определяется методом и не зависит ни от выбора начального приближения, ни от задаваемой точности.

Итерационные методы решения СЛАУ

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

1. Проверим условие сходимости:

$|8| \geq |1| + |1|$ верно

$|5| \geq |1| + |-1|$ верно

$|5| \geq |-1| + |1|$ верно

Условие сходимости выполнено (иначе можно было бы переставить уравнения в системе).

Итерационные методы решения СЛАУ

Преобразуем систему к виду, удобному для итераций:

$$\begin{cases} 8x_1 = 26 - x_2 - x_3 \\ 5x_2 = 7 - x_1 + x_3 \\ 5x_3 = 7 - x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3{,}25 - 0{,}125x_2 - 0{,}125x_3 \\ x_2 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \end{cases}$$

Выберем начальное приближение:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод итераций	Метод Зейделя
1 итерация	1 итерация
$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(0)} - 0{,}125x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(0)} + 0{,}2x_3^{(0)} \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(0)} + 0{,}2x_2^{(0)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(0)} - 0{,}125x_3^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_3^{(0)} \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(1)} \end{cases}$
$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 = 2{,}9 \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 3{,}25 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}03 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 3{,}25 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}03 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 - 0{,}125 \cdot 1{,}4 = 2{,}9 \\ x_2^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}4 = 1{,}1 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}04 \end{cases}$

Итерационные методы решения СЛАУ

$\lvert x_1^{(0)} - x_1^{(1)} \rvert = \lvert 3{,}25 - 2{,}9 \rvert = 0{,}35$ $\lvert x_2^{(0)} - x_2^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}03 \rvert = 0{,}37$ $\lvert x_3^{(0)} - x_3^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}03 \rvert = 0{,}37$ $\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \lvert x_i^{(0)} - x_i^{(1)} \rvert = 0{,}37 > \varepsilon$	$\lvert x_1^{(0)} - x_1^{(1)} \rvert = \lvert 3{,}25 - 2{,}9 \rvert = 0{,}35$ $\lvert x_2^{(0)} - x_2^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}1 \rvert = 0{,}3$ $\lvert x_3^{(0)} - x_3^{(1)} \rvert = \lvert 1{,}4 - 1{,}04 \rvert = 0{,}36$ $\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \lvert x_i^{(0)} - x_i^{(1)} \rvert = 0{,}36 > \varepsilon$
Требуемая точность не достигнута	Требуемая точность не достигнута

Итерационные методы решения СЛАУ

2 итерация	2 итерация
$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(1)} - 0{,}125x_3^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(1)} + 0{,}2x_2^{(1)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125x_2^{(1)} - 0{,}125x_3^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(2)} + 0{,}2x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(2)} + 0{,}2x_2^{(2)} \end{cases}$
$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 = 2{,}993 \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}03 = 1{,}026 \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}03 = 1{,}026 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 - 0{,}125 \cdot 1{,}03 = 2{,}983 \\ x_2^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}993 + 0{,}2 \cdot 1{,}04 = 1{,}011 \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}983 + 0{,}2 \cdot 1{,}011 = 1{,}006 \end{cases}$
$\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \mid x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \mid = 0{,}093 > \varepsilon$ Требуемая точность не достигнута	$\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \mid x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \mid = 0{,}089 > \varepsilon$ Требуемая точность не достигнута

Итерационные методы решения СЛАУ

3 итерация	3 итерация
$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125 x_2^{(2)} - 0{,}125 x_3^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 x_1^{(2)} + 0{,}2 x_3^{(2)} \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 x_1^{(2)} + 0{,}2 x_2^{(2)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125 x_2^{(2)} - 0{,}125 x_3^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 x_1^{(3)} + 0{,}2 x_3^{(2)} \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 x_1^{(3)} + 0{,}2 x_2^{(3)} \end{cases}$
$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}026 - 0{,}125 \cdot 1{,}026 = 2{,}994 \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}993 + 0{,}2 \cdot 1{,}026 = 1{,}007 \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}993 + 0{,}2 \cdot 1{,}026 = 1{,}007 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}011 - 0{,}125 \cdot 1{,}006 = 2{,}998 \\ x_2^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}998 + 0{,}2 \cdot 1{,}006 = 1{,}002 \\ x_3^{(3)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}998 + 0{,}2 \cdot 1{,}002 = 1{,}001 \end{cases}$
$\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \lvert x_i^{(2)} - x_i^{(3)} \rvert = 0{,}019 > \varepsilon$	$\delta = \max\limits_{1 \le i \le 3} \lvert x_i^{(2)} - x_i^{(3)} \rvert = 0{,}015 > \varepsilon$
Требуемая точность не достигнута	Требуемая точность не достигнута

Итерационные методы решения СЛАУ

4 итерация	4 итерация
$\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125\,x_2^{(3)} - 0{,}125\,x_3^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(3)} + 0{,}2x_3^{(3)} \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(3)} + 0{,}2x_2^{(3)} \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125\,x_2^{(3)} - 0{,}125\,x_3^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(4)} + 0{,}2x_3^{(3)} \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2x_1^{(4)} + 0{,}2x_2^{(4)} \end{cases}$
$\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}007 - 0{,}125 \cdot 1{,}007 = 2{,}998 \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}994 + 0{,}2 \cdot 1{,}007 = 1{,}003 \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}994 + 0{,}2 \cdot 1{,}007 = 1{,}003 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1^{(4)} = 3{,}25 - 0{,}125 \cdot 1{,}003 - 0{,}125 \cdot 1{,}003 = 2{,}999 \\ x_2^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}999 + 0{,}2 \cdot 1{,}003 = 1{,}001 \\ x_3^{(4)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 2{,}999 + 0{,}2 \cdot 1{,}001 = 1{,}000 \end{cases}$

Итерационные методы решения СЛАУ

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(4)}| = |2,994 - 2,998| = 0,004$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(4)}| = |1,007 - 1,003| = 0,004$$
$$|x_3^{(3)} - x_3^{(4)}| = |1,007 - 1,003| = 0,004$$

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} |x_i^{(3)} - x_i^{(4)}| = 0,004 < \varepsilon$$

Требуемая точность достигнута

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(4)}| = |2,998 - 2,999| = 0,001$$
$$|x_2^{(3)} - x_2^{(4)}| = |1,002 - 1,001| = 0,001$$
$$|x_3^{(3)} - x_3^{(4)}| = |1,001 - 1,000| = 0,001$$

$$\delta = \max_{1 \le i \le 3} |x_i^{(3)} - x_i^{(4)}| = 0,001 < \varepsilon$$

Требуемая точность достигнута

Итерационные методы решения СЛАУ

Пример 4. Решить систему с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_3 = 3; \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}x_3 + \dfrac{3}{5}, \\ x_2 = \dfrac{1}{6}x_1 + \dfrac{4}{6}x_3, \\ x_3 = -\dfrac{1}{8}x_1 + \dfrac{2}{8}x_2. \end{cases}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{6} & 0 & \dfrac{4}{6} \\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{2}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left\|G\right\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|g_{ij}\right| = \max\{\frac{1}{5},\frac{5}{6},\frac{3}{8}\} = \frac{5}{6} = 0.8333(3) < 1,$$

$$\left\|G\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|g_{ij}\right| = \max\{\frac{14}{48},\frac{2}{8},\frac{26}{30}\} = \frac{13}{15} = 0.8666(6) < 1.$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Алгоритм построения приближений:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} + \dfrac{3}{5}, \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{6}x_1^{(k)} + \dfrac{4}{6}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{8}x_1^{(k)} + \dfrac{2}{8}x_2^{(k)}. \end{cases}$$

В качестве начального приближения выбираем вектор правых частей – $\{3,0,0\}$.

Итерационные методы решения СЛАУ

Вычисления прекращаем, если для *двух последовательных приближений* выполнено неравенство

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon.$$

Т.к.

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|$$

то это равносильно выполнению неравенств:

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| = \left| \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - b_i \right) \right| < \varepsilon$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Вектора последовательных приближений и $\Delta x_3^{(k)}$

$$\begin{pmatrix}
3. & 0. & 0. \\
0.6 & 0.5 & -0.375 \\
0.525 & -0.15 & 0.05 \\
0.61 & 0.120833 & -0.103125 \\
0.579375 & 0.0329167 & -0.0460417 \\
0.590792 & 0.0658681 & -0.0641927 \\
0.587161 & 0.0556701 & -0.0573819 \\
0.588524 & 0.0596056 & -0.0594776 \\
0.588104 & 0.0584355 & -0.058664 \\
0.588267 & 0.058908 & -0.0589042 \\
0.588219 & 0.0587751 & -0.0588064 \\
0.588239 & 0.0588323 & -0.0588336 \\
0.588233 & 0.0588174 & -0.0588218 \\
0.588236 & 0.0588244 & -0.0588248 \\
0.588235 & 0.0588227 & -0.0588234
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
0.375 \\
-0.425 \\
0.153125 \\
-0.0570833 \\
0.018151 \\
-0.00681076 \\
0.0020957 \\
-0.0008136 \\
0.000240135 \\
-0.0000977957 \\
0.0000272391 \\
-0.0000118533 \\
3.04391 \times 10^{-6} \\
-1.45222 \times 10^{-6} \\
3.32443 \times 10^{-7}
\end{pmatrix}$$

$$\{0.58823529,\ 0.05882353,\ -0.05882353\}$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Точный результат решения системы встроенной функцией

(0.58823529, 0.05882353, -0.05882353)

Для получения решения потребовалось **15** итераций, при этом *абсолютная погрешность* решения равна

$$\Delta x = x^{(точн)} - x^{(15)} = (2.5\times10^{-7}, \quad 8\times10^{-7} \quad 1.7\times10^{-7})$$

Норма абсолютной погрешности : $\|\Delta x\| = 8\times10^{-7} < \varepsilon$

Норма относительной погрешности равна

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^{(точн)}\|} = \frac{8\times10^{-7}}{0.5882353} = 1.36\times10^{-6} > \varepsilon.$$

Норма невязки решения: $\|Ax^{(15)} - b\| = 5.2\times10^{-6} > \varepsilon$

Итерационные методы решения СЛАУ

Как видно из полученных результатов, такой способ завершения итерационного процесса не обеспечивает полностью требование к точности **ε = 10^{-6}** полученного результата: оно выполняется для *абсолютной погрешности решения*, но не выполняется для *относительной погрешности* и *невязки*.

Используем теперь для окончания итерационного процесса величину стабилизации и прекратим вычисления, если она меньше **ε**:

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\max\left\{ \left\| x^{(k)} \right\|, \left\| x^{(k+1)} \right\| \right\}} < \varepsilon$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Для получения решения потребовалось **18** итераций, при этом абсолютная погрешность решения равна

$$\Delta x = x^{(точн)} - x^{(18)} = (10^{-7}, \quad 0, \quad 2\times 10^{-8})$$

норма абсолютной погрешности $\|\Delta x\| = 2\times 10^{-8} < \varepsilon$

Норма относительной погрешности равна

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^{(точн)}\|} = \frac{2\times 10^{-8}}{0.5882353} = 3.4\times 10^{-8} < \varepsilon.$$

Норма невязки решения: $\|Ax^{(18)} - b\| = 1.8\times 10^{-7} < \varepsilon$

Итерационные методы решения СЛАУ

•