**3. (Yrian) Монотонные последовательности. Критерий сходимости монотонной последовательности.**

Числовая последовательность {*xn*} называется *возрастающей*, если каждый ее последующий член больше предыдущего, то есть

*xn*+1>*xn*,∀*n*∈N.

Числовая последовательность {*xn*} называется *убывающей*, если каждый ее последующий член меньше предыдущего, то есть

*xn*+1<*xn,*∀*n*∈N.

Числовая последовательность {*xn*} называется *неубывающей*, если каждый ее последующий член больше либо равен предыдущему, то есть

*xn*+1≥*xn,*∀*n*∈N.

Числовая последовательность {*xn*} называется *невозрастающей*, если каждый ее последующий член меньше либо равен предыдущему, то есть

*xn*+1≤*xn,*∀*n*∈N.

Все такие последовательности объединяются общим названием *монотонные последовательности*. Причем, возрастающие и убывающие называются *строго монотонными* последовательностями.

### **Теорема (критерий сходимости монотонной последовательности)**

*Для того, чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.*

Если последовательность {*xn*} неубывающая (или возрастающая) и ограничена сверху, то она имеет конечный предел и



Если последовательность {*xn*} невозрастающая (или убывающая) и ограничена снизу, то она имеет конечный предел и



Если последовательность {*xn*} неубывающая (или возрастающая) и не ограничена сверху, то она является плюс бесконечно большой, то есть



.Если последовательность {*xn*} невозрастающая (или убывающая) и не ограничена снизу, то она является минус бесконечно большой, то есть



Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы.

Дано: последовательность {*xn*} − неубывающая и ограничена сверху.

Доказать: последовательность {*xn*} сходится, то есть имеет предел

Рассмотрим числовое множество

*X*={*x*1,*x*2,…,*xn*,…}, состоящее из членов последовательности{*xn*}. Множество *X* является ограниченным сверху, так как последовательность {*xn*} ограничена сверху. Следовательно, по теореме существования граней числовых множеств существует точная верхняя грань множества *X*: sup *X*=*a*∈R. Докажем, что

**

Так как *a*=sup*X*, то, согласно определению точной верхней грани числового множества, выполняются два условия:

1. ∀*n*∈N *xn*≤*a*<*a*+*ε* для ∀*ε*>0;

2) для ∀*ε*>0 найдется *xnε*, такой что *a*−*ε*<*xnε*≤*a*.

Так как последовательность {*xn*} неубывающая, то для ∀*n*>*nε* выполняется *a*−*ε*<*xnε*≤*xn*.

Объединяя неравенства *xn*≤*a*<*a*+*ε* и *a*−*ε*<*xnε*≤*xn*, получим, что для ∀*n*>*nε* выполняется двойное неравенство *a*−*ε*<*xn*<*a*+*ε*⇔|*xn*−*a*|<*ε*. Таким образом, мы получили, что для ∀*ε*>0∃*nε*∈N:∀*n*>*nε* выполняется |*xn*−*a*|<*ε*, то есть



Что и требовалось доказать.

Остальные утверждения доказываются аналогично.