Primer ejercicio con inversión

Cris Lumbi

October 2025

IMO Shortlist 2015 – Problema G2

Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω y circuncentro O. Una circunferencia Γ con centro en A corta al segmento BC en los puntos D y E, tales que B, D, E, C son todos distintos y están en ese orden sobre la recta BC.

Sean F y G los puntos de intersección de Γ y Ω, tales que A, F, B, C, G están en ese orden sobre Ω. Sea K el segundo punto de intersección del circuncírculo del triángulo BDF con el segmento AB. Sea L el segundo punto de intersección del circuncírculo del triángulo CGE con el segmento CA.

Supongamos que las rectas FK y GL son distintas y se cortan en el punto X. Demuestra que el punto X yace sobre la recta AO.

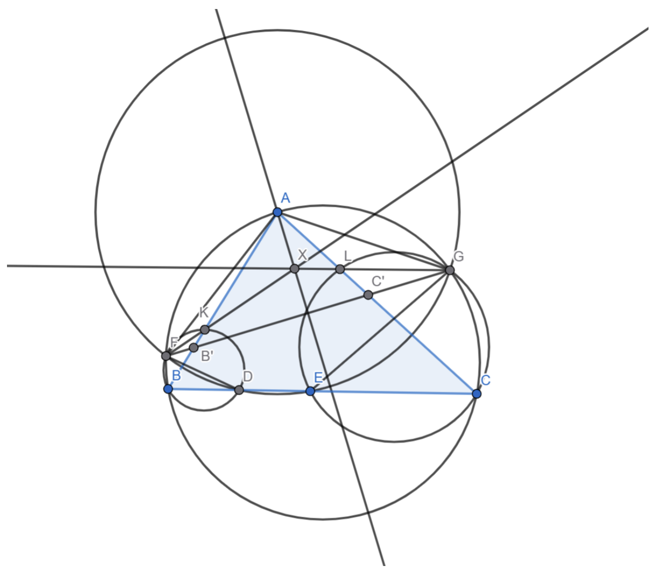

Figure 1:

Primero tracemos los segmentos $\overline{FG}, \overline{FD}, \overline{GE}, \overline{FA}, \overline{GA}$ y tambien definimos T el punto de interseccion de $\overline{AX}$ con el circuncirculo del $\triangle ABC$

Llamemos α al angulo $\angle FDB$. Por anlgle chasing notemos que $\angle FKB = \angle FDB$, ademas por dato tenemos que $FDEG$ es ciclico lo que implica que $\angle FGE = \angle FDB \Rightarrow \angle FDB = \angle FKB$
Llamemos β al angulo $\angle XGF$

Considere una inversión de centro A y radio $\overline{AF}$, note que B se manda a $B' = \overline{FG} \cap \overline{BA}$ y también C se manda a $C' = \overline{FG} \cap \overline{CA}$. Esto es debido a que el circuncírculo del $\triangle ABC$ se manda a la línea $\overline{FG}$. Luego note que esto implica que el cuadrilatero $BB'C'C$ es ciclico.

Por angle chasing tenemos que $\angle C'CB = \angle C'B'A$ pero por el ciclico $LGCE$ tenemos que $\angle C'CB = \angle C'B'A = \angle LGE = \alpha + \beta$. Note que por anglo externo en $\triangle FB'K$ el angulo $\angle AB'C' = \alpha + \beta = \angle FKB + \angle KFG = \alpha + \angle KFG$ entonces $\rightarrow \angle KFG = \beta$

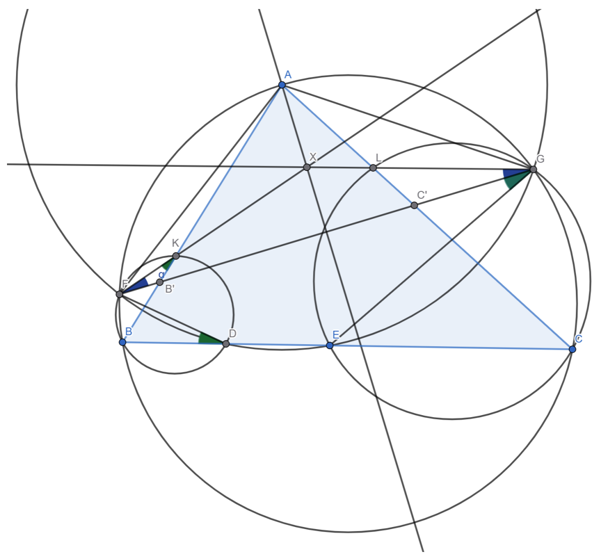

Figure 2:

Para terminar, note que como $\triangle AFG$ es isosceles (ya que hay una circunferencia que está centrada en A) y además $\angle XFG = \angle XGF$ entonces $\overline{AX}$ es la bisectriz, que también es altura. Entonces tenemos que $\overline{AX} \perp \overline{FG}$ pero $\overline{FG}$ es eje radical lo que implica que $A - X - O$ están alineados.