

一、 滤波实验

- a) 二维 Gauss 模板的设计（给定方差生成滤波核）；图像的 Gauss 滤波；在 Gauss 滤波中不同边界处理方法实验；

- i. 首先讨论的是二维 Gauss 模板的设计，二维 Gauss 模板可以看成是符合正态分布（Gauss 分布）的二维矩阵，其中矩阵中的每一格元素值都满足下述公式：

$$f(i,j) = \frac{1}{2\pi\delta^2} e^{-\frac{(i-mid)^2+(j-mid)^2}{2\delta^2}} \quad (1)$$

注意到上式中只有 δ 是未知量，所以只要我们给定 δ ，矩阵中元素值就会迎刃而解。得到的符合正态分布的二维矩阵就是我们需要的滤波核。

- ii. 图像的 Gauss 滤波顾名思义，就是利用 Gauss 模板作为滤波核对图像进行滤波操作。滤波操作的细节在此不多赘述，需要考虑的是对于边界情况如何进行滤波：

边界可以分为以下几种处理方法：

1. 固定值填充
2. 镜像对称
3. 复制边界
4. 重复复制内容

实验结果见图 1：

该实验的结果是显而易见的：Gauss 滤波成功的减少了噪点。但与此同时也模糊了图像，模糊的程度随 δ 的改变而改变。



图 1 不同边界条件下 Gauss 滤波的效果

- b) Gauss 核与 Gauss 核的卷积实验：利用两个相同方差的一维行列 Gauss 核卷积生成二维 Gauss 核，利用一维行列 Gauss 对图像进行滤波；不同方差 Gauss 核之差对图像进行滤波：

- i. Gauss 核有一个很重要的性质，这个性质来自于卷积的性质：
一个二维 Gauss 核可写成两个一维 Gauss 核的卷积，而：

$$f * x = (g * h) * x = g * (h * x) \quad (2)$$

由卷积的交换律可知，可以把一个 Gauss 核拆成行向量与列向量分别于图像进行卷积，这带来了一个好处：便于并行计算，并由此衍生出了一个算法——分离滤波。

- ii. 不同方差 Gauss 核之差会形成一个正负相交的 Gauss 核，其形式类似于甜甜圈，有凸起有凹陷，这样的 Gauss 核滤波效果是会凸显边界，可以用作锐化。

实验结果见图 2，二维向量滤波等效于先行向量再列向量。



图 2 Gauss 核与 Gauss 核的卷积实验

c) 利用两个 Gauss 核设计图像锐化滤波器核:

- i. 设计图像锐化器核其实很简单，只需要先将图像模糊，用原图像减去模糊后的图像，得到的就是图像的一些突出的边缘，将图像的边缘加在原图像上，就得到了锐化的效果。
- ii. 使用两个 Gauss 核设计可以使第一个 Gauss 核做去噪的效果，第二个 Gauss 核做第一个基础上的锐化。在图 3 中取了 $\delta = 1$ 做第一次的滤波， $\delta = 100$ 做第二次的锐化，并将锐化效果与不同方差 Gauss 核相减的滤波效果进行对比。

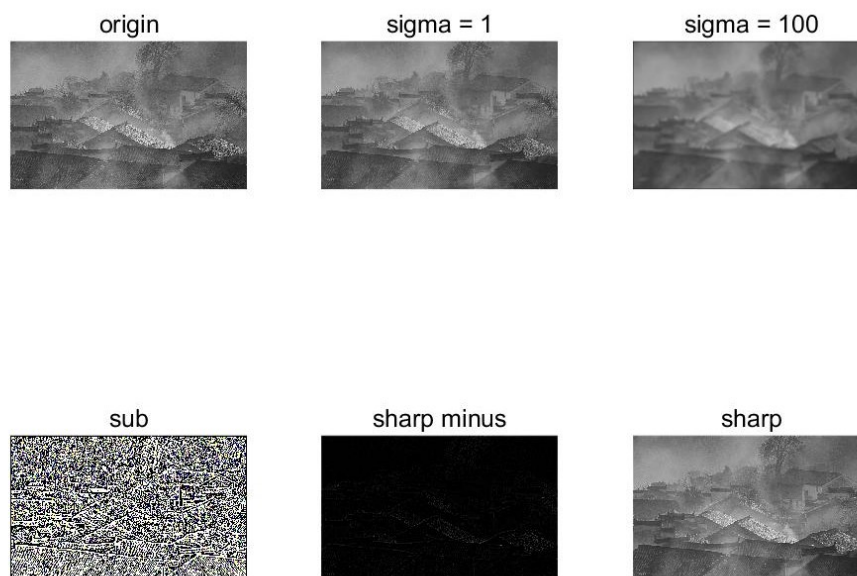


图 3 锐化效果对比图

d) 图像的双边滤波实验：

- i. 双边滤波与 Gauss 滤波不同的地方在于双边滤波同时也考虑了值域的影响，即矩阵中元素除了与距中间点的距离有关，还和对应像素的颜色值有关，其公式可以表示如下：

$$f(x, y) = g(x, y) * h(x, y) \quad (3)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\delta^2} e^{-\frac{(x-mid)^2 + (y-mid)^2}{2\delta^2}} \quad (4)$$

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\delta_2^2} e^{-\frac{|v(x, y) - v(mid, mid)|^2}{2\delta_2^2}} \quad (5)$$

- ii. 双边滤波与 Gauss 滤波最大的区别在于双边滤波会保留图片的边缘，这得益于上面的 $h(x, y)$ 项。总结一下，双边滤波是在空域与值域的双维度滤波，滤波效果好坏取决于 δ 与 δ_2 的选取，如何选取两者的值是一个值得思考的问题。
- iii. 双边滤波的实验结果如图 4 所示，可以观察到，双边滤波对图像边缘有很好的保护效果。



图 4 双边滤波结果

e) 图像的 Fourier 变换实验，显示幅度谱与相位谱；利用 Gauss 滤波

器进行图像的频率域滤波。

- i. 首先要谈一下 Fourier 变换，Fourier 变换的公式如下：

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-tx}dx, \quad (6)$$

其作用为将卷积运算变成容易计算的乘积运算，这在后续的计算中将会有体现。

Fourier 变换同时可以将一个周期函数写成若干个基底函数相加的形式，在复数域三角展开：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Fourier 变换的低频部分对应的是大的较粗的结构，而高频部分对应的是图像的精细结构。

$$F(k, l) = |F(k, l)| \exp(i\varphi(k, l))$$

我们同时可以将傅里叶变换写成，前面的带有模项的对应着幅度谱，后面的 $\varphi(k, l)$ 对应着幅角，也就是相位谱。

- ii. 傅里叶变换实验的结果如下：

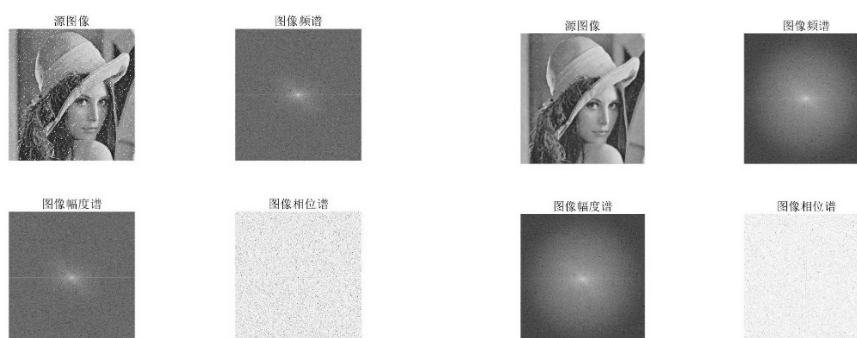


图 5 左为原图像的变换效果 右为高斯滤波后的变换效果

- iii. 很显然，在滤去高频波之后，图像幅度谱与相位谱的数值分布发生了改变，幅度谱变得更为向中心集中，体现的是低频波所占的比例增加，理论与结果相符合。