

抑制灰度单元的改进优化准则法

龙 凯^{1,2)}, 赵红伟²⁾

¹⁾ (华北电力大学可再生能源学院 北京 102206)

²⁾ (北京理工大学机械与车辆工程学院 北京 100081)

(longkai1978@163.com)

摘 要: 为了抑制连续体结构拓扑优化结果中的灰度单元, 提出 2 种改进的启发式优化准则法. 该方法与固体各向同性惩罚微结构(SIMP)材料描述方式相结合, 利用光滑的 Heaviside 函数使灰度单元趋于 0 或 1 两极分化; 在每一轮优化迭代中能自然满足体积约束函数, 不仅能有效地抑制灰度单元的数量, 而且提高了优化求解的效率. 最后通过二维经典拓扑优化算例验证了文中方法的正确性.

关键词: 拓扑优化; 准则法; 灰度单元; 连续体结构; 变密度法

中图法分类号: TH122

A Modified Optimality Criterion Method for Gray Elements Suppression

Long Kai^{1,2)} and Zhao Hongwei²⁾

¹⁾ (School of Renewable Energy, North China Electric Power University, Beijing 102206)

²⁾ (School of Mechanical Vehicular Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract: To suppress gray-scale elements in topology optimization for continuum structures, two modified heuristic optimality criterion methods are proposed. These methods can be used in conjunction with the SIMP material description. Gray-scale elements are compelled to be 0 or 1 by utilizing the smooth Heaviside function. At each optimization iteration step, the volume constraint function can be satisfied naturally. Not only gray elements are suppressed, but also the efficiency of optimization solving is improved with the proposed methods. The validity of the proposed methods and strategy are substantiated by several typical two-dimensional topology optimization problems.

Key words: topology optimization; optimality criterion method; gray-scale element; continuum structure; variable density approach

随着结构优化设计研究的发展, 连续体结构拓扑优化被公认为是该领域的研究热点和难点之一. 自 1988 年 Bendsoe 等^[1]提出均匀化法以来, 目前的拓扑优化方法包括变密度法^[2]、进化式法^[3]、独立连续映射法^[4,5]以及水平集法^[6]等. 连续体结构拓扑优化本质上是 0-1 离散变量的组合优化问题. 由于 0-1 离散变量的离散性, 使得优化模型中的目标函数与约束函数具有不连续和不可导性. 为克服优化求解的困难, 通常将原问题松弛为连续变量的优化问题. 当设计变量在 0 和 1 之间连续取值时, 优化结构中将会出现中间密度材料, 为了得到清晰的理想拓

扑优化结果, 人们采用了变量显式或隐式的惩罚措施, 其中最为普遍的应用包括固体各向同性惩罚微结构模型(solid isotropic microstructure with penalization, SIMP)^[2]和材料属性的有理近似模型(rational approximation of material properties, RAMP)^[7]2 种模型. 为了克服拓扑优化结果中普遍存在的棋盘格和网格依赖性等数值不稳定性问题, 基于数字图像原理的过滤法得到了普遍的应用. 然而过滤法的平均效应又不可避免地造成优化边界上存在着中间密度材料或灰度单元, 造成了所谓的“边缘扩散”现象.

收稿日期: 2010-04-21; 修回日期: 2010-10-12. 龙 凯(1978—), 男, 博士, 讲师, 主要研究方向为风力发电机、车辆、动力机械结构分析与优化设计; 赵红伟(1982—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为汽车动力学、结构分析与优化设计.

为抑制灰度单元在最优拓扑中出现, Fuchs 等^[8]在 SIMP 模型中引入倒变量和(sum of the reciprocal variables, SRV) 约束方程. 周向阳等^[9]提出了用于柔性机构拓扑优化设计的 SRV 方法和优化策略. Wang 等^[10]提出了考虑密度梯度信息的双边过滤方法, 通过在较小的密度梯度处弱化过滤平均效果, 以获得黑白分明的拓扑优化结果. 昌俊康等^[11]认为不合理的惩罚函数是导致拓扑结构不甚合理的原因, 并提出了新的惩罚函数, 然而该方法存在着计算效率低的缺点. Groenwold 等^[12]提出了抑制灰度单元的启发式优化准则法, 但其存在着优化迭代次数较多、参数难以确定的缺点. Xu 等^[13]提出了满足体积约束的非线性过滤方法, 其优化结果也更加清晰.

1 连续体结构拓扑优化建模与求解

1.1 密度函数插值模型

工程中应用最多的 SIMP 模型的数学模型形式为 $E_e = E(\rho_e) = E_{\min} + \beta(E_0 - E_{\min})$, $\rho_e \in [0, 1]$; 其中 E_e 为插值后的弹性模量, ρ_e 为单元相对密度, β 为惩罚指数. E_0 和 E_{\min} 分别为固体和空洞部分材料的弹性模量, $\Delta E = E_0 - E_{\min}$. 为了数值求解稳定, 一般情况下可设置 $E_{\min} = E_0/1000$.

基于 SIMP 插值模型的总刚度矩阵 K 、柔顺度 C 的表达式分别为

$$K = \sum_e K_e = \sum_e (E_{\min} + \beta \Delta E) K_e^0 \quad (1)$$
$$C = \sum_e (E_{\min} + \beta \Delta E) U_e^T K_e^0 U_e.$$

其中 K_e 和 U_e 分别表示单元刚度阵和单元位移矢量; K_e^0 为密度变量为 1 时对应的单元刚度阵.

$$\rho^{(k+1)} = \begin{cases} \max(\rho_{\min}, (1 - m) \rho_e^{(k)}), & (B_e^{(k)})^\eta \rho_e^{(k)} \leq \max(\rho_{\min}, (1 - m) \rho_e^{(k)}) \\ (B_e^{(k)})^\eta \rho_e^{(k)}, & \max(\rho_{\min}, (1 - m) \rho_e^{(k)}) < (B_e^{(k)})^\eta \rho_e^{(k)} < \min(1, (1 + m) \rho_e^{(k)}) \\ \min(1, (1 + m) \rho_e^{(k)}), & \min(1, (1 + m) \rho_e^{(k)}) \leq (B_e^{(k)})^\eta \rho_e^{(k)} \end{cases}$$

其中 $B_e = \frac{\max\left(0, -\frac{\partial C}{\partial \rho_e}\right)}{l \frac{\partial V}{\partial \rho}}$, l 是拉格朗日乘子, 其值

在每一轮优化迭代中变化, 通常根据体积约束方程采用二分法求解得到; 上标 k 表示优化迭代步数; 设计变量运动极限 m 和阻尼系数 η ($0 < \eta < 1$) 用于保证优化迭代计算的稳定性和收敛性. 优化迭代终止判据根据设计变量相对变化率决定, 其数学表达式为 $\|\rho^{(k+1)} - \rho^{(k)}\| / \|\rho^{(k+1)}\| \leq 1\%$.

1.2 连续体结构拓扑优化建模

以柔顺度最小化(或刚度最大化)问题为例, 在设计区域体积比约束下的拓扑优化数学模型为

$$\begin{cases} \min & C = U^T K U = U^T F = \sum_e U_e^T K_e U_e \\ \text{s. t} & K U = F \\ & g = V(\rho)/V_0 - f = \sum_e V_e \rho_e / V_0 - f \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中 K , U 和 F 分别为总体刚度阵、位移向量和载荷向量; V_0 和 V 分别表示初始结构和优化结构体积, V_e 是单元体积; f 是体积比; 密度下限值 ρ_{\min} 用于避免有限元分析奇异性, 通常可取为 $\rho_{\min} = 10^{-3}$.

在拓扑优化求解中, 通常需要用到目标函数和约束函数的敏度信息, 由式(2)中的目标函数和约束函数表达式易得

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = -U_e^T \frac{\partial K_e}{\partial \rho_e} U_e \quad (3)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \rho_e} = V_e / V_0.$$

式(3)中的单元刚度阵敏度根据式(1)求得, 即

$$\frac{\partial K_e}{\partial \rho_e} = \beta \Delta E \beta^{-1} K_e^0.$$

1.3 拓扑优化求解的准则算法

结构拓扑优化求解的难点之一在于设计变量数目庞大, 常见的求解算法分为数学规划法(mathematical programming, MP)^[14] 和优化准则法(optimality criteria, OC)2 类. 优化准则法通过建立优化准则和迭代公式进行优化求解, 具有收敛速度快, 结构重分析次数和变量数目与复杂程度无关的优点. 常见优化准则法更新设计变量值^[15] 为

1.4 克服数值不稳定性现象

棋盘格现象和网格依赖性问题是连续体结构拓扑优化中常见的数值不稳定性现象, 目前的解决方法包括高阶等参元法、周长约束法、全局或局部梯度法、过滤法等^[16]. 过滤法的基本思想是将单元属性视为图像数字, 采用过滤技术以抑制单元属性的剧烈变化. 尽管过滤法是一种纯“启发式”方法, 但它能取得较为理想的拓扑优化结果, 并且没有附加约束条件, 在程序实现上较为容易^[17]. 基于敏度过滤法的数学表达式为

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{f=1}^N \bar{H}_f} = \sum_{f=1}^N \bar{H}_f \rho_f \frac{\partial C}{\partial \rho_f},$$

其下标集合 f 满足 $\{f \in N | dist(e, f) \leq r_{min}\}$, $e = 1, 2, \dots, N$. 其中 $dist(e, f)$ 表示单元 e 和单元 f 的质心距离, r_{min} 是过滤半径. \bar{H}_f 的数学表达式为

$$\bar{H}_f = (r_{min} - dist(e, f)) / r_{min} \tag{4}$$

或

$$\bar{H}_f = dist(e, f) / r_{min} \tag{5}$$

如果式(4)的过滤半径对应着工程制造加工上最小尺寸, 那么式(5)中的过滤半径则对应工程制造加工的最小孔洞^[18]. 数值实验表明, 上述 2 种过滤方法能得到相似的拓扑优化结果. 本文数值实验结果表明, 最小孔洞过滤方法下的拓扑优化结果更加平滑, 故而本文数值算例均采用式(5)所示的过滤方法.

2 改进的优化准则法

本文提出抑制灰度单元的改进优化准则法, 其基本思想是在每轮优化求解中, 通过“启发式”算子

的作用, 弱化相对密度小的单元, 强化相对密度大的单元, 使得设计变量值趋于两极分化. 这样不仅能够有效地抑制灰度单元, 而且能够快速、稳健地优化迭代收敛. 由于在优化准则法求解过程中, 采用二分法则求解拉格朗日乘子以满足体积约束, 故在每轮优化迭代中体积约束条件得到了自然的满足. 本文提出基于 2 种不同算子的抑制灰度单元的优化准则法. 其中, 算子 1 的数学表达式为

$$\Gamma_1(\rho) = \frac{1 + e^{-1/(2q)}}{1 + e^{-(\rho_e - 0.5)/q}} \tag{6}$$

算子 2 的数学表达式为

$$\Gamma_2(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan[r(2\rho - 1)]}{\arctan(r)} \tag{7}$$

式(6)(7)中 q, r 称为“陡度参数”. 图 1 所示为 q 和 r 取不同值时得到的函数曲线.

由图 1 可知, 算子 1 和算子 2 均迫使中间密度值向 0 或 1 极化. q 值越小(或 r 值越大), 曲线越接近 Heaviside 阶跃函数; q 值越大(或 r 值越小), 算子起到了光滑 Heaviside 函数的作用. 与文献[12]相比, 本文采用的算子同时将设计变量向两极分离而并非向下限极化.

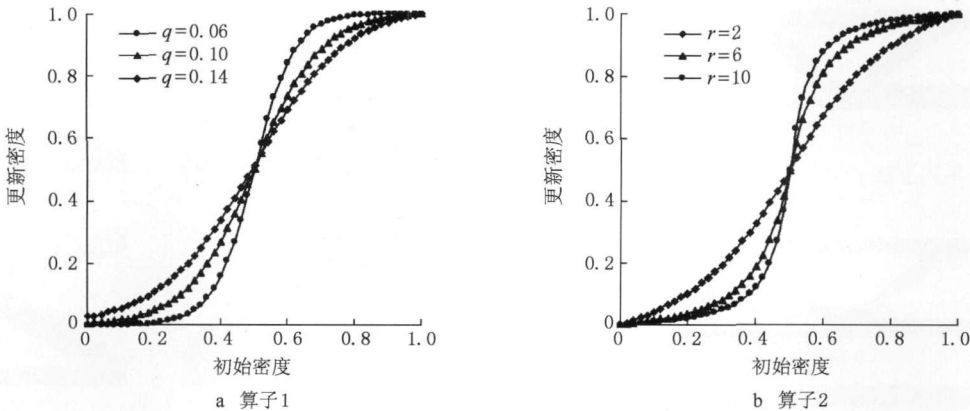


图 1 抑制灰度单元的算子

为提高求解速度和算法的稳定性, 本文采用改进优化准则法的优化策略如下: 在优化的初始阶段, 为避免删除单元过多而影响其后最优拓扑的搜索, 采用较平滑的曲线对应的算子参数(如 $q = 0.15$ 或 $r = 2$)进行优化求解, 直至 $\|\rho^{(k+1)} - \rho^{(k)}\| / \|\rho^{(k+1)}\| \leq 3\%$ 时收敛. 在优化的后期阶段, 大多数结构单元密度值接近 1 或密度下限值, 为加快单元删除的速率, 提高收敛速度, 可采用较陡的算子参数(如 $q = 0.08$ 或 $r = 8$)直至收敛.

3 二维拓扑优化算例分析与讨论

本节采用连续体结构拓扑优化研究中的二维平

面经典算例对本文方法进行验证, 其中结构采用平面四节点矩形单元离散, 材料弹性模量为 210 GPa, 泊松比为 0.3. 该算例在经典的 99 行 Matlab 程序中修改实现^[20].

算例 1. 已知 MBB 梁尺寸为 $24\text{ m} \times 4\text{ m} \times 0.01\text{ m}$, 结构顶部中点处受垂直向下的载荷 $F = 2\text{ kN}$ 作用. 鉴于结构和载荷的对称性, 采用 $1/2$ 模型分析和优化计算. 结构离散为 150×50 个单元, 过滤半径为 3.75 倍平均单元尺寸大小. 1) 以 50% 体积比建立优化模型, 采用传统和改进的 OC 算法得到如图 2 所示的优化构型. 这 2 种算法以及基于文献[12]方法下的最优结构柔顺度值和迭代步数如表 1 所示;

2) 分别采用 40% 和 60% 体积比, 改进的 OC 算法下的拓扑优化构型如图 3~ 4 所示, 最优结构柔顺度值和迭代步数如表 2 所示.

由结果可知, 2 种改进 OC 算法下的拓扑优化结果克服了边缘扩散现象, 同文献[12] 相比, 在相近的最优结构柔顺度值下, 优化迭代次数更少. 当采用不同体积比约束时, 初始结构单元密度值有所不同, 在改进的 OC 算法和相应的优化策略下, 能够得到理想的拓扑优化结果.

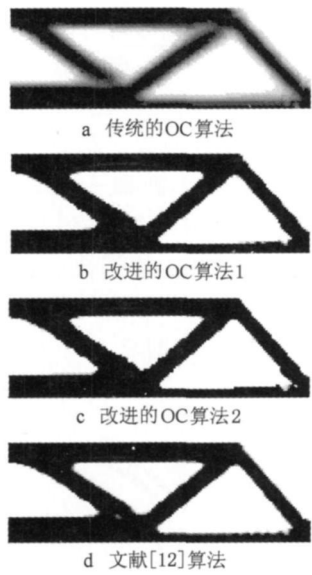


图 2 不同方法下 MBB 梁拓扑优化构型

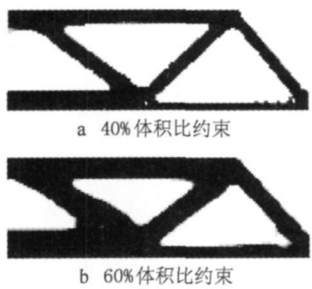


图 3 改进算法 1 下 MBB 梁拓扑优化构型

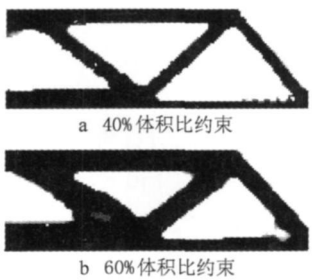


图 4 改进算法 2 下 MBB 梁拓扑优化构型

表 1 不同算法下 MBB 梁最优拓扑目标值与迭代步数对比

算法	$10^3 \times$ 柔顺度/ J	迭代步数
传统的 OC 算法	107. 013	23
改进的 OC 算法 1	94. 820	21
改进的 OC 算法 2	94. 992	23
文献[12]	94. 292	33

表 2 不同体积比下 MBB 梁最优拓扑目标值与迭代步数对比

体积比	$10^3 \times$ 柔顺度/ J		迭代步数	
	改进的 OC 算法 1	改进的 OC 算法 2	改进的 OC 算法 1	改进的 OC 算法 2
40%	113. 890	115. 842	33	33
60%	82. 974	82. 460	17	21

算例 2. 已知短悬臂梁尺寸为 $8\text{ m} \times 5\text{ m} \times 0.01\text{ m}$, 结构右下角点处受到垂直向下的载荷 $F=1\text{ kN}$ 作用. 结构离散为 80×50 个单元. 以 50% 体积比建立优化模型, 过滤半径为 2.5 倍平均单元尺寸大小, 采用传统和改进的 OC 算法以及基于文献[12] 算法, 分别得到如图 5 所示的优化构型, 最优结构柔顺度值和迭代步数如表 3 所示.

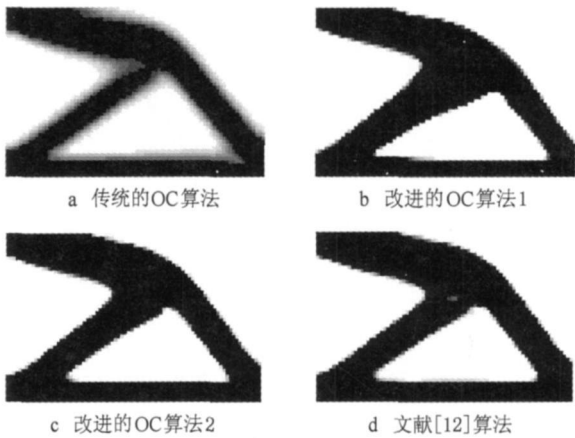


图 5 不同方法下短悬臂梁拓扑优化构型

表 3 不同方法下短悬臂梁最优拓扑目标值与迭代步数对比

方法	$10^3 \times$ 柔顺度/ J	迭代步数
原 OC 算法	24. 135	18
改进 OC 算法 1	22. 705	16
改进 OC 算法 2	22. 335	16
文献[12]	21. 934	21

4 结 语

为抑制拓扑优化结果中的灰度单元, 本文基于 2 种光滑的 Heaviside 函数算子提出了 2 种改进的

优化准则法, 同 SIMP 材料描述方式相结合, 在每一轮优化求解中迫使灰度单元两极分化, 在保留原有 SIMP 模型稳健性的基础上, 加快了优化求解的效率, 抑制了最优拓扑边界灰度单元的数量, 得到了轮廓较清晰的拓扑优化结果.

参考文献 (References):

- [1] Bendsoe M P, Kikuchi N. Generation optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224
- [2] Zhou M, Rozvany G I N. The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 89(1/3): 309-336
- [3] Xie Y M, Steven G P. *Evolutionary structural optimization* [M]. London: Springer, 1997
- [4] Sui Yunkang. Modeling, transformation and optimization: new developments of structural synthesis method [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996 (in Chinese)
(隋允康. 建模·变换·优化结构综合方法新进展[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996)
- [5] Sui Yunkang, Peng Xirong. The improvement for the ICM method of structural topology optimization [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(2): 190-198 (in Chinese)
(隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法的改善[J]. *力学学报*, 2005, 37(2): 190-198)
- [6] Sethian J A, Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 163(2): 489-528
- [7] Stople M, Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22(2): 116-124
- [8] Fuchs M B, Jiny S, Peleg N. The SRV constraint for $Q1$ topological design [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30(4): 320-326
- [9] Zhou Xiangyang, Chen Liping, Huang Zhengdong. Topology optimization design of compliant mechanism with the SIMP-SRV method [J]. *Chinese Mechanical Engineering*, 2008, 19(6): 631-635 (in Chinese)
(周向阳, 陈立平, 黄正东. 用 SIMP-SRV 方法进行柔性机构拓扑优化设计[J]. *中国机械工程*, 2008, 19(6): 631-635)
- [10] Wang M Y, Wang S Y. Bilateral filtering for structural topology optimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(13): 1911-1938
- [11] Chang Junkang, Duan Baoyan. An improved variable density method and application for topology optimization of continuum structures [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, 26(2): 188-192 (in Chinese)
(昌俊康, 段宝岩. 连续体结构拓扑优化的一种改进变密度法及其应用[J]. *计算力学学报*, 2009, 26(2): 188-192)
- [12] Groenwold A A, Etman L F P. A simple heuristic for gray-scale suppression in optimality criterion-based topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(2): 217-225
- [13] Xu S L, Cai Y W, Cheng G D. Volume preserving nonlinear density filter based on Heaviside functions [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(4): 495-505
- [14] Svanberg K. The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373
- [15] Bendsoe M P. *Optimization of structural topology, shape and material* [M]. New York: Springer, 1995
- [16] Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards mesh-dependencies and local minima [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1998, 16(1): 68-75
- [17] Sigmund O. Morphology-based black and white filters for topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4/5): 401-424
- [18] Almeida S R M, Paulino G H, Silva E C N. A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(4): 359-371
- [19] Diaz A R, Sigmund O. A topology optimization method for design of negative permeability metamaterials [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(2): 163-177
- [20] Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2): 120-127