贵州工业大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF GUIZHOU UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
(Natural Science Edition)
Vol.35 No.3
June.2006

文章编号:1009-0193(2006)03-0032-04 *

基于RAMP密度插值理论的拓扑优化准则法

李家春[1,2],叶帮彦[1],唐　霞[3]

(1.华南理工大学机械工程学院,广州 广东 510640;2.贵州大学,信息工程学院,贵州 贵阳 550003;3.贵阳特殊钢有限责任公司,贵州 贵阳 550005)

摘　要:在研究密度插值法理论和拓扑优化准则基础上,以结构整体柔度最小为目标,推导了基于RAMP插值理论的优化准则,并实现优化准则的迭代算法,二维算例说明了算法正确性、有效性。

关键词:密度插值法;拓扑优化;优化准则;RAMP

中图分类号:TH123　　　文献标识码:A

0　引　言

连续体结构拓扑优化是结构优化中的难点和热点问题,也是结构优化领域的前沿课题之一[1]。拓扑优化中的拓扑描述方式和材料插值模型非常重要,是一切后续优化方法的基础。结构拓扑优化设计实际上就是材料在设计空间的分布优化问题[2]。拓扑优化中常用的拓扑表达形式和材料插值模型方法有:均匀化方法;密度法;变厚度法;拓扑函数描述(水平集)方法等,其中密度法是目前研究、应用最广泛的材料插值模型[3][4][5]。本文在研究拓扑优化理论及密度法插值理论基础上,建立基于RAMP(rational approximation of material properties,材料属性的近似合理模型)材料插值方法的结构拓扑优化模型及其优化准则算法。

1　基于RAMP材料插值方法的结构拓扑优化模型

通过在离散模型中引入连续变量 ρ 和权系数 p,通过引入中间密度单元将离散优化问题转换成连续优化问题,并且令 $0 <= \rho <= 1$, p 为惩罚因子,通过设定 $p > 1$ 对中间密度单元进行有限度的惩罚,以尽量减少中间密度单元的数目,是结构单元密度尽可能趋于0或1,在优化前和优化后的材料弹性张量之间引入关系式:

$$C_{ijkl}(\rho) = \frac{\rho}{1+p(1-\rho)}\left(C^{0}_{ijkl} - C^{\min}_{ijkl}\right) \tag{1}$$

其中 $C_{ijkl}(\rho)$ 为插值以后的弹性张量,$(C^{0}_{ijkl} - C^{\min}_{ijkl})$ 为实体弹性张量与空洞部分材料的弹性张量之差。由于 $C^{\min}_{ijkl}$ 远小于 C^{0}_{ijkl},故 $C^{\min}_{ijkl}$ 可以忽略不计。式(1)简化为:

$$C_{ijkl}(\rho) = \frac{\rho}{1+p(1-\rho)}C^{0}_{ijkl} \tag{2}$$

在RAMP模型中假设材料的弹性张量是各向同性的。泊松比为常量,且与密度无关,而杨氏模量随 ρ 变化而变化,为直观起见用变量 x_i 代替 i 单元相对密度 ρ.

RAMP插值模型的刚度矩阵、柔度函数及柔度函数的敏度克表示为:

单元刚度矩阵:

$$k_i = \frac{x_i}{1+p(1-x_i)}k_0 \tag{3}$$

总刚度矩阵:

$$K = \frac{x_i}{1+p(1-x_i)}K_0 \tag{4}$$

* 收稿日期:2005-11-13
作者简介:李家春(1974-),男,贵州织金人,贵州大学讲师,华南理工在读博士.

总体柔度函数 :

$$C = F^T U = U^T K U = \sum_{i=1}^{N_e} u_i^T k_i u_i = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} u_i^T k_0 u_i \tag{5}$$

敏度函数:

$$C'(x) = -\sum_{i=1}^{N_e} \frac{(1 + p) x_i}{(1 + p(1 - x_i))^2} u_i^T k_i u_i \tag{6}$$

弹性模量:

$$E = \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} E^0 \tag{7}$$

上式中 K、C、$C'(\rho)$都是 x_i 的函数。K_0 表示优化前的结构总刚度矩阵, k_0 优化前的单元刚度矩阵, N_e 为单元数目, k_i 为第 i 单元优化后的单位刚度矩阵, u_i 表示单元位移向量, C 表示结构的柔度, $C'(x)$表示敏度, E 为插值后的弹性模量, E_0 实体弹性模量。RAMP 模型中结构单元弹性模量的控制参数是 x_i 和 p, p 取不同值时, 不同的中间密度单元 x_i 导致单元弹性模量参数有逼近 0 或 E^0 的趋势。

2　基于 RAMP 的优化准

设定以结构总体柔度为拓扑优化的目标函数, 结构的体积作为优化的约束条件, 在给定载荷和边界条件基础上, 基于 RAMP 插值的优化模型为:

$$\min\ C = F^T U = U^T K U = \sum_{i=1}^{N_e} u_i^T k_i u_i = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} u_i^T k_0 u_i \tag{8}$$

$$S.t.\left\{\begin{array}{l} V = \sum_{i=1}^{N_e} V_i x_i = V^* \\ F = KU \\ 0 < x_{\min} \leqslant x_i \leqslant 1 \end{array}\right\} \tag{9}$$

式中, V_i 为优化后的单元体积, V 为优化后结构体积, V^* 为目标优化体积, u_i 为单元位移列向量。为避免总刚度矩阵奇异, 取单元最小相对密度 $x_{\min} = 0.0015$.

利用拉格朗日乘子法将上述约束最优化问题(8)转换为无约束最优化问题进行求优。则拓扑优化问题的拉格朗日函数为:

$$L(x, \lambda, s) = C + \lambda_1(V - V^*) + \lambda_2(K - UF) + \lambda_3(x_{\min} - x + s_3^2) + \lambda_4(x - I + s_4^2) \tag{10}$$

式中 λ_1(标量), λ_2, λ_3, λ_4(向量)为拉格朗日乘子, s_3, s_4 为松弛变量。

由库恩—塔克($K-T$)条件得拉格朗日函数在 $x^*(x_1^*, x_2^* \cdots x_{N_e}^*)$处取极值的必要条件:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^*} = \frac{\partial C}{\partial x_i^*} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i^*} + \lambda_2 \frac{\partial (KU)}{\partial x_i^*} - \lambda_{3i} + \lambda_{4i} = 0 \tag{11}$$

当 $s_3 = 0$, $s_4 = 0$, 约束起作用 $\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$, 且 $\lambda_3(x_{\min} - x) = 0$, $\lambda_4(x - I) = 0$.

当 $\lambda_{3i} = \lambda_{4i} = 0$ 时, 约束条件不起作用, 即 $x_i^* < x_{\min}$, 或者 $x_{\min} < x_i^* < 1$.

当 $x_i^* = x_{\min}$时, 设计变量的下限起作用, 此时, $\lambda_{3i} \geqslant 0$, $\lambda_{4i} = 0$.

当 $x_i^* = 1$ 时, 设计变量的上限起作用, 此时, $\lambda_{3i} = 0$, $\lambda_{4i} \geqslant 0$.

由上述分析得下式:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_i^*}=\frac{\partial C}{\partial x_i^*}+\lambda_1\frac{\partial V}{\partial x_i^*}+\lambda_2\frac{\partial (KU)}{\partial x_i^*}=0\\
&\text{当 } x_{\min}< x_i^*<1\\
&\frac{\partial L}{\partial x_i^*}=\frac{\partial C}{\partial x_i^*}+\lambda_1\frac{\partial V}{\partial x_i^*}+\lambda_2\frac{\partial (KU)}{\partial x_i^*}\leqslant 0\\
&\text{当 } x_i^*=1\\
&\frac{\partial L}{\partial x_i^*}=\frac{\partial C}{\partial x_i^*}+\lambda_1\frac{\partial V}{\partial x_i^*}+\lambda_2\frac{\partial (KU)}{\partial x_i^*}\geqslant 0\\
&\text{当 } x_i^*=x_{\min}\\
&V=V^*\\
&F=KU\\
&x_{\min}\leqslant x_i^*\leqslant 1
\end{aligned}\right\}\tag{12}
$$

由 RAMP 插值模型分析得：$C=U^TKU$，$k_1=\frac{x_i^*}{1+p(1-x_i^*)}k_0$，$V=\sum_{i=1}^{N_e}x_i^*V_i$，$K=K^T$ 等式子，代入式(12)中的 $\frac{\partial L}{\partial x_i^*}=0$，得：

$$
\frac{\partial U^T}{\partial x_i^*}KU+U^T\frac{\partial K}{\partial x_i^*}U+U^TK\frac{\partial U}{\partial x_i^*}+\lambda_1\frac{\partial V}{\partial x_i^*}+\lambda_2\frac{\partial K}{\partial x_i^*}U+\lambda_2K\frac{\partial U}{\partial x_i^*}=0\tag{13}
$$

由 $KU-F=0$ 得 $\frac{\partial K}{\partial x_i^*}U=-K\frac{\partial U}{\partial x_i^*}$ 或 $U^T\frac{\partial K}{\partial x_i^*}=-\frac{\partial U^T}{\partial x_i^*}K$，代入式(13)得：

$$
-U^T\frac{\partial K}{\partial x_i^*}U+\lambda_1V_i=0\tag{14}
$$

即

$$
-\frac{(1+p)}{[1+p(1-x_i^*)]^2}u_i^Tk_0u_i+\lambda_1V_i=0\tag{15}
$$

因为通常要求 $p\geqslant 20$，故设迭代因子 T_i^k，且令

$$
T_i^k=\frac{(1+p)u_i^Tk_0u_i}{[1+p(1-x_i^*)]^2\lambda_1V_i}\tag{16}
$$

式(16)即可作为 RAMP 模型的优化设计准则迭代因子。加入设计变量边界条件可得到该准则法的计算迭代公式：

$$
\left.\begin{aligned}
&x_i^{k+1}=T_{k_i}X_i^k &&(x_{\min}<T_i^kx_i^k<1)\\
&x_i^{k+1}=1 &&(T_i^kx_i^k\geqslant 1)\\
&x_i^{k+1}=x_{\min} &&(T_i^kx_i^k\leqslant x_{\min})
\end{aligned}\right\}\tag{17}
$$

3　基于 RAMP 模型的优化准则法的计算流程

如图 1 所示。

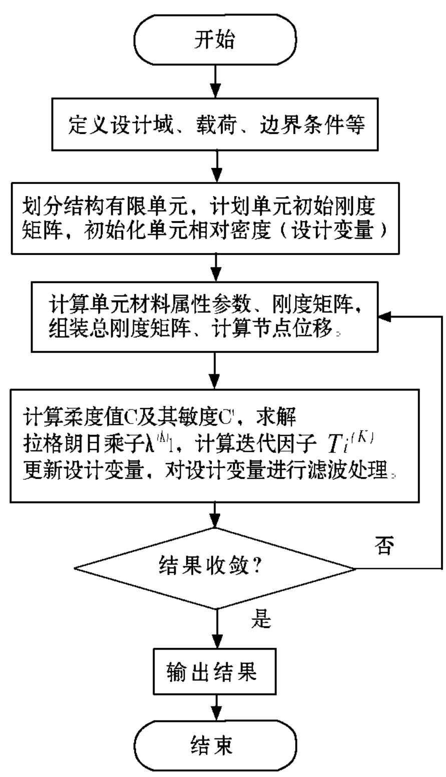


图 1　优化程序流程图

4　算　例

如图 2 所示简支梁，设计区域 80 mm× 20 mm，厚度 $t=1$ mm，$E=$ 2e5，柏松比 $\mu=0.3$，受载荷 0.5 N/mm^2，约束条件如图所示，要求结构整体柔度最小。结构单元划分为 80×20 四边形单元时，优化过程中对密度场采用滤波技术。不同体积约束下的优化结果如图 3 所示。

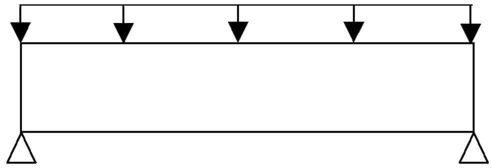
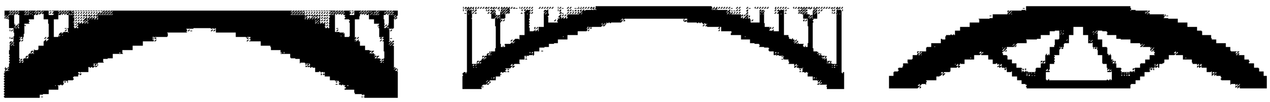


图 2　优化设计模型



(a)体积约束 0.3　　(b)体积约束 0.4　　(c)体积约束 0.60

图 3　优化设计模型

5 结　语

算例验证, 基于 RAMP 密度插值理论的拓扑优化准则法进行拓扑优化计算稳定, 能得到较好的优化结果, 而且优化收敛速度快, 算法切实可行。

参考文献:

[1] 王书亭, 左孔天. 基于均匀化理论的拓扑优化算法研究[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2004, 32(10): 25—27, 30.

[2] 张宪民. 柔顺机构拓扑优化技术[J]. 机械工程学报. 2003, 39(11): 47—51.

[3] O. Sigund, A 99 line topology optimization code written in Matlab[R]. Struct Mutidisc Optim 21, 120—127.

[4] 袁　振, 吴长春, 等. 基于杂交元和变密度法的连续体结构的拓扑优化[J]. 中国科学技术大学学报, 2001, 31(6): 694—699.

[5] Zhou M, Rozvany GIN. On the validity of ESO type methods in topology optimization[J]. Structuraland Mutidiscipline Optimization 2001, (21): 80—83.

The Optimality Criteria Method Ramp—based For Topology Optimization

LI Jia—chun[1,2], YE Bang—yan[2], TANG Xia[3]

(1. College of Mechanical Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, 510640; 2. School of Information Engineering, Guizhou University, Guizhou, 550003, China)

Abstract: Based on the theories of density interpolation schemes and optimality Criteria method, with the objective to minimize compliance, the criterion to solving topology optimal problem was deduced. The iterative algorithm of the criteria was realized. The correctness and validity of the criteria and the algorithm were testified by a two—dimensional case.

Key words: density interpolation; topology optimization; optimality criteria; RAMP