1. 2D卷积与互相关的定义,性质推导或证明.

互相关 cross correlation

$S[f]=w\otimes f$ $\quad S[f](m,n)=\sum_{i=-k}^{k}\sum_{j=-k}^{k}w(i,j)f(m+i,n+j)$

性质:

①乘积性质:

$f'(m,n)=af(m,n)$

$(w\times f')(m,n)=a(w\otimes f)(m,n)$.

证明: $(w\otimes f')(m,n)=\sum_{i=-k}^{k}\sum_{j=-k}^{k}wf'(m+i,n+j)$

$=\sum\sum waf=a\sum\sum wf=a(w\otimes f)(m,n)$

②线性性质:

$f'=af+bg$

$(w\otimes f')(m,n)=a(w\otimes f)+b(w\otimes g)$

证明: $(w\otimes f')(m,n)=\sum\sum wf'=\sum\sum w(af+bg)$

$=\sum\sum waf+\sum\sum wbg$

$=a\sum\sum wf+b\sum\sum wg$ (乘积性质)

$=a(w\otimes f)+b(w\otimes g)$

③位移性质:

$f'(m,n)=f(m-m_0,n-n_0)$.

$(w\otimes f')(m,n)=(w\otimes f)(m-m_0,n-n_0)$

证明: $(w\otimes f')(m,n)=\sum\sum wf(m-m_0+i,n-n_0+j)$

$=\sum\sum wf[(m+i)-m_0,(n+j)-n_0]=(w\otimes f)(m-m_0,n-n_0)$

卷积 convolution

$S[f]=w*f$ $\quad S[f](m,n)=\sum_{i=-k}^{k}\sum_{j=-k}^{k}w(i,j)f(m-i,n-j)$

①线性性质(乘法、线性加和) ②位移性质:

证明同互相关完全相同,不再赘述. 证明同互相关完全相同,不再赘述.

③交换律:

$w*f=f*w$

证明:

$w*f=\sum\sum w(i,j)f(m-i,n-j)$

令 $i'=m-i$, $j'=n-j$, 则原式可写成:

$w*f=\sum_{i'=m+k}^{m-k}\sum_{j'=n+k}^{n-k}w(m-i',n-j')f(i',j')$

$=f*w$

④结合律:

$(w*f)*g=w*(f*g)$

$(w*f)*g=\sum_m\sum_n\left(\sum_i\sum_j wf\cdot g\right)=\sum_{m}\sum_{n}\sum_{i}\sum_{j}wfg$

$=\sum\sum\left(w\sum\sum fg\right)=w*(f*g)$

2、2D卷积的时间复杂度.

设图像大小为 $w\times h$，设卷积核的大小为 $k\times k$.

对于图像中每一个元素，都需进行一次卷积操作，其时间复杂度为 $O(whk^2)$.

将卷积后结果输出，输出图像大小为 $(w+m-1)(h+m-1)$，其时间复杂度为 $O(wh)$.

∴总时间复杂度为：$O(whk^2+wh)=O(whk^2)$.

3. 2D高斯的可分离性推导.

$w(i,j)=u(i)*v(j)$ （高斯函数性质）

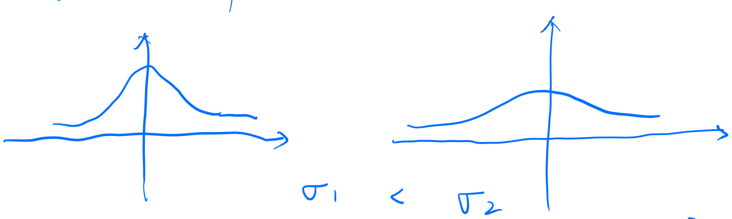
$w*f=(u*v)*f=u*(v*f)$ （结合律，前面已证明）

4. 2D高斯核与2D高斯核的卷积结果解析.

2D高斯核中每一个元素都满足：$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-m)^2+(y-m)^2}{2\sigma^2}}$，$(m,m)$ 代表中点的坐标.

使用2D高斯核做卷积，若σ越大，模糊效果就越强.

可以这样理解，σ越大，二次曲面就越平坦，不妨取其一个切面分析.




也便意味着一个元素与周围更多元素有更大的相关度（注：靠近该点处元素的相关度会减小）

5、2D空间卷积定理、2D频率卷积定理推导.

$$\mathcal{F}(f(t)*h(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau\right)e^{-j2\pi wt}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e^{-j2\pi wt}dt\right]d\tau$$

∵ $\mathcal{F}(h(t-\tau))=H(w)e^{-j2\pi wt}$.

∴ $F[f(t)*h(t)]=H(w)F(w)$

即建立了空间域(t)与频率域(w)的转换关系.