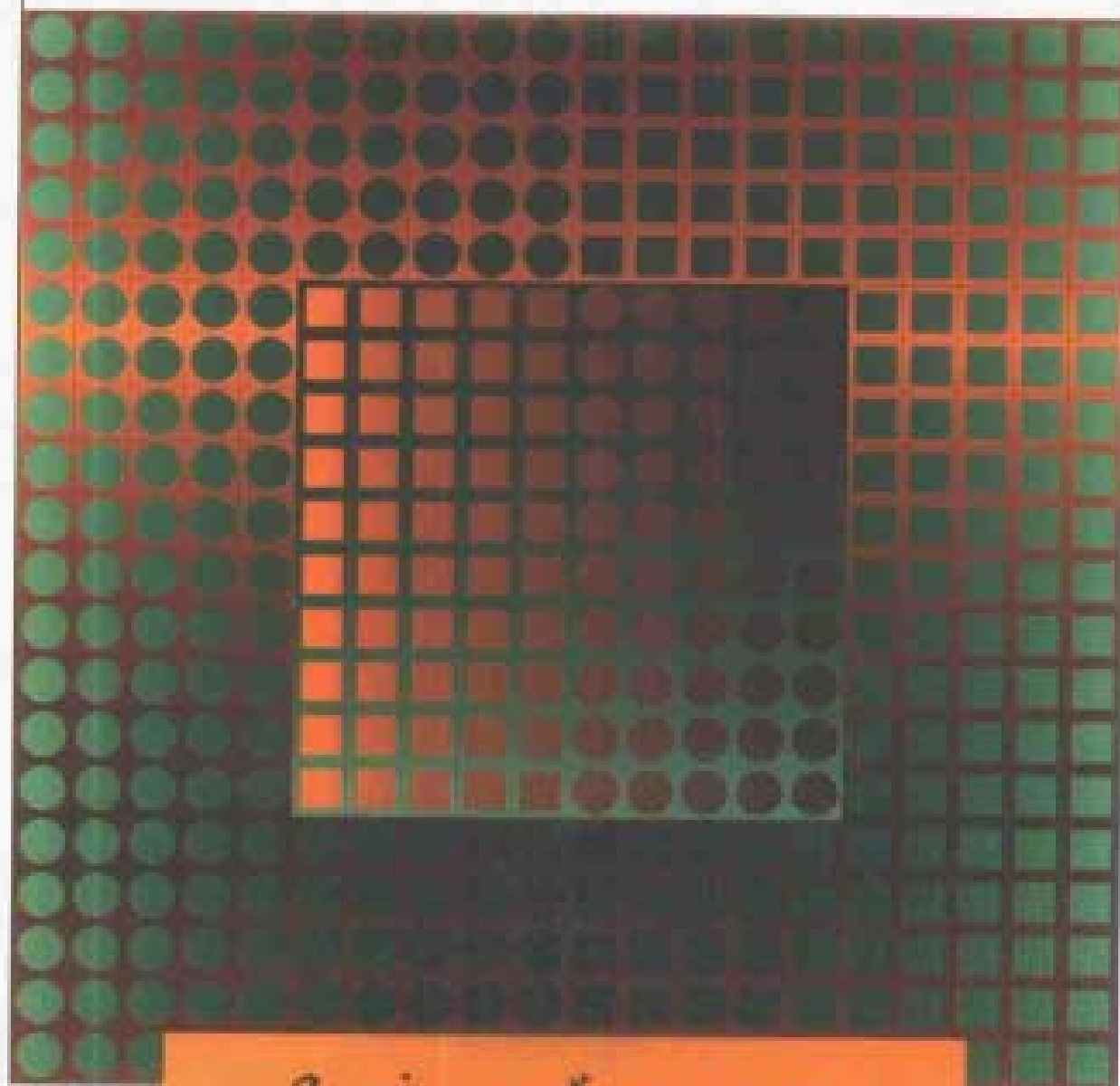


有限元法基础

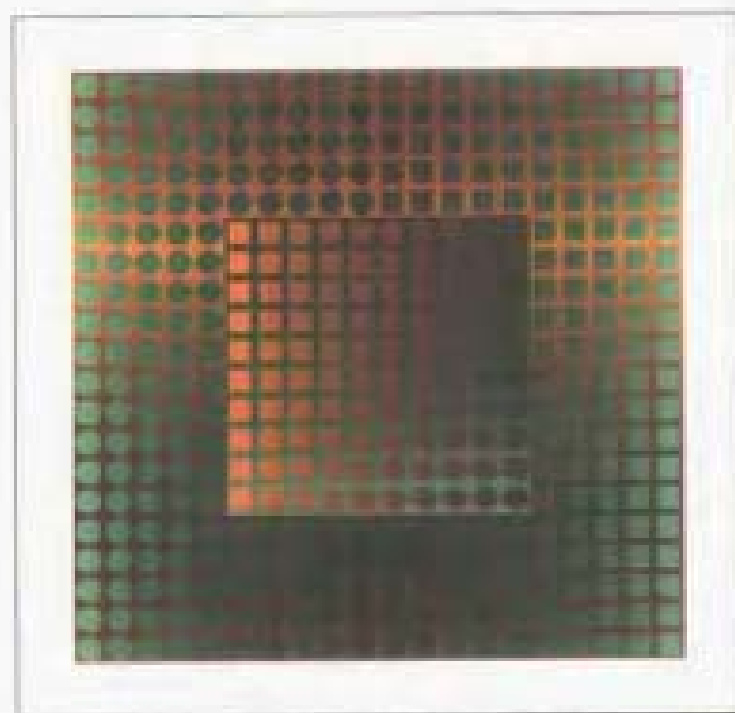
YOUXIANYUANFA JICHU

李人宪 编著



国防工业出版社

责任编辑 张文峰 肖志力



ISBN 7-118-02810-X



9 787118 028102 >

ISBN 7-118-02810-X/TB-100

定价:12.00 元

有 限 元 法 基 础

李人宪 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

前 言

有限元法作为一种数值计算方法已经在工程技术的许多领域内得到了广泛的应用,它可以较方便地解决工程中许多过去感到棘手甚至无法解决的问题,已成为求解固体力学问题、热传导问题、流体流动问题和电磁场、声场等问题的一种有效的计算方法。从事设计计算的工程技术人员应该了解和掌握有限元法的基本理论和基本过程。工科专业的学生,特别是机械、土木、力学等专业的学生将会遇到桁架系统、刚架系统的受力变形问题,连续体的受力变形问题,薄板弯曲问题,以及工程部件的温度场计算问题和流场计算问题。这些问题都可以用有限元法求解。因此,有限元法已经成为这些专业的一门必修或选修课程。

由于有限元法的广泛应用和快速发展,论述有限元法的著作非常之多,可以作为教材的也绝非鲜见。然而它们或篇幅过大,或涉及面较窄,或起点太高,还无法适应当前教学改革所希望的少学时多内容的授课要求,也常常使只有材料力学和线性代数基础的本科学生难以入门。为此,作者试图编写一本起点较低、难点分散、循序渐进的教材,希望能使读者对有限元法的基本原理、计算方法和应用前景有一个概括的了解,为深入钻研打下基础。

本书是在1992年编写的用于机械类本科各专业《有限元法基础》选修课讲义的基础上改编而成。本着难点分散的原则,通过不同的问题,逐步引入推导有限元方程的直接刚度法、能量原理(虚功原理)、变分原理和加权余量法的计算过程,使读者在求解具体问题的过程中了解和掌握一些相对较复杂的数学、力学原理。全书分为九章,第一章简要介绍有限元法的概念、发展和基本思想及特点;第二章从弹簧系统入手介绍桁架系统有限元求解方法,引入

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 概述.....	1
§ 1-2 有限元法的基本思想及特点.....	3
第二章 杆件结构的有限元法	6
§ 2-1 引言.....	6
§ 2-2 弹簧系统的刚度矩阵.....	8
§ 2-3 杆件系统的有限元法	16
第三章 刚架结构的有限元法	29
§ 3-1 直接刚度法推导梁单元有限元格式	29
§ 3-2 位移函数——虚功原理推导梁单元 有限元计算格式	31
第四章 平面问题的有限元法	47
§ 4-1 弹性力学基本知识	47
§ 4-2 平面问题的有限元模型	54
§ 4-3 平面问题的三角形单元求解	57
§ 4-4 刚阵存储与约束条件处理	74
§ 4-5 六节点三角形单元和矩形单元	78
第五章 等参数单元	86
§ 5-1 等参数单元的引入	86

§ 5-2	四节点四边形等参数单元	88
§ 5-3	等参数单元平面问题有限元格式	90
§ 5-4	八节点曲边四边形等参数单元	100
§ 5-5	数值积分及其应用	108
第六章	热传导问题的有限元法	113
§ 6-1	问题的提出	113
§ 6-2	泛函与变分的基本概念	114
§ 6-3	稳定温度场的变分原理	122
§ 6-4	二维稳定温度场的有限元格式	127
第七章	流体流动问题的有限元法	137
§ 7-1	流场问题及加权余量法	137
§ 7-2	二维流体流动的有限元计算格式	140
§ 7-3	流场有限元分析的几个特殊问题	146
第八章	薄板弯曲问题的有限元法	159
§ 8-1	薄板弯曲问题的力学描述	159
§ 8-2	矩形单元薄板弯曲问题的有限元方程	165
§ 8-3	三角形单元薄板弯曲问题的有限元方程	178
第九章	有限元法的前后处理	198
§ 9-1	引言	198
§ 9-2	有限元分析的前处理技术	199
§ 9-3	有限元分析的后处理	209
参考文献	221

第一章 绪 论

§ 1-1 概 述

有限元法是适应电子计算机的使用而发展起来的一种比较新颖和有效的数值计算方法。这种方法大约起源于 20 世纪 50 年代航空工程中飞机结构的矩阵分析。结构矩阵分析是结构力学的一种分析方法。结构矩阵分析方法认为:整体结构可以看作是由有限个力学小单元相互连接而组成的集合体,每个单元的力学特性可以比作建筑物中的砖瓦,装配在一起就能提供整体结构的力学特性。

为什么要首先分析力学小单元的特性呢?直接分析整体结构不是更好吗?我们说人类的认识能力是有限的,不可能一下子就弄清楚很复杂的东西。因此往往把复杂系统分解成性态容易了解的单个元件或“单元”,研究其性态。再将这些元件重建原来的系统以得到整体性态。这是工程技术人员和科学家经常采用的分析问题的方法。

有些系统由有限个已经完全确定的元件组成,我们称它为离散系统:例如:电阻及其电阻网络,杆件及其由杆件组成的桁架,水管和由它们组成的水管网络等等。另外一些系统则可以无限地被分割,这其中的问题只有利用无穷小这一数学概念才能定义,它意味着有无限个单元组成。我们称这种系统为连续系统。例如一块受力平板,一个活塞,一根轴等。

随着数字电子计算机的出现,求解离散系统问题一般比较容易,即使单元数目非常大时也是如此。例如桁架结构,过去结构力

学的方法只能求解比较简单、杆件数目比较少的结构。有了计算机之后,基本上还是用结构力学的办法,可以求解杆件数目成千上万个的大型平面或空间立体桁架中各个杆件的受力及变形。例如大型体育场馆的屋顶或雨棚现在多采用球体连接的空间立体网架,它在风、重力等载荷的作用下各个杆件受多大力,有多大变形,是否安全,都可以由结构矩阵分析的方法,根据有限元的思想,利用计算机求出。而对于连续系统,由于实际上有无限个单元,而计算机的存储量总是有限的,因此由计算机不容易处理。一般来讲,连续系统只有通过数学运算才能精确求解。但是工程中能得到精确解的问题很少,只有在非常简单的情况下才是可能的。例如弹性力学中的薄板弯曲问题,只有矩形板或圆形板而且支撑和载荷都非常简单的情况才可能求出解析解。对传热学中的热传导问题也是如此。而工程中的构件形状一般都是比较复杂的。如内燃机活塞的温度是如何分布的,连杆的应力是如何分布的,到目前为止都还是无法精确求出的。工程上处理连续体问题的方法之一是将连续系统离散化,通过离散,使连续系统变成离散系统,从而可以采用解决离散系统问题的方法,用计算机进行处理。这种离散当然都带有近似性,但是,它是这样一种近似:当离散变量的数目增加时,它可以逼近真实的连续解。有限元法用于求解连续系统问题时就是一种一般的离散化方法。

有限元法最初是用于分析飞机的结构强度,通过这一方法可求得组成飞机结构的各杆件的受力和变形的数值计算结果。这是离散系统的弹性杆系问题。1960年飞机结构工程师 Clough 在他的论文中第一个采用有限元(Finite element method)这一术语,并用有限元的思想求解了平面弹性问题。从此,不但工程技术人员开始认识有限元法的功效,数学家和力学家也看到了有限元法的巨大前景,相继从理论上对有限元法进行了深入的探讨。使有限元法建立在更为坚实的理论基础之上。在工程技术人员和理论工作者的共同努力下,有限元法真正走入了连续介质力学之中,成为解决各种力学问题的最有效的方法之一。20世纪70年代,在英

国科学家 O. C. Zienkiewicz 等人的努力下,将有限元法的应用推广到了热传导、电磁场、流体力学等领域。经过多年的发展,目前有限元法几乎可以用来求解所有的连续介质和场问题,包括静力问题和与时间有关的变化问题以及振动问题。在国内,60 年代中科院计算所的冯康教授独立推导了有限元计算的数学过程,70 年代中期,复旦大学数学系与江南造船厂合作,将有限元法应用于船舶设计计算,使有限元法在中国工程界开始大规模应用。目前,有限元法已成为工程设计中不可或缺的一种重要方法,在大型结构作用力分析、变形分析、失效分析、传热分析、电磁场分析、流体流动分析等方面扮演着越来越重要的角色。

§ 1-2 有限元法的基本思想及特点

一、有限元法的基本思想

(1) 假想把连续系统(包括杆系,连续体,连续介质)分割成数目有限的单元,单元之间只在数目有限的指定点(称为节点)处相互连接,构成一个单元集合体来代替原来的连续系统。在节点上引进等效载荷(或边界条件),代替实际作用于系统上的外载荷(或边界条件)。

(2) 对每个单元由分块近似的思想,按一定的规则(由力学关系或选择一个简单函数)建立求解未知量与节点相互作用(力)之间的关系(力-位移、热量-温度、电压-电流等)。

(3) 把所有单元的这种特性关系按一定的条件(变形协调条件、连续条件或变分原理及能量原理)集合起来,引入边界条件,构成一组以节点变量(位移、温度、电压等)为未知量的代数方程组,求解之就得到有限个节点处的待求变量。

所以,有限元法实质上是把具有无限个自由度的连续系统,理想化为只有有限个自由度的单元集合体,使问题转化为适合于数值求解的结构型问题。

二、有限元法的特点

(1) 概念清楚,容易理解。可以在不同的水平上建立起对该方法的理解。从使用的观点来讲,每个人的理论基础不同,理解的深度也可以不同,既可以通过直观的物理意义来学习,也可以从严格的力学概念和数学概念推导。

(2) 适应性强,应用范围广泛。有限元法可以用来求解工程中许多复杂的问题,特别是采用其他数值计算方法(如有限差分法)求解困难的问题。如复杂结构形状问题,复杂边界条件问题,非均质、非线性材料问题,动力学问题等。目前,有限元法在理论上和应用上还在不断发展,今后将更加完善和使用范围更加广泛。

(3) 有限元法采用矩阵形式表达,便于编制计算机程序,可以充分利用高速数字计算机的优势。由于有限元法计算过程的规范化,目前在国内外有许多通用程序,可以直接套用,非常方便。著名的有 SAP 系列,ADINA,ANSYS,ASKA,NASTRAN, MARK, ABAQUS 等。

(4) 有限元法的主要缺点是解决工程问题必须首先编制(或具有)计算机程序,必须运用计算机求解。另外,有限元计算前的数据准备、计算结果的数据整理工作量相当大。然而,在计算机日益普及的今天,使用计算机已不再困难。对于后一缺点可通过用计算机进行有限元分析的前、后处理来部分或全部地解决。

三、学习有限元法所需的理论基础

要真正掌握有限元方法并运用自如,决非一件容易的事情。学习它所需要的理论基础和知识有:

(1) 学科理论——理论力学,材料力学,结构力学,弹性力学,流体力学,传热学等。根据所要解决的问题不同,应具备不同的专门知识。

(2) 数学基础——线性代数,变分原理,加权余量法。

(3) 计算机基础——计算机的一般知识,算法语言,计算机的使用与编程。

这些知识有些我们已经掌握,有些则还没有。但是不能等全部掌握了所有这些知识后再来学习有限元法,只有在学习过程中逐渐掌握。好在有限元法可以在不同的层次上理解和应用。

第二章 杆件结构的有限元法

§ 2-1 引言

工程中最简单的结构可以认为是铰支的杆件。它的性质完全类似于图 2-1 所示弹簧。因为铰支杆只能承受拉伸力和压缩力(二力杆)。在图 2-1 所示弹簧系统中力 F 与弹簧伸长量 δ (位移)之间关系由胡克定律有

$$F = k\delta \quad (2-1)$$

式中 k 为弹簧的刚度,是弹簧的固有参数,它对应于力-位移图中 $F-\delta$ 关系直线的斜率。如图 2-2 所示。当 k 与力 F 已知时,可由下式求出弹簧伸长量 δ :

$$\delta = \frac{1}{k}F \quad (2-2)$$

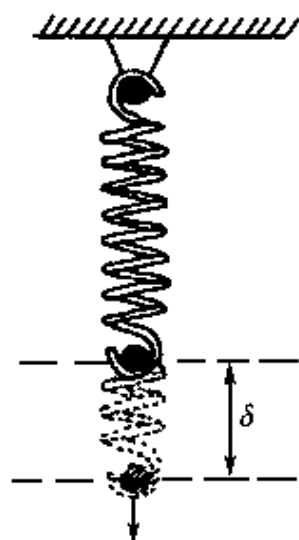


图 2-1 受力弹簧的变形

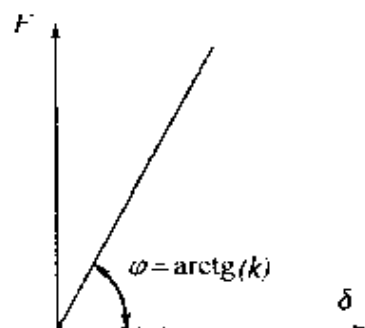


图 2-2 弹簧力-位移间关系

当处理比较复杂的铰支杆系统时,如图 2-3 所示要确定系统在力 P 的作用下,节点 B 、 C 、 D 和 E 处的变形,以便计算各杆件的内应力及各杆所受的轴向力,可假设整个杆件系统也具有像式(2-1)中 k 值一样的刚度,这样在力 P 的作用下各点的位移就可以用类似式(2-1)的公式计算了。不过,这时的系统刚度应采用一个矩阵来表示,即 $[K]$ 。同理,各点的位移也应采用一个矩阵来表示,即 $\{\delta\}$ 。再加上力矩阵 $\{F\}$,就构成下式:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (2-3)$$

$[K]$ 称为对应于施加在系统上各节点力的刚度矩阵。前面固定弹簧的例子中 $[K]$ 为 1×1 阶的矩阵,对于一个复杂一点的结构其刚度矩阵是多少阶的? 如何求出? 这是本章要介绍的主要内容。那么,为什么着重讨论系统的刚度矩阵呢? 因为从式(2-3)可知,知道了刚度矩阵 $[K]$,就可以根据系统所受外力求出各杆件节点处的位移,从而可以计算各杆的受力和应力。

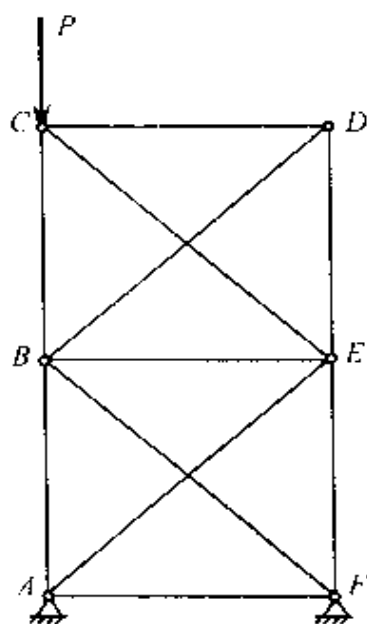


图 2-3 受力铰支杆系

杆件系统类似于弹簧结构,存在一个整体刚度(矩阵)。知道了这个刚度就可以由系统外力求出各节点的位移。这就是本小节应掌握的一个重要概念。

如何求出杆系的刚度矩阵呢？由于杆系的受力及变形类似于弹簧，为简单计，我们从弹簧的刚度矩阵讲起。

§ 2-2 弹簧系统的刚度矩阵

一、单个弹簧的刚度矩阵

图 2-1 所示弹簧只有一个可能的位移。但一般情况下一根弹簧可能两端都连接在其他弹簧上，因此弹簧的两端都是可以随被连接弹簧而动的节点，从而每个节点都有作用力施加其上。图 2-4 所示弹簧系统中 F_1 和 u_1 是作用于节点 1 上的力和位移， F_2

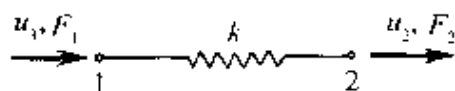


图 2-4 单个弹簧的受力和位移

和 u_2 是作用于节点 2 上的力和位移。因此弹簧的作用力向量为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

位移向量为

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

从而这个弹簧的刚度矩阵是 2×2 阶的。按方程式(2-3)，有

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2-4)$$

但是 k_{11} , k_{12} , k_{21} 和 k_{22} 我们还不知道。

为求出它们，将图 2-4 所示弹簧系统看作两个简单的系统，如图 2-5 (a)、(b) 所示，然后合成。

(1) 只有节点 1 可以变形，节点 2 固定。如图 2-5(a) 所示。这时

$$F_{1a} = ku_1$$

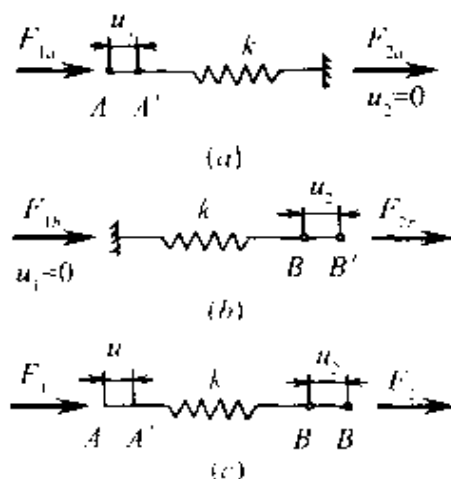


图 2-5 单个弹簧系统的分解与合成

由力的平衡有

$$F_{1a} + F_{2a} = 0$$

则

$$F_{2a} = -F_{1a} = -ku_1$$

(2) 只有节点 2 可以变形, 节点 1 固定, 如图 2-5(b) 所示。这时

$$F_{2b} = ku_2 = -F_{1b}$$

(3) 根据线弹性系统的叠加原理, 叠加(1)、(2)两种情形, 就得到与原始问题一样的结构, 如图 2-5(c) 所示。叠加结果为

$$\text{作用于节点 1 上的合力 } F_1 = F_{1a} + F_{1b}$$

$$\text{作用于节点 2 上的合力 } F_2 = F_{2a} + F_{2b}$$

或

$$\begin{cases} F_1 = ku_1 - ku_2 \\ F_2 = -ku_1 + ku_2 \end{cases}$$

将这一方程组写成矩阵形式有

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2-5)$$

从而, 由式(2-4)给出的一个刚度矩阵 $[K^e]$ 为(e 表示单元)

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

从上式可以看出, 这一刚度矩阵是对称的, 即 $k_{12} = k_{21} = -k$ 。另

外,这一矩阵是奇异的,即它的行列式的值等于零。

二、组合弹簧的刚度矩阵

知道了一个弹簧单元的刚度矩阵的求法,可以将它推广到多个弹簧单元的组合系统。首先我们来看看两个弹簧的系统,如图 2-6 所示。

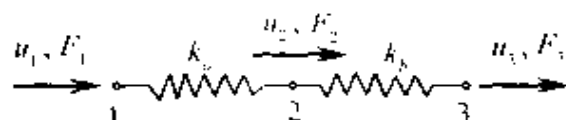


图 2-6 两弹簧受力系统

首先,仍采用分解再合成的方法,如图 2-7 所示。

(1) 先让 $u_2 = u_3 = 0$, 只允许节点 1 有位移 u_1 , 如图 2-7(a) 所示。这种情况下力 F_{1a} 与位移 u_1 之间的关系为

$$F_{1a} = k_a u_1$$

考虑弹簧 1-2, 由静力平衡条件有

$$F_{2a} = -F_{1a} = -k_a u_1$$

由于 $u_2 = u_3 = 0$, 没有力作用于节点 3, 因此

$$F_{3a} = 0$$

(2) 让 $u_1 = u_3 = 0$, 只允许节点 2 有位移 u_2 (见图 2-7(b))。这时由于位移的连续性, 每个弹簧在节点 2 要求有相同的位移, 即弹簧 1-2 的伸长量与弹簧 2-3 的缩短量相等。对弹簧 1-2 有拉力 $k_a u_2$, 对弹簧 2-3 有压力 $k_b u_2$, 因此

$$F_{2b} = (k_a + k_b) u_2$$

分别对两弹簧求静力平衡, 有

$$F_{1b} = -k_a u_2, F_{2b} = -k_b u_2$$

(3) 最后让 $u_1 = u_2 = 0$, 只允许节点 3 有位移 u_3 (见图 2-7(c))。类似于情况(1), 有

$$F_{3c} = k_b u_3, F_{2c} = -F_{3c} = -k_b u_3$$

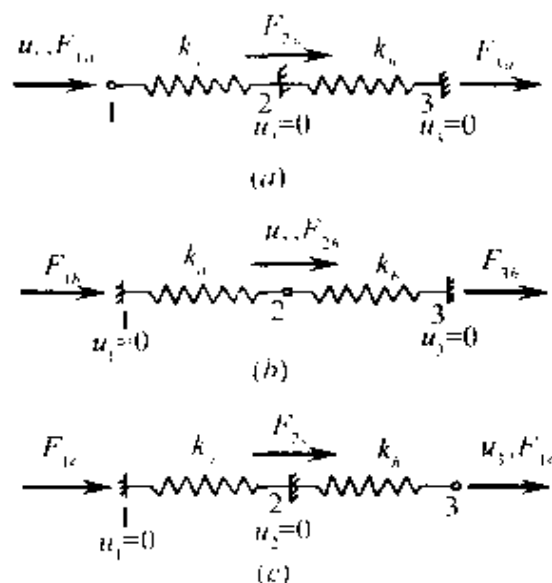


图 2-7 两弹簧系统的分解与合成

由于节点 1、节点 2 无位移,有

$$F_{1c} = 0$$

(4) 合成。对整个系统来说有 3 个节点,每个节点只有一个方向的位移。因此方程式(2-3)应有如下形式:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

利用线弹性系统的叠加原理,叠加上述三种情况,可以找出式(2-7)中 3×3 阶刚度矩阵各元素的表达式

		①	②	③
节点 1 处的合力	$F_1 =$	$k_a u_1$	$-k_a u_2$	0
节点 2 处的合力	$F_2 =$	$-k_a u_1$	$+k_a u_2 + k_b u_2$	$-k_b u_3$
节点 3 处的合力	$F_3 =$	0	$-k_a u_2$	$k_b u_3$

将这一组方程写成矩阵的形式,可得出两弹簧组合系统的刚度矩阵

$$[K] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

从式(2-8)中又一次可以看出刚度矩阵是对称矩阵,而且是奇异矩阵。

上面我们从最基本的力学原理出发,推导出了两个弹簧系统的刚度矩阵。用同样的方法可以求解具有更多个弹簧的串联系统。但是当弹簧数目增加时,推导过程是令人乏味的。在知道了单个弹簧单元的刚度矩阵式(2-6)之后。是否可以利用它来直接叠加出多个弹簧串联系统的总刚度矩阵呢?答案是肯定的。仍以上面两弹簧系统为例。首先,写出每个弹簧单元的受力方程和单元刚度矩阵

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &\text{单元 1} & & \text{单元 2} \end{aligned}$$

由于整个系统有 3 个节点(位移),将上述方程扩大成 3 阶方程,有

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

按矩阵相加原则将两式叠加,有

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

从式(2-9)中可以看出,等式右边刚度矩阵与式(2-8)完全相同。在上面的叠加单元刚度矩阵的过程中我们采用了矩阵扩大的办法。这对于只有几个单元的简单系统比较方便,但是系统中单元一多,相应扩大后的矩阵就相当大,扩大后的非零元素在矩阵的什么位置,概念上就不很清楚。现在一般采用按节点号将相应单元的刚度矩阵中元素 k_{ij} 写到总刚度矩阵中去的办法来叠加。

对于具有 n 个节点的弹簧系统,由于每个节点只有一个可能的位移方向(称为只有一个自由度),因此整个系统有 n 个自由

度,相应的总刚度矩阵应该是 $n \times n$ 阶的矩阵。设我们先写成一个空的 $n \times n$ 阶矩阵,将单元刚度矩阵按单元的节点号写到空矩阵中去。以上面两弹簧系统为例,总刚度矩阵应是 3×3 阶的。第 1 个单元的节点号为 1 和 2,则单元刚度矩阵

$$[\mathbf{K}^e]^1 = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix}$$

中的元素在总刚度矩阵中应在位置第 1、2 行的第 1、2 列

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将它写入这一位置。再将第二个单元(节点号为 2 和 3)的刚度矩阵叠加到总刚度矩阵的第 2、3 行的第 2、3 列元素上去,即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix}$$

就可构成与式(2-8)相同的形式。

三、方程求解(约束条件的引入)

从式(2-6)和式(2-8)可知,刚度矩阵是一个奇异阵,即它的行列式的值为零,矩阵的逆不存在。因此对应线性代数方程组式(2-5)和式(2-9)无定解。为什么会这样呢?这从物理概念上解释非常简单。对整个系统的位移 u_1, u_2 和 u_3 我们并没有加以限制,从而在任何外力的作用下系统会像刚体一样产生整体运动,即 $u_1 = u_2 = u_3 = u$,而且 u 没有定值,所以方程无定解。为使方程组有定解,只需给系统加上一定的约束(称为约束条件或边界条件)。例如节点 1 固定不动,有 $u_1 = 0$,则方程式(2-9)成为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

从而可得到定解。解上述方程可得到各个节点的位移,利用已求得的位移就可计算出每个弹簧所受力的。例如

弹簧 1-2 受力 $p_a = k_a \times (\text{弹簧 1-2 长度的变化量})$

从而 $p_a = k_a(u_2 - u_1)$

类似地 $p_b = k_b(u_3 - u_2)$

从上面的推导计算中,可以总结出用有限元方法求解弹簧系统受力问题的基本步骤:

(1) 形成每个单元的刚度矩阵 $[K^e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$;

(2) 由各个单元的刚度矩阵按节点号叠加成整个系统的刚度矩阵 $[K]$;

(3) 引入约束条件;

(4) 以节点位移为未知量求解线性代数方程组 $\{F\} = [K]\{\delta\}$;

(5) 用每个单元的力-位移关系求得单元力。

下面看一个例子。

[例] 图 2-8 所示的 3 弹簧系统, $k_1 = 1200\text{kN/m}$, $k_2 = 1800\text{kN/m}$, $k_3 = 1500\text{kN/m}$, 节点 1 和节点 4 固定, 在节点 2 和节点 3 处施加轴向力 10kN 和 20kN, 求节点 2、节点 3 的位移和节点 1、节点 4 处的作用力。

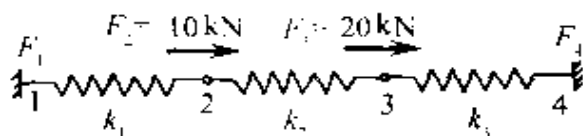


图 2-8 三弹簧受力系统

解: 由边界条件 $u_1 = u_4 = 0$, u_2, u_3 为未知位移; F_1 和 F_4 为未知反作用力, $F_2 = 10\text{kN}$, $F_3 = 20\text{kN}$ 。可列出每个单元的刚度矩阵与受力方程

对弹簧 1-2

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 & -1200 \\ -1200 & 1200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

对弹簧 2-3

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1800 & -1800 \\ -1800 & 1800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

对弹簧 3-4

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 & -1500 \\ -1500 & 1500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

叠加这些方程为总的结构矩阵方程

$$\begin{Bmatrix} F_1 = ? \\ F_2 = 10 \\ F_3 = 20 \\ F_4 = ? \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 & -1200 & 0 & 0 \\ -1200 & 1200 + 1800 & -1800 & 0 \\ 0 & -1800 & 1800 + 1500 & -1500 \\ 0 & 0 & -1500 & 1500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 = ? \\ u_3 = ? \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

划掉刚度矩阵中位移为零的行和列

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{1200} & \cancel{1200} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{-1200} & 3000 & -1800 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1800 & 3300 & -1500 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & -1500 & 1500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cancel{0} \\ u_2 \\ u_3 \\ \cancel{0} \end{Bmatrix}$$

方程式成为下列形式:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -1800 \\ -1800 & 3300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

解得 $u_2 = 0.0103603\text{m}$, $u_3 = 0.0117117\text{m}$ 。将 u_1 、 u_2 、 u_3 和 u_4 代入原方程可解得节点 1 和节点 4 处的作用力

$$F_1 = 1200u_1 - 1200u_2 + 0 \times u_3 + 0 \times u_4 = -1200u_2 = -12.432\text{kN}$$

$$F_4 = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 - 1500u_3 + 1500u_4 = -1500u_3 = -17.567\text{kN}$$

校核

$$F_1 + F_4 = -29.999 \approx -30\text{kN}$$

§ 2-3 杆件系统的有限元法

一、铰支杆系的有限元计算格式

上面求解弹簧系统的有限元方法可以直接用来求解受轴向力的杆件系统。对于均质等截面铰支杆来说,它的刚度值可直接由材料力学中力与变形的关系中获得

$$F_1 = \frac{AE}{L}u_1 \quad (2-10)$$

式中 F_1 ——杆所受的拉(压)力;

u_1 ——受力杆的伸长(或缩短)量。

比照式(2-1)可知 $k = \frac{AE}{L}$ 。所以均质等截面铰支杆的力-位移方程的式(2-4)形式可写为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

可见轴向连接且只受轴向力的杆件系统的计算问题与弹簧直线连接系统的计算完全一样,只要将单元刚度 k 改为 $\frac{AE}{L}$ 就可以了。

但是,实际的杆件系统中都是由互相成一定角度排列的杆件连接在一起的,在处理这种结构的刚度矩阵时,不能根据每个杆件的单元坐标系统(称为局部坐标系),而必须依据对所有杆件的单元都适用的整体坐标系统。如图 2-9 所示, \bar{x} , \bar{y} 对应局部坐标, x , y 对应整体坐标系统。相应地 \bar{u} , \bar{v} , \bar{F}_x , \bar{F}_y ; 对应局部坐标系的位移和作用力, u , v , F_x , F_y , 对应整体坐标系的位移和作用力。

值得注意的是:

(1) 图 2-9 中 φ 角是从整体坐标系 x 轴正向起算逆时针转到杆件方向。

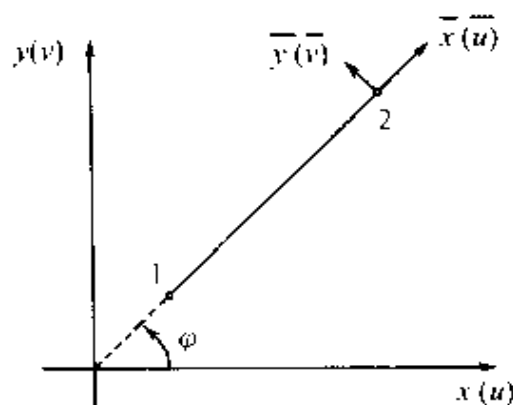


图 2-9 杆系单元的坐标系

(2) 铰支连接的杆只能承受轴向力 \overline{F}_x 和产生轴向位移 \overline{u} , 因此局部坐标系下 $\overline{F}_y = 0, \overline{v} = 0$, 之所以要写出 \overline{F}_y 和 \overline{v} 是因为轴向力和位移在整体坐标系中有两个分量, 为方便矩阵运算, 故将力和位移的矩阵用四阶方程表示,

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{x1} \\ \overline{F}_{y1} \\ \overline{F}_{x2} \\ \overline{F}_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

这里 $\overline{F}_{y1} = \overline{F}_{y2} = 0, \overline{v}_1 = \overline{v}_2 = 0$ 。由图 2-10 所示关系, 可将上式从局部坐标系转换到整体坐标系, 表示为

$$\begin{cases} \overline{F}_{x1} = F_{x1} \cos \varphi + F_{y1} \sin \varphi \\ \overline{F}_{y1} = -F_{x1} \sin \varphi + F_{y1} \cos \varphi \end{cases}$$

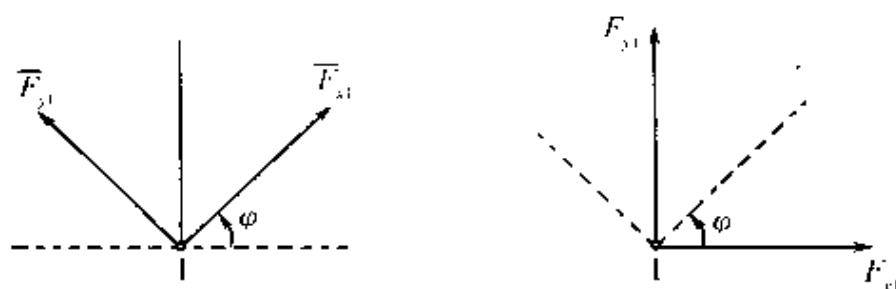


图 2-10 坐标系变换关系

类似地可写出节点 2 处的表达式。

令 $\mu = \sin \varphi$, $\lambda = \cos \varphi$, 则节点力的变换关系为

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2-13)$$

或

$$\{\bar{\mathbf{F}}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{F}\}$$

$[\mathbf{T}]$ 称为变换矩阵。从式(2-13)可看出 $[\mathbf{T}]$ 有一个非常有用的性质:

$$[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^T$$

与力的坐标变换式类似,斜杆在两节点的位移有同样的坐标变换式:

$$\{\bar{\boldsymbol{\delta}}\} = [\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\delta}\} \quad (2-14)$$

利用式(2-13)和式(2-14)我们就可以把式(2-12)表示成整体坐标系下的方程。进而求出整体坐标系下单元的刚度矩阵。

将式(2-13)代入式(2-12)有

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}^e]\{\bar{\boldsymbol{\delta}}\}$$

用 $[\mathbf{T}]^{-1}$ 左乘上式两边,并注意到 $[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^T$

$$[\mathbf{T}]^T[\mathbf{T}]\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}^e]\{\bar{\boldsymbol{\delta}}\}$$

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}^e]\{\bar{\boldsymbol{\delta}}\} \quad (2-15)$$

再将式(2-14)代入式(2-15),有

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}^e][\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\delta}\} = [\mathbf{K}^e]\{\boldsymbol{\delta}\}$$

由此可以看出,单元刚度矩阵 $[\mathbf{K}^e]$ 在整体坐标系下的表达式可以用局部坐标系下的表达式求出,即

$$[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}^e][\mathbf{T}] \quad (2-16)$$

利用矩阵相乘可写出

$$[K^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

从上式可以看出 $[K^e]$ 是对称阵,而且可以看成由四个子矩阵组成

$$[K^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} [k^e] & -[k^e] \\ -[k^e] & [k^e] \end{bmatrix}$$

其中 $[k^e] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$

这样整体坐标系下的单元刚度矩阵 $[K^e]$ 就与局部坐标系下的单元刚度矩阵式(2-6)有相同的形式,从而上一节所介绍的由单元刚度矩阵按节点号叠加成整体刚度矩阵的方法完全可以用于杆件结构的坐标系统中。

求解整体坐标系下结构受力与位移方程组

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

可得到各节点的位移 u_i, v_i ,从而可求出每根杆的受力。简单推导可得

$$p_{ij} = \left(\frac{AE}{L}\right) [\lambda, \mu]_{ij} \begin{Bmatrix} (u_j - u_i) \\ (v_j - v_i) \end{Bmatrix} \quad (2-18)$$

式中 i, j ——表示整体坐标系中任一杆单元的两个节点号。

[例] 图2-11所示三杆钢桁架,节点1、节点3处固定,节点2处受力 F_{x2}, F_{y2} ,所有杆件材料相同,弹性模量为 E ,截面积均为 A ,求各杆受力。

解:因为系统有3个节点,每个节点有两个自由度,所以载荷和位移向量各包含六项:

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

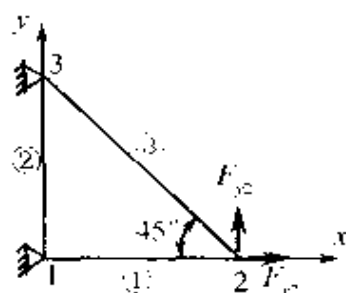


图 2-11 三杆受力桁架

典型的单元刚度矩阵已如式(2-17)表示,所要决定的只是各杆单元的 λ 和 μ 的值。这里应注意 φ 角是按逆时针从 x 轴正向转到单元 ij 方向的,因此有

		$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
单元 ①	$\varphi = 0^\circ$	$\lambda = 1$	$\mu = 0$
单元 ②	$\varphi = 90^\circ$	$\lambda = 0$	$\mu = 1$
单元 ③	$\varphi = 135^\circ$	$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$

将它们代入式(2-17),得到

单元 ①	$[\mathbf{K}_1^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
单元 ②	$[\mathbf{K}_2^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{单元 ③} \quad [K_3] = \frac{AE}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

整个系统有 6 个自由度, 整体刚度矩阵是 6×6 阶的。将上述单元刚度阵按节点号叠加到 6×6 阶矩阵中, 就得到整体刚度矩阵

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 + e_2 & e_1 + e_2 & e_1 & e_1 & e_2 & e_2 \\ e_1 + e_2 & e_1 + e_2 & e_1 & e_1 & e_2 & e_2 \\ e_1 & e_1 & e_1 + e_3 & e_1 + e_3 & e_3 & e_3 \\ e_1 & e_1 & e_1 + e_3 & e_1 + e_3 & e_3 & e_3 \\ e_2 & e_2 & e_3 & e_3 & e_2 + e_3 & e_2 + e_3 \\ e_2 & e_2 & e_3 & e_3 & e_2 + e_3 & e_2 + e_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

这里 e_1 表示单元①(具有节点 1, 2); e_2 表示单元②(具有节点 1, 3); e_3 表示单元③(具有节点 3, 2)。将实际值代入, 总刚度矩阵为

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

这时应检查 $[K]$ 是否对称,主对角线元素是否均为正。由于节点1,3约束,方程可写为

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

只有 u_2, v_2 需要求解,因此上述方程可简化为

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

改写为

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$$

由于 F_{x2}, F_{y2} 为已知,这样就求出了 u_2, v_2 。将 u_2, v_2 代入原方

程,则其他力可表示为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{x2} - F_{y2} \\ 0 \\ -F_{x2} \\ -F_{y2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

最后各杆所受到的力,由式(2-18)可求出

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{AE}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_3 - u_2) \\ (v_3 - v_2) \end{Bmatrix} = -\sqrt{2}F_{y2} \\ p_1 &= \frac{AE}{L} [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} (u_2 - u_1) \\ (v_2 - v_1) \end{Bmatrix} = F_{x2} + (1 + 2\sqrt{2})F_{y2} \\ p_2 &= \frac{AE}{L} [0 \quad 1] \begin{Bmatrix} (u_3 - u_1) \\ (v_3 - v_1) \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

如果 $F_{x2} = 10\text{kN}$, $F_{y2} = 0$, 则 $p_1 = 10\text{kN}$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ 。

二、刚阵存储与节点排列

从上面的分析可以看出,如果系统中铰支杆的数目较多,节点的数目就多,则刚度矩阵的阶次就高,对于有 n 根杆件的桁架,刚度矩阵的阶次就是 $2n \times 2n$ 阶。 n 较大时,求解这样的线性代数方程组必须用计算机。因此,计算机内就必须能容纳下系统的总体刚度矩阵。如果将 $2n \times 2n$ 个刚阵元素全部存入计算机中,对计算机往往是一个很大的负担,而且可能存不下。例如 1000 个节点的系统,就必须有 $2 \times 1000 \times 2 \times 1000 = 4000000$ 个存储单元来放刚阵元素。这对于许多计算机来说是很大的负担。而 1000 个

节点的系统在工程中是很平常的。因此,必须想办法压缩刚度矩阵的存储。

从单元刚阵叠加总体刚阵的过程中可知,对于节点号为 i, j 的单元 e , 其单元刚阵的 16 个元素在总体刚阵中的位置分别为第 $2i-1$ 行和第 $2i$ 行的 $2i-1, 2i, 2j-1, 2j$ 列, 以及 $2j-1$ 行和 $2j$ 行的 $2i-1, 2i, 2j-1, 2j$ 列元素, 如图 2-12 所示。最后的总体刚阵就成为以主对角线为中心的“带状”区域, 区域内有非零元素, 而在这一带状区域外则全是零。如果 i 与 j 的差较小, 则这一带状区域就较“窄”, 反之则较宽。这样的矩阵称为带状分布的稀疏矩阵。

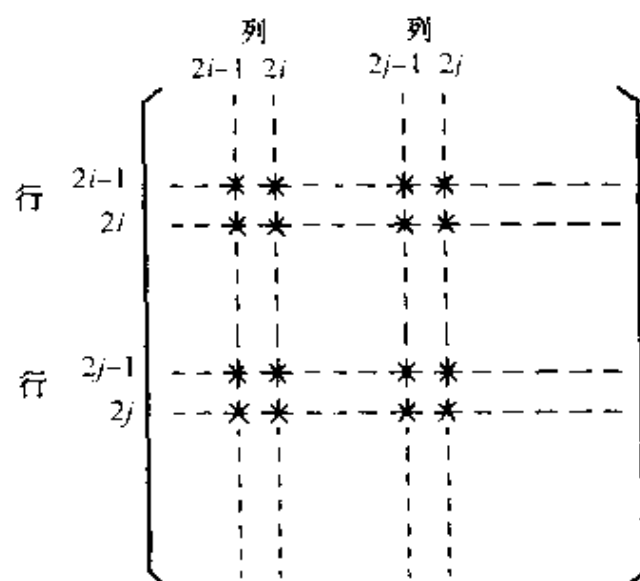


图 2-12 刚阵叠加时元素位置

另外,我们还知道刚度矩阵是对称矩阵,所有元素相对于主对角线对称。总起来刚度矩阵有三个重要的性质:

- (1) 对称性——关于主对角线对称;
- (2) 稀疏性——矩阵中有大量的零元素;
- (3) 带状分布——矩阵中非零元素在主对角线两侧呈带状分布。

利用这三个性质,我们可以实现刚度矩阵的压缩存储。

首先,由稀疏性我们可知矩阵中有大量零元素,可以不存入计算机中。其次,利用非零元素沿主对角线带状分布的性质可以只

存带状区域内的元素。如图 2-13 所示,图中水平实线表示有非零元素的位置,其余空白处均为零元素。有一种压缩存储量的办法是找出所有各行中非零元素所占最宽的一行,以离对角线最远的元素为基准画出一条平行于主对角线的带子,称为刚度矩阵的带宽。存储时只存带内元素,而且利用刚度矩阵的对称性只存一半,即只存主对角线以下(或以上)到带子边线内的元素。显然,这样可以大大减少存储量。许多通用的有限元程序就是采用这种存储刚度矩阵的方法的。这种存储方法称为等带宽存储。

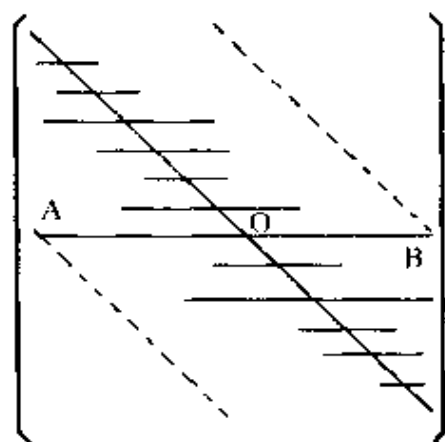


图 2-13 刚度矩阵元素的带状分布

图 2-13 中元素 A 到元素 B 之间的元素个数叫作刚度矩阵的最大带宽,元素 A 到元素 O 的元素个数叫作刚度矩阵的最大半带宽。从前面的讨论可知,减小最大半带宽可以减小等带宽存储的刚度矩阵存储量。而半带宽与单元节点号的编号差有关。因此,当我们对一个要求解的系统编节点号时就应有所讲究,使每个单元的节点编号差尽可能小。一般来讲,当一个结构较长时,应先顺其较窄的方向编号,然后向较长的方向运动。下面的例子可以说明不同编号方法对刚度矩阵存储量的影响。

[例] 对图 2-14(a)中结构分别采用图 2-14 中(b)图、(c)图两种编节点号方式以观察其刚度矩阵带宽。

对于图 2-14(b)、(c)编号方式的结构,总刚度矩阵的非零元素分布分别如图 2-15(a)、(b)所示。

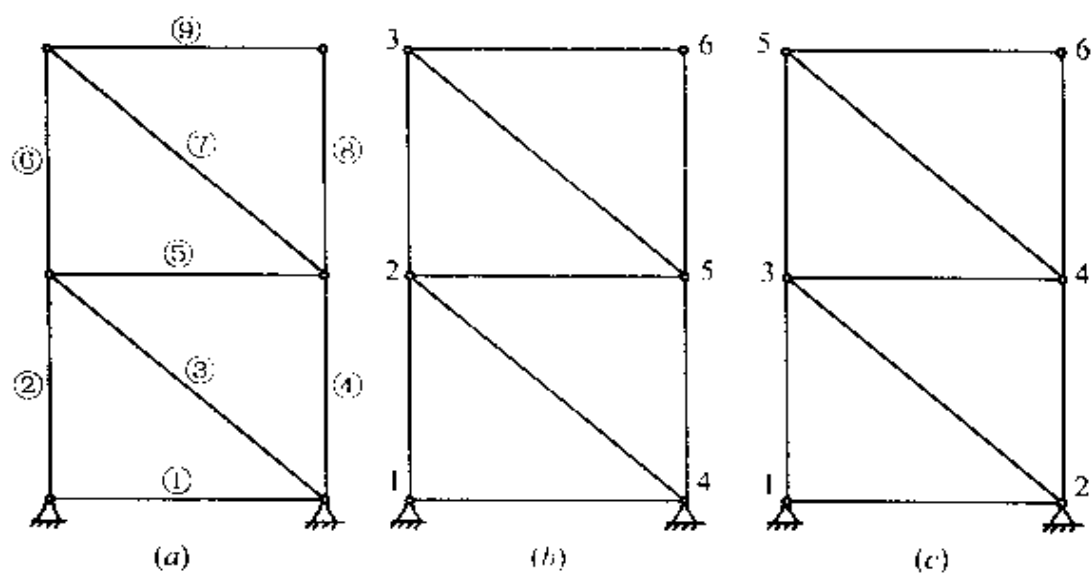


图 2-14 某桁架的不同编号方式

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4	u_5	v_5	u_6	v_6
①②	①②	②	②							①	①
①②	①②	②	②							①	①
②	②	⑤② ③⑥	⑤② ③⑥	⑥	⑥			⑤	⑤	③	③
②	②	⑤② ③⑥	⑤② ③⑥	⑥	⑥			⑤	⑤	③	③
		⑥	⑥	⑨⑦ ⑥	⑨⑦ ⑥	⑨	⑨	⑦	⑦		
		⑥	⑥	⑨⑦ ⑥	⑨⑦ ⑥	⑨	⑨	⑦	⑦		
				⑨	⑨	⑨	⑨	⑧	⑧		
				⑨	⑨	⑨	⑨	⑧	⑧		
		⑤	⑤	⑦	⑦	⑧	⑧	⑤⑦ ⑧④	⑤⑦ ⑧④	④	④
		⑤	⑤	⑦	⑦	⑧	⑧	⑤⑦ ⑧④	⑤⑦ ⑧④	④	④
①	①	③	③					④	④	① ③④	① ③④
①	①	③	③					④	④	① ③④	① ③④

(a)

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4	u_5	v_5	u_6	v_6
①②	①②	①	①	②	②						
①②	①②	①	①	②	②						
①	①	①④	①④			④	④				
		③	③	③	③						
①	①	①④	①④			④	④				
		③	③	③	③						
②	②			⑤②	⑤②	⑤	⑤				
		③	③	③⑥	③⑥			⑥	⑥		
②	②			⑤②	⑤②	⑤	⑤				
		③	③	③⑥	③⑥			⑥	⑥		
		④	④	⑤	⑤	⑤④	⑤④				
						⑦⑧	⑦⑧	⑦	⑦	⑧	⑧
		④	④	⑤	⑤	⑤④	⑤④				
						⑦⑧	⑦⑧	⑦	⑦	⑧	⑧
								⑨	⑨	⑨	⑨
				⑥	⑥	⑦	⑦	⑦⑥	⑦⑥		
				⑥	⑥			⑨	⑨	⑨	⑨
				⑥	⑥	⑦	⑦	⑦⑥	⑦⑥		
								⑨	⑨	⑨	⑨
						⑧	⑧			⑧	⑧
								⑨	⑨	⑨	⑨
						⑧	⑧			⑧	⑧

(b)

图 2-15 不同编号方式的刚度矩阵元素排列

一般来讲,刚度矩阵的最大半带宽=节点自由度数 \times (单元中节点最大编号差+1)。

上例中按图 2-14(b)编号方式,最大半带宽为

$$SB_{\max} = 2 \times (6 - 1 + 1) = 12$$

按图 2-14(c)编号方式,最大半带宽为

$$SB_{\max} = 2 \times (2 + 1) = 6$$

所以,如果按等带宽存储方法,(b)图编号方式必须满阵存储,总存储量(利用对称性存一半)为 $\frac{1}{2}(12 \times 12) + \frac{12}{2} = 78$,而(c)

图编号方式只有 57。存储量减少了 27%。当节点数目增多,结构较复杂时,其减少量将更为可观。大型问题的等带宽存储量只有满阵存储的 10% ~ 20%。

小结:

(1) 本章从弹簧系统的分析出发,直接用最简单的材料力学原理推导出了铰支杆系(桁架)的有限元计算格式。这种直接从系统物理概念和力学原理推导有限元计算格式的方法叫作直接刚度法。

(2) 单元的刚度矩阵和系统的总体刚度矩阵是对称矩阵,且主对角线上元素均为正值。总体刚度矩阵是带状分布的稀疏矩阵,在未引入边界条件(约束)前是奇异的。

(3) 总体刚度矩阵可以由单元刚度矩阵按节点编号叠加而成。各单元刚度矩阵元素对总体刚度矩阵某元素的叠加量称为该单元刚度矩阵对总体刚度矩阵的“贡献”。

(4) 总体刚度矩阵在计算机内的存储方式可按等带宽存储,并利用对称性只存主对角线以下(或以上)带宽内的元素。

(5) 存储量的大小与最大半带宽有关,而最大半带宽由单元节点编号差所决定,因此,对系统编码时应注意尽量减小单元节点的最大编号差。

第三章 刚架结构的有限元法

§ 3-1 直接刚度法推导梁单元有限元格式

对于两端刚性连接的杆件我们称为梁,而由梁单元组成的系统称为刚架,以此区别于由铰支杆件组成的桁架。所有杆件轴线处于同一平面的系统称为平面桁架或平面刚架系统。梁的受力和变形如图 3-1 所示。梁 1,2 长为 L ,受弯矩 M_{z1}, M_{z2} 和力 F_{y1}, F_{y2} 作用,产生 y 向位移 w_1 和 w_2 以及 z 向(垂直于纸面向内)转角 θ_{z1} 和 θ_{z2} 。设梁为均质等截面直梁,弯曲刚度为 EI 。

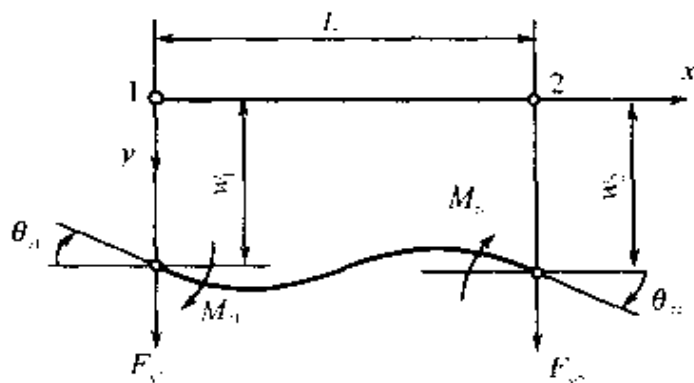


图 3-1 梁单元的受力和变形

由材料力学或结构力学中梁所受弯矩与变形之间的关系,可写出

$$\begin{cases} M_{z1} = \left(\frac{6EI}{L^2}\right)w_1 + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_{z1} - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)w_2 + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_{z2} \\ M_{z2} = \left(\frac{6EI}{L^2}\right)w_1 + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_{z1} - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)w_2 + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_{z2} \end{cases} \quad (3-1)$$

由静力平衡可写出

$$\begin{aligned}
 F_{y1} = -F_{y2} &= \left(\frac{M_{z1} + M_{z2}}{L} \right) = \left(\frac{12EI}{L^3} \right) w_1 + \left(\frac{6EI}{L^2} \right) \theta_{z1} \\
 &\quad - \left(\frac{12EI}{L^3} \right) w_2 + \left(\frac{6EI}{L^2} \right) \theta_{z2}
 \end{aligned} \quad (3-2)$$

将式(3-1)、式(3-2)写成矩阵形式,有

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \\ w_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

或

$$[F^e] = [\bar{K}^e] \{\bar{\delta}^e\}$$

$[\bar{K}^e]$ 即为局部坐标系下梁单元刚度矩阵。

实际工程中梁也可能是任意方向排列的,因此有必要推导与某一整体坐标系成一定角度排列的梁单元刚度矩阵。与杆单元类似,位移 w 在整体坐标系下将会有两个方向的分量 u 和 v ,力 F 也有两个分量 F_x 和 F_y ,而弯矩和转角与坐标旋转无关。这样每个节点就有 3 个位移自由度 u, v 和 θ_z ,从而整体坐标下梁单元的单元刚度为 6×6 阶矩阵。局部坐标到整体坐标的变换矩阵仿照杆件单元的变换矩阵可写为

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \begin{aligned} \lambda &= \cos\varphi \\ \mu &= \sin\varphi \end{aligned} \quad (3-4)$$

与杆单元一样,单元刚度矩阵在整体坐标系下的形式为

$$[K^e] = [K]^T [\bar{K}^e] [T] \quad (3-5)$$

有了单元刚度矩阵后,就可以按单元节点号叠加系统的总体刚度,然后引入边界条件,求解线性代数方程组 $[F] = [K] \{\delta\}$,即可得到系统各节点处的位移 u, v 和 θ_z ,进而求出每根梁所受到的

力和力矩。

可见直接刚度法推导有限元列式,只要知道了系统中单元受力(力矩)与位移之间的关系式(式(3-1)和式(3-2)),或者说知道了单元中位移的变化模式,就可以直接写出单元刚度矩阵。这就是直接刚度法的优点。但是如果不知道特定单元的力-位移关系式(杆单元、梁单元或其他单元)怎么办呢?下面介绍一种更一般的,有限元法求解力学问题经常用到的方法。

§ 3-2 位移函数——虚功原理推导梁单元有限元计算格式

我们分七步来表述这一推导过程:

第一步:写出单元的位移、节点力向量

为此应先建立合适的坐标系。为简单计,我们仍采用图 3-1 所示局部坐标系来推导(因为局部坐标系到整体坐标系的变换已如上一节所述)。如图 3-1 所示,节点 1 的位移向量和力向量可写成

$$\{\delta_1^e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix}, \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix}$$

对节点 2 也是类似的。从而梁 1-2 的节点位移和节点力向量为

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \\ w_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}, \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}$$

因为这些向量每个包含有四项,因此单元刚度矩阵 $[K^e]$ 应该是 4×4 阶的。

第二步:选择适当的位移函数

由于我们不知道梁单元上各点的位移是如何随载荷变化的,

因此想选择一个简单函数,用节点上的位移来表示单元上各点的位移。一般情况下可选择多项式来作为这一位移函数 $\{\delta(x,y)\}$ 。这一多项式的系数个数应与单元自由度数相同,即对节点的每一个自由度应含有一个未知系数,以使各点的位移可以用节点处的位移所唯一确定。

对于梁单元,设位移函数写成

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (3-6)$$

因为整个单元具有四个自由度 $(w_1, \theta_{z1}, w_2, \theta_{z2})$,而且只与 x 坐标有关,所以可设

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (3-7)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 为待定系数。又由于 $\theta_z = \frac{dw}{dx}$,因此有

$$\theta_z = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (3-8)$$

将式(3-7)和式(3-8)表示的位移函数写成矩阵形式

$$\begin{aligned} \{\delta(x,y)\} &= \begin{Bmatrix} w \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \\ &= [f(x,y)] \{\alpha\} \end{aligned} \quad (3-9)$$

第三步:求单元中任一点的位移与节点位移的关系

采用位移函数的目的是想用节点位移来表示单元中任一点的位移。如果我们能用节点位移值来表示式(3-7)中的待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 ,我们的目的就达到了。

参看图3-1,梁单元两个节点的坐标是 $x=0$ 和 $x=L$,将其代入式(3-7)和式(3-8),有

在节点1: $x=0$ 有 $w_1 = \alpha_1$;

$$\theta_{z1} = \alpha_2;$$

在节点2: $x=L$ 有 $w_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3$;

$$\theta_{z2} = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2$$

将这些结果写成矩阵形式,有

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \\ w_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha\} \quad (3-10)$$

求解方程式(3-10)得

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \\ w_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3-11)$$

从而单元上任一点的位移 $\{\delta(x, y)\}$ 可用节点位移表示为

$$\{\delta(x, y)\} = \{f(x, y)\} \{\alpha\} = \{f(x, y)\} [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3-12)$$

第四步:求单元应变—单元位移—节点位移间的关系

一般来讲,单元内任一点的应变 $\{\epsilon(x, y)\}$ 可以通过对该点处的位移 $\{\delta(x, y)\}$ 微分得到。对梁单元来说有下列关系式

$$\{\epsilon(x, y)\} = \frac{d^2 w}{dx^2} = -2\alpha_3 - 6\alpha_4 x \quad (3-13)$$

写成矩阵形式有

$$\{\epsilon(x, y)\} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [C] \{\alpha\} \quad (3-14)$$

将式(3-11) $\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\}$ 代入,有

$$\{\epsilon(x, y)\} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \\ w_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

将等式右端前两个矩阵相乘,有

$$\{\epsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \\ w_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = [B] \{\delta^e\} \quad (3-15)$$

其中矩阵 $[B]$ 一般称为几何矩阵。

第五步:求应力-应变-节点位移间的关系

一般情况下应力-应变关系可写为

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\epsilon(x, y)\}$$

其中 $[D]$ 为弹性矩阵,对于梁的弯曲问题,由材料力学知识可知,应力-应变相当于内力矩与曲率关系,近似表达式为

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

其中 EI 为梁的弯曲刚度。这时弹性矩阵是 1×1 阶。将梁单元应力-应变关系写成矩阵展开式,有

$$\{\sigma(x, y)\} = [EI] \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{z1} \\ w_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = [D][B] \{\delta^e\} \quad (3-16)$$

第六步:节点力与节点位移关系

为求出单元节点力与节点位移之间的关系要用到虚功原理。虚功原理可简单描述为：系统保持平衡的充要条件是外力在虚位移上所做的功等于内力在相应虚位上所做的功。

一般情况下，系统各节点虚位移向量 $\{\delta^e\}$ 可写为

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^e\} \end{Bmatrix}$$

节点外力在虚位移上所做的虚功为：

$$W_{\text{ext}} = \{\delta_1^e\} \{F_1\} + \{\delta_2^e\} \{F_2\} + \cdots + \{\delta_n^e\} \{F_n\} = \{\delta^e\} \{F^e\}$$

而如果任一点处虚位移引起的虚应变为 $\{\epsilon^*(x, y)\}$ ，且这里的应力为 $\{\sigma(x, y)\}$ ，则内应力所做的功（单位体积上的应变能）为

$$W_{\text{int}} = \{\epsilon^*(x, y)\} \{\sigma(x, y)\}$$

由式(3-15) $\{\epsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\}$ ，对虚位移引起的虚应变同样成立，因此

$$\{\epsilon^*(x, y)\} = [B] \{\delta^e\}$$

又由式(3-16) $\{\sigma(x, y)\} = [D][B] \{\delta^e\}$ ，按虚功原理，整个体积上功的平衡有

$$\begin{aligned} \int_v W_{\text{int}} d(\text{vol}) &= \int_v [B]^T \{\delta^e\} [D][B] \{\delta^e\} d(\text{vol}) \\ &= W_{\text{ext}} = \{\delta^e\} \{F^e\} \end{aligned}$$

节点虚位移 $\{\delta^e\}$ 与积分无关，可在等式两边消去， $\{\delta^e\}$ 为节点位移，也与积分无关，可提到积分符号以外。因此上式可写为

$$\{F^e\} = \left[\int_v [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right] \{\delta^e\} \quad (3-17)$$

对照上一章推导的有限元计算格式，可知式(3-17)所写节点力与节点的位移关系式可表示为

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\}$$

其中

$$[K^e] = \int_v [B]^T [D] [B] d(\text{vol})$$

即为单元刚度矩阵的表达式。由于推导过程中我们未对单元形式作任何限定,这一结果是由虚功原理得到的一般表达式。因此它可以适用于其他单元形式。

具体到梁单元,积分区域是一维的,且从 $x=0 \sim L$, 因此

$$\{F^e\} = \left[\int_0^L [B]^T [D] [B] dx \right] \{\delta^e\}$$

将第四步中得到的梁单元几何矩阵 $[B]$ 代入,可求出梁单元的刚度矩阵。

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} [EI] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} dx \\ &= [EI] \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} & \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \\ \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & \frac{16}{L^2} - \frac{48x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \\ -\frac{36}{L^4} + \frac{144x}{L^5} - \frac{144x^2}{L^6} & -\frac{24}{L^3} + \frac{84x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} \\ \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & \frac{8}{L^2} - \frac{36x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \end{bmatrix} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& -\frac{36}{L^4} + \frac{144x}{L^5} - \frac{144x^2}{L^6} & \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \\
& -\frac{24}{L^3} + \frac{84x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} & \frac{8}{L^2} - \frac{36x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \\
& \frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} & -\frac{12}{L^3} + \frac{60x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} \\
& -\frac{12}{L^3} + \frac{60x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} & \frac{4}{L^2} - \frac{24x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4}
\end{aligned} \right\} dx \\
& = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3-18)
\end{aligned}$$

可见式(3-18)与式(3-3)中 $[K^e]$ 是一样的。

第七步:节点位移与应力的关系

实际上这一关系在第五步中已经导出,即

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\} = [H]\{\delta^e\} \quad (3-19)$$

对梁单元来说

$$[H] = EI \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

若考虑节点处的应力,即 $x=0, x=L$, 则

$$[H^e] = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 4L & -6 & 2L \\ -6 & -2L & 6 & -4L \end{bmatrix}$$

这样,我们利用虚功原理得到了与直接刚度法推导一样的结果。细心的读者可以发现,图3-1所示的梁单元没有考虑轴向力。事实上轴向力 F_x 与轴向变形 u 的关系与杆单元是一样的,即

$$F_x = \frac{EA}{L}u$$

将它与式(3-1)和式(3-2)写在一起就构成梁单元受到轴向力、径向力和弯矩条件下载荷与变形之间的关系式:

$$F_{x1} = \frac{EA}{L}u_1$$

$$F_{y1} = \left(\frac{12EI}{L^3}\right)v_1 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_{z1} - \left(\frac{12EI}{L^3}\right)v_2 + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_{z2}$$

$$M_{z1} = \left(\frac{6EI}{L^2}\right)v_1 + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_{z1} - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)v_2 + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_{z2}$$

$$F_{x2} = -\frac{EA}{L}u_2$$

$$F_{y2} = -\left(\frac{12EI}{L^3}\right)v_1 - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_{z1} + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)v_2 - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_{z2}$$

$$M_{z2} = \left(\frac{6EI}{L^2}\right)v_1 + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta_{z1} - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)v_2 + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta_{z2}$$

将上面 6 个式子写成矩阵形式,有

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (3-20)$$

式(3-20)即为局部坐标下具有 6 个自由度的梁单元方程,式右端 6×6 阶矩阵及其系数即为局部坐标下的 6 自由度平面梁单元刚度矩阵。通过设置位移插值函数,利用虚功原理,按照上面的步骤可以推导出同样的方程。

[例]:图 3-2 所示刚架由两根等截面工字钢构成,两端固支,系统所受载荷如图 3-2 所示。梁截面积 $A=0.006\text{m}^2$,截面惯性距 $I=2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$,每根梁长 $L=5\text{m}$ 。

求:每根梁所受内力。

解:(1)建立坐标系,给单元、节点编号,写出位移、载荷列向量

建立整体坐标系如图 3-3 所示,系统分为 2 个单元,3 个节点。单元①节点号为 1,2;单元②节点号为 2,3。

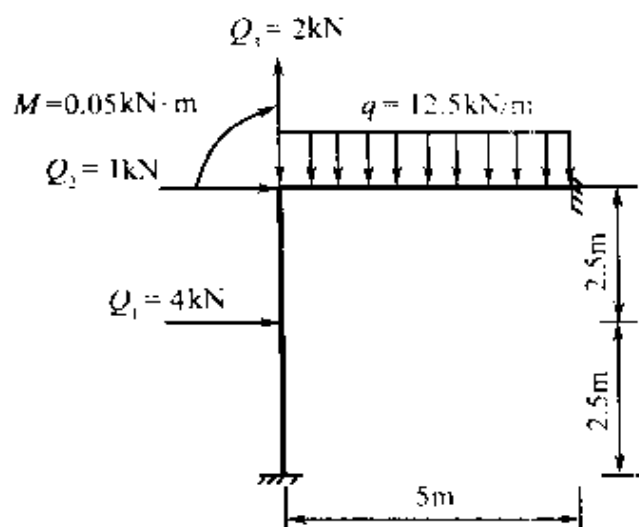


图 3-2 例题刚架系统示意图

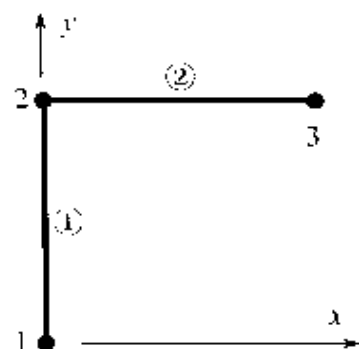


图 3-3 整体坐标及单元、节点编号

由于每个节点有 3 个自由度, u, v, θ_z , 系统载荷与位移向量各包含 9 项:

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$$

(2) 求单元刚度矩阵

由于梁单元在整体坐标系下的单元刚度矩阵为 $[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{T}]^T \cdot [\bar{\mathbf{K}}^e] [\mathbf{T}]$, 而 $[\bar{\mathbf{K}}^e]$ 为局部坐标系下的单元刚度矩阵, $[\mathbf{T}]$ 为式(3-4)表示的坐标变换矩阵。我们只要写出各单元的 $[\bar{\mathbf{K}}^e]$ 和 $[\mathbf{T}]$, 就

可得到 $[\bar{\mathbf{K}}^e]$ 。取各单元局部坐标 \bar{x} 向为从节点号较小的点到节点号较大的点, \bar{y} 向与 \bar{x} 成右手系(图3-4,图3-5)。利用式(3-20)有

$$[\bar{\mathbf{K}}^{e1}] = 10^3 \times \begin{bmatrix} 252 & 0 & 0 & -252 & 0 & 0 \\ 0 & 1.385 & 3.462 & 0 & -1.385 & 3.462 \\ 0 & 3.462 & 11.542 & 0 & -3.462 & 5.771 \\ -252 & 0 & 0 & 252 & 0 & 0 \\ 0 & -1.385 & -3.462 & 0 & 1.385 & -3.462 \\ 0 & 3.462 & 5.771 & 0 & -3.462 & 11.542 \end{bmatrix}$$

由于单元②与单元①尺寸和相关参数完全相同,故 $[\bar{\mathbf{K}}^{e2}] = [\bar{\mathbf{K}}^{e1}]$ 。

利用式(3-4)写出2个单元的坐标变换矩阵:

$$[\mathbf{T}^{e1}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}^{e2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而,总体坐标下2个单元的刚度矩阵为

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}^{e1}] &= [\mathbf{T}^{e1}]^T [\bar{\mathbf{K}}^{e1}] [\mathbf{T}^{e1}] \\ &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.385 & 0 & -3.462 & -1.385 & 0 & -3.462 \\ 0 & 252 & 0 & 0 & -252 & 0 \\ -3.462 & 0 & 11.564 & 3.462 & 0 & 5.771 \\ -1.385 & 0 & -3.462 & 1.385 & 0 & 3.462 \\ 0 & -252 & 0 & 0 & 252 & 0 \\ -3.462 & 0 & 5.771 & 3.462 & 0 & 11.564 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{K}^{e2}] = [\mathbf{T}^{e2}]^T [\bar{\mathbf{K}}^{e2}] [\mathbf{T}^{e2}] = [\bar{\mathbf{K}}^{e2}]$$

(3) 求系统总体刚度矩阵

按节点号叠加各单元刚度矩阵为总体刚度矩阵:

$$\begin{aligned}
 [K^e] &= \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e & k_{35}^e & k_{36}^e & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e + k_{11}^{e2} & k_{45}^e + k_{12}^{e2} & k_{46}^e + k_{13}^{e2} & k_{14}^{e2} & k_{15}^{e2} & k_{16}^{e2} \\ k_{51}^e & k_{52}^e & k_{53}^e & k_{54}^e + k_{21}^{e2} & k_{55}^e + k_{22}^{e2} & k_{56}^e + k_{23}^{e2} & k_{24}^{e2} & k_{25}^{e2} & k_{26}^{e2} \\ k_{61}^e & k_{62}^e & k_{63}^e & k_{64}^e + k_{31}^{e2} & k_{65}^e + k_{32}^{e2} & k_{66}^e + k_{33}^{e2} & k_{34}^{e2} & k_{35}^{e2} & k_{36}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & k_{41}^{e2} & k_{42}^{e2} & k_{43}^{e2} & k_{44}^{e2} & k_{45}^{e2} & k_{46}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & k_{51}^{e2} & k_{52}^{e2} & k_{53}^{e2} & k_{54}^{e2} & k_{55}^{e2} & k_{56}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & k_{61}^{e2} & k_{62}^{e2} & k_{63}^{e2} & k_{64}^{e2} & k_{65}^{e2} & k_{66}^{e2} \end{bmatrix} \\
 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.385 & 0 & -3.462 & -1.385 & 0 \\ 0 & 252 & 0 & 0 & -252 \\ -3.462 & 0 & 11.541 & 3.462 & 0 \\ -1.385 & 0 & 3.462 & 253.385 & 0 \\ 0 & -252 & 0 & 0 & 253.385 \\ -3.462 & 0 & 5.771 & 3.462 & 3.462 \\ 0 & 0 & 0 & -252 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.385 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.462 \\ -3.462 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.771 & 0 & 0 & 0 \\ 3.462 & -252 & 0 & 0 \\ 3.462 & 0 & -1.385 & -3.462 \\ 23.083 & 0 & -3.462 & 5.771 \\ 0 & 252 & 0 & 0 \\ -3.462 & 0 & 1.385 & -3.462 \\ 5.771 & 0 & -3.462 & 11.542 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(4) 求节点载荷向量

我们分两步求节点载荷向量。第一步,转换单元上非节点处载荷为节点载荷;第二步,与原作用在节点的载荷叠加。

对单元①,非节点载荷为单元中间作用的集中力 $Q_1 = 4\text{kN}$ 。由材料力学知识可知,将其等效到固支两端点的作用力和力矩为(图 3-4)

$$F_{x1}^- = 0, \quad F_{x2}^- = 0, \quad F_{y1}^- = -2.0\text{kN}, \quad F_{y2}^- = -2.0\text{kN}$$

$$M_{z1}^- = -2.5\text{kN} \cdot \text{m}, \quad M_{z2}^- = 2.5\text{kN} \cdot \text{m}$$

从而

$$\{\bar{\mathbf{F}}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.0 \\ -2.5 \\ 0 \\ -2.0 \\ 2.5 \end{Bmatrix}$$

对单元②,非节点载荷为单元上作用的分布载荷 $q = 2.5\text{kN/m}$ 。同样由材料力学知识可知,等效到固支两端的作用力和力矩为(图 3-5)

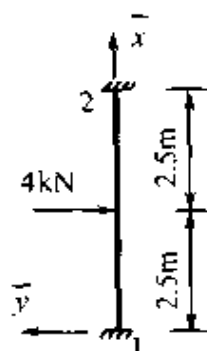


图 3-4 单元 1 非节点载荷

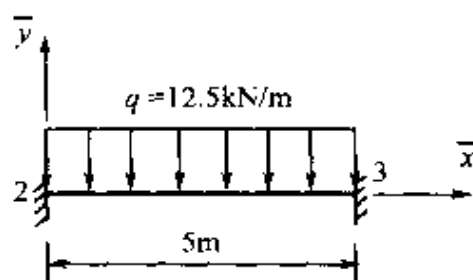


图 3-5 单元 2 非节点载荷

$$F_{x2}^- = 0, \quad F_{x3}^- = 0, \quad F_{y2}^- = -6.25\text{kN}, \quad F_{y3}^- = -6.25\text{kN},$$

$$M_{z2}^- = -5.208\text{kN} \cdot \text{m}, \quad M_{z3}^- = 5.208\text{kN} \cdot \text{m}$$

从而

$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6.25 \\ -5.208 \\ 0 \\ -6.25 \\ 5.208 \end{Bmatrix}$$

$\{\bar{F}_1\}, \{\bar{F}_2\}$ 只是局部坐标系下的单元节点载荷, 将其转换到整体坐标系下有

$$\{F_1\} = \{T^1\} \{\bar{F}_1\} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 0 \\ -2.5 \\ 2.0 \\ 0 \\ 2.5 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_2\} = \{T^2\} \{\bar{F}_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6.25 \\ -5.208 \\ 0 \\ -6.25 \\ 5.208 \end{Bmatrix}$$

按节点号叠加 $\{F_1\}, \{F_2\}$ 有

$$\{F\} = \{F_1\} + \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 0 \\ -2.5 \\ 2.0 \\ 0 \\ 2.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6.25 \\ -5.208 \\ 0 \\ -6.25 \\ 5.208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 0 \\ -2.5 \\ 2.0 \\ -6.25 \\ -2.708 \\ 0 \\ -6.25 \\ 5.208 \end{Bmatrix}$$

将非节点载荷转换为节点载荷后,就可与原作用于节点上的载荷 $\{P_0\}$ 叠加构成系统总载荷向量。参考图 3-2,有

$$\{P\} = \{P_0\} + \{F\} = \begin{Bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ M_{z1} \\ 1.0 \\ 2.0 \\ -0.05 \\ p_{x3} \\ p_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2.0 \\ 0 \\ -2.5 \\ 2.0 \\ -6.25 \\ -2.708 \\ 0 \\ -6.25 \\ 5.208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0 + p_{x1} \\ p_{y1} \\ -2.5 + M_{z1} \\ 3.0 \\ -4.25 \\ -2.758 \\ p_{x3} \\ -6.25 + p_{y3} \\ 5.208 + M_{z3} \end{Bmatrix}$$

(5) 引入约束条件 $u_1 = v_1 = \theta_{z1} = 0, u_3 = v_3 = \theta_{z3} = 0$, 构成系统总体方程 $[K]\{\delta\} = \{P\}$, 即

$$10^3 \times \begin{bmatrix} 1.385 & 0 & -3.462 & -1.385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 252 & 0 & 0 & -252 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.462 & 0 & 11.541 & 3.462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.385 & 0 & 3.462 & 253.385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -252 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.462 & 0 & 5.771 & 3.462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.462 & 0 & 0 & -3.462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -252 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.771 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.462 & -252 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 253.385 & 3.462 & 0 & -1.385 & 3.462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.462 & 23.083 & 0 & -3.462 & 5.771 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 252 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.385 & -3.462 & 0 & -1.385 & -3.462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.462 & 5.771 & 0 & -3.462 & 11.542 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0 + p_{x1} \\ p_{y1} \\ -2.5 + M_{z1} \\ 3.0 \\ -4.25 \\ -2.785 \\ p_{x3} \\ -6.25 + p_{y3} \\ 5.208 + M_{z3} \end{Bmatrix}$$

(6) 解方程组

划去位移为零的行和相应的列,上式成为

$$10^3 \times \begin{bmatrix} 253.385 & 0 & 3.462 \\ 0 & 253.285 & 3.462 \\ 3.462 & 3.462 & 23.083 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.0 \\ -4.25 \\ -2.758 \end{Bmatrix}$$

解得

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01347(\text{m}) \\ -0.01514(\text{m}) \\ -0.1192(\text{rad}) \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

(7) 求等效节点作用力

将解得的 u_2, v_2, θ_{z2} 代回到系统方程 $[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\mathbf{P}\}$ 中,可解得

$$\{\mathbf{P}\} = \begin{Bmatrix} 0.394 \\ 3.815 \\ -0.641 \\ 3.000 \\ -4.25 \\ -2.758 \\ -3.390 \\ -0.392 \\ -0.740 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0 + p_{x1} \\ p_{y1} \\ -2.5 + M_{z1} \\ 3.000 \\ -4.25 \\ -2.758 \\ p_{x3} \\ -6.25 + p_{y3} \\ 5.208 + M_{z3} \end{Bmatrix}$$

由上式可解出

$$p_{x1} = -1.606\text{kN}, p_{y1} = 3.815\text{kN}, M_{z1} = 1.859\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$p_{x3} = 3.390\text{kN}, p_{y3} = 5.858\text{kN}, M_{z3} = -5.9948\text{kN} \cdot \text{m}$$

得到了节点作用力后,利用材料力学知识不难求出各杆所受内力和弯矩。

小结:

(1) 本章从设置位移函数(也称位移插值函数)出发,利用虚功原理导出了局部坐标下梁单元的有限元计算格式。利用 §3-1 中坐标变换矩阵 $[T]$ 就可以将它转换到整体坐标系下,然后将各单元刚阵按节点号叠加即可得刚架结构的总体刚度矩阵。

(2) 本章 §3-2 中所使用的方法不仅可以用来作为梁单元计算格式推导,而且可以应用到其他单元形式的有限元计算格式的推导中。这一点在第四章中可以看到。

(3) 用位移插值函数和虚功原理推导出的梁单元刚度矩阵式(3-18)与用直接刚度法推导所得结果一样,在这里只是一个特殊情况。因我们所假设的位移插值函数形式与梁单元的实际变形曲线形状恰好一致,故有此结果。而一般情况下,位移插值函数不一定能精确表示实际单元的变形情况,只是近似地用所选择的位移插值函数来模拟单元内各点的变形情况。

第四章 平面问题的有限元法

§ 4-1 弹性力学基本知识

材料力学主要研究杆、梁、柱,结构力学主要研究杆系(或梁系),而弹性力学主要研究实体和板的受力与变形。工程中的许多构件是由实体或板构成,而且有限元法所能解决的问题有许多是属于弹性力学范畴的,因此要解决工程问题和学好有限元法必须学习弹性力学知识。

弹性力学假设所研究的物体是连续的、完全弹性的、均匀的、各向同性的、微小变形的和无初应力的。在这六条假设的基础上研究受力物体一点上的应力、应变、变形和平衡关系。

一、弹性力学平衡方程

材料力学中一点的平面应力状态有 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} , 而弹性力学三维问题中一点的应力有 6 个分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$, 前 3 个为正应力, 后 3 个为剪应力, 它们都是 x, y, z 的函数。

设 A 点 (x, y, z) 处的应力为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$, 则邻近一点 B $(x + dx, y + dy, z + dz)$ 处的应力可近似写为(见图 4-1)

$$\text{在前微面上: } \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$

$$\text{在右微面上: } \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy, \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$$

$$\text{在上微面上: } \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz, \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz, \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$$

其中 $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$, 即剪应力互等定理成

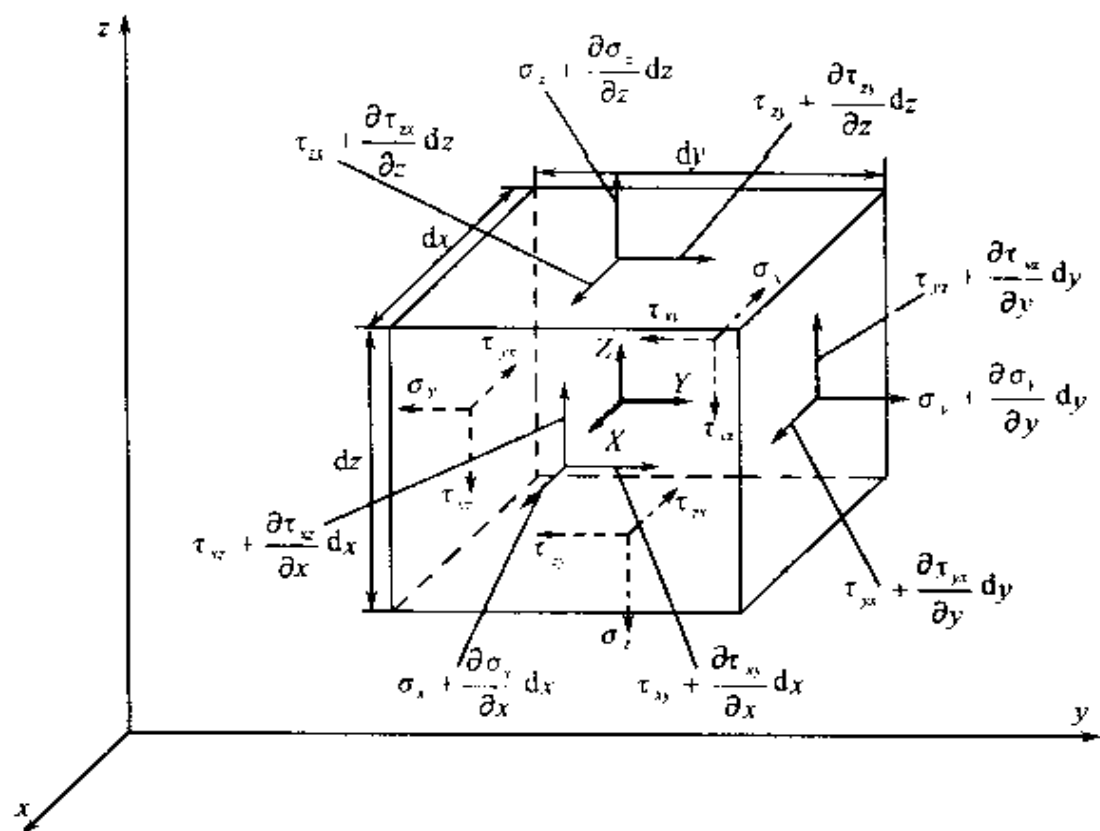


图 4-1 微元六面体应力

立。图 4-1 中微元中心作用力 X 、 Y 、 Z 表示微元所受体积力分量。

考虑微元体的平衡条件,在 X 方向有 $\sum F_x = 0$, 则

$$\begin{aligned} & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{化简后得} & \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \text{同理由 } \sum F_y = 0 \text{ 得} & \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \text{由 } \sum F_z = 0 \text{ 得} & \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

这一组三个方程称为弹性力学平衡方程。

二、几何方程

几何方程是表述弹性体内一点的应变与位移之间关系的方程式。材料力学中一点的平面应变有 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$, 而弹性力学三维问题中一点的正应变有 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$; 剪应变有 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 共 6 个分量。弹性力学中一点的位移有 3 个分量 u, v, w , 分别对应一点在 x, y, z 方向的位移。

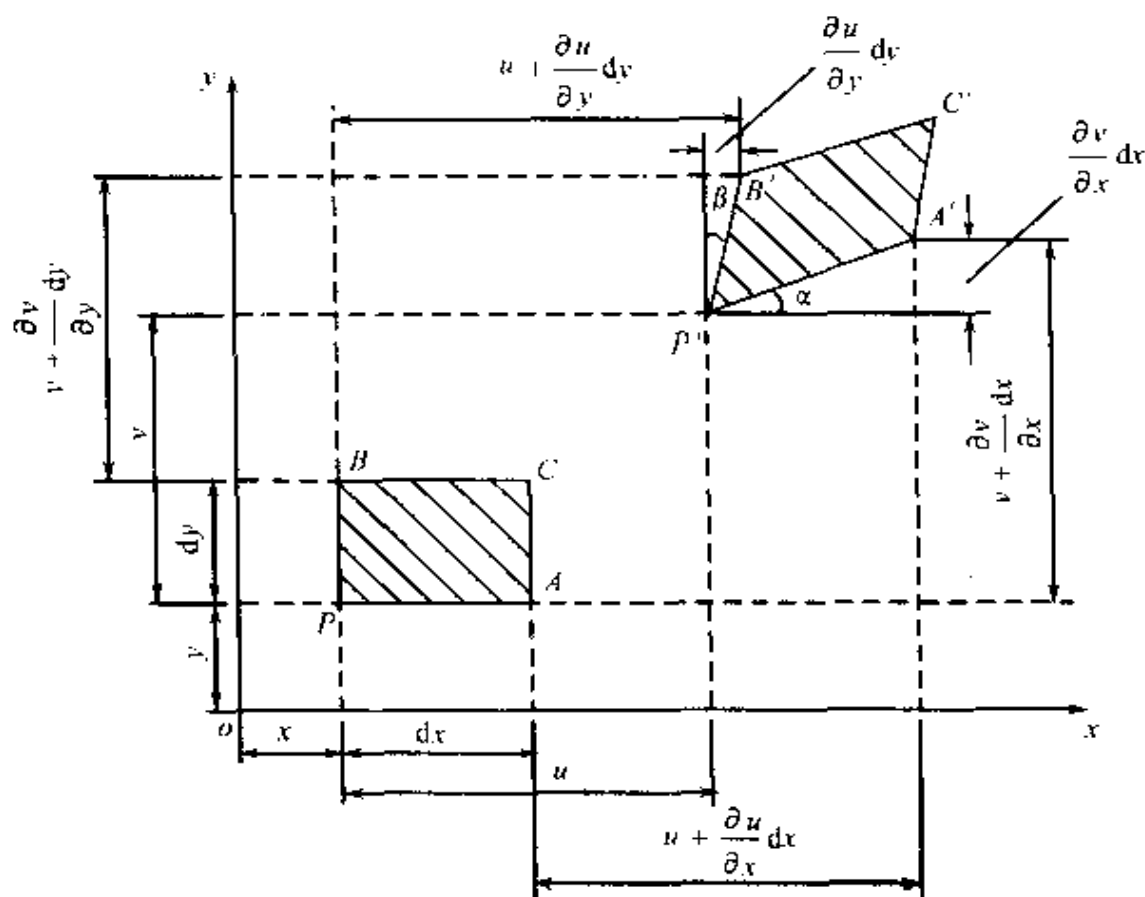


图 4-2 变形微元在 xoy 平面上的投影

弹性力学中正应变定义为 $\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$, $\epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$, $\epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$ 。即微元体在某方向的长度变化量比上原长度即为该方向的正应变。而剪切应变(见图 4-2)定义为 $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$, 为 x, y 两个方向微元夹角的改变量, γ_{yz}, γ_{zx} 也有类似定义。

从图 4-2 来看微元在 xy 平面上的投影。图中 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 为 u 在 y 方向的变化率, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 为 u 在 x 方向的变化率, 其余参数类似。按照应变定义有

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{[(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + dx - u] - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{[(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) + dy - v] - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \alpha + \beta \approx \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx(1 + \frac{\partial u}{\partial x})} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy(1 + \frac{\partial v}{\partial y})} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \epsilon_x} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \epsilon_y} \approx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

第三式中因 ϵ_x, ϵ_y 与 1 相比, 其值很小故忽略不计。

向其他两个坐标平面投影可得类似关系式, 共 6 个

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (4-2)$$

这一组 6 个方程就是弹性力学中的几何方程。

三、物理方程

物理方程是描述应力与应变关系的方程。在材料力学中是用胡克定律来描述, 如 $\sigma_x = E\epsilon_x$ 。而在弹性力学中, 由于是三向应力状态, 对各向同性的均匀体用广义胡克定律描述。

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)] \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} \end{array} \right. \quad (4-3)$$

式中 E ——杨氏弹性模量；

μ ——泊松比；

G ——剪切弹性模量。

弹性力学问题都可以用式(4-1), 式(4-2)和式(4-3)这三组方程描述。这其中包含了 15 个未知量, 即 6 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, 6 个应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, 以及 3 个位移分量 u, v, w , 共有 15 个方程。所以从理论上讲, 只要给定边界条件, 各种情况下的弹性力学问题都是可解的。但实际情况是, 这一组方程太复杂, 只有在非常简单的受力和约束边界条件下才可求得解析解。因此, 工程中的弹性力学问题大多都是采用近似方法或数值方法求解, 如有限差分法或有限元法等。

四、弹性力学平面问题

工程中许多构件形状与受力状态使它们可以简化为二维情况处理, 这就是弹性力学平面问题。

平面问题有两种情况, 即所谓平面应力问题和平面应变问题。

1. 平面应力问题

平面应力问题研究等厚度薄板状弹性体,受力方向沿板面方向,如图 4-3 所示。在不失稳条件下由于板很薄,可以认为在 z 向应力 $\sigma_z = 0$,同时 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ 。这样,平面应力问题的应力分量就只有 3 个了:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \sigma_y = \sigma_y(x, y), \tau_{xy} = \tau_{yx}(x, y)$$

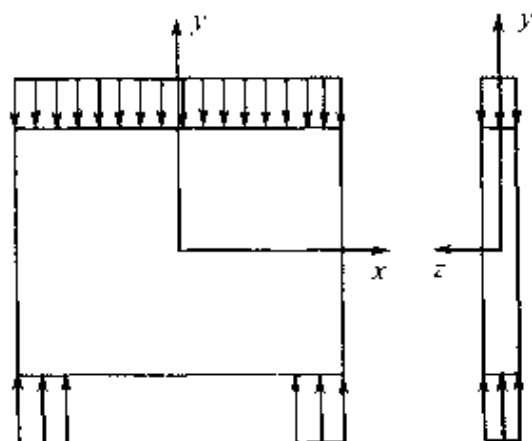


图 4-3 平面应力问题力学模型

2. 平面应变问题

平面应变问题处理面内受力但垂直于平面方向上不产生变形的二维受力问题。如水坝截取一个截面来分析它的受力状况。由于水坝很长,这一截面在垂直于截面方向位移(一般设为 w)为零,即 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = 0$,如图 4-4 所示。

弹性力学平面问题的基本方程可根据上述限制,由式(4-1),式(4-2)和式(4-3)写出平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (4-4)$$

几何方程

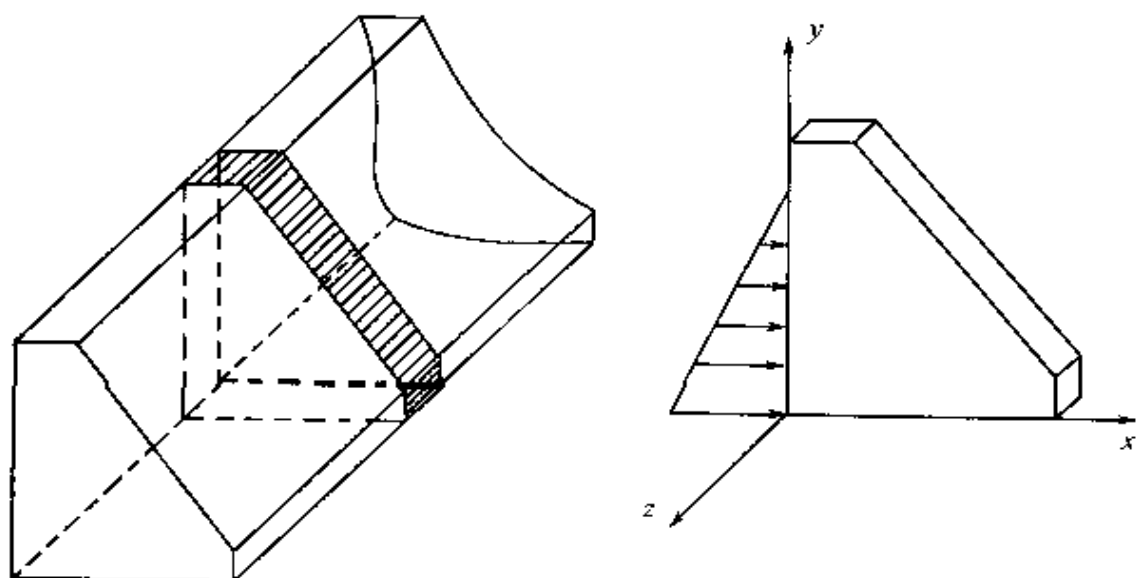


图 4-4 平面应变问题力学模型

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (4-5)$$

物理方程

$$\text{平面应力问题: } \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (4-6)$$

$$\text{平面应变问题: } \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1+\mu^2}{E}(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1+\mu^2}{E}(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (4-7)$$

从式(4-6)和式(4-7)中可看出,平面应力问题物理方程中

E 换成 $\frac{E}{1+\mu}$, μ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 就成为平面应变问题物理方程, 将 $\sigma_z = 0$ 或 $w = 0$ 代入式(4-2)和式(4-3), 还可以看出平面应力问题与平面应变问题的不同之处为

平面应力问题: $\sigma_z = 0, \varepsilon_z \neq 0$

平面应变问题: $\sigma_z \neq 0, \varepsilon_z = 0$

式(4-4)~式(4-7)中共有 8 个未知量 $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, 共 8 个方程, 加上一定的约束条件, 理论上可求解各种弹性力学平面问题。但这一组方程仍然太复杂, 工程中的许多问题仍然要用近似方法或数值方法来求解。本章介绍最简单的平面问题有限元法。

§ 4-2 平面问题的有限元模型

前面两章中所分析的系统是桁架或刚架, 它们的有限元模型基本上是自然分割的, 即一根杆或一根梁作为一个单元, 单元与单元之间在端点处连接, 这种模型的分割是自然的, 连接形式也与原系统一致。它的计算与结构矩阵分析方法匹配。但是对于连续体, 例如平板, 要利用有限元法进行矩阵分析, 就必须人为地将连续的平板分割成一小块、一小块的单元, 而单元与单元的边界上只能有有限个点(称为节点)连接, 这就称为结构的离散, 如图 4-5 所示。

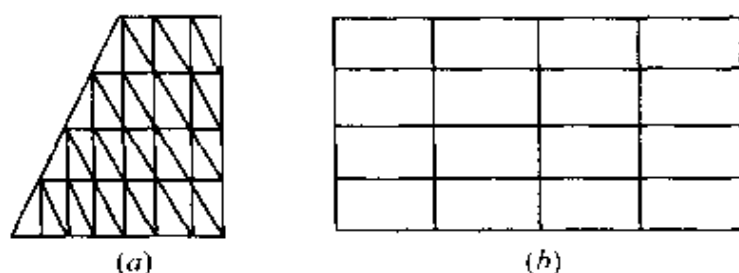


图 4-5 平面问题的单元分割

最简单的分割单元是三角形单元和矩形单元。图 4-5(a)为用三角形单元分割的某水坝截面, 图 4-5(b)为用矩形单元分割

的一矩形平板。

原来的连续体被人为分割的只在节点处连接的单元集合所代替,由于两相邻单元的边界不一定能一起变形,这一模型必然比原来的结构柔性要大,而且受载荷时会出现不应有的变形情况,如图4-6所示。相邻两单元由于只在节点处连接,受力后原来是一体的公共边可能出现裂缝,原来两单元应该均匀变形,这时也可能出现非均匀变形。有限元法解决这一问题的方式是选择适当的单元位移插值函数来限制单元的变形,使得连续体尽管被人为地分割成单元的集合,而且只在有限个节点处相连,但模型仍然能够部分满足(如果不是全部满足)连续性的要求。正如第一个引入“有限元”这一术语的 Clough 所说:有限元不仅仅是由原始结构分割而成的一些碎块,而是一些特殊类型的弹性单元,这些弹性单元的变形被限制成特定的模式,以使得单元集合体的整体连续性被保持。

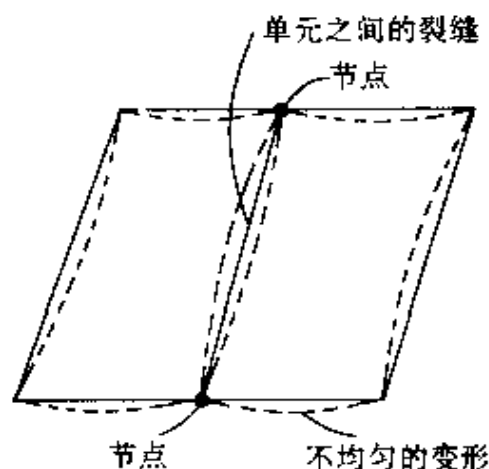


图 4-6 单元间可能的变形形式

从上面的讨论可知,连续体的有限元法求解至少有两点不同于桁架或刚架结构的有限元分析:第一,结构必须人为地(而非自然地)分割成许多单元;第二,由位移插值数限制各单元乃至整个有限元模型的变形情况。所以,弹性体的有限元分析中单元分割和位移函数的选择是至关重要的。

一、单元分割

首先,是对一个给定结构分割多少个单元合适的问题。有限元法的计算基础就是要随着单元数目的增多,有限元解逐步逼近于真实解。因此,一般来说单元数目分得越多,其解越精确。但是单元数目的增加一般会使节点数目增加,从而所求解的线性代数方程组的数目就增多,必然会占用更多的计算机资源(内存和求解机时)。所以单元数目太多是不经济的。

单元分割的另一个问题是分割方式。有限元法的单元分割比较随意,同一结构中单元之间的大小没有什么限制,因此可以较自由地布置单元。如图4-7所示结构在应力集中部位布置较多的单元,而在受力较均匀的部位布置少量单元。这样既可保证计算结果的精度,又不占用太多的计算机资源。

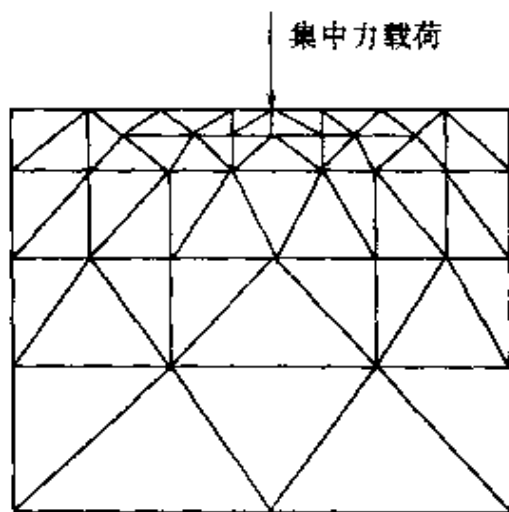


图4-7 单元布置一例

另外,单元分割应尽量与外载荷匹配。集中力作用点最好布置成节点,而分布载荷则可以按等效原则转化为集中力作用在节点上。如图4-8所示的例子,由静力等效将分布力作用在11个节点上。

有限元方法中有许多种类型的单元,每种单元都有它的优点。在后面的章节中将陆续给出一些讨论。

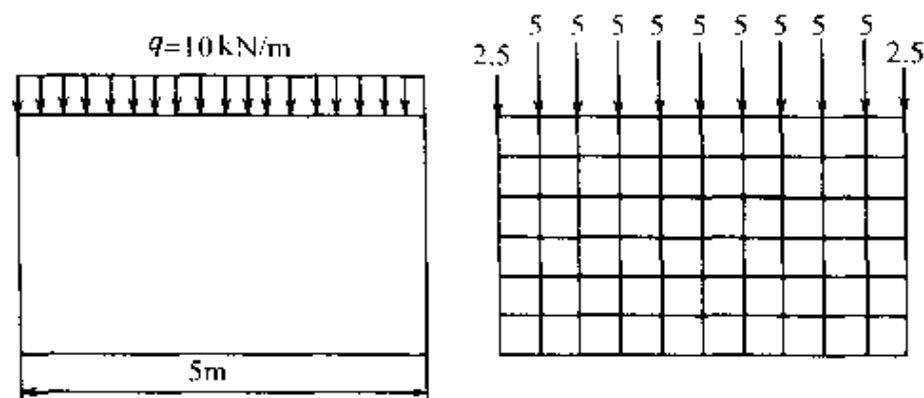


图 4-8 分布载荷转化为集中载荷

二、位移插值函数

位移插值函数的形式与所分析结构的类型、单元形式和计算结果的精度要求等因素有关。但是它也有一些共同的要求。从第三章的分析中已知,位移插值函数是用来近似地描述我们并不知道单元变形模式和限制有限元模型的变形。因此,为了随着单元尺寸的减小(单元数目增多)有限元计算结果能收敛于精确解,所选择的位移插值函数必须满足下列三个条件:

- (1) 位移插值函数应能反映单元的刚体位移;
- (2) 位移插值函数应能反映常量应变——常应变准则;
- (2) 位移插值函数应能保证单元内及相邻单元间位移的连续性——变形协调性(相容性)准则。

条件(1)表明,位移函数中应包含有常数项,条件(2)表明,位移插值函数应包含一次项($\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, ...等);条件③表明,位移插值函数应在单元内连续,在单元边界上其值应能由节点函数值唯一确定。

§ 4-3 平面问题的三角形单元求解

我们仍采用第三章中所述七个步骤推导三角形单元求解平面

问题的有限元计算格式。

第一步:选择适当的坐标系,写出单元的位移和节点力向量

选择如图 4-9 所示直角坐标系,单元的 3 个节点按逆时针方向排列,节点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 。

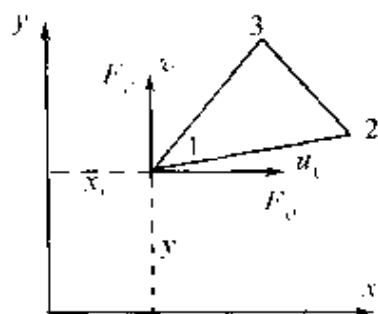


图 4-9 三角形单元及其坐标系

平面弹性问题所有的位移都在面内,每个节点有两个位移自由度, u 和 v , 所以一个三节点三角形单元有 6 个位移自由度和相应的 6 个节点力分量,如图 4-10 所示。可分别写为

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{F}^e\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_1\} \\ \{\mathbf{F}_2\} \\ \{\mathbf{F}_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$$

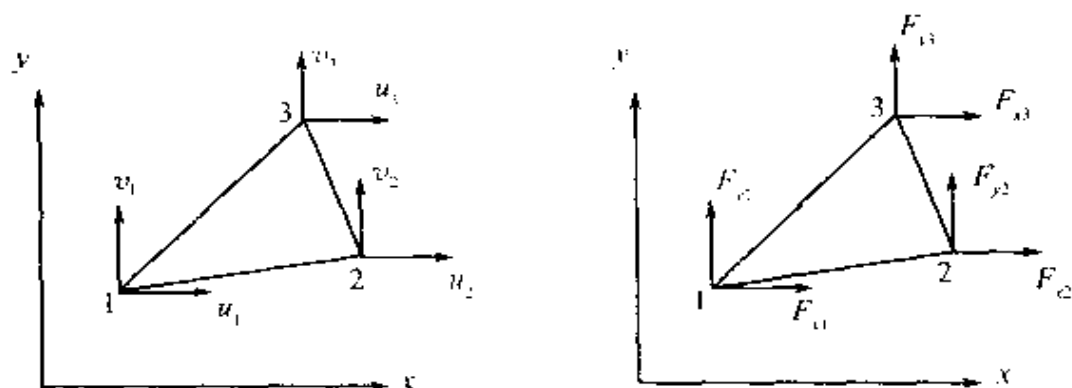


图 4-10 三角形单元的节点位移和节点力分量

因每个向量包含有 6 个分量,因此单元刚度矩阵 $[K^e]$ 应该是 6×6 阶的。

第二步:选择适当的位移插值函数

平面弹性问题每一节点对应有 x 和 y 两个方向的位移,三节点三角形单元共有 6 个节点自由度,位移插值函数中应包含 6 个待定的常数 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ 。最简单的函数形式是两个线性函数:

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \quad (4-8)$$

式(4-8)中有常数项、一次项,而且线性函数在单元内必定是连续的,在单元边界上可由该边的两个节点函数值所唯一确定,因此式(4-8)满足前面讨论的对位移插值函数的要求。将它写成矩阵形式,有

$$\begin{aligned} \{\delta(x, y)\} &= \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \\ &= f(x, y) \cdot \{\alpha\} \end{aligned} \quad (4-9)$$

第三步:求单元中任一点位移 $\{\delta(x, y)\}$ 与节点位移 $\{\delta^e\}$ 的关系

这一步的目的是求出待定系数。将各节点坐标分别代入式(4-9),有

$$\begin{aligned} \{\delta_1\} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \{\alpha\} \\ \{\delta_2\} &= \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \{\alpha\} \\ \{\delta_3\} &= \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \{\alpha\} \end{aligned}$$

总起来有

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [A]\{\alpha\} \quad (4-10)$$

由式(4-10) $\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$, 可得 $\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\}$, 其中

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 \\ 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

式中:

$$\begin{aligned} 2\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) \\ &\quad - (x_1y_3 + x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= 2 \times (\text{三角形单元面积}) \end{aligned}$$

求出了用节点位移表示的待定系数 $\{\alpha\}$, 位移插值函数可写

为

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} = [N(x, y)]\{\delta^e\} \quad (4-11)$$

其中 $[N(x, y)]$ 一般称为单元形状函数。因为它只与单元节点坐标及其相应的坐标变量有关,完全由单元的原始形状所决定,而与节点位移无关。

如果将式 $[A]^{-1}$ 写为下列形式

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

则形状函数可写为

$$\begin{aligned} [N(x, y)] &= [f(x, y)][A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4-12) \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad N_1 = [N_1(x, y)] = \frac{1}{2\Delta} (a_1 + b_1x + c_1y)$$

$$N_2 = [N_2(x, y)] = \frac{1}{2\Delta}(a_2 + b_2x + c_2y)$$

$$N_3 = [N_3(x, y)] = \frac{1}{2\Delta}(a_3 + b_3x + c_3y)$$

第四步:求单元应变 - 单元位移 - 节点位移之间的关系
由式(4-5)和式(4-8)有

$$\begin{aligned} \{\epsilon(x, y)\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(a_1 + a_2x + a_3y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(a_4 + a_5x + a_6y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(a_1 + a_2x + a_3y) + \frac{\partial}{\partial x}(a_4 + a_5x + a_6y) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_3 + a_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

或写为

$$\{\epsilon(x, y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (4-13)$$

将 $\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta\}$ 代入,有

$$\{\epsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1}\{\delta\} = [B]\{\delta\} \quad (4-14)$$

其中

$$[B] = [C][A]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

矩阵 $[B]$ 称为三角形单元几何矩阵。

第五步:求应力-应变-节点位移间的关系

先看平面应力问题。由物理方程式(4-6),有

$$\{\epsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4-16)$$

改写一下,有

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

或

$$\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\epsilon(x, y)\} \quad (4-17)$$

其中,矩阵 $[D]$ 为平面应力问题弹性矩阵。

平面应变问题的弹性矩阵 $[D]$ 可参照式(4-7)和式(4-16)写出

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

将式(4-14)代入式(4-17)可得应力与节点位移之间的关系式

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (4-18)$$

当然,平面应力问题和平面应变问题的弹性矩阵 $[D]$ 有不同

的形式。为方便计,我们写成统一的形式:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

对平面应力问题:

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}, d_{12} = d_{21} = \frac{\mu E}{1-\mu^2}, d_{33} = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

对平面应变问题:

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

第六步:求节点力与节点位移的关系

借用第三章中由虚功原理推导的结果式(3-11),则节点力与节点位移间的关系为

$$\{F^e\} = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \{\delta^e\}$$

三节点三角形单元的几何矩阵 $[B]$ 和弹性矩阵我们已经得到,而且它们都是常数矩阵,因此可以提到积分符号以外。从而积分只剩下 $\int d(\text{vol})$,其结果是单元厚度 t 乘以单元面积 Δ 。对于等厚度单元,有

$$\{F^e\} = ([B]^T [D] [B] \Delta \cdot t) \{\delta^e\} \quad (4-20)$$

其中

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

因此,单元刚度矩阵为

$$\{K^e\} = [B]^T [D] [B] \cdot \Delta \cdot t \quad (4-21)$$

由于 $[D]$ 、 $[B]$ 为常量矩阵,三角形单元的 $[K^e]$ 可以显式地得到。

$$[\mathbf{D}][\mathbf{B}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} d_{11}(y_2 - y_3) & d_{12}(x_3 - x_2) & d_{11}(y_3 - y_1) \\ d_{21}(y_2 - y_3) & d_{22}(x_3 - x_2) & d_{21}(y_3 - y_1) \\ d_{33}(x_3 - x_2) & d_{33}(y_2 - y_3) & d_{33}(x_1 - x_3) \\ d_{12}(x_1 - x_3) & d_{11}(y_1 - y_2) & d_{12}(x_2 - x_1) \\ d_{22}(x_1 - x_3) & d_{21}(y_1 - y_2) & d_{22}(x_2 - x_1) \\ d_{33}(y_3 - y_1) & d_{33}(x_2 - x_1) & d_{33}(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

$$[\mathbf{B}]^T = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & 0 & x_1 - x_2 \\ 0 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

从而三节点三角形单元的刚度矩阵 $[\mathbf{K}^e]$ 为:

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} SA & SB & SD & SG & SK & SP \\ SB & SC & SE & SH & SL & SQ \\ SD & SE & SF & SI & SM & SR \\ SG & SH & SI & SJ & SN & SS \\ SK & SL & SM & SN & SO & ST \\ SP & SQ & SR & SS & ST & SU \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

式中

$$\begin{aligned} SA &= d_{11}(y_2 - y_3)^2 + d_{33}(x_3 - x_2)^2 \\ SB &= d_{21}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) \\ SC &= d_{22}(x_3 - x_2)^2 + d_{33}(y_2 - y_3)^2 \\ SD &= d_{11}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) \\ SE &= d_{12}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) \\ SF &= d_{11}(y_3 - y_1)^2 + d_{33}(x_1 - x_3)^2 \\ SG &= d_{21}(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) \\ SH &= d_{22}(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \\ SI &= d_{12}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SJ &= d_{22}(x_1 - x_3)^2 + d_{33}(y_3 - y_1)^2 \\
SK &= d_{11}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \\
SL &= d_{12}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) \\
SM &= d_{11}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\
SN &= d_{12}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \\
SO &= d_{11}(y_1 - y_2)^2 + d_{33}(x_2 - x_1)^2 \\
SP &= d_{21}(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + d_{33}(x_3 - x_2)(y_1 - y_2) \\
SQ &= d_{22}(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \\
SR &= d_{12}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \\
SS &= d_{22}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1) \\
ST &= d_{21}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) \\
SU &= d_{22}(x_2 - x_1)^2 + d_{33}(y_1 - y_2)^2
\end{aligned}$$

这里又一次可以看到单元刚度矩阵 $[K^e]$ 是对称的。在式 (4-24) 中代入不同的 $d_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 可得到平面应力问题或平面应变问题的单元刚度矩阵格式。对一个已编排好节点号的系统, 按节点号叠加单元刚度矩阵元素可得到结构总体刚度矩阵, 再引入一定的边界条件和外载荷就可以求解。最后的计算格式仍然是

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (4-25)$$

这里有一点与前面两章不同, 即三角形单元在坐标系中的位置是任意的, 也就是说推导是在整体坐标系中进行的, 所以上面得到的单元刚度矩阵可以直接按节点号叠加总体刚度矩阵, 而无需进行坐标变换。

第七步: 单元应力与节点位移的关系

求解式 (4-25) 可得到平面上有限元网格各节点处的位移, 有了节点位移可根据式 (4-14) 计算单元应变, 还可以由下式计算单元应力

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\} = [H]\{\delta^e\} \quad (4-26)$$

其中矩阵 $[H]$ 已由式 (4-22) 给出。

[例] 有一正方形板, 沿对角承受压力作用, 板厚 $t = 1\text{m}$, 载

荷 $P = 20\text{kN}$, 如图 4-11 所示。为简化计算, 设泊松比 $\mu = 0$, 材料弹性模量为 E , 求它的应力分布。

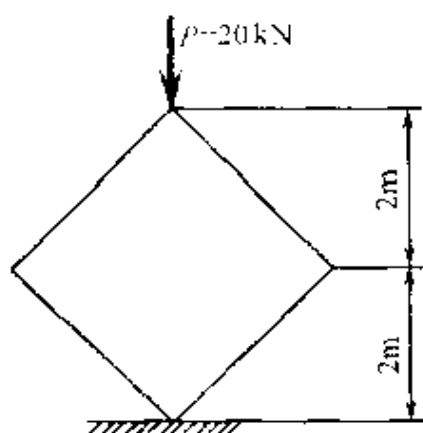


图 4-11 对角受力的板

解: 由于结构是几何对称的, 所受载荷也是对称的, 利用它的对称性, 可只取板的 $1/4$ 作为计算对象, 如图 4-12 所示。为简单计, 将它划分为四个三角形单元, 单元及节点编号如图 4-12 所示, 由于对称, 节点 1, 2, 4 不会有水平位移, 节点 4, 5, 6 不会有垂直位移, 故给出约束如图 4-12 所示。从图中可以看出: 单元①、②、④是一样的, 单元③为另一种形式。模型为平面应力问题。

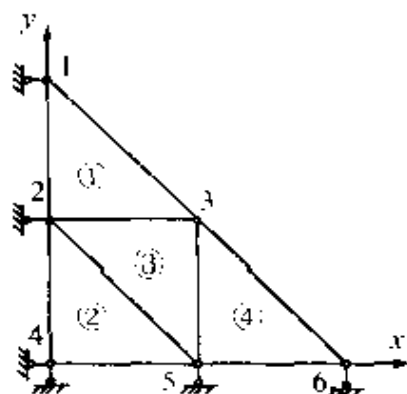


图 4-12 计算模型

由于 $\mu = 0$, $t = 1$, 则

$$d_{12} = d_{21} = E, d_{11} = d_{22} = 0, d_{33} = \frac{E}{2}$$

单元①的节点坐标为

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & x_2 &= 0, & x_3 &= 1 \\y_1 &= 2, & y_2 &= 1, & y_3 &= 1\end{aligned}$$

面积为

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

代入式(4-24)可得单元①的刚度矩阵

$$\begin{aligned}[\mathbf{K}^{e1}] &= E \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.75 & 0.25 & -0.5 & -0.25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.25 & 0.75 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_{11}^{e1} & K_{12}^{e1} & K_{13}^{e1} \\ K_{21}^{e1} & K_{22}^{e1} & K_{23}^{e1} \\ K_{31}^{e1} & K_{32}^{e1} & K_{33}^{e1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

用同样方法可计算单元②、④的刚度矩阵,结果同单元①的刚度矩阵数值是一样的。

$$[\mathbf{K}^{e2}] = \begin{bmatrix} K_{22}^{e2} & K_{24}^{e2} & K_{25}^{e2} \\ K_{42}^{e2} & K_{44}^{e2} & K_{45}^{e2} \\ K_{52}^{e2} & K_{54}^{e2} & K_{55}^{e2} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}^{e4}] = \begin{bmatrix} K_{33}^{e4} & K_{35}^{e4} & K_{36}^{e4} \\ K_{53}^{e4} & K_{55}^{e4} & K_{56}^{e4} \\ K_{63}^{e4} & K_{64}^{e4} & K_{66}^{e4} \end{bmatrix}$$

单元③的节点号为 2, 5, 3, 节点坐标为

$$\begin{aligned}x_2 &= 0, & x_5 &= 1, & x_3 &= 1 \\y_2 &= 1, & y_5 &= 0, & y_3 &= 1\end{aligned}$$

单元面积仍为 $\Delta = \frac{1}{2}$ 。代入式(4-24)可得

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}^{e3}] &= E \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.15 \\ -0.5 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & -0.5 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} K_{22}^{e1} & K_{25}^{e1} & K_{23}^{e1} \\ K_{52}^{e1} & K_{55}^{e1} & K_{53}^{e1} \\ K_{32}^{e1} & K_{35}^{e1} & K_{33}^{e1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

上面每个单元刚度矩阵最后写成的子刚度矩阵 $[\mathbf{K}_{ij}^e]$,脚标 i, j 表示节点号,即实际在总体刚度矩阵中的位置,叠加总体刚度矩阵时一定要严格按节点号叠加。例如 $[\mathbf{K}^{e3}]$ 中 $K_{25}^{e3}, K_{55}^{e3}, K_{35}^{e3}$ 一定要写在第 $2 \times 5 - 1 = 9$ 列和第 $2 \times 5 = 10$ 列,而 $K_{23}^{e3}, K_{53}^{e3}, K_{33}^{e3}$ 则要写在第5和第6列。总体刚度矩阵为

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{e1} & K_{12}^{e1} & K_{13}^{e1} \\ K_{21}^{e1} & K_{22}^{e1} + K_{22}^{e2} + K_{22}^{e3} & K_{23}^{e1} + K_{23}^{e3} \\ K_{31}^{e1} & K_{32}^{e1} + K_{32}^{e3} & K_{33}^{e1} + K_{33}^{e2} + K_{33}^{e3} \\ 0 & K_{42}^{e2} & 0 \\ 0 & K_{52}^{e2} + K_{52}^{e3} & K_{53}^{e3} + K_{53}^{e4} \\ 0 & 0 & K_{63}^{e4} \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{24}^{e2} & K_{25}^{e2} + K_{25}^{e3} & 0 \\ 0 & K_{35}^{e3} + K_{35}^{e4} & K_{36}^{e4} \\ K_{44}^{e2} & K_{45}^{e2} & 0 \\ K_{54}^{e2} & K_{55}^{e2} + K_{55}^{e3} + K_{55}^{e4} & K_{56}^{e4} \\ 0 & K_{65}^{e4} & K_{66}^{e4} \end{bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 1.5 & 0.25 & -1 & -0.25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.25 & 1.5 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1 & -0.25 & 1.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & -0.5 & 0.25 & 1.5 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & -0.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.25 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & -1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & -0.5 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.5 & 0.25 & -0.5 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & 1.5 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

引入约束条件 $u_1 = u_2 = u_4 = v_4 = v_5 = v_6 = 0$

节点载荷 $F_{1y} = -10\text{kN}, F_{2y} = F_{3x} = F_{3y} = F_{5x} = F_{6x} = 0$

则位移和力向量为

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 \\ 0 \\ u_6 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ -10 \\ F_{2x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ 0 \\ F_{5y} \\ 0 \\ F_{6y} \end{Bmatrix}$$

从而线性代数方程组为

$$[K]\{\delta\} = \{F\}$$

划去位移为零的行和列, 方程组成为

$$E \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & -0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & 0.25 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & -0.25 & 1.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

解此方程组得未知的位移分量:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32.53/E \\ 12.52/E \\ -0.88/E \\ -3.72/E \\ 1.76/E \\ 1.76/E \end{Bmatrix}$$

求出了节点位移分量就可以按式(4-26)计算单元应力 $\{\sigma\} = [H]\{\delta\}$ 。由于只有 6 个非零位移分量,故对于单元①、②、④有

$$[H] = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

对单元③,有

$$[H] = E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

各单元应力为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{e1} = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.88 \\ -20.00 \\ 4.40 \end{Bmatrix} \text{kN/m}^2$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{e2} &= E \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ u_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.76 \\ -12.52 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{kN/m}^2 \\
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{e3} &= E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ u_5 \\ 0 \\ u_6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.88 \\ 3.72 \\ 3.08 \end{Bmatrix} \text{kN/m}^2 \\
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{e4} &= E \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ 0 \\ u_6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.72 \\ -1.32 \end{Bmatrix} \text{kN/m}^2
\end{aligned}$$

从结果看,单元应力值在单元内是不变的,而实际情况并非如此,这说明这一近似解的精度较差。每个单元边界会出现应力值突变。只有单元分得很小,才会使应力突变值减小。这是三角形

线性单元的主要缺点。

§ 4-4 刚阵存储与约束条件处理

一、刚阵存储

第二章中讨论了桁架系统的节点排列与刚度矩阵带宽及其存储量之间的关系。对于平面结构(乃至空间结构)的有限元模型也是一样的。单元内的节点最大编号差决定着刚度矩阵的带宽,进而影响刚度矩阵的存储量,这对于节点数较多的单元形式尤为重要。所以编节点号时必需注意尽量减小单元节点的最大编号差。

为进一步减小刚阵存储量以节省计算机资源,除第二章介绍的等带宽存储刚度矩阵元素的方法外,还有一种更为经济的存储方式,称为变带宽存储。如图 4-13 所示,刚度矩阵中每一行所具有的非零元素数目不等,存储时可不必按最大带宽将带内元素全部存储。因为解方程组时只用到每行第一个非零元素及其以后的诸元素,因此只要将图 4-13 中折线到对角线间的元素存在计算机中即可。这样一来又可以少存许多零元素。再采用一维数组存储,又可以进一步减小存储量。这称为一维变带宽压缩存储。

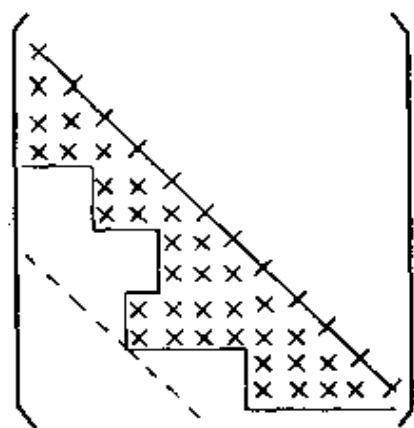


图 4-13 刚度矩阵的带宽变化

所谓一维变带宽压缩存储是设立一个一维数组,把每行第一个非零元素及后面直到对角线元素按行顺序存放,其顺序如图 4-14 所示。

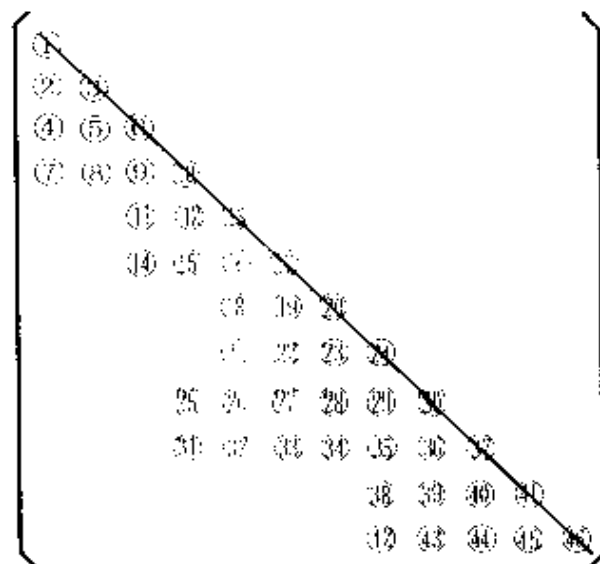


图 4-14 变带宽存储的刚度矩阵元素排列

但是,这样一来就出现了一个问题,解线性代数方程组时,要求准确地取出刚度矩阵中某行某列的元素进行消元计算。采用一维变带宽压缩存储后,在一维数组中取出的元素不知道是第几行第几列的元素。例如要取出第五行第三列的元素 k_{53} ,我们并不知道对应图 4-14 中第 11 个元素。为解决这一问题,可以采用一个一维数组记录下每行的对角线元素在一维刚度矩阵数组中的位置,这一数组称为定位数组或定位阵。如图 4-14 中元素位置排列,定位数组 $ND[I]$ 中元素为

$$ND[1, 3, 6, 10, 13, 17, 20, 24, 30, \dots]$$

若要找元素 k_{ij} ,可利用下述公式求出它在一维刚度矩阵数组中的排列位置 L_{ij} :

$$L_{ij} = ND(I) - (I - J) = ND(I) - I + J$$

例如:第五行第三列元素 k_{53} ,这时 $I = 5, J = 3$ 则

$$L_{53} = ND(5) - 5 + 3 = 13 - 5 + 3 = 11$$

又如 k_{87} :

$$L_{87} = ND(8) - 8 + 7 = 24 - 8 + 7 = 23$$

变带宽一维压缩存储刚度矩阵的方法是对应于线性代数方程组直接解法的最经济的存储方法,因此被广泛用于有限元分析程序中。

二、约束条件处理

从第二章中我们已知由单元刚度矩阵叠加而成的总体刚度矩阵是一个奇异矩阵,原因是未对整个系统施加约束。而施加约束条件后的方程组则是有唯一解的。所施加的约束在我们讨论的范围内一般是给定节点位移约束,如给定零位移 $u=0$ 或 $v=0$ 和指定位移量 $u=u_a$ 或 $v=v_a$ 。

第二章和本章的例子中引入约束条件后求解方程时,将零位移所对应的行和列划去,使方程组减小。比如原来 $n \times n$ 阶方程,有三个零位移约束,划去对应的行和列后,方程对应的刚度矩阵成为 $(n-3) \times (n-3)$ 阶的了。这种改变矩阵阶数的方法在编程序时不方便,而且对于给定非零位移的情况无法处理。下面介绍两种不改变矩阵阶次处理约束条件的方法。

1. 置大数法

将方程组中对应给定位移 α (包括 $\alpha=0$) 的第 i 行主对角线元素 k_{ii} 乘以一个足够大的数,如 10^{20} ,该行的右端项 F_i 乘以 $\alpha \times 10^{20}$,则修改后的方程变为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} \times 10^{20} & \cdots & k_{i,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2} & \cdots & k_{n-1,i} & \cdots & k_{n-1,n} \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & k_{n,i} & \cdots & k_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_i \times \alpha \times 10^{20} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{Bmatrix}$$

上式第 i 个方程中, 原来行中各元素可近似认为是同一数量级的, 而 10^{20} 是一个极大数, 因此行中其余各项与 $k_{ii} \times 10^{20}$ 相比是可以略去的微小量, 从而上式第 i 个方程几乎等价于

$$k_{ii} \times 10^{20} \times \delta_i = \alpha \times 10^{20} \times F_i$$

即

$$\delta_i \approx \alpha$$

2. 置 1 赋 0 法

将方程组中给定位移 α 的行和列除对角线元素改为 1 之外, 其余置零, 并将原来矩阵的第 i 列除对角线元素外乘以给定位移 α 后移到等式另一端, 对应第 i 行的右端项 F_i 改为 α 。修改后的方程式成为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1,i-1} & 0 & k_{1,i+1} & \cdots & k_{1,n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2,i-1} & 0 & k_{2,i+1} & \cdots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{i-1,1} & k_{i-1,2} & \cdots & k_{i-1,i-1} & 0 & k_{i-1,i+1} & \cdots & k_{i-1,n} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ k_{i+1,1} & k_{i+1,2} & \cdots & k_{i+1,i-1} & 0 & k_{i+1,i+1} & \cdots & k_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & k_{n,i-1} & 0 & k_{n,i+1} & \cdots & k_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{i-1} \\ \delta_i \\ \delta_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - \alpha \times k_{1,i} \\ F_2 - \alpha \times k_{2,i} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{i-1} - \alpha \times k_{i-1,i} \\ \alpha \\ F_{i+1} - \alpha \times k_{i+1,i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n - \alpha \times k_{n,i} \end{Bmatrix}$$

显然上式第 i 个方程的解为 $\delta_i = \alpha$ 。

方法 1 的方程式处理比较简单但给出 α 的近似值;方法 2 的方程修改稍微复杂一些,但给出 α 的精确值。这两种方法都被广泛用于有限元分析程序的约束条件处理过程中。

§ 4-5 六节点三角形单元和矩形单元

前面介绍的三角形单元,由于其位移插值函数为线性函数,单元内的位移是线性变化的。根据弹性力学几何方程可知,应变是位移函数的一阶偏导数。从式(4-14) $\{\epsilon(x, y)\} = [B]\{\delta^e\}$ 和式(4-15) $[B]$ 的表达式中可以看出,三节点三角形单元的应变在一个单元内为常数,再由物理方程可知,应力在一个单元内也为常数,这已在 § 4-3 的例题中得以证实。因此,用三节点三角形单元求得的弹性力学平面问题近似解,不能反映单元内应力和应变的变化,只有当单元划分得很小时才能使解接近实际情况。

为了提高计算精度,可以在三节点三角形单元每一边中间加一个节点,成为六节点三角形单元。这种单元有六个节点,因而有 12 个自由度,位移插值函数允许有 12 个待定系数,因此可以选用二次多项式。这样一来,单元中的应力和应变就是按线性关系变

化的了。由于在线弹性力学范围内我们求解的是线弹性问题,所以六节点的三角形单元能较好地反映弹性体中应力的变化情况。另外,采用这种单元还可适当减少单元数目。

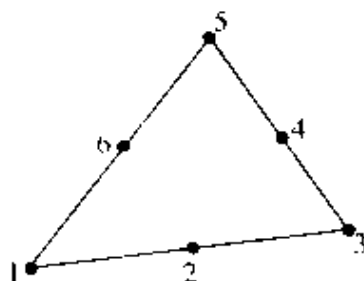


图 4-15 六节点三角形单元

六节点三角形单元的节点排列如图 4-15 所示,它的位移插值函数可采用如下二次多项式

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ u &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

完全类似于 §4-3 中第二步和第三步的推导,可以求出六节点三角形单元的位移插值函数。即用节点位移 $\{\delta^e\}$ 表示待定系数 $\{\alpha\}$,得到

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} = [N(x, y)]\{\delta^e\}$$

从 §4-3 和 §3-2 的七步推导中可以看出,对于不同的单元只是第一步至第三步不同,而求出了单元的位移插值函数后,其余步骤是完全相同的,只不过可能对应不同的力学问题而已。而第一步当单元形式确定之后,一般可由其力学性质和节点自由度数直接写出节点力和节点位移向量。因此,有限元方程中的单元分析主要集中在建立单元位移插值函数和求出这一函数。位移插值函数的形式决定了单元内及单元边界上位移、应变和应力的变化情况。下面以四节点矩形单元为例讨论位移插值函数的一些性质。

图 4-16 表示一个长为 $2a$, 宽为 $2b$ 的建立在局部坐标系中

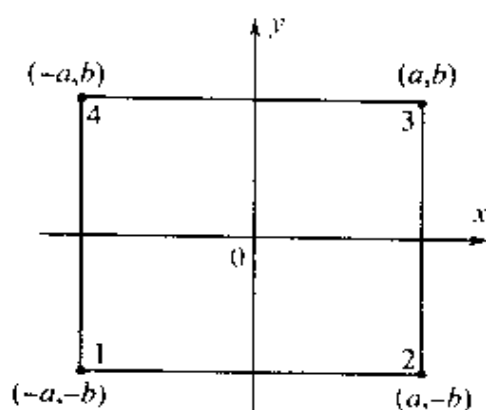


图 4-16 四节点矩形单元

的四节点矩形单元。它有 8 个位移自由度, 节点位移向量为

$$\{\delta^e\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \\ \{\delta_3^e\} \\ \{\delta_4^e\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\}$$

位移插值函数可设为

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases} \quad (4-28)$$

或写为 $\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\}$

将节点坐标 $(-a, -b)$, $(a, -b)$, (a, b) , $(-a, b)$ 代入并写成矩阵形式, 有

$$\{\boldsymbol{\delta}^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (4-29)$$

解方程组(4-29)可得

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}^e\}$$

从而

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][\mathbf{A}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}^e\} = [\mathbf{N}(x, y)] \{\boldsymbol{\delta}^e\} \quad (4-30)$$

展开式(4-30),有

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4-31)$$

其中

$$\begin{cases} N_1 = N_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_2 = N_2(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_3 = N_3(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ N_4 = N_4(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (4-32)$$

称为四节点矩形单元的形状函数。类似于式(4-11),单元位移插值函数可以由单元形状函数与节点位移值的乘积表示。即

$$\delta\{x, y\} = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot \delta_i \quad (4-33)$$

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot u_i \\ v = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot v_i \end{cases} \quad (4-34)$$

可见位移插值函数完全由形状函数所决定。这样一来,抛开节点位移 $\{\delta^e\}$,只讨论形状函数的性质,就可以了解单元的变形性质。例如形状函数的几何意义就表明: $N(x, y)$ 反映了单元的变形情况或者说反映了单元的位移状态。如四节点的矩形单元,若

$u_1 = 1, u_2 = u_3 = u_4 = v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$, 则由式(4-33)有

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \delta_i = N_1 u_1 = N_1$$

变形完全由形状函数所决定。另外,形状函数还有两个重要的性质:

$$(1) \quad N_i(x_i, y_i) = 1, N_i(x_j, y_j) = 0, i \neq j \quad (4-35)$$

从式(4-32)可以看出

$$N_1(x_1, y_1) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) = \frac{2 \times 2}{4} = 1$$

$$N_2(x_1, y_1) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) = 0$$

$$N_3(x_1, y_1) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0$$

$$N_4(x_1, y_1) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0$$

对于 $N_2(x, y)$, $N_3(x, y)$ 和 $N_4(x, y)$ 也是一样的。

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n N_i(x, y) = 1 \quad (4-36)$$

如由式(4-32)有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) &= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b} + 1 + \frac{y}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b} + 1 + \frac{y}{b}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} [2(1 - \frac{x}{a}) + 2(1 + \frac{x}{a})] \\ &= 1 \end{aligned}$$

即在单元内任一点处的形状函数之和等于1。

形状函数的第一个性质保证了相邻单元在公共点处位移连续。因位移插值函数不仅能表示单元内的位移模式而且能反映节

点位移状态。例如对单元 k 第 1 个节点的位移可表示为

$$\begin{aligned} u_1^k &= \sum_{i=1}^4 N_i^k(x_1, y_1) \cdot u_i \\ &= N_1^k u_1^k + N_2^k u_2^k + N_3^k u_3^k + N_4^k u_4^k \\ &= N_1^k u_1^k \end{aligned}$$

对相邻单元 p 同一节点(设在 p 单元中为第 2 节点)的位移可表示为

$$u_2^p = \sum_{i=1}^4 N_i^p(x_2, y_2) = N_2^p u_2^p$$

若要 $u_1^k = u_2^p$, 即公共节点位移连续, 必须 $N_1^k = N_2^p$, 而且必须都等于 1。

形状函数的第二个性质反映了单元的刚体位移。例如四节点矩形单元, 各点位移量相同时为刚体位移, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_r$, 由式(4-34)有

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \cdot u_r$$

只有当 $\sum_{i=1}^4 N_i = 1$ 时才有 $u = u_r$ 。

既然形状函数的性质完全决定了位移插值函数的性质, 因此, 我们可以说, 写成式(4-34)形式的位移插值函数, 如果其形状函数是与节点自由度数相匹配的多项式函数, 且它能满足式(4-35)和式(4-36), 则该位移插值函数一定满足收敛性条件。

小结:

(1) 本章简单介绍了弹性力学的一些基本知识, 给出了弹性力学问题的平衡方程、几何方程和物理方程, 重点介绍了弹性力学平面问题(平面应力和平面应变问题)。

(2) 讨论了连续体问题用有限元法求解时的模型问题: 单元分割和位移插值函数。介绍了有限元计算结果收敛对位移插值函数的要求, 并讨论了形状函数的一些性质。

(3) 较详细地推导了三节点三角形单元计算弹性力学平面问

题的有限元计算格式。作为复习将推导有限元列式的七个步骤罗列如下：

①选择坐标系,写出节点的力向量和位移向量: $\{F^e\}$ 和 $\{\delta^e\}$;

②选择合适的位移插值函数:

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\}, \text{即设定;} [f(x, y)];$$

③求出位移插值函数或形状函数:

$$\begin{aligned} \text{由 } \{\delta^e\} &= [A]\{\alpha\} \rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\} \\ &\rightarrow \{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \\ &= [N(x, y)]\{\delta^e\} \end{aligned}$$

④求单元应变—位移—节点位移间的关系:

$$\{\delta(x, y)\} = [C][A]^{-1}\{\delta^e\} = [B]\{\delta^e\}$$

⑤求单元应力—应变—节点位移间的关系:

$$\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\delta(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

⑥求节点力—节点位移间的关系(虚功原理):

$$\{F^e\} = \int_V [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \{\delta^e\}$$

得到单元刚度矩阵

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] d(\text{vol})$$

⑦计算单元应力:

$$\{\sigma(x, y)\} = [B]^T [D] \{\delta^e\} = [H] \{\delta^e\}$$

(4) 本章还介绍了刚度矩阵的一维变带宽压缩存储方法和定位矩阵概念。讨论了两种不改变原始矩阵阶数的约束条件处理方法。

(5) 本章还简单介绍了具有高阶精度的六节点三角形单元以及四节点矩形单元。

第五章 等参数单元

§ 5-1 等参数单元的引入

上一章求解弹性力学平面问题所用的单元是三节点三角形单元。由于其位移插值函数是线性函数,因此称之为三角形线性单元。线性单元的位移在单元内呈线性变化,应力、应变在单元内是一个常量,因此在求解区域内应力和应变的变化都是不连续的。所以采用线性位移插值函数的三角形单元的计算精度不高,在许多情况下得不到正确的结果,特别是在应力集中的部位。

为提高计算精度可以采取的方法有:

- (1) 单元分细;
- (2) 构造高精度新单元。

将单元分细无疑可以提高计算精度,因为有限元法的计算基础就是当单元无限分细时计算结果将收敛于精确解。但是单元分细会增加单元数目和节点数目,从而大大增加所求解的方程数目,占用和耗费大量的计算机资源。所以,用细分单元的方法来提高精度有时是不经济的。

构造具有较高精度的单元也可以提高计算精度。单元节点数增多,则自由度数目增多,允许采用较高阶次的位移插值函数,从而可使计算精度提高。例如 § 4-5 中介绍的六节点三角形单元,其位移插值函数为完全二次多项式:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

单元内位移为二次函数变化,应力和应变呈线性变化,但这种单元的面积小,节点多,会使方程数目激增,占用计算机资源多,因此目

前较少用。

双线性插值函数的矩形单元,由于位移插值函数比三角形线性单元的位移插值函数多了一项,单元内的应力和应变不再是常量,因此计算精度也提高一些,但是,一般来讲矩形单元只适合于矩形规则区域的求解,对于任意形状的非规则区域,单元分割时不方便,计算精度在边界上要打折扣。因此,实际中也较少采用。

如果把矩形单元改成任意四边形单元,用于求解不规则区域时单元分割就要方便得多,而且至少四个节点8个自由度,其位移插值函数的阶次也将会比三角形线性单元的高。因此,任意四边形单元是比较理想的单元形式。但是,如果仍采用双线性的位移插值函数,任意四边形单元不能满足相邻单元间的位移协调,也即是相容性条件。

如图 5-1 所示任意四节点四边形单元,采用位移插值函数

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

单元不平行于坐标轴的任一条边的直线方程可写为 $y = kx + b (k \neq 0)$, 将其代入位移插值函数公式,则该边上的位移变化为 $\delta = Ax^2 + Bx + C$, 即位移不再是线性变化的了。该边上的插值将不能由其上两个节点处的函数值所唯一确定。从而在相邻两单元的公共边将不能保证位移插值函数的连续,也就是变形协调性得不到满足,常用的解决办法是采用等参数单元。

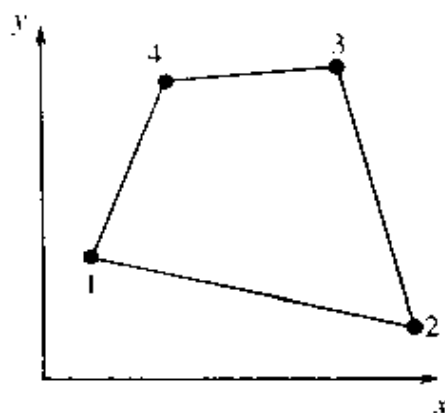


图 5-1 任意四节点四边形单元

§ 5-2 四节点四边形等参数单元

我们知道,矩形单元是满足解的收敛性条件的。如果通过一个坐标变换将任意四边形单元变换成矩形单元,只要坐标变换中任意四边形单元与矩形单元之间的点是一一对应的(称为坐标变换的相容性),而变换后的位移插值函数又是满足解的收敛性条件的,这两条合在一起就能保证任意四边形在原坐标系中满足解的收敛性条件。

我们希望通过一个从自变量 (x, y) 到新自变量 (ξ, η) 的坐标变换,使 xOy 平面上的任意四边形变换为 $\xi O\eta$ 平面上的以原点为中心,边长为2的正方形。 xOy 平面上四边形的四个节点1,2,3,4分别对应 $\xi O\eta$ 平面上正方形的四个角点1,2,3,4,如图5-2所示。但应注意这一坐标变换不是针对整个求解区域,而是针对每一个单元分别进行的。因此称 xOy 坐标为整体坐标系,它适用于所有单元,而称 $\xi O\eta$ 坐标为局部坐标系,它只适用于每个要变换的单元。我们所关心的是在每个单元上考察整体坐标 (x, y) 与局部坐标 (ξ, η) 之间满足上述要求的变换。

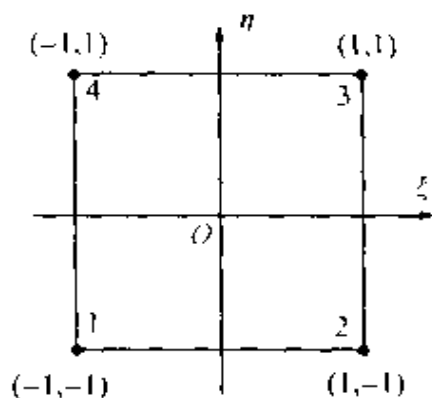


图 5-2 局部坐标下正方形单元

首先看看局部坐标系下的位移插值函数、形状函数和收敛性条件,再讨论具体的坐标变换。

图5-2所示正方形单元的位移插值函数采用双线性函数

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \\ v = \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta \end{cases} \quad (5-1)$$

上一章已推导出矩形单元采用双线性位移插值函数时的形状函数,如式(4-32)所示。将它用于正方形单元, $a = b = 1$, 则形状函数为

$$\begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (5-2)$$

利用节点处的 (ξ, η) 坐标, 式(5-2)可以写成统一的形式

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

其中 (ξ_i, η_i) 为

$$(\xi_1, \eta_1) = (-1, -1), (\xi_2, \eta_2) = (1, -1)$$

$$(\xi_3, \eta_3) = (1, 1), (\xi_4, \eta_4) = (-1, 1)$$

类似于式(4-34), 局部坐标下正方形单元的位移插值函数式(5-1)可以写成

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i \\ v = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i \end{cases} \quad (5-3)$$

其中 u_i, v_i 为节点处位移。

另外, 从矩形单元位移插值函数的讨论中可知, 局部坐标下的正方形单元必然满足解的收敛性条件。

剩下的问题就是什么样的坐标变换能满足变换相容性的要求。我们说: 可以证明, 利用整体坐标下单元节点坐标值 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, 采用位移插值函数式(5-3)相同形式的坐标变换式,

能满足坐标变换相容性的要求,即

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{cases} \quad (5-4)$$

要证明式(5-4)能实现由任意四边形到中心在原点边长为2的正方形之间的坐标变换是点对应的并不困难,由于式(5-4)中变换函数 $N_i(\xi, \eta)$, $i=1, 2, 3, 4$ 是与形状函数完全一样的双线性函数,在正方形每一条边上, $N_i(\xi, \eta)$ 是一个坐标变量的线性函数,而线性变换是点对应的,那么四边形四条边上的变换是点对应的。区域中间只要引直线同样可证明是点对应的。例如, (ξ, η) 平面上直线 $\xi=0$, 由于 $N_i(\xi, \eta)$ 是双线性函数,通过式(5-4)的变换,直线 $\xi=0$ 一定变为 (x, y) 平面上的直线,此直线的两端点分别是 $(\xi, \eta) = (0, 1)$ 和 $(\xi, \eta) = (0, -1)$, 只要证明这两点一定在经过式(5-4)变换后成为对应的四边形 $\overline{12}$ 边和 $\overline{34}$ 边的中点就行,而我们已经证明四边形四条边的变换是点对应的,因此上面两点一定对应任意四边形 $\overline{12}$ 边和 $\overline{34}$ 边的中点。这就证明了式(5-4)确实是可以满足坐标变换相容性要求的变换式。

我们可以看到,位移插值函数公式(5-3)和坐标变换公式(5-4)具有完全相同的形式,它们用同样数目的对应节点值作为参数,并有完全相同的形状函数 $N_i(\xi, \eta)$ 作为这些节点值前面的系数,我们称具有这种特点的单元为等参数单元。上面介绍的是四节点四边形等参数单元。

§ 5-3 等参数单元平面问题有限元格式

在第三章和第四章建立有限元计算格式的七步推导过程中,前三步的主要目的是求出以节点位移表示的单元位移插值函数,或求出单元形状函数,第四至第六步的主要目的是求出单元刚度矩阵,第七步是用已知节点位移计算应力。对于等参数单元,上面

已得到了四节点四边形等参数单元的形状函数,下面主要讨论单元刚度矩阵的形成,即七步推导中的第四至第六步。

一、等参数单元刚度矩阵

第四步:单元应变—单元位移—节点位移之间的关系

由平面问题几何方程和位移插值公式(4-5)与式(5-3),有

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i \\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i \\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} u_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial y} v_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial y} u_4 \\ \quad + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \\
&= [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}\} \quad (5-5)
\end{aligned}$$

比较式(5-5)与式(4-14)。可以看出两式的最终形式是一样的,只是几何矩阵 $[\mathbf{B}]$ 内容不同。

第五步:单元应力-应变-节点位移间的关系

由平面问题物理方程,有

$$\{\sigma(x, y)\} = [\mathbf{D}]\{\epsilon(x, y)\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta}^e\} \quad (5-6)$$

其中 $[\mathbf{D}]$ 为弹性矩阵,已如第四章所述。

第六步:节点力-节点位移间关系

由虚功原理,并利用第三章推导结果,即式(3-11),节点力与节点位移间关系式为

$$\{\mathbf{F}^e\} = \left[\int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d(\text{vol}) \right] \{\boldsymbol{\delta}^e\} \quad (5-7)$$

对平面问题有

$$\{\mathbf{F}^e\} = \left[\int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] t dx dy \right] \{\boldsymbol{\delta}^e\} = [\mathbf{K}^e] \{\boldsymbol{\delta}^e\}$$

其中 $[K^e] = \int [B]^T [D] [B] t dx dy$

这里 $[B]$ 阵由式(5-5)给出, 积分区域为任意四边形单元内区域。

从式(4-15)可知, 三角形线性单元的几何矩阵 $[B]$ 为常量阵, 它与弹性矩阵 $[D]$ 以及厚度 t 的乘积仍然是常量阵, 可以提到积分符号以外。而对于等参数单元, 其几何矩阵由式(5-5)给出, 是 x, y 的函数, 而 x, y 又是 ξ, η 的函数, 因此不能提到积分号之外。另外上面推导的等参数单元刚度矩阵是以局部坐标系 $\xi\eta$ 下的正方形单元作为整个讨论的立足点和出发点的, 式(5-7)所表示的积分是在整体坐标系内的, 必须将它转换为局部坐标系内的积分。而且计算式(5-5)中 $\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}$ 也将用到坐标变换。下面我们来讨论这一坐标变换。

二、等参数坐标变换

由式(5-4)表示的坐标变换式

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{cases}$$

根据复合函数求导法则, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \quad (5-8)$$

为写成矩阵形式, 记变换矩阵(称为雅可比矩阵)为

$$[J] = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

则

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

从而

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ J & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

其中 $[J]^{-1}$ 为雅可比矩阵的逆阵, $|J|$ 称为雅可比行列式, 记为

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

利用式(5-11)可以将式(5-5)中形状函数 $N_i(\xi, \eta)$ 对整体坐标变量 x, y 的偏导数转变为对局部坐标变量 ξ, η 的偏导数。例如

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i}{\partial \eta} \right]$$

其中

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i}{\partial \xi}$$

同理可以得出

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i}{\partial y} = \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i}{\partial y}$$

此外整体坐标与局部坐标的面积微分之间有关系式

$$dx dy = |J| d\xi d\eta$$

从而计算单元刚度矩阵表达式中的积分, 可以从整体坐标系任意四边形区域的积分转换到局部坐标系正方形区域的积分:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] t |J| d\xi d\eta \quad (5-12)$$

这时,可以看到积分区域变得十分简单,所有计算都转化到局部坐标系下的正方形单元进行。但是由于坐标变换,使被积函数具有非常复杂的形式。一般来讲,这一积分是无法解析进行的,通常是采用数值积分的方法来求解。关于数值积分的计算,将在§5-5中予以介绍。

三、能进行等参数变换的条件

只要给定整体坐标系内四个节点的坐标 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, 就可以写出形如式(5-4)的坐标变换式。为保证此变换式在单元上能确定整体坐标与局部坐标间的——对应关系,使等参数变换能真正施行,必须使变换行列式(雅可比行列式) $|J|$ 在整个单元上均不等于零。因为

- (1) 微分变换式 $dx dy = |J| d\xi d\eta$ 中 $|J|$ 不能等于零;
- (2) $|J| \neq 0$ 是雅可比矩阵的逆阵存在的必要条件。

在什么条件下能使 $|J| \neq 0$ 呢? 我们从雅可比矩阵的具体形式来讨论。展开式(5-9), 有

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{4} (1 + \eta_i \eta) x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i}{4} (1 + \eta_i \eta) y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{4} (1 + \xi_i \xi) x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\eta_i}{4} (1 + \xi_i \xi) y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\xi_i x_i}{4} + \frac{\xi_i \eta_i x_i}{4} \eta \right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\xi_i y_i}{4} + \frac{\xi_i \eta_i y_i}{4} \eta \right) \\ \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\eta_i x_i}{4} + \frac{\xi_i \eta_i x_i}{4} \xi \right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\eta_i y_i}{4} + \frac{\xi_i \eta_i y_i}{4} \xi \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令上式中常数

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i \eta_i x_i & B &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i \eta_i y_i \\ a_1 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i x_i & a_2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \xi_i y_i \\ a_3 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \eta_i x_i & a_4 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \eta_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

则雅可比矩阵可写为

$$[J] = \begin{bmatrix} a_1 + A\eta & a_2 + B\eta \\ -a_3 + A\xi & a_4 + B\xi \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

由此得雅可比行列式

$$\begin{aligned} |J| &= (a_1 + A\eta)(a_4 + B\xi) - (a_2 + B\eta)(a_3 + A\xi) \\ &= (a_1 a_4 - a_2 a_3) + (Ba_1 - Aa_2)\xi + (Aa_4 - Ba_3)\eta \end{aligned} \quad (5-15)$$

它是 ξ, η 的线性函数。

既然 $|J|$ 是 ξ, η 的线性函数, 要使 $|J| \neq 0$ 在整个单元上成立, 只需要求 $|J|$ 在四个节点处的值具有同一符号即可。因为这时由线性函数的性质可知, $|J|$ 在整个单元上也将有同一符号, 从而不为零。

以节点 1 为例, 将局部坐标 $(\xi, \eta) = (-1, -1)$ 代入式(5-15), 有

$$|J|_{(-1, -1)} = \begin{vmatrix} a_1 - A & a_2 - B \\ a_3 - A & a_4 - B \end{vmatrix}$$

将各节点局部坐标和整体坐标代入式(5-13), 计算出 a_1, a_2, a_3, a_4, A 和 B 代入上式, 可求得

$$|J|_{(-1, -1)} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} = \overline{12} \cdot \overline{14} \cdot \sin \theta_1 \quad (5-16)$$

其中 θ_1 为整体坐标系中任意四边形单元的 1, 2 边和 1, 4 边所夹的角, $\overline{12}$ 表示 1, 2 边的长度, $\overline{14}$ 表示 1, 4 边的长度, 如图 5-3 所

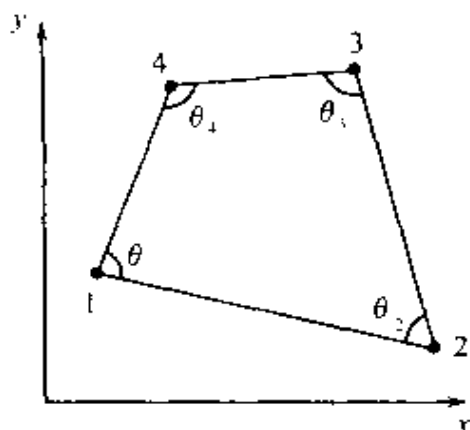


图 5-3 四边形单元的四个内角

示。

同理,在节点 2,3,4, $|J|$ 之值分别为

$$\begin{cases} |J|_{(1,-1)} = \overline{21} \cdot \overline{23} \cdot \sin\theta_2 \\ |J|_{(1,1)} = \overline{32} \cdot \overline{34} \cdot \sin\theta_3 \\ |J|_{(-1,1)} = \overline{41} \cdot \overline{43} \cdot \sin\theta_4 \end{cases} \quad (5-17)$$

由于四边形的内角和为

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\pi$$

所以只有在

$$0 < \theta_i < \pi, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5-18)$$

条件下才会使 $|J|_i$ 符号一致(且一定为正)。这说明为保证式(5-4)确定的等参数变换是可行的,在整体坐标系下所划分的任意四边形单元必须是凸的四边形,而不能有一个内角等于或大于 π ,如图5-4所示。也就是说对求解区域进行任意四边形分割时,不能太任意,其任意性有一个限度。这一限制还可表述为:四边形单元的任意两条对边不能通过适当的延伸在单元上出现交点。

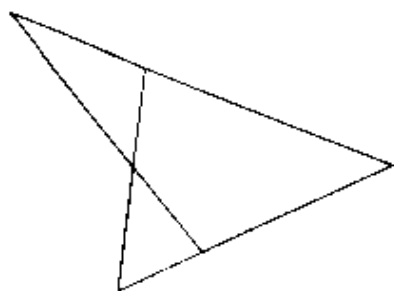


图 5-4 相当的任意四边形

通常为保证计算精度起见,在划分单元时应尽量使四边形单元的形状与正方形相差不远。

四、单元负荷向量的形成

在第四章中我们是将单元所受的载荷作为节点力来处理的。这对于桁架或刚架系统的有限元求解无疑是足够的,但对于连续系统,方程组 $\{F^e\} = [K^e]\{\delta\}$ 中单元的负荷向量可以由单元所受到的各种载荷所构成。

单元上可能受到的外载荷一般有体积力(比如重力、离心惯性力等)、表面力(分布载荷)和集中力(集中载荷)。

根据虚功原理,外力虚功 = 内力虚功。即

$$W_{\text{ext}} = \{\delta^e\}^T \{F^e\} = \{\delta^e\}^T \left[\int_V [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right] \{\delta^e\} = W_{\text{int}} \quad (5-19)$$

外力虚功表达式 $W_{\text{ext}} = \{\delta^e\}^T \{F^e\}$ 中 $\{F^e\}$ 表示外力形成的单元负荷向量。不同的外载荷会有不同的单元负荷向量表达式。

1. 体积力负荷向量 $\{F_p^e\}$ 的形成

设单位体积所受到的体积力,即体积力密度对二维问题为

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}$$

则单元 e 上外载荷所做的外力虚功为

$$W_{\text{ext}} = \iint_V \{\boldsymbol{\delta}^e\}^T \{\mathbf{P}\} t dx dy = \{\boldsymbol{\delta}^e\} \iint_V [\mathbf{N}]^e{}^T \{\mathbf{P}\} t dx dy \quad (5-20)$$

其中 $\{\boldsymbol{\delta}^e\}$ 为节点虚位移向量, $[\mathbf{N}]^e$ 为单元形状函数,即

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = [\mathbf{N}]^e \{\boldsymbol{\delta}^e\}$$

将式(5-20)与式(5-19)比较,可知

$$\{\mathbf{F}_P\} = \iint_V [\mathbf{N}]^e{}^T \{\mathbf{P}\} t dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^e{}^T \{\mathbf{P}\} t \left| \frac{1}{J} \right| d\xi d\eta \quad (5-21)$$

2. 表面力负荷向量 $\{\mathbf{F}_q\}$ 的形成

第四章中处理表面力是采用将分布力等效转化为集中力作用于节点上。实用中也可以直接利用表面力分布密度写出表面力向量叠加到方程中去。设单位表面积所受表面力密度(在二维情况时是单位长度上的力)为

$$\{\mathbf{Q}\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}$$

则单元 e 上表面力所作的外力虚功为

$$W_{\text{ext}} = \int_V \{\boldsymbol{\delta}^e\}^T \{\mathbf{Q}\} ds = \{\boldsymbol{\delta}^e\} \int_V [\mathbf{N}]^e{}^T \{\mathbf{Q}\} ds \quad (5-22)$$

将式(5-22)与式(5-19)比较,可得

$$\{\mathbf{F}_q\} = \int_V [\mathbf{N}]^e{}^T \{\mathbf{Q}\} ds$$

其中

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\eta \right]^2} \end{aligned} \quad (5-23)$$

如图5-5所示,在单元的 $\bar{1}\bar{2}$ 边和 $\bar{3}\bar{4}$ 边, $d\eta=0$,则

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi$$

在单元的 $\bar{4}1$ 边和 $\bar{2}3$ 边, $d\xi = 0$, 则

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} d\eta$$

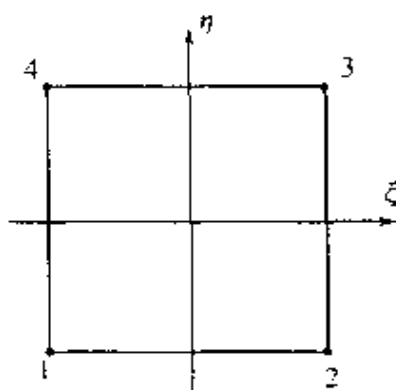


图 5-5 正方形单元受力边

3. 集中力向量 $\{F_R\}$ 的形成

集中力可直接作用于节点上其向量记为 $\{F_R\}$ 。

从而单元的负荷向量由体积力向量、表面力向量和集中力向量合并而成, 即

$$\{F\} = \{F_p\} + \{F_q\} + \{F_R\} \quad (5-24)$$

得到了单元刚度矩阵和单元负荷向量, 就可以按节点号叠加总体刚度矩阵和总负荷向量。最后得到方程组

$$[K][\delta] = \{F_p\} + \{F_q\} + \{F_R\} \quad (5-25)$$

其叠加方法已在前面几章中作过介绍。

§ 5-4 八节点曲边四边形等参数单元

任意四边形的四节点等参数单元可以较方便地对求解区域进行分割, 但许多情况下仍嫌精度不够理想。这一方面是因为位移插值函数是双线性函数, 次数仍较低, 另一方面因为整体坐标下的任意四边形是直边四边形, 对于具有曲线边界的求解区域的模拟

仍会有一定误差。为进一步提高计算精度,可以在四节点等参数单元的基础上增加节点数目,提高位移值插值函数的阶次。使用中采用得最多的是八节点曲边四边形等参数单元。

一、平面八节点等参数单元位移插值函数

局部坐标下八节点等参数单元仍然是边长为2的正方形。除了原来四节点单元的四个角节点外,又将各边中间点取为节点。节点排列和单元形状如图5-6所示。八个节点的局部坐标 (ξ_i, η_i) , $i=1,2,\dots,8$ 分别为

$$\begin{aligned} &(-1, -1), (0, -1), (1, -1), (1, 0) \\ &(1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0) \end{aligned}$$

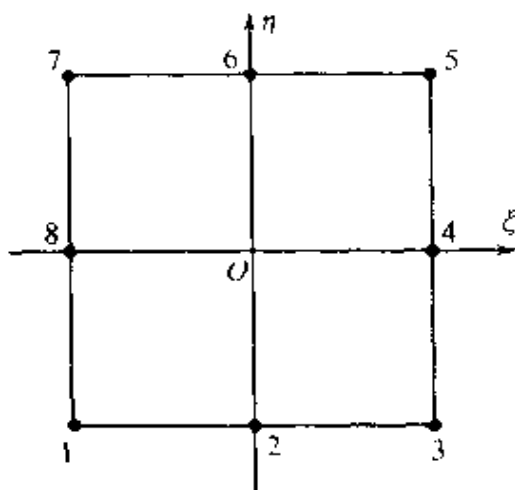


图 5-6 局部坐标下八节点坐标

位移插值函数取下列多项式形式:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \quad (5-26)$$

式(5-26)当固定 ξ 时, δ 是 η 的二次函数,固定 η 时, δ 是 ξ 的二次函数。因此,这样的位移插值函数是双二次函数,相应的插值称为双二次插值。显然,它比双线性的位移插值函数阶次提高了,计算精度必然也会提高。

那么这一双二次的位移插值函数是否在单元边界上满足变形协调条件呢?我们从图 5-6 看,单元每一条边上 ξ (或 η)为固定值,因此这里 δ 是 ξ (或 η)的二次函数,完全可以由该边上三个节点处的函数值所唯一确定,相邻单元的公共边上,三个节点为两相邻单元所共有。所以插值函数在此边上的连续性可以得到保证。在此局部坐标下单元变形的协调性条件被满足,再加上等参数坐标变换的相容性,则整体坐标下的变形协调性也将得以满足。

二、八节点等参数单元的形状函数

记节点处的位移值为 $\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, 比照式(5-3)和式(5-26),八节点四边形等参数单元在局部坐标系下的位移插值函数可写为

$$\delta = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \delta_i \quad (5-27)$$

其中 $N_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 为形状函数。在等参数单元的计算中我们一般并不关心位移插值函数式(5-26)的具体形式,而注意的是形状函数的形式。因为有了 $N_i(\xi, \eta)$ 以后,立即可由式(5-27)写出相应的位移插值函数

推导四节点四边形等参数单元的形状函数时是借用上一章的结果得到的,这里再讨论一种求形状函数的方法,其中用到了 §4-6 中讨论过的形状函数的性质。

利用形状函数的性质,八节点等参数单元的形状函数可由下述两个条件所唯一确定:

- (1) $N_i(\xi, \eta)$ 是形如式(5-26)的双二次函数;
- (2) $N_i(\xi, \eta)$ 在节点 i 其值为 1, 在其余节点 j ($j \neq i$) 其值为 0, 即

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = 1, \quad N_i(\xi_j, \eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8, j \neq i$$

其中 (ξ_i, η_i) 是节点 i 的局部坐标。

既然形状函数是唯一的,则我们可以采用任意方法来求。以

$N_1(\xi, \eta)$ 为例,由条件(2), $N_1(\xi, \eta)$ 在节点 2~8 其值为 0,如图 5-6 所示,注意到直线 35、57、28 通过这七个点,而这三条直线的方程分别是

$$\xi - 1 = 0, \quad \eta - 1 = 0, \quad \xi + \eta + 1 = 0$$

这样一来,函数 $N(\xi, \eta) = (\xi - 1)(\eta - 1)(\xi + \eta + 1)$ 在节点 2~8 的值为 0,而且满足条件(1),是形如式(5-26)的双二次函数,再利用 $N_1(\xi, \eta)$ 在节点 1(-1, -1)的值为 1 的条件,可以写出

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(\xi - 1)(\eta - 1)(\xi + \eta + 1)}{[(\xi - 1)(\eta - 1)(\xi + \eta + 1)]_{(-1, -1)}} \\ &= \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1)(\xi + \eta + 1) \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \\ N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \end{aligned}$$

再来求 $N_2(\xi, \eta)$ 。它在节点 1 和 3~8 应为 0,注意到直线 17、35、57 通过这些点,而这三条直线的方程分别是

$$\xi + 1 = 0, \quad \xi - 1 = 0, \quad \eta - 1 = 0$$

于是函数 $N(\xi, \eta) = (\xi + 1)(\xi - 1)(\eta - 1) = (\xi^2 - 1)(\eta - 1)$ 在这些节点处值为零,而且满足条件(1),是形如式(5-26)的双二次函数,再利用在节点 2(0, -1)的值为 1 的条件,可以写出

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{(\xi^2 - 1)(\eta - 1)}{[(\xi^2 - 1)(\eta - 1)]_{(0, -1)}} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

同理可得

$$\begin{aligned} N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \\ N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \end{aligned}$$

利用八个节点的局部坐标值可将上述形状函数写成统一的形式:

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1), & i = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta), & i = 2, 6 \\ \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi), & i = 4, 8 \end{cases} \quad (5-28)$$

这就是八节点平面等参数单元的形状函数, 它使下述等式成立

$$\begin{cases} \xi = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \xi_i \\ \eta = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \eta_i \end{cases} \quad (5-29)$$

$$\text{及} \quad \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (5-30)$$

说明在局部坐标下满足常应变准则。

三、等参数变换及其实现条件

给出整体坐标下八个点的坐标值 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 8$, 由等参数变换的思想可写出局部坐标 (ξ, η) 到整体坐标 (x, y) 的坐标变换式:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{cases} \quad (5-31)$$

类似于四节点等参元的坐标变换, 式(5-31)可以满足坐标变换的相容性。此时, 坐标变换矩阵(雅可比矩阵)的形式为

$$[J] = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (5-32)$$

相应的逆矩阵 $[J]^{-1}$ 和雅可比行列式的表达式也可以由此写出。

通过坐标变换式可以了解整体坐标下单元的形状。以局部坐标下单元的345边为例,过这几个节点的直线方程为 $\xi=1$ 。将 $\xi=1$ 代入坐标变换式(5-31),可得345边在整体坐标下的参数方程形式

$$\begin{cases} x = a\eta^2 + b\eta + c \\ y = d\eta^2 + e\eta + f \end{cases}$$

消去参数 η 可知这是一抛物线方程(特殊情况下可退化为一曲线),单元的其余边也是类似的。可见八节点等参元在整体坐标下是以抛物线为边线的曲边四边形单元,如图5-7所示。它可以较好地模拟计算区域的曲线边界,使计算精度提高。另外,每一边上有三个节点,三个节点处的函数值可唯一决定这条抛物线。这样我们又从另一个方面说明了八节点曲边四边形等参数单元在整体坐标下满足相容性条件。

为保证等参数坐标变换能顺利进行,仍需使 $|J| \neq 0$ 。类似于

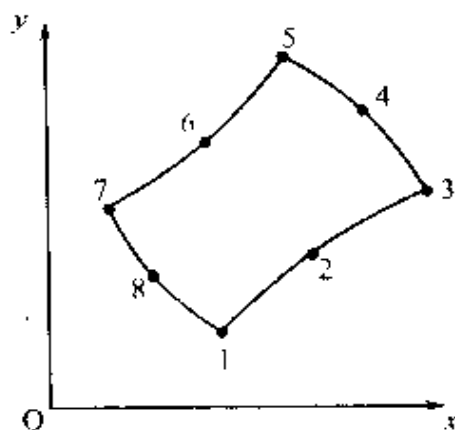


图 5-7 整体坐标下八节点单元形状

四节点等参数单元,整体坐标下八个节点的位置配置和单元形状需要作一定的限制。不能使单元太歪斜。单元划分时整体坐标下曲四边形的任意两条对边即使通过适当的延长也不能在单元上出现交点。也就是说不能有图 5-8 所示单元形式出现,否则会使计算无法进行。另外,每边的中间点应尽量在两角点的当中,若位于 $1/3$ 分点,则会出现较大计算偏差,若位于 $1/4$ 分点,则计算结果会完全不正确,甚至方程出现奇异性,计算无法进行下去。因此,单元划分时应做到:

- (1) 单元划分尽量接近正方形;
- (2) 中间节点尽量位于每边的 $1/2$ 分点处。

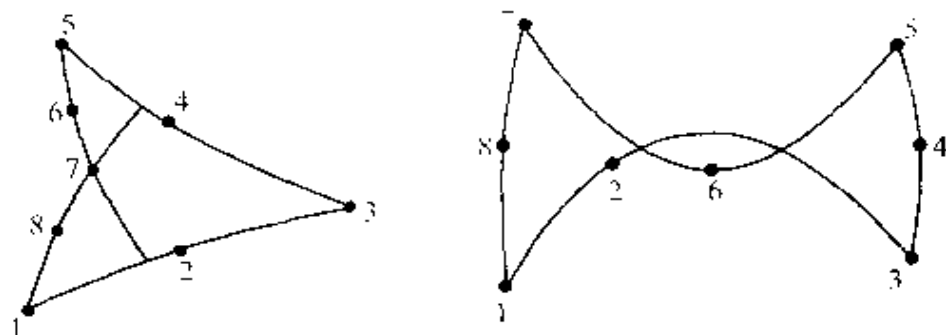


图 5-8 不允许出现的单元形式

四、等参数单元的特点

等参数单元的计算精度高,可以较好地模拟曲线边界的求解区域,这些都使等参数单元在有限元计算中得到广泛应用。等参数单元的另一个重要优点是它所需要输入的数据量少。有资料表明,对一个平面应力分析的问题,分别采用三节点三角形线性单元和八节点等参数单元求解,采用同样多的节点(200 个节点)及完全相同的节点分布形式。三角形单元用了 300 个左右单元,输入的数据量多,而计算精度在应力集中处却不理想。八节点等参数单元只用了 50 个单元,输入数据大大减少,而计算精度高,应力集中处与实际情况基本相同。因此,现在的有限元分析大多数采用等参数单元计算。

等参数单元的主要缺点是由于要进行等参数变换,使程序的编制变得复杂。另外由于要进行数值积分,使得形成刚度矩阵的计算时间加长,占用较多的计算机资源。尽管如此,在已有程序和计算机计算速度不断提高的情况下,上述缺点都不成为使用中的主要障碍。

如果认为八节点等参数单元的计算精度还不够高,还可以在单元每边加节点以提高位移插值函数的阶次。例如图 5-9 所示 12 节点单元。仿照本节的方法可写出它的形状函数。实际情况是八节点等参数单元解平面问题精度通常足够了。

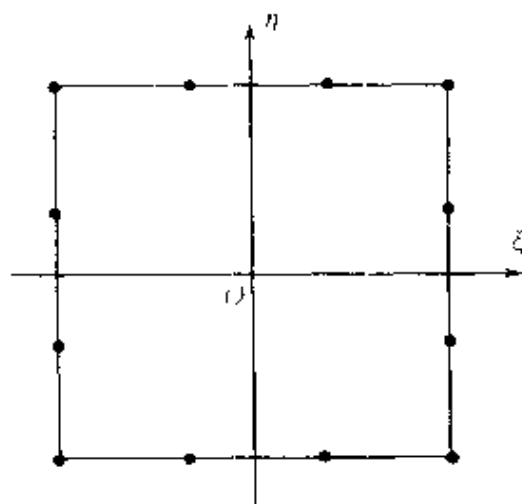


图 5-9 12 节点等参数单元

除了上述四节点或八节点等参数单元之外,还可以有在单元四边配置不同节点数目的等参数单元。如图 5-10 所示,仿照本

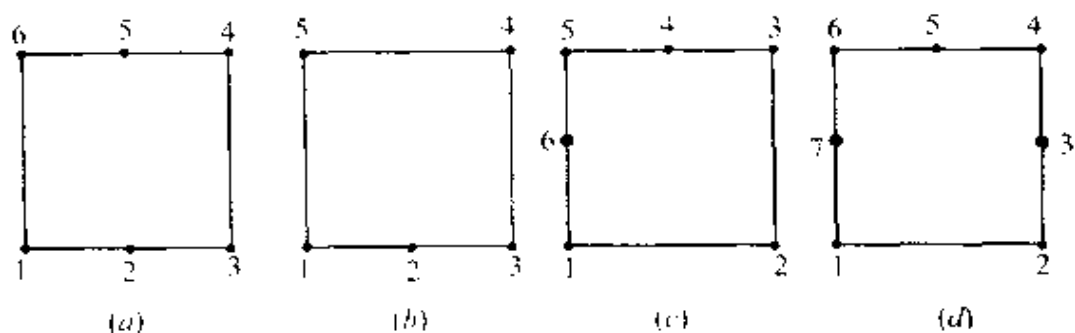


图 5-10 不同节点配置的平面等参数单元

节的方法都不难写出它们的形状函数。由于有这许多不同节点配置的等参数单元,可以在求解区域内方便地实现节点的疏密过渡。

§ 5-5 数值积分及其应用

我们在讨论平面问题等参数单元计算格式时曾提到,为求出等参数单元的刚度矩阵,需要计算下述形式的积分

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] t [J] d\xi d\eta$$

而且被积函数 $f(\xi, \eta)$ 由于等参数变换的缘故而成为非常复杂的形式,很难解析计算这一积分,实际计算时是采用数值积分的方法求解。采用数值积分必然会带来一定的误差,数值积分的精度越高,误差越小,但数值积分的计算工作量增大。实用中必须考虑计算精度与计算开销的适当统一。

为简单计,我们从一维函数积分 $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ 开始讨论数值积分方法,再将其推广到二维、三维情况。

一般来讲,有两种进行数值积分的方法。

一、牛顿-柯特斯求积法

在积分区间 $[-1, 1]$ 上取 n 个分点, $\xi_1 = -1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-1} < \xi_n = 1$, 求出各分点处的函数值 $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ 。然后利用这些点处的函数值构造一个 m 次多项式,并对这一多项式进行精确积分,以此代替原函数的积分。实用中是利用已经求出的 m 次多项式的积分公式。应用时代入相应的节点坐标和节点处函数值即可。

$m = 0$ 时是最简单的矩形公式:

$$\int_1^b f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (\xi_{k+1} - \xi_k)$$

这一公式的几何意义是用图 5-11(a) 中矩形阴影面积代替原来的曲边梯形面积。

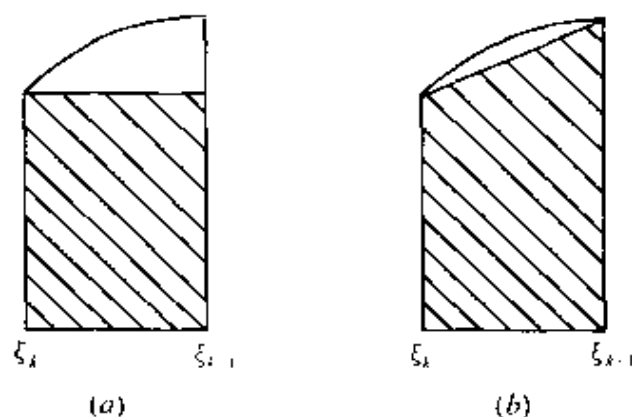


图 5-11 牛顿-柯特斯求积法的几何意义

$m=1$ 时是梯形公式:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} [f(\xi_k) + f(\xi_{k+1})] (\xi_{k+1} - \xi_k)$$

这一公式的几何意义为在区间 $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ 内用图 5-11(b) 中梯形阴影面积代替原来的曲边梯形面积。

$m=2$ 时是辛普森公式:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3} [f(\xi_k) + 4f(\xi_{k+\frac{1}{2}}) + f(\xi_{k+1})] (\xi_{k+1} - \xi_k)$$

可以一直将公式写下去。将它们写成统一的形式为

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n H_k f(\xi_k)$$

其中 H_k 为求积系数或称积分系数。

因为 n 个函数值最高可以确定一个 $(n-1)$ 次多项式, 所以牛顿-柯特斯积分公式具有 $n-1$ 次的代数精度, 即公式的误差是 $O(\Delta^n)$ 。

二、高斯求积法

如果不事先规定积分点的位置,而是允许这一些点位于能得到精度最好的积分值之处,在只给定积分点数目的条件下,这样做可以提高所构造的求积公式的精度。例如仍采用公式

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n H_k f(\xi_k)$$

则如果规定可以取 n 个分点,我们必须求出 $2n$ 个未知量。即 n 个分点位置和 n 个分点处的函数值 (ξ_k 和 $f(\xi_k)$, $k=1,2,\dots,n$)。 $2n$ 个未知量求出后最高可以构造一个 $(2n-1)$ 次多项式,对它进行精确积分,并用积分结果代替原函数的积分,其误差是 $O(\Delta^{2n})$ 。也就是说这种求积公式具有 $(2n-1)$ 次的代数精度,这样求出的数值积分公式称为高斯积分公式。

高斯积分公式中 H_k 和 ξ_k 的求解比较复杂,例如积分点应是勒让德多项式 $L_n(\xi)$ 的 n 个不同的实根,即要求解勒让德多项式。而积分系数 H_k 也与勒让德多项式的导数有关。工程中是利用已被求出的 H_k 和 ξ_k 所列成的表格查取应用,见表 5-1。

表 5-1 高斯积分点与积分系数

n	积分点坐标 ξ_k	积分系数 H_k
2	± 0.5773502692	1
3	± 0.77459666920 0	0.5555555556 0.8888888889
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889

从上面的分析中可知,在积分点数目相同的情况下,高斯求积

法比牛顿-柯特斯求积法精度高,反过来在保证相同精度的前提下,高斯积分法的计算次数少。对等参数的有限元分析,被积函数 $f(\xi, \eta) = [B]^T [D] [B] J$ 的计算十分复杂,因此,计算次数少的高斯积分法更适用。所以,等参数有限元分析中的数值积分都采用高斯求积法。

三、高维情况的高斯求积法

对于二维情况,为得到积分 $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$, 只要将二重积分化为二次积分,并利用一维情况时高斯积分两次即可。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta \\ &\approx \int_{-1}^1 \left(\sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j, \eta) \right) d\eta = \sum_{j=1}^n H_j \int_{-1}^1 f(\xi_j, \eta) d\eta \\ &\approx \sum_{i=1}^n H_i \left(\sum_{j=1}^n H_j f(\xi_i, \eta_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \end{aligned}$$

其中 ξ_i 和 $\eta_j, i=1, 2, \dots, n$ 为表 5-1 所列高斯积分点, $H_i, i=1, 2, \dots, n$ 为相应的积分系数。此时平面上的积分点数有 $n \times n$ 个。

对于三维情况也是类似的:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

此时空间区域积分点有 $n \times n \times n$ 个。

四、合适的高斯积分阶数

用数值积分代替精确积分,无疑计算时会产生误差。为尽量减小这一误差,希望采用尽可能高的数值积分阶次。但是数值积分的计算是非常费时的,组集刚度矩阵时相当多的时间花费在计算数值积分上。高阶次的数值积分计算将使计算费用大幅度提高。例如,对平面问题 $n=2$ 时,每个单元有 4 个积分点, $n=3$ 时

有 9 个, $n=4$ 时高达 16 个。二维问题是平方关系, 三维问题就是立方关系。所以, 选用数值积分的阶次应在保证积分收敛和计算精度在允许范围内时尽量低。经验表明, 二维情况下, 四节点单元 n 取 2, 八节点单元 n 取 3 较好。有时八节点单元取 $n=2$ 也会有较好的计算精度。

小结:

(1) 等参数单元的特征是单元上未知函数(位移插值函数)的插值公式与坐标变换的表达式具有完全相同的形式。它包括了相当大量的单元类型, 可根据实际需要适当选用。

(2) 构造等参数单元是以局部坐标为出发点, 并使整个讨论立足于局部坐标上。即在局部坐标系中的规则单元上构造相容的插值函数——导出相容的坐标变换式(得到整体坐标系中单元形状)——由局部到整体坐标系的坐标变换形成有限元计算格式(其中用到数值积分)。整个讨论和计算都是在局部坐标系中规则单元内进行的。最后在整体坐标下叠加各单元刚度矩阵, 求解。

(3) 等参数单元的优点是有较大的选择单元的自由, 能很好地模拟曲线边界, 计算精度高, 输入数据少, 这一点对复杂区域的求解时特别突出。

(4) 使用等参数单元要进行复杂的坐标变换, 必须采用数值积分, 程序编制较复杂, 形成刚度矩阵的计算时间长。但不对计算带来本质影响。

(5) 为保证精度和使计算切实可行, 单元分割时要满足单元不过份歪斜的要求。中间节点尽量等分边长。

(6) 等参数方法构造的插值函数只能做到本身满足相容性条件。它的一阶导数在相邻单元的公共边上不连续。因此, 原则上只能适用于二阶微分方程所描述的问题, 如应力分析、稳定温度场、电磁场分析等, 而对于板弯曲问题所必须满足的四阶微分方程, 上述等参数单元方法一般不适用。

第六章 热传导问题的有限元法

§ 6-1 问题的提出

有限元法开始被用于求解桁架、刚架以及弹性力学应力问题等结构方面的强度和变形问题。后来被推广用于求解热传导、电磁场、流体力学等非结构问题。求解结构问题时一般是直接利用基本的力学或物理原理,或是从单元的位移插值函数出发利用弹性力学原理(虚功原理)推导出有限元法的计算格式来求解的。而对于非结构问题无法应用相应的力学原理来推导有限元计算格式,不能再用结构力学或弹性力学的方法进行分析。这时,我们所借助的是数学工具:变分原理来分析、推导相应的计算格式。

例如,热传导中稳定温度场的求解是工程中经常遇到的问题。如计算车轴的温度分布,计算高温零件如内燃机活塞的温度分布,计算保温车、冷藏车的温度分布等都属于稳定温度场问题。从传热学中可知,对于均质物体内部温度不随时间变化的情况,温度分布函数 $T = T(x, y, z)$ 应满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (6-1)$$

再加上其中用得最多的边界条件

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right) \Big|_{\Gamma} = \alpha T_0 \quad (6-2)$$

其中 λ ——热传导系数;

α ——对流换热系数;

T_0 ——外界介质温度;

Γ ——表示物体边界。

式(6-1)、式(6-2)构成了热传导中稳定温度场的定解问题。用数学方法求解这一由偏微分方程组成的定解问题,只有在物体形状和边界条件都非常简单的情况下才有可能求出解析解。例如,无限大平面,半无限大平面,圆平面等。而对于绝大多数形状复杂的工程构件,其温度分布用纯数学的方法目前还不能求解。工程中也多是采用近似的方法或数值的方法计算。有限元法提供了求解式(6-1)、式(6-2)定解问题的一种方法,它可以求解具有复杂形状和复杂边界条件的工程零件的温度场。有限元法是利用变分原理将式(6-1)、式(6-2)所列偏微分方程定解问题的求解转化为对某一泛函求极值的问题,再通过一定的运算,推导出有限元计算格式求解的。那么什么叫泛函?什么是泛函求极值?求极值要满足什么样的条件?何谓变分?何谓变分原理?怎样利用变分原理推导出有限元的计算格式?这些都是比较复杂的问题,要解释清楚有些还要用到较深的数学知识。下面分别予以简要介绍,使读者对这些问题有一个初步概念。

§ 6-2 泛函与变分的基本概念

在工程中常常遇到 $z = f(x)$ 类型的函数,这时因变量 z 的值由自变量 x 的值来确定。这是数学分析课程中的知识。但有时我们还会遇到另外一种特殊类型的函数,它的因变量的值是由一个函数 $y = y(x)$ 或几个函数 $(y_1(x), y_2(x), \dots)$ 来确定。例如,求平面上任意给定的两点 A 和 B 之间曲线的长度 L (见图 6-1),由数学分析知识,有

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$y = y(x)$ 不同,曲线的长度就会不同,也就是说 L 是曲线 $y = y(x)$ 的函数,这就是泛函。下面不加证明的给出泛函问题的一些定义。

一、泛函

其值由一个或几个函数确定的函数称为泛函。简单记：泛函——函数的函数。

对图 6-1 所示例题,记为

$$L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

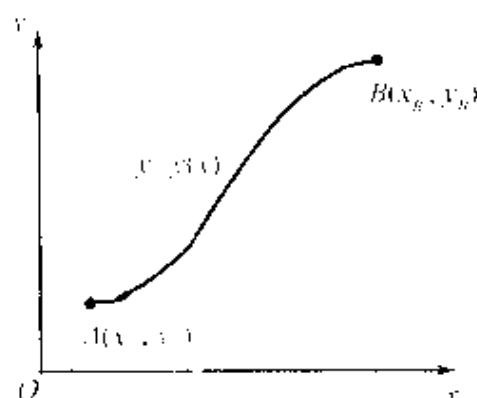


图 6-1 两点间的曲线长度

二、泛函的极值

我们知道函数有极值问题,同样道理泛函也有极值问题。泛函的极值问题就是要求出使泛函取得最大值或最小值的函数 $y = y(x)$ (或 $y_1(x), y_2(x), \dots$)。因此,泛函极值——求使泛函取最大(小)值的函数。

三、变分法

研究函数的极值问题用的是微分学,研究泛函极值的方法是变分法。因此,变分法——研究泛函极值的方法。

四、变分

研究函数 $y = f(x)$ 在一点的性态用的是微分。其中包括自

变量的微分 dx 和函数的微分 dy , 函数的微分可写为

$$dy = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(x + \Delta x \cdot \epsilon) \right|_{\epsilon=0}$$

其中 ϵ 为任意小的正数。

类似的, 研究泛函在一点的性态用变分。自变函数 $y = y(x)$ 的变分记为 δy , 泛函的变分记为 δI 。 δI 的定义为

$$\delta I = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[y(x) + \epsilon \cdot \delta y] \right|_{\epsilon=0} \quad (6-3)$$

其中 ϵ 为任意小的正数。

五、泛函取极值的条件

从数学分析中可知, 可微函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极值的必要条件是该点处 $dy = 0$, 即

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} f(x_0 + \epsilon \cdot \Delta x) \right|_{\epsilon=0} = 0$$

对于有变分的泛函 $I = I[y(x)]$ 来说, 在 $y = y_0(x)$ 上达到极值的必要条件是在该曲线上有 $\delta I = 0$, 即

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[y_0(x) + \epsilon \cdot \delta y] \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (6-4)$$

可见泛函取极值的条件与函数取极值的条件是类似的, 但它们之间有本质的差别。函数的极值条件为自变量在某点处的增量 $\Delta x \rightarrow 0$ 时函数将以一定的方式趋于零, 即 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow 0$; 而泛函取极值的条件为自变函数 $y = y(x)$ 在某处的变分 $\delta y \rightarrow 0$ 时, 泛函以某种方式趋于零。

六、变分法基本预备定理

如果函数 $F(x)$ 在线段 (x_1, x_2) 上连续, 且对于只满足某些一般性条件的任意选定的函数 $\delta y(x)$ 有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x) \delta y(x) dx = 0 \quad (6-5)$$

则在线段 $x_1 \leq x \leq x_2$ 上 $F(x) = 0$ 。

其中, $\delta y(x)$ 所满足的一般性条件是: 一阶或若干阶可微, 在线段端点处为零, $|\delta y(x)| < \epsilon$ 或 $|\delta y(x)|$ 及 $|\delta y'(x)| < \epsilon$ 等。

利用变分法基本预备定理, 可证明一维泛函 (只与一个函数 $y(x)$ 有关的泛函) 取极值的条件。

$$\text{设泛函 } I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (6-6)$$

其中, 确定泛函的曲线的边界点是已知的, 即 $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$, 函数 $F(x, y, y')$ 认为是三阶可微的。根据变分定义, 因为

$$I[y + \epsilon \delta y] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y + \epsilon \delta y, y' + \epsilon \delta y'] dx$$

所以有

$$\begin{aligned} \delta I = \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[y + \epsilon \delta y] &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y + \epsilon \delta y, y' + \epsilon \delta y') \right] \delta y + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y + \epsilon \delta y, y' + \epsilon \delta y') \right] \delta y' \right\} dx \end{aligned}$$

若令 $\epsilon = 0$, 则

$$\delta I = \frac{\partial}{\partial \epsilon} I[y + \epsilon \delta y] \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (6-7)$$

在上式右端, 因为

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y)$$

所以, 利用分步积分公式有

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y) = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right] \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

由固定边界条件可知 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, 即

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right] \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

又因
$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx$$

故得

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (6-8)$$

将式(6-8)代入式(6-7),可得

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx$$

根据泛函取极值的必要条件,有

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0$$

由于上式中 δy 是任意选定的函数,且满足一般性条件,所以由变分法基本预备定理便可得式(6-6)所示一维泛函实现极值的条件,即

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (6-9)$$

七、变分原理

说明求某泛函的极值与求解特定的微分方程及其边界条件等价的原理。

事实上,上面证明一维泛函取极值条件时已经体现了变分原理。一维泛函式(6-6)取极值的条件就是微分方程式(6-9)及其边界给定条件。换句话说,满足微分方程式(6-9)及其给定边界条件的函数 $y(x)$ 一定使泛函式(6-6)取极值。

下面举一个历史上著名的变分命题的例子,以帮助对泛函和变分等概念的理解。

[例]: 最速降线问题。

在铅垂平面上有 A 、 B 两点,它们不在同一水平线和同一铅垂线上。如图 6-2 所示。设有一重物在重力作用下从 A 点沿某一曲

面下滑到 B 点, 不计重物与曲面间摩擦力。显然, 从 A 点到 B 点的下滑时间随下滑曲面的不同而不同。曲面与铅垂平面的交线就是下滑曲线。所求解的下滑时间最短的曲线就是最速降线。

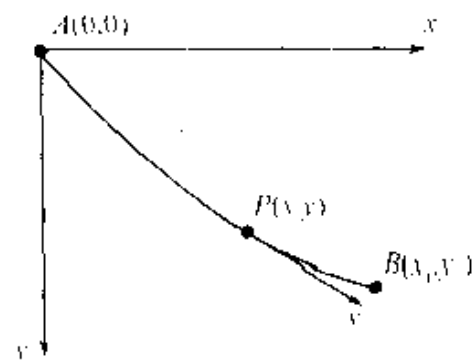


图 6-2 最速降线问题示意图

[解]: 设 A 点与坐标原点重合, B 点的坐标为 (x_1, y_1) 。重物下滑到任一点 $P(x, y)$ 时的速度为 v , 则重物从 A 点到 P 点失去的位能为 mgy , 获得的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$ 。由能量守恒定律, 有

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \text{ 或 } v = \sqrt{2gy}$$

从另一方面看, 若 A 点到任意一点 (x, y) 的曲线弧长为 s , 则弧长对时间的导数即为速度。有

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

而

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

所以

$$dt = \frac{ds}{ds/dt} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

于是从 A 点到 B 点积分便得下滑所需时间:

$$t = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

可见下滑时间 t 是函数 $y(x)$ 的泛函, 记作 $T[y(x)]$, 即

$$T[y(x)] = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2gy}} dx \quad (6-10)$$

不同的函数 $y(x)$ 对应不同的时间 t , 最速降线问题就是求时间 t 最小时的函数 $y(x)$ 。用文字表述这一命题如下:

在满足 $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$ 的一切 $y(x)$ 函数中, 选取一个函数, 使泛函 $T[y(x)]$ 为最小值。

我们可以利用式(6-9)来求解这一泛函极值问题。因式(6-10)为一维泛函, 而且不显含 x , 即

$$F = F(y, y')$$

由于
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dx}$$

而对于不显含 x 的 $F(y, y')$ 有 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} = 0$, 将上式代入式(6-9), 有

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dx} = 0$$

另一方面, 因为

$$\frac{d}{dx} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{dx} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dx} \right) \frac{dy}{dx}$$

比较上两式可得

$$\frac{d}{dx} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

积分一次, 有

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{dx} = C \quad (6-11)$$

即对于泛函中函数 F 不显含 x 时, 取极值条件为式(6-11)。

对于最速降线问题泛函式(6-10)中

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{\sqrt{2gy} \sqrt{1 + y'^2}} y'$$

代入式(6-11)中,有

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} y' = C$$

通分整理后,得

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}(1+y'^2 - y'^2) = C$$

即

$$\frac{1}{2gy(1+y'^2)} = C^2$$

或

$$y(1+y'^2) = \frac{1}{2gC^2} = C_1$$

所以

$$y = \frac{C_1}{1+y'^2}$$

这是一个常微分方程,用参数解法,令 $y' = \cot \frac{\theta}{2}$ 有

$$y = \frac{C_1}{1 + \cot^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\text{则 } dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\cot^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos\theta)d\theta$$

积分可得

$$x = \frac{C_1}{2}(\theta - \sin\theta) + C_2$$

由边界条件

$$y(0) = 0 \text{ 可得 } C_2 = 0$$

从而

$$\begin{cases} x = \frac{C_1}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (6-12)$$

即为所求。由平面解析几何知识可知该曲线是以 $\frac{C_1}{2}$ 为半径的圆的旋轮线(摆线)。常数 C_1 可由另一边界条件 $y(x_1) = y_1$ 求出。

§ 6-3 稳定温度场的变分原理

§ 6-1 节中式(6-1)和式(6-2)给出了三维稳定温度场应满足的微分方程及其边界条件。为简单计,下面以轴对称物体的稳定温度场为例来讨论微分方程及其边界条件与 § 6-2 中所述泛函、变分概念是如何建立起联系的。

轴对称物体是指它的几何形状是由物体的某一平面绕它的中心轴旋转而形成的回转体。工程中这类零件相当多,如圆盘、轴类等。如果它的边界温度分布也完全对称于中心轴,则回转体内的温度分布将只是圆柱坐标中 r, z 的函数,而与圆周角 θ 无关(图 6-3),即温度 $T = T(r, z)$ 。这就是轴对称的温度场问题。

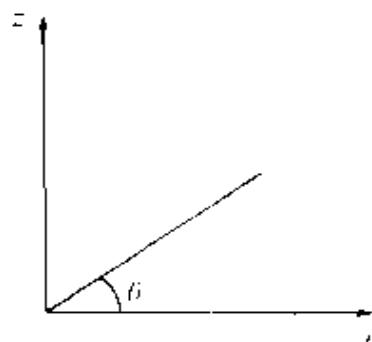


图 6-3 圆柱坐标系

相应的微分方程及边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right)_{\Gamma} = f + \alpha T_0 \end{cases} \quad (6-13)$$

轴对称问题实质上是一个三维问题,只是利用了问题的轴对称性质转化为一个二维问题,处理时可得到许多方便。

解析的求解式(6-13)所示定解问题仍然是困难的,但是可以通过变分原理将它转化为一个泛函求极值问题。这一变分原理可表述如下。

轴对称稳定温度场的变分原理:满足微分方程及边界条件式(6-13)的函数 $T(r, z)$ 是使泛函

$$I = \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz + \int_s \left(\frac{\alpha}{2} T^2 - fT \right) r ds \quad (6-14)$$

取极小值的函数。

证:首先,由变分定义证明上述泛函变分问题与微分方程及边界条件式(6-13)是等价的。

因为

$$\begin{aligned} I[T + \epsilon \cdot \delta T] &= \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left\{ \left[\frac{\partial(T + \epsilon \cdot \delta T)}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial(T + \epsilon \cdot \delta T)}{\partial z} \right]^2 \right\} r dr dz + \\ &\quad \int_s \left[\frac{\alpha}{2} (T + \epsilon \cdot \delta T)^2 - f(T + \epsilon \cdot \delta T) \right] r ds \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + 2\epsilon \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \delta T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + 2\epsilon \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. \epsilon^2 \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz + \int_s \left[\frac{\alpha}{2} T^2 + 2\epsilon \cdot T \delta T + \epsilon^2 (\delta T)^2 \right] - \\ &\quad f(T + \epsilon \cdot \delta T) \Big| r ds \end{aligned} \quad (6-15)$$

从而,泛函 I 的变分为(将式(6-15)对 ϵ 求导后令 $\epsilon=0$)

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{\partial I(T + \epsilon \cdot \delta T)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \delta T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right) r dr dz + \int_s (\alpha T - f) \delta T r ds \end{aligned} \quad (6-16)$$

注意到式(6-16)中等号右边二重积分中的两项,由于

$$\begin{cases} r \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \delta T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \delta T \right) - r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot \delta T - \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \delta T \\ r \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \delta T \right) - r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \cdot \delta T \end{cases}$$

代入式(6-16)有

$$\begin{aligned}
\delta I &= \iint_{\Omega} \lambda \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \delta T \right) - \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \delta T - r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot \delta T + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \delta T \right) - r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \cdot \delta T \right] dr dz + \int_s (\alpha T - f) \delta T r ds \\
&= - \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot \delta T r dr dz + \\
&\quad \iint_{\Omega} \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \delta T \right) dr dz + \iint_{\Omega} \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial T}{\partial z} \delta T \right) dr dz + \\
&\quad \int_s (\alpha T - f) \delta T r ds \quad (6-17)
\end{aligned}$$

上式中间两项积分由线面积分的格林公式,有

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \delta T \right) dr dz &= \int_s r \frac{\partial T}{\partial r} \delta T \cdot l \cdot ds \\
\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial T}{\partial z} \delta T \right) dr dz &= \int_s r \frac{\partial T}{\partial z} \delta T \cdot m \cdot ds
\end{aligned}$$

其中 $l = \cos(n \cdot r)$, $m = \cos(n \cdot z)$ 。从而这两个积分的和为

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \delta T \right) dr dz + \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial T}{\partial z} \delta T \right) dr dz \\
&= \int_s \left[\frac{\partial T}{\partial r} \cos(n \cdot r) + \frac{\partial T}{\partial z} \cos(n \cdot z) \right] \delta T r ds
\end{aligned}$$

另外,由于

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial r} \cos(n \cdot r) + \frac{\partial T}{\partial z} \cos(n \cdot z)$$

将它们代入式(6-17),可得

$$\begin{aligned}
\delta I &= - \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot \delta T r dr dz + \\
&\quad \int_s \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T - f \right) \delta T r ds
\end{aligned}$$

由泛函取极值的必要条件 $\delta I = 0$, 有

$$- \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \cdot \delta T r dr dz +$$

$$\int_s \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T - f \right) \delta T r ds = 0$$

再由变分法基本预备定理, 使得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right) \Big|_r = f \end{cases}$$

这就是轴对称稳定温度场的微分方程和边界条件式(6-13)。可见, 使泛函 I 式(6-14)取极值的函数 $T(r, z)$ 满足微分方程及其边界条件。

其次, 再来证明微分方程及其边界条件式(6-13)的解 $T(r, z)$ 使泛函 $I[T(r, z)]$ 达到极小。为此, 只要证明 $I[T]$ 比 $I[T + \delta T]$ 都小即可。这样, 要证明的问题归结为

$$I[T + \delta T] > I[T]$$

$$\text{或} \quad \Delta I = I[T + \delta T] - I[T] > 0 \quad (6-18)$$

$$\text{因为} \quad \Delta I = I[T + \delta T] - I[T]$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left\{ \left[\frac{\partial(T + \delta T)}{\partial r} \right]^2 + \left[\frac{\partial(T + \delta T)}{\partial z} \right]^2 \right\} r dr dz + \\ &\quad \int_s \left[\frac{\alpha}{2} (T + \delta T)^2 - f(T + \delta T) \right] r ds - \\ &\quad \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz - \int_s \left(\frac{\alpha}{2} T^2 - fT \right) r ds \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \delta T}{\partial r} + \left(\frac{\partial \delta T}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} + \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz + \\ &\quad \int_s \left[\frac{\alpha}{2} (T^2 + 2T \cdot \delta T + (\delta T)^2) - fT - f\delta T \right] r ds - \\ &\quad \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz - \int_s \left(\frac{\alpha}{2} T^2 - fT \right) r ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \delta T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right) r dr dz + \int_{\Gamma} (\alpha T - f) \delta T r ds + \\
&\quad \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial \delta T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz - \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} (\delta T)^2 r ds
\end{aligned}
\tag{6-19}$$

根据式(6-16)可知,式(6-19)中前两项积分之和即为 δI 。从而

$$\Delta I = \delta I + \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial \delta T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz - \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} (\delta T)^2 r ds
\tag{6-20}$$

由于证明的前提是函数 $T(r, z)$ 满足式(6-13),则上面证明中应有 $\delta I = 0$,所以式(6-20)为

$$\Delta I = \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial \delta T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz - \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} (\delta T)^2 r ds
\tag{6-21}$$

式中除平方项外, $\lambda > 0$, $\alpha \geq 0$, r 不取负值,从而

$$\Delta I > 0 \text{ 即 } I[T + \delta T] > I[T]$$

至此,完全证明了轴对称稳定温度场的变分原理。

从表达式看,泛函式(6-14)并不比微分方程定解问题式(6-13)简单,但是利用变分原理将问题转化至少有两点好处:

(1) 由稳定温度场定解条件式(6-13)无法直接推导出有限元计算格式,对求解区域复杂或边界条件复杂的工程问题,式(6-13)无法直接求解。而由式(6-14)则可以较方便地推导出稳定温度场的有限元计算格式,从而可以求解各种复杂的工程问题。

(2) 微分方程定解问题与泛函求极值问题有不同的特点,因而实际求解时有不同的难度。这主要表现在以下两个方面:

① 边界条件:对于微分方程边值问题,边界条件必须作为定解条件列出,而泛函极值问题在求解时自动满足。

② 导数阶次:微分方程式(6-13)含有二阶导数,泛函式(6-14)只含一阶导数,所以采用泛函求极值方法解稳定温度场问题相对容易些。尤其是采用有限元法求近似解时这些有利因素可

以充分发挥。

§ 6-4 二维稳定温度场的有限元格式

下面从稳定温度场泛函式(6-14)出发,利用第五章所述等参数单元的思想,推导八节点平面和轴对称稳定温度场的等参数单元计算格式。

一、单元温度刚阵格式的形成

1. 温度泛函

$$U^e = \iint_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \cdot R \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int \left(\frac{1}{2} \alpha T^2 - fT \right) R ds = G^e + Z^e \quad (6-22)$$

说明:

(1) 等参数单元的计算格式推导是以局部坐标下的每个单元为立足点和出发点。式(6-22)所表示的泛函为单元泛函,即泛函中 x 和 y 的变化区域 Ω 为单元内部,整个求解区域的总泛函为单元泛函的代数和。

(2) 式(6-22)是将轴对称问题和平面问题写在一起的格式,对于平面问题,式中 $R=1$,对于轴对称问题, R 为径向坐标 r , dx 相当于 dr , dy 相当于 dz 。

(3) 式中 $f = \alpha T_0$, 是由 $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_0)$ 得到,即

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = \alpha T_0 = f$$

2. 泛函中各函数的确定

(1) 温度插值函数

从第五章中已知八节点等参数单元的插值函数是不完全三次多项式:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2$$

或
$$\delta = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \delta_i$$

这里仍采用它作为温度插值函数并代入温度值 T :

$$T = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i$$

其中形状函数仍为

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \xi\xi)(1 + \eta\eta)(\xi\xi + \eta\eta - 1), & i = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta), & i = 2, 6 \\ \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi), & i = 4, 8 \end{cases}$$

局部坐标下的单元形状、节点排列和边号如图 6-4 所示, 节点坐标为

$$1: (-1, -1), \quad 2: (0, -1), \quad 3: (1, -1), \quad 4: (1, 0)$$

$$5: (1, 1), \quad 6: (0, 1), \quad 7: (-1, 1), \quad 8: (-1, 0)$$

温度插值函数的物理意义与位移插值函数的物理意义是一样的。求出节点温度值之后, 可以由温度插值函数求出单元内任一点的温度值。

(2) 坐标函数

$$\begin{cases} \xi = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \xi_i \\ \eta = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot \eta_i \end{cases} \quad (6-23)$$

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{cases} \quad (6-24)$$

(3) 坐标变换

① 导数 $\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}$ 与 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 之间的变换与第五章所述坐标变换

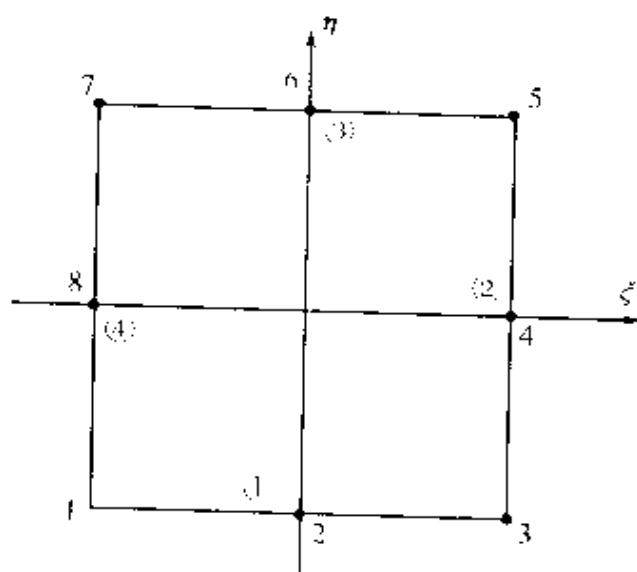


图 6-4 八节点等参数单元

类似。

由

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \\ \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

令

$$XC = \frac{\partial x}{\partial \xi}, XA = \frac{\partial x}{\partial \eta}, YC = \frac{\partial y}{\partial \xi}, YA = \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

则

$$[J]^{-1} = \frac{1}{[J]} \begin{bmatrix} YA & -YC \\ -XA & XC \end{bmatrix}$$

最后得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} YA \frac{\partial}{\partial \xi} - YC \frac{\partial}{\partial \eta} \\ XC \frac{\partial}{\partial \eta} - XA \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

② 面积微分的变换

$$dx dy = J d\xi d\eta$$

③ ds 与 $d\xi$ 或 $d\eta$ 之间的变换

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) d\eta \right]^2} \\ &= \sqrt{(XC \cdot d\xi + XA \cdot d\eta)^2 + (YC \cdot d\xi + YA \cdot d\eta)^2} \end{aligned}$$

当 ds 在 2、4 号边时 (见图 6-4), $\xi = \text{常数}$, $d\xi = 0$, 则 $ds = \sqrt{(XA)^2 + (YA)^2} d\eta$; 当 ds 在 1、3 号边时, $\eta = \text{常数}$, $d\eta = 0$, 则 $ds = \sqrt{(XC)^2 + (YC)^2} d\xi$ 。

为便于推导, 写成统一的形式:

$$ds = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} d\beta \quad (6-26)$$

3. 温度刚度矩阵格式的形成

$$\text{令 } A = \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) T_i}{\partial \xi}, B = \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) T_i}{\partial \eta}$$

其中 $T = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) T_i$ 为单元内任一点处的温度值, T_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 为节点处的温度值。

由式(6-24), 有

$$\begin{aligned} XC &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i \cdot x_i}{\partial \xi}, \quad XA = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i \cdot x_i}{\partial \eta} \\ YC &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i \cdot y_i}{\partial \xi}, \quad YA = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i \cdot y_i}{\partial \eta} \end{aligned}$$

将它们代入式(6-22)泛函的 G 式中, 并考虑坐标变换, 有

$$\begin{aligned}
G^e &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\lambda}{2} + R \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{R}{J} \right] [(YA \cdot A - YC \cdot B)^2 + \\
&\quad (XC \cdot B - XA \cdot A)^2] d\xi d\eta \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&= \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 H_i H_j \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{R}{J} \right] [(YA \cdot A - YC \cdot B)^2 + \\
&\quad (XC \cdot B - XA \cdot A)^2]_{\xi_i, \eta_j} \quad (6-27)
\end{aligned}$$

为方便后面求泛函极值, 这里先写出 G^e 对温度 T_i 的偏导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^e}{\partial T_i} &= \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 H_i H_j \left[\frac{\lambda R}{J} [(YA \cdot A - YC \cdot B) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left(YA \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - YC \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) + (XC \cdot B - XA \cdot A) \cdot \right. \\
&\quad \left. (XC \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - XA \frac{\partial N_j}{\partial \xi}) \right] \quad i = 1, 2, \dots, 8
\end{aligned}$$

将上式按 $i = 1 \sim 8$ 展开, 并写成矩阵形式, 有

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{\partial G^e}{\partial T_1} \\ \frac{\partial G^e}{\partial T_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial G^e}{\partial T_8} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \overline{kk}_{11} T_1 + \overline{kk}_{12} T_2 + \cdots + \overline{kk}_{18} T_8 \\ \overline{kk}_{21} T_1 + \overline{kk}_{22} T_2 + \cdots + \overline{kk}_{28} T_8 \\ \vdots \\ \overline{kk}_{81} T_1 + \overline{kk}_{82} T_2 + \cdots + \overline{kk}_{88} T_8 \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{kk}_{11} & \overline{kk}_{12} & \cdots & \overline{kk}_{18} \\ \overline{kk}_{21} & \overline{kk}_{22} & \cdots & \overline{kk}_{28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{kk}_{81} & \overline{kk}_{82} & \cdots & \overline{kk}_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_8 \end{Bmatrix} \quad (6-28)
\end{aligned}$$

或
$$\left[\frac{\partial G^e}{\partial T} \right]_{8 \times 1} = [\overline{KK}]_{8 \times 8}^e [T]_{8 \times 1} \quad (6-29)$$

式中包含的 $XC, XA, YC, YA, \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ 均与温度 T 无关, 只是 (ξ, η) 的函数, 而 A 和 B 则是节点温度 T_1, T_2, \dots, T_8 的函数。

又由于

$$A = \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} T_j = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} T_2 + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial \xi} T_8$$

$$B = \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} T_j = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} T_2 + \dots + \frac{\partial N_8}{\partial \eta} T_8$$

所以

$$\begin{aligned} \overline{kk}_{ij} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 H_s H_r \frac{\lambda R}{|J|} \left[\left(YA \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - YC \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \cdot \right. \\ & \left. \left(YA \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - YC \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) + \left(XC \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - XA \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \cdot \right. \\ & \left. \left(XC \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - XA \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \right] \quad i = 1, 2, \dots, 8, j = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (6-30)$$

从式(6-30)中可以看出 $kk_{ij} = \overline{kk}_{ji}$, 即 $[\overline{KK}]^e$ 为对称矩阵。

二、右端项格式的形成

现在再来看式(6-22)中的另一项 Z^e 。

$$\begin{aligned} Z^e &= \int_s \left(\frac{1}{2} \alpha T^2 + \alpha T_0 T \right) R ds \\ &= \int_{-1}^1 \alpha R \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) T_j \right]^2 + T_0 \left[\sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) T_j \right] \right\} d\beta \\ &= \sum_{s=1}^3 H_s \alpha R_s \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^8 N_j T_j \right)^2 + T_0 \sum_{j=1}^8 N_j T_j \right] \end{aligned} \quad (6-31)$$

我们也写出 Z^e 对 T_i 的偏导数:

$$\frac{\partial Z'}{\partial T_i} = \sum_{s=1}^3 H_{\alpha R_s} \sqrt{P_{\alpha}^2 + P_{\beta}^2} \left[\left(\sum_{j=1}^8 N_j T_j \right) N_i - T_0 N_i \right] \\ i = 1, 2, \dots, 8 \quad (6-32)$$

将式(6-32)展开并写成列矩阵,有

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z'}{\partial T_1} \\ \frac{\partial Z'}{\partial T_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Z'}{\partial T_8} \end{Bmatrix} &= \sum_{s=1}^3 H_{\alpha R_s} \sqrt{P_{\alpha}^2 + P_{\beta}^2} \\ &\times \begin{Bmatrix} N_1 N_1 T_1 + N_1 N_2 T_2 + \dots + N_1 N_8 T_8 - T_0 N_1 \\ N_2 N_1 T_1 + N_2 N_2 T_2 + \dots + N_2 N_8 T_8 - T_0 N_2 \\ \vdots \\ N_8 N_1 T_1 + N_8 N_2 T_2 + \dots + N_8 N_8 T_8 - T_0 N_8 \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{s=1}^3 H_{\alpha R_s} \sqrt{P_{\alpha}^2 + P_{\beta}^2} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & \dots & N_1 N_8 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & \dots & N_2 N_8 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_8 N_1 & N_8 N_2 & \dots & N_8 N_8 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_8 \end{Bmatrix} - \sum_{s=1}^3 H_{\alpha R_s} \sqrt{P_{\alpha}^2 + P_{\beta}^2} T_0 \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_8 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 z_1 & z_1 z_2 & \dots & z_1 z_8 \\ z_2 z_1 & z_2 z_2 & \dots & z_2 z_8 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_8 z_1 & z_8 z_2 & \dots & z_8 z_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_8 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_8 \end{Bmatrix} \quad (6-33) \end{aligned}$$

或

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial Z'}{\partial T} \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = [ZZ]_{8 \times 8} \{T\}_{8 \times 1} - \{F\}_{8 \times 1}$$

$$(6-34)$$

从式(6-33)中可得到 $[ZZ]^e$ 和 $\{F\}^e$ 中元素的表达式:

$$\begin{cases} zz_{ij} = \sum_{s=1}^3 H_s \alpha R_s \sqrt{P_x^2 + P_y^2} N_j N_i \\ f_i = \sum_{s=1}^3 H_s \alpha R_s \sqrt{P_x^2 + P_y^2} T_0 N_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 8, j = 1, 2, \dots, 8$$

(6-35)

而且可以看出 $zz_{ij} = zz_{ji}$, 即矩阵 $[ZZ]^e$ 是对称的。

回到温度泛函式(6-22) $U^e = G^e + Z^e$, 将其对温度求导, 有

$$\frac{\partial U^e}{\partial T_i} = \frac{\partial G^e}{\partial T_i} + \frac{\partial Z^e}{\partial T_i} \quad (6-36)$$

将式(6-29)和式(6-34)代入并写成矩阵形式, 有

$$\left\{ \frac{\partial U^e}{\partial T_i} \right\}_{8 \times 1} = [KK]^e \{T\}^e + [ZZ]^e \{T\}^e - \{F\}^e \quad (6-37)$$

$$\text{令} \quad [KK]^e = [K\bar{K}]^e + [ZZ]^e$$

$$\text{可得} \quad \left\{ \frac{\partial U^e}{\partial T_i} \right\}_{8 \times 1} = [KK]_{8 \times 8}^e \{T\}_{8 \times 1}^e - \{F\}_{8 \times 1}^e \quad (6-38)$$

其中 $[KK]^e$ 中的元素为

$$kk_{ij} = k\bar{k}_{ij} + zz_{ij} \quad (6-39)$$

$[KK]^e$ 即为单元温度刚阵的最后形式。

三、总体合成

由于求解区域内的总温度泛函等于各单元温度泛函之和, 从而有

$$U = \sum_{e=1}^{E_0} U^e$$

式中 E_0 ——单元总数。

$$\text{于是} \quad \left\{ \frac{\partial U}{\partial T_i} \right\} = \sum_{e=1}^{E_0} \left\{ \frac{\partial U^e}{\partial T_i} \right\} = [K] \{T\} - \{F\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(6-40)

式中 $[K] = \sum_{e=1}^{E_0} [KK]^e$ ——按节点号叠加的总体温度刚度矩阵；

$\{T\} = \sum_{e=1}^{E_0} \{T\}^e$ ——按节点号叠加的总体节点温度向量；

$\{F\} = \sum_{e=1}^{E_0} \{F\}^e$ ——按节点号叠加的总右端向量。

根据泛函求极值的条件 $\delta U = 0$, 即可推导出所求关系式。但是由式(6-40)可以看出, 泛函的求极值问题经过前面一系列推导运算, 已经变成多元函数 $U = U(T_1, T_2, \dots, T_n)$ 的极值问题了。所以由多元函数实现极值的必要条件 $\frac{\partial U}{\partial T_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 可得到

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial T_i} \right\} = [K] \{T\} - \{F\} = 0$$

$$\text{即} \quad [K] \{T\} = \{F\} \quad (6-41)$$

这就是有限元法求解稳定温度场的最后计算格式。

小结:

(1) 本章讨论了有限元法求解非结构问题的一个例子——稳定温度场的计算。所用的方法与前几章不同, 是将描述物理现象的微分方程及其边界条件通过变分原理转化为某一泛函的求极值问题, 再通过一定的推导得到有限元计算格式。这一方法可以应用到其他场问题的有限元求解当中去。只要我们找到与微分方程及其边界条件等价的泛函, 就可以利用本章方法推导出有限元计算格式。

(2) 本章简单介绍了泛函、变分、泛函极值和变分原理等概念, 利用它们可以将微分方程定解问题转换为泛函极值问题。而许多情况下泛函极值问题与微分方程边值问题比较, 有边界条件自动满足、导数阶次降低、推导有限元格式方便等优点。

(3) 本章根据等参数变换理论, 较详细地推导了八节点平面(和轴对称)等参数单元稳定温度场计算格式。同样的方法可以用

于推导具有不同单元节点数的二维或三维等参数单元计算格式,也可以用于其他场问题的有限元计算格式推导。而且,对于平面和轴对称稳定温度场的计算,可直接利用上述推导结果编制程序。

第七章 流体流动问题的有限元法

§ 7-1 流场问题及加权余量法

一、问题的提出

利用变分原理可以推导出某些偏微分方程所描述的非结构问题(场问题)的有限元计算格式,如第六章所述的稳定温度场导热问题。但是泛函极值问题和微分方程求解问题只是在一定的条件下等价,即要求解函数是连续且可导。也就是说如果微分方程的解函数在定义域内不连续或不可导,泛函极值问题与微分方程求解问题就不是等价的。另一方面,如果给出一个泛函形式,通常可以找到相应的微分方程;反之,若给出一个微分方程,并不一定能找到与之相对应的泛函极值问题的具体形式。这样,我们如果要用有限元法求解某一场问题的微分方程,如果找不到与之对应的泛函,则无法用变分原理来推导相应的有限元计算格式。而现实中找不到对应泛函的微分方程还相当多,这时我们只有寻求另外的推导方法。

例如,流体流动问题是工程中经常遇到的问题。高速车辆运行时的空气阻力问题;两列高速运行的列车会车时的压力波动问题;列车进入隧道时的压力波动问题;建筑物的风荷载问题;室内的通风与空调问题;桥梁的风致震动问题;船舶的运行阻力问题;以及飞机的升力、阻力,汽车高速行驶时的气动稳定性问题等,都是与流体流动有关的问题。从流体力学中可知,描述稳态不可压缩流体流动的微分方程为连续性方程和动量方程:

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \\
\quad \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
\quad \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\
\quad \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)
\end{cases} \quad (7-1)$$

式中 u, v, w ——流体速度在三个坐标方向的分量；

ρ ——流体密度；

μ ——流体运动粘性系数；

p ——压力。

这是一组非线性偏微分方程，用解析法求解是非常困难的，在许多情况下甚至无法解析求解。目前，我们也无法找到与求解这一偏微分方程相对应的泛函求极值问题表达式。在这种情况下推导有限元计算格式采用的是加权余量法。

二、加权余量法

加权余量法的思想很简单，设某物理问题的控制微分方程及其边界条件分别为

$$f(\varphi) = 0 \quad (\text{在域 } \Omega \text{ 内}) \quad (7-2)$$

$$g(\varphi) = 0 \quad (\text{在域 } \Omega \text{ 边界 } S \text{ 上}) \quad (7-3)$$

φ 为待求函数。如果 φ 无法或不易直接求解，可选一个试探函数

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \quad (7-4)$$

式中 c_i —— 待定常数;

φ_i —— 试探函数项。

将试探函数代入式(7-2)和式(7-3), 一般来讲不可能正好满足方程, 在域 Ω 内和边界 S 上会产生误差, 即

$$f(\tilde{\varphi}) = R \quad (7-5)$$

$$g(\tilde{\varphi}) = R_b \quad (7-6)$$

式中 R 和 R_b 称为余量(或残数, 残差, 残值)。加权余量法的基本思想是在域 Ω 内或边界 S 上寻找 n 个线性无关的函数 δW_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 使余量 R 和 R_b 在加权平均的意义上等于零, 即

$$\int_{\Omega} R \cdot \delta W_i d\Omega = 0 \quad (7-7)$$

$$\int_S R_b \cdot \delta W_i d\Omega = 0 \quad (7-8)$$

这里 δW_i 称为权函数。

式(7-4)~式(7-8)表明了这样一个思想: 尽管 $\tilde{\varphi}$ 本身不能满足微分方程式(7-2)和式(7-3), 但是当其余量与许多线性无关的权函数相乘并积分时, 这个余量在总体上接近于零, 也就是说 $\tilde{\varphi}$ 在积分的意义上满足微分方程式(7-2)和式(7-3)。当 n 足够大时, $\tilde{\varphi}$ 就趋近于真解 φ 。

选用不同的权函数就构成不同的加权余量法, 下面简单介绍两种常用的权函数选取办法

1. 最小二乘加权余量法

设找到一个已满足边界条件式(7-3)的试探函数

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$$

代入式(7-2)会产生余量

$$R = f(\tilde{\varphi})$$

如果我们希望余量 R 在最小二乘的意义下为最小(使 R 的平方

和为最小), 可令方差为

$$I(C_i) = \int_{\Omega} R^2 d\Omega \quad (7-9)$$

方差最小的条件是

$$\frac{\partial I(C_i)}{\partial C_i} = 2 \int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial C_i} d\Omega = 0 \quad (7-10)$$

与式(7-7)比较可知, 权函数

$$\delta W_i = \frac{\partial R}{\partial C_i} \quad (7-11)$$

通过求解 $\int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial C_i} d\Omega = \int_{\Omega} f(\tilde{\varphi}) \frac{\partial f(\tilde{\varphi})}{\partial C_i} d\Omega = 0$ (7-12)

可求出 C_i , 进而得到 $\tilde{\varphi}$ 。

2. 伽辽金加权余量法

如果在式(7-7)和式(7-8)中选用试探函数项 φ_i 作为权函数 δW_i , 就构成所谓伽辽金加权余量法。即式(7-7)成为

$$\int_{\Omega} R \cdot \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} f(\tilde{\varphi}) \cdot \varphi_i d\Omega = 0 \quad (7-13)$$

在许多物理问题控制微分方程的有限元法求解过程中, 都采用伽辽金加权余量法推导有限元计算格式。

§ 7-2 二维流体流动的有限元计算格式

二维稳态不可压缩流体流动方程由下式描述:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (7-14)$$

这一组方程的待求变量为流体速度 u, v 和压力 p 。根据有

限元法计算思路,应首先选取插值函数来近似描述速度 u , v 和压力 p 在单元内部的变化情况。即

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^m N_i \cdot u_i = [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\} \\ v = \sum_{i=1}^m N_i \cdot v_i = [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\} \\ p = \sum_{i=1}^m N_i \cdot p_i = [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} \end{cases} \quad (7-15)$$

式中 $[\mathbf{N}]$ ——单元形状函数;

u_i, v_i, p_i ——节点处的速度和压力值。

这一插值函数即作为加权余量法中的试探函数。由伽辽金加权余量法,式 $\int_{\Omega} f(\varphi) \delta W_i d\Omega = 0$ 中的权函数 δW_i 取为试探函数项,即有限元计算中的形状函数为权函数。从而,在求解区域的每一个单元内下述等式成立:

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \left(\frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} + \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial y} \right) dx dy = 0 \\ \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \left(2\rho u \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} + \rho u \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial y} + \rho v \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} + \right. \\ \quad \left. \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\}}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \\ \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \left(\rho u \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} + 2\rho v \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial y} + \right. \\ \quad \left. \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\}}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \end{cases} \quad (7-16)$$

由于 $\{\mathbf{U}\}$, $\{\mathbf{V}\}$ 为单元节点处的速度分量, $\{\mathbf{P}\}$ 为节点压力,均与积分无关,可提到积分符号以外。进一步推导可得,第一式:

$$\iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} dx dy \{\mathbf{U}\} + \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} dx dy \{\mathbf{V}\} = 0 \quad (7-17)$$

简写为 $[\mathbf{C}_1]^T \{\mathbf{U}\} + [\mathbf{C}_2]^T \{\mathbf{V}\} = 0 \quad (7-18)$

式中 $[\mathbf{C}_1]^T = \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} dx dy$
 $[\mathbf{C}_2]^T = \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} dx dy$

同理,第二式:

前3项:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \left(2\rho u \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} + \rho u \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial y} + \rho v \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \iint_{\Omega} \rho u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} dx dy \{\mathbf{U}\} + \iint_{\Omega} \rho u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} dx dy \{\mathbf{V}\} + \\ & \quad \iint_{\Omega} \rho v [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} dx dy \{\mathbf{U}\} \end{aligned}$$

第4项(利用分步积分):

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\}}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} [\mathbf{N}] [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} dy - \\ & \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} [\mathbf{N}]^T dx dy \{\mathbf{P}\} \end{aligned}$$

第5,第6项(利用分步积分):

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \mu \left(\frac{\partial^2 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= - \int_{\Gamma} \mu [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} dy + \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} dx dy \{\mathbf{U}\} - \\ & \quad \int_{\Gamma} \mu [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial y} dx + \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial y} \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} dx dy \{\mathbf{U}\} \end{aligned}$$

6项合成,并合并同类项:

$$\begin{aligned} & \left(2 \iint_{\Omega} \rho u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} \rho v [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} dx dy + \right. \\ & \quad \left. \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial y} \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} dx dy \right) \{\mathbf{U}\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \rho u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \{\mathbf{V}\} - \iint_{\Omega} \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} [\mathbf{N}]^T \mathrm{d}x \mathrm{d}y \{\mathbf{P}\} \\
&= \int_s \mu [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} \mathrm{d}y + \int_s \mu [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial y} \mathrm{d}x - \\
& \quad \int_s \{\mathbf{N}\} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} \mathrm{d}y \quad (7-19)
\end{aligned}$$

$$\text{简写为 } [\mathbf{K}_{11}] \{\mathbf{U}\} + [\mathbf{K}_{12}] \{\mathbf{V}\} + [\mathbf{C}_1] \{\mathbf{P}\} = \{\mathbf{F}_1\} \quad (7-20)$$

$$\begin{aligned}
\text{式中 } [\mathbf{K}_{11}] &= \iint_{\Omega} (2\rho u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} + \rho v [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} + \\
& \quad \mu \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} + \mu \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial y} \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y}) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
[\mathbf{K}_{12}] &= \iint_{\Omega} \rho u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
[\mathbf{C}_1] &= \iint_{\Omega} \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} [\mathbf{N}]^T \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
\{\mathbf{F}_1\} &= \int_s \mu [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial y} \mathrm{d}x + \int_s (u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} - \\
& \quad [\mathbf{N}] [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\}) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

第三式:

前 3 项:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \left(\rho u \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{U}\}}{\partial x} + 2\rho v \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{V}\}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Omega} \rho u [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \{\mathbf{V}\} + \iint_{\Omega} \rho v [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \{\mathbf{U}\} + \\
& \quad \iint_{\Omega} 2\rho v [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \{\mathbf{V}\}
\end{aligned}$$

第 4 项(利用分部积分):

$$\iint_{\Omega} [\mathbf{N}] \frac{\partial [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\}}{\partial y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_s [\mathbf{N}] [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{P}\} \mathrm{d}x -$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial y} [\underline{N}]^T dx dy \{ \underline{P} \}$$

第 5, 第 6 项(利用分部积分):

$$\begin{aligned} &= - \iint_{\Omega} [\underline{N}] \mu \left(\frac{\partial^2 [\underline{N}]^T \{ \underline{V} \}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [\underline{N}]^T \{ \underline{V} \}}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= - \int_s \mu [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T \{ \underline{V} \}}{\partial x} dy + \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial x} \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial x} dx dy \{ \underline{V} \} - \\ &\quad \int_s \mu [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T \{ \underline{V} \}}{\partial y} dx + \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial y} \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial y} dx dy \{ \underline{V} \} \end{aligned}$$

6 项合成, 并合并同类项:

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \rho v [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial x} dx dy \{ \underline{U} \} + \\ &\quad \left(\iint_{\Omega} \rho u [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} 2\rho v [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial y} dx dy + \right. \\ &\quad \left. \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial x} \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial x} dx dy + \iint_{\Omega} \mu \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial y} \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial y} dx dy \right) \{ \underline{V} \} - \\ &\quad \iint_{\Omega} \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial y} [\underline{N}]^T dx dy \{ \underline{P} \} = \int_s \mu [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T \{ \underline{V} \}}{\partial x} dy + \\ &\quad \int_s \mu [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T \{ \underline{V} \}}{\partial y} dx - \int_s [\underline{N}] [\underline{N}]^T \{ \underline{P} \} dx \quad (7-21) \end{aligned}$$

简写为 $[\underline{K}_{21}] \{ \underline{U} \} + [\underline{K}_{22}] \{ \underline{V} \} + [\underline{C}_2] \{ \underline{P} \} = \{ \underline{F}_2 \}$ (7-22)

式中

$$\begin{aligned} [\underline{K}_{21}] &= \iint_{\Omega} \rho v [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial x} dx dy \\ [\underline{K}_{22}] &= \iint_{\Omega} \left(\rho u [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial x} + 2\rho v [\underline{N}] \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. \mu \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial x} \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial x} + \mu \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial y} \frac{\partial [\underline{N}]^T}{\partial y} \right) dx dy \\ [\underline{C}_2] &= \iint_{\Omega} \frac{\partial [\underline{N}]}{\partial y} [\underline{N}]^T dx dy \end{aligned}$$

$$\{F_2\} = \int_{\Omega} (\mu [N] \frac{\partial [N]^T \{V\}}{\partial y} - [N][N]^T \{P\}) dx + \int_{\Omega} \mu [N] \frac{\partial [N]^T \{V\}}{\partial x} dy$$

将式(7-18)、式(7-20)、式(7-22)组合成一个由矩阵表示的方程,有

$$\begin{Bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & -[C_1] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & -[C_2] \\ [C_1]^T & [C_2]^T & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7-23)$$

如前所述,上式的积分域为求解区域中的一个单元,因此上式即为利用加权余量法推导出的有限元求解二维流场问题的单元方程。等式左端矩阵

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & -[C_1] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & -[C_2] \\ [C_1]^T & [C_2]^T & 0 \end{bmatrix} \quad (7-24)$$

即为二维流体流动问题有限元计算的单元刚度矩阵,式(7-23)可改写为

$$[K]^e \{\varphi\}^e = \{F\}^e \quad (7-25)$$

将 $[K]^e$, $\{\varphi\}^e$ 和 $\{F\}^e$ 在求解区域内分别按节点号叠加,就可以构成整个流场有限元计算的总体方程:

$$[K]\{\Psi\} = \{F\} \quad (7-26)$$

其中 $[K] = \sum_{e=1}^{E_0} [K]^e$ ——按节点号叠加的总流场刚度矩阵;

$\{\Psi\} = \sum_{e=1}^{E_0} \{\varphi\}^e$ ——按节点号叠加的总体待求节点速度 u, v 和压力 p ;

$\{F\} = \sum_{e=1}^{E_0} \{F\}^e$ ——按节点号叠加的总右端项。

E_0 ——求解区域为单元总数

在右端项中引入速度 u, v 和压力 p 的约束条件或边界条件

即可求解。因此,式(7-26)为有限元法求解稳态流体流动问题的最终计算格式。

§ 7-3 流场有限元分析的几个特殊问题

描述流体流动的微分方程一般来讲都是非线性方程,与线弹性力学中的方程组及稳态热传导问题的拉普拉斯方程相比有其特殊性。在它的有限元计算格式推导和有限元方程求解过程中要做一些特殊处理。下面简要讨论这方面的一些内容。

一、插值函数与权函数的阶次

在§7-2中利用加权余量法推导有限元计算格式时,并未具体给出插值函数(形状函数)与权函数的阶次。按伽辽金加权余量法的要求,只要取试探函数与权函数(此处为形状函数)一致就可以了。但是对非线性流场这一特殊问题,如果我们将与速度有关的插值函数和与压力有关的插值函数取为同阶函数,计算表明,所形成的刚度矩阵会出现“病态”,使方程组的求解难以进行下去(有限元理论中称为过度约束问题)。因此,流场有限元分析中通常取速度插值函数比压力插值函数高一个阶次,即速度场的逼近程度较之压力场的逼近程度高一阶。

例如若采用四边形等参数单元计算,如果压力 p 采用线性的插值函数逼近

$$p = \sum_{i=1}^4 M_i(\xi, \eta) \cdot p_i \quad (7-27)$$

则速度 u, v 应采用二次的插值函数逼近

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot u_i \\ v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot v_i \end{cases} \quad (7-28)$$

这样一来,事实上速度 u, v 是定义在求解区域中的八节点曲

四边形网格系统中,而压力 p 则是定义在四节点四边形网格系统中。为使编号统一起见,可以将第五章所述等参数单元局部坐标下的 8 个节点编号顺序调整一下,将原 1,3,5,7 号改为 1,2,3,4 号;原 2,4,6,8 号改为 5,6,7,8 号。局部坐标下四节点正方形和八节点正方形的节点号排列如图 7-1 所示。

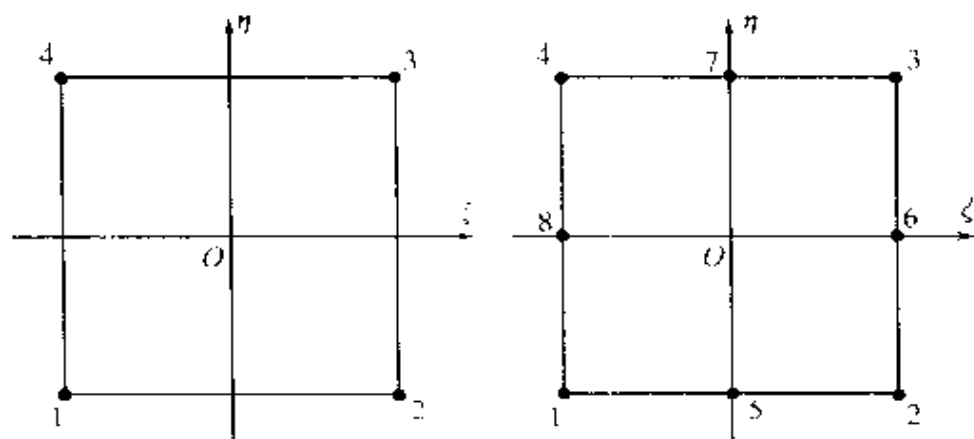


图 7-1 局部坐标下压力与速度单元

两种单元的形状函数分别为

四节点单元形状函数(不变):

$$M_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

八节点单元形状函数:

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta + 1) & i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta) & i = 5, 7 \\ \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi) & i = 6, 8 \end{cases}$$

解决了求解变量 u, v, p 的插值函数阶次问题,紧接着带来的问题是:利用伽辽金加权余量法推导有限元列式时的权函数取哪一阶次的形状函数呢?理论上应当是,在描述速度 u, v 的微分方程中采用与速度插值函数同阶的权函数,在描述压力 p 的微分方程中采用与压力插值函数同阶的权函数。但是,描述流体流动

的微分方程式(7-14)中没有直接关于压力 p 的控制方程, 压力与速度的关系隐含在连续性方程之中。常用的处理方法是: 在加权余量法关系式中对有关速度 u, v 的动量方程采用与速度插值函数同阶的权函数; 对连续性方程则采用与压力 p 的插值函数同阶的权函数。这样, 式(7-18)中 $[C_1]^T, [C_2]^T$ 的展开式为

$$\begin{aligned}
 [C_1]^T &= \iint_{\Omega} [M] \frac{\partial N}{\partial x} dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} M_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} & M_1 \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & M_1 \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ M_2 \frac{\partial N_1}{\partial x} & M_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & M_2 \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ M_3 \frac{\partial N_1}{\partial x} & M_3 \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & M_3 \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ M_4 \frac{\partial N_1}{\partial x} & M_4 \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & M_4 \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} dx dy \\
 &= \begin{bmatrix} c1t_{11} & c1t_{12} & \cdots & c1t_{18} \\ c1t_{21} & c1t_{22} & \cdots & c1t_{28} \\ c1t_{31} & c1t_{32} & \cdots & c1t_{38} \\ c1t_{41} & c1t_{42} & \cdots & c1t_{48} \end{bmatrix} \quad (7-29)
 \end{aligned}$$

利用坐标变换式(6-25), 可得

$$\begin{aligned}
 c1t_{ij} &= \iint_{\Omega} M_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{M_i}{|J|} \left(Y_A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - Y_C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) |J| d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 H_s H_t M_i \left(Y A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \\ i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 8 \quad (7-30)$$

其中 $Y A = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i y_i}{\partial \eta}$, $Y C = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i x_i}{\partial \xi}$

同理,

$$[C_2]^T = \begin{bmatrix} c2t_{11} & c2t_{12} & \cdots & c2t_{18} \\ c2t_{21} & c2t_{22} & \cdots & c2t_{28} \\ c2t_{31} & c2t_{32} & \cdots & c2t_{38} \\ c2t_{41} & c2t_{42} & \cdots & c2t_{48} \end{bmatrix} \quad (7-31)$$

$$c2t_{ij} = \iint_{\Omega} M_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy \\ = \iint_{\Omega} \frac{M_i}{|J|} (X C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_j}{\partial \xi}) |J| d\xi d\eta \\ = \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 H_s H_t M_i (X C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_j}{\partial \xi}) \\ i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 8 \quad (7-32)$$

其中 $X A = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i x_i}{\partial \eta}$, $X C = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \sum_{i=1}^8 N_i x_i}{\partial \xi}$

同样道理, 不难导出 $[K_{11}]$, $[K_{12}]$, $[K_{21}]$, $[K_{22}]$, $[C_1]$ 和 $[C_2]$ 中的 $\frac{\partial [N]}{\partial x} [N]^T$, $\frac{\partial [N]}{\partial y} [N]^T$, $\frac{\partial [N]}{\partial x} \frac{\partial [N]^T}{\partial x}$, $\frac{\partial [N]}{\partial y} \frac{\partial [N]^T}{\partial y}$ 各表达式。如:

$$\frac{\partial [N]}{\partial x} [N]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_2 & \cdots & \frac{\partial N_1}{\partial x} N_8 \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_2 & \cdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} N_8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial x} N_1 & \frac{\partial N_8}{\partial x} N_2 & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} N_8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n_{x11} & n_{x12} & \cdots & n_{x18} \\ n_{x21} & n_{x22} & \cdots & n_{x28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{x81} & n_{x82} & \cdots & n_{x88} \end{bmatrix} \quad (7-33)
\end{aligned}$$

由式(6-25)可得

$$\begin{aligned}
n_{xij} &= \frac{1}{|J|} \left(Y A \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) N_j \\
i &= 1, 2, \cdots, 8; j = 1, 2, \cdots, 8 \quad (7-34)
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial y} [\mathbf{N}]^T &= \begin{bmatrix} n_{y11} & n_{y12} & \cdots & n_{y18} \\ n_{y21} & n_{y22} & \cdots & n_{y28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{y81} & n_{y82} & \cdots & n_{y88} \end{bmatrix} \quad (7-35) \\
n_{yij} &= \frac{1}{|J|} \left(X C \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) N_j \\
i &= 1, 2, \cdots, 8; j = 1, 2, \cdots, 8 \quad (7-36)
\end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x} \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial x}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} nxx_{11} & nxx_{12} & \cdots & nxx_{18} \\ nxx_{21} & nxx_{22} & \cdots & nxx_{28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ nxx_{81} & nxx_{82} & \cdots & nxx_{88} \end{bmatrix} \quad (7-37)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
nxx_{ij} &= \frac{1}{|J|^2} \left(YA \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - YC \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \left(YA \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - YC \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \\
& \quad i = 1, 2, \cdots, 8; j = 1, 2, \cdots, 8 \quad (7-38)
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial y} \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial y} &= \begin{bmatrix} nyy_{11} & nyy_{12} & \cdots & nyy_{18} \\ nyy_{21} & nyy_{22} & \cdots & nyy_{28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ nyy_{81} & nyy_{82} & \cdots & nyy_{88} \end{bmatrix} \quad (7-39)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
nyy_{ij} &= \frac{1}{|J|^2} \left(XC \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - XA \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \left(XC \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - XA \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \\
& \quad i = 1, 2, \cdots, 8; j = 1, 2, \cdots, 8 \quad (7-40)
\end{aligned}$$

利用式(7-19)~式(7-22)可得出基于图7-1所示网格系统的 $[\mathbf{K}_{11}]$, $[\mathbf{K}_{12}]$, $[\mathbf{K}_{21}]$, $[\mathbf{K}_{22}]$, $[\mathbf{C}_1]$ 和 $[\mathbf{C}_2]$ 中各元素表达式:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{11}] &= \begin{bmatrix} k11_{11} & k11_{12} & \cdots & k11_{18} \\ k11_{21} & k11_{22} & \cdots & k11_{28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k11_{81} & k11_{82} & \cdots & k11_{88} \end{bmatrix} \quad (7-41)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 k11_{ij} = & 2 \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \rho u N_i (Y A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_j}{\partial \eta}) + \\
 & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \rho v N_i (X C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_j}{\partial \xi}) + \\
 & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \mu (Y A \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_i}{\partial \eta}) (Y A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_j}{\partial \eta}) + \\
 & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \mu (X C \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_i}{\partial \xi}) (X C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_j}{\partial \xi}) \\
 & i = 1, 2, \dots, 8; j = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned} \tag{7-42}$$

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} k12_{11} & k12_{12} & \cdots & k12_{18} \\ k12_{21} & k12_{22} & \cdots & k12_{28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k12_{81} & k12_{82} & \cdots & k12_{88} \end{bmatrix} \tag{7-43}$$

其中

$$\begin{aligned}
 k12_{ij} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \rho u N_i (X C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_j}{\partial \xi}) \\
 & i = 1, 2, \dots, 8; j = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned} \tag{7-44}$$

$$[K_{21}] = \begin{bmatrix} k21_{11} & k21_{12} & \cdots & k21_{18} \\ k21_{21} & k21_{22} & \cdots & k21_{28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k21_{81} & k21_{82} & \cdots & k21_{88} \end{bmatrix} \tag{7-45}$$

其中

$$\begin{aligned}
 k21_{ij} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \rho v N_i (Y A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_j}{\partial \eta}) \\
 & i = 1, 2, \dots, 8; j = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned} \tag{7-46}$$

$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} k_{22_{11}} & k_{22_{12}} & \cdots & k_{22_{18}} \\ k_{22_{21}} & k_{22_{22}} & \cdots & k_{22_{28}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{22_{81}} & k_{22_{82}} & \cdots & k_{22_{88}} \end{bmatrix} \quad (7-47)$$

其中

$$\begin{aligned} k_{22_{ij}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \rho u N_i \left(Y A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) + \\ & 2 \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \rho v N_i \left(X C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) + \\ & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \mu \left(Y A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \left(Y A \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) + \\ & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \mu \left(X C \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \left(X C \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - X A \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \\ & i = 1, 2, \cdots, 8; j = 1, 2, \cdots, 8 \end{aligned} \quad (7-48)$$

$$\begin{aligned} [C_1] = & \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} M_1 & \frac{\partial N_1}{\partial x} M_2 & \frac{\partial N_1}{\partial x} M_3 & \frac{\partial N_1}{\partial x} M_4 \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} M_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} M_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x} M_3 & \frac{\partial N_2}{\partial x} M_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial x} M_1 & \frac{\partial N_8}{\partial x} M_2 & \frac{\partial N_8}{\partial x} M_3 & \frac{\partial N_8}{\partial x} M_4 \end{bmatrix} dx dy \\ = & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-49)$$

其中

$$\begin{aligned} c_{1_{ij}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 H_s H_t \left(Y A \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - Y C \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) M_j \\ & i = 1, 2, \cdots, 8; j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (7-50)$$

$$\begin{aligned}
[C_2] &= \iint_a \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} M_1 & \frac{\partial N_1}{\partial y} M_2 & \frac{\partial N_1}{\partial y} M_3 & \frac{\partial N_1}{\partial y} M_4 \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} M_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} M_2 & \frac{\partial N_2}{\partial y} M_3 & \frac{\partial N_2}{\partial y} M_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial y} M_1 & \frac{\partial N_8}{\partial y} M_2 & \frac{\partial N_8}{\partial y} M_3 & \frac{\partial N_8}{\partial y} M_4 \end{bmatrix} dx dy \\
&= \begin{bmatrix} c2_{11} & c2_{12} & c2_{13} & c2_{14} \\ c2_{21} & c2_{22} & c2_{23} & c2_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c2_{81} & c2_{82} & c2_{83} & c2_{84} \end{bmatrix} \quad (7-51)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
c2_{ij} &= \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 H_s H_t \left(XC \frac{\partial N_t}{\partial \eta} - XA \frac{\partial N_t}{\partial \xi} \right) M_j \\
i &= 1, 2, \dots, 8; j = 1, 2, 3, 4 \quad (7-52)
\end{aligned}$$

右端项的 $\{F_1\}$, $\{F_2\}$ 的导出也是类似的, 不赘述。但是 $\{F_1\}$, $\{F_2\}$ 的积分表达式中的微分 dx, dy 为整体坐标系下的微分变量, 可按下式转换。如图 7-2 所示, dx, dy 与 ds 的关系为:

$$dx = ds \cdot \cos \alpha, dy = ds \cdot \sin \alpha \quad (7-53)$$

而

$$ds = \sqrt{(XC \cdot d\xi - XA \cdot d\eta)^2 + (YC \cdot d\xi - YA \cdot d\eta)^2}$$

因此只要知道边界边与整体坐标系 x 轴之间的夹角 α , 就可进行右端项的积分计算。

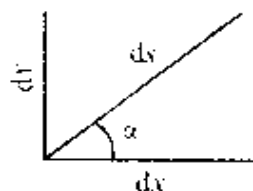


图 7-2 dx, dy 与 ds 之间的关系

考察式(7-29)~式(7-31)和式(7-41)~式(7-51)可知, $[K_{11}]$, $[K_{12}]$, $[K_{21}]$, $[K_{22}]$ 均为 8×8 阶矩阵, $[C_1]$, $[C_2]$ 为 8×4 阶矩阵, $[C_1]^T$, $[C_2]^T$ 为 4×8 阶矩阵, 从而流场计算的单元刚度矩阵式(7-23)为 20×20 阶矩阵。

二、系统刚度矩阵的病态特征及解决办法

从单元刚度矩阵的表达式(7-23)中可以看出, 矩阵的主对角线元素出现零值。根据有限元法计算规则, 由单元刚度矩阵组集总体刚度矩阵时(按节点号叠加), 总刚度矩阵的对角线元素也会出现零值。这将给方程的求解带来困难, 因此时方程组出现“病态”。一种可行的解决这一问题的方法是所谓罚函数法。

引入罚函数 δ (δ 是一足够小的正数), 将原本等于零的连续性方程近似表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\delta p \quad (7-54)$$

或
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \delta p = 0$$

式中 p 为压力。这样, 通过罚函数建立了连续性方程与压力之间的显式关系。由伽辽金加权余量法, 在求解域的每一个单元中可写出:

$$\iint_{\Omega} [M] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \delta p \right) dx dy = 0 \quad (7-55)$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & \iint_{\Omega} [M] \frac{\partial [N]^T}{\partial x} dx dy \{U\} + \iint_{\Omega} [M] \frac{\partial [N]^T}{\partial y} dx dy \{V\} \\ & = -\delta \iint_{\Omega} [M] [M]^T dx dy \{P\} \end{aligned}$$

由式(7-18)得

$$[C_1]^T \{U\} + [C_2]^T \{V\} = -\delta [M_p] \{P\} \quad (7-56)$$

$$\text{式中} \quad [M_p] = \iint_{\Omega} [M] [M]^T dx dy \quad (7-57)$$

$$\text{从而 } \{P\} = -\frac{1}{\delta} ([M_p]^{-1} [C_1]^T \{U\} + [M_p]^{-1} [C_2]^T \{V\}) \quad (7-58)$$

将式(7-58)代入单元方程式(7-23),消去压力项,则式(7-20)成为

$$\begin{aligned} & [K_{11}] \{U\} + [K_{12}] \{V\} - [C_1] \left(-\frac{1}{\delta} ([M_p]^{-1} [C_1]^T \{U\} + \right. \\ & \quad \left. [M_p]^{-1} [C_2]^T \{V\}) \right) = \{F_1\} \\ \text{即 } & \left([K_{11}] + \frac{1}{\delta} [C_1] [M_p]^{-1} [C_1]^T \right) \{U\} + ([K_{12}] + \\ & \quad \frac{1}{\delta} [C_1] [M_p]^{-1} [C_2]^T) \{V\} = \{F_1\} \quad (7-59) \end{aligned}$$

同理,式(7-22)成为

$$\begin{aligned} & \left([K_{21}] + \frac{1}{\delta} [C_2] [M_p]^{-1} [C_1]^T \right) \{U\} + ([K_{22}] + \\ & \quad \frac{1}{\delta} [C_2] [M_p]^{-1} [C_2]^T) \{V\} = \{F_2\} \quad (7-60) \end{aligned}$$

将式(7-59)和式(7-60)合并写成矩阵形式,有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} + \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} [C_1] [M_p]^{-1} [C_1]^T & [C_1] [M_p]^{-1} [C_2]^T \\ [C_2] [M_p]^{-1} [C_1]^T & [C_2] [M_p]^{-1} [C_2]^T \end{bmatrix} \\ & \quad \times \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad (7-61) \end{aligned}$$

由式(7-61)表示的流场有限元计算单元刚度矩阵中,主对角线元素为零的现象消失了,同时还使单元方程降阶。若采用图7-1所示网格系统,单元刚度矩阵由原来的 20×20 阶降为现在的 16×16 阶。相应的系统总体计算方程中由于一次求解去掉了压力项,也使总刚度矩阵降阶三分之一。计算出各节点速度值 u_i , v_i 后,利用式(7-58)可求出节点压力 p_i 。

然而采用罚函数法求解流场有限元方程又会带来另外的问题。将式(7-61)写成下述形式:

$$[K_1 + \alpha K_2]^e \{\phi\}^e = \{F\}^e \quad (7-62)$$

式中

$$K_1 = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} [C_1][M_p]^{-1}[C_1]^T & [C_1][M_p]^{-1}[C_2]^T \\ [C_2][M_p]^{-1}[C_1]^T & [C_2][M_p]^{-1}[C_2]^T \end{bmatrix} \quad (7-63)$$

$$\alpha = 1/\delta, \{\boldsymbol{\varphi}\}^r = \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{V\} \end{Bmatrix}, \{\boldsymbol{F}\}^r = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}$$

将单元方程式(7-62)按节点号叠加成总体计算方程后,应该有类似的方程形式:

$$[K_1 + \alpha K_2]\{\boldsymbol{\Psi}\} = \{\boldsymbol{F}\} \quad (7-64)$$

上式 K_1, K_2 中各元素为式(7-63)表示的有限大小的值,当罚函数 $\delta \rightarrow 0$, 即 $\alpha \rightarrow \infty$ 时,随着 α 的增加,方程式(7-64)趋向于

$$[\alpha K_2]\{\boldsymbol{\Psi}\} = \{\boldsymbol{F}\}$$

或

$$[K_2]\{\boldsymbol{\Psi}\} = \{\boldsymbol{F}\}/\alpha \rightarrow 0$$

即这时罚函数项占有了支配地位。由线性代数知识我们知道,如果矩阵 $[K_2]$ 是非奇异的,方程只可能有平凡解 $\{\boldsymbol{\Psi}\} = 0$, 只有当 $[K_2]$ 为奇异矩阵时,才有可能得到非零解。事实上这里有两个相互矛盾的要求,一方面矩阵 $[K_2]$ 必须是高阶奇异的,另一方面又希望矩阵 $[K_1 + \alpha K_2]$ 是非奇异的,否则在求解总体有限元方程时将会遇到困难。解决这一矛盾可采用“降阶积分”或采用“杂交有限元”方法,有兴趣的读者可参阅有关参考书。

三、刚度矩阵的非对称性和方程的非线性

由式(7-24)和式(7-61)可以看出,流场有限元计算的单元刚度矩阵与前几章所述结构问题和稳定温度场导热问题的单元刚度矩阵有很大不同。最明显的特征是,流场计算的单元刚度矩阵为一个不对称矩阵,将其按节点号叠加成总体刚度矩阵后仍然会是一个不对称矩阵。不对称矩阵对有限元计算的最直接影响就是

存储量加大。由于矩阵的不对称,第四章所述的存储半带宽以内的元素并采用压缩存储的方法不能应用。只能采用满阵存储或全带宽存储。此外,矩阵的不对称也使得一些只适用于对称矩阵的高效率的代数方程求解方法失效,从而使计算时间加长。

另外,流场描述方程为一非线性微分方程组,由于其对流项的存在,有限元计算方程也成为一组非线性代数方程。因此,方程的求解不可能一次成功,求解必然要具有叠代的过程。而且非线性方程组求解时还会出现收敛性和稳定性问题。这些都增加了流场有限元方程的计算难度。

小结:

(1) 本章讨论了利用有限元法求解非结构问题的又一个例子——流体流动问题的计算。所用方法非但不同于求解结构问题的力学原理和虚功原理,而且也不同于上一章计算稳定温度场导热问题所采用的变分原理。是利用加权余量法,通过将试探函数代入控制微分方程,基于使所产生的误差(余量)在加权平均的意义上等于零的思想,来推导该控制方程的有限元计算格式。

(2) 本章简要介绍了加权余量法的基本概念,最小二乘加权余量法中权函数的计算,以及伽辽金加权余量法中权函数的确定。对于无法利用变分原理,即找不到等价的泛函极值问题的控制微分方程有限元求解问题,一般来讲都可以利用加权余量法推导其有限元计算格式。

(3) 本章较详细的推导了二维稳定流场问题的等参数有限元计算格式,同时讨论了流场有限元计算的一些特殊问题,计有

- ① 速度插值函数与压力插值函数不同阶问题;
- ② 流场有限元方程系数矩阵的“病态”问题;
- ③ 罚函数法解决主对角线元素为零带来的求解问题;
- ④ 流场有限元方程系数矩阵的非对称性问题;
- ⑤ 流场有限元方程的非线性问题。

第八章 薄板弯曲问题的有限元法

§ 8-1 薄板弯曲问题的力学描述

凡是厚度与其他两个方向的尺寸相比很小的平板,都称为薄板。工程中薄板是常见的和重要的结构元件。例如铁道车辆,无论是客车还是货车,车体都是梁板结构组合而成,而且是只有几个毫米厚的薄钢板。因此,要解决这类结构的强度、刚度问题,还必须研究薄板的弯曲。

薄板弯曲是弹性力学所研究的内容,如图 8-1 所示,任意形状的平板,板厚为 t ,平分板厚 t 的平面称为板的中面。将 xOy 坐标面取在中面上,并取 z 轴沿板厚方向,构成右手坐标系。

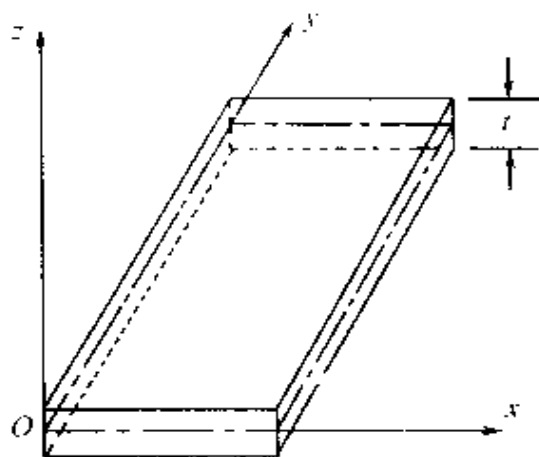


图 8-1 薄板及其坐标系

尽管板厚 t 很小,但认为板有足够的刚度,板弯曲变形时挠度(沿板厚方向的位移) w 远比厚度 t 小,这样的板是我们研究的重点。另外,作用在板上的外力可以分为两部分:一部分作用在板的

中面内,另一部分垂直于中面作用。前者可认为沿板的厚度均匀分布,因此可按平面应力问题求解。后者是垂直于中面的横向载荷,它引起板的弯曲,是本章要研究的情况。

一、基本假设

弹性力学中对薄板弯曲问题通常采用如下假设:

(1) 板弯曲前垂直于中面的法线,在板弯曲后仍保持为直线,并垂直于弯曲后的中面。它与材料力学中梁弯曲问题的平截面假设相似。说明板内没有剪应力 γ_{xz} 和 γ_{yx} , 即

$$\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yx} = 0 \quad (8-1)$$

(2) 板的各水平层之间相互不挤压(或拉伸),即

$$\sigma_z = 0 \quad (8-2)$$

同时认为变形前后板的厚度是一样的,即

$$\epsilon_z = 0 \quad (8-3)$$

(3) 薄板受垂直于中面的载荷时,可认为中间层各点没有平行于板面的位移。即在中面上:

$$u = 0, v = 0 \quad (8-4)$$

二、几何方程与物理方程

由于, $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 可知挠度与 z 无关,即

$$w = w(x, y) \quad (8-5)$$

由弹性力学几何方程式(4-2)可知

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yx} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases}$$

根据式(8-1)的假设,上面两式等于零。于是

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (8-6)$$

由于 w 只是 x, y 的函数,将式(8-6)两端对 z 积分,并由式(8-4),有

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (8-7)$$

代入几何方程可得到薄板内各点的三个不等于零的应变分量表达式:

$$\begin{cases} \epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8-8)$$

在板的中面($z=0$ 处),上述应变分量为零。式(8-8)即为薄板弯曲问题的几何方程。

另外,在假设式(8-2)的条件下,弹性力学物理方程式(4-3)成为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \quad (8-9)$$

或

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x + \mu\epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (8-10)$$

可见薄板弯曲问题的物理方程与平面应力分析时的物理方程具有完全相同的形式。但是应注意,前者 $\epsilon_z=0$,而后者 $\epsilon_z \neq 0$ 。

将式(8-8)代入式(8-10)可得应力与挠度的关系:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = - \frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8-11)$$

三、弯矩与扭矩

从式(8-11)可以看出,应力分量沿板厚方向呈线性变化,且在中面上为零,它们是变量 z 的奇函数,沿板厚方向的积分恒为零。因此 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 在板侧面上的合力为零,而只形成力偶矩。其中,正应力形成的力偶矩与板的弯曲有关,称为弯矩;剪应力形成的力偶矩与板的扭转有关,称为扭矩。下面推导它们的表达式。

用法线沿 x, y 方向从薄板内取出一微小平行六面体, dx, dy 和 t 为它的三边长,如图 8-2 所示。

在垂直于 x 轴的侧面 ABCD 上,正应力 σ_x ,合成的弯矩为

$$\left(\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz \right) dy = M_x dy$$

其中

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_x dz$$

为薄板在单位宽度上的弯矩。与此类似,该截面上由剪应力 Z_{xy} 合成的扭矩为

$$\left(\int_{-t/2}^{t/2} z\tau_{xy} dz \right) dy = M_{xy} dy$$

其中

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} z\tau_{xy} dz$$

为薄板在单位宽度上的扭矩。

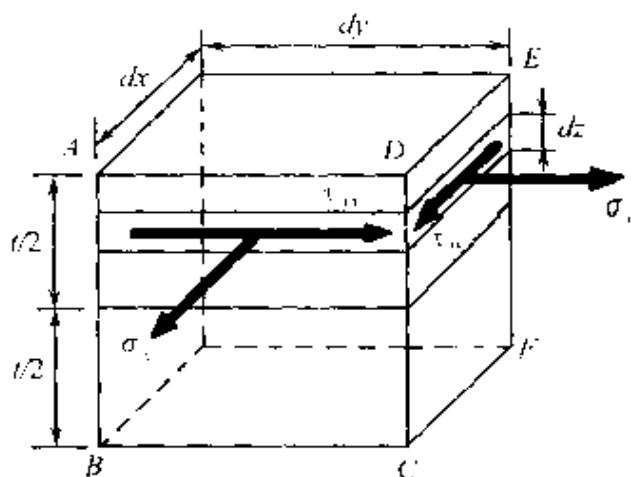


图 8-2 薄板微元六面体

同样,在垂直于 y 轴的侧面 $CDEF$ 上,分别由应力分量 σ_y 和 τ_{xy} 合成的单位宽度上的弯矩和扭矩为

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z\sigma_y dz$$

和

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} z\tau_{xy} dz = M_{xy}$$

将式(8-11)代入,积分得

$$\begin{cases} M_x = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = M_{yx} = -\frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8-12)$$

弯矩和扭矩的正方向如图 8-3 所示。

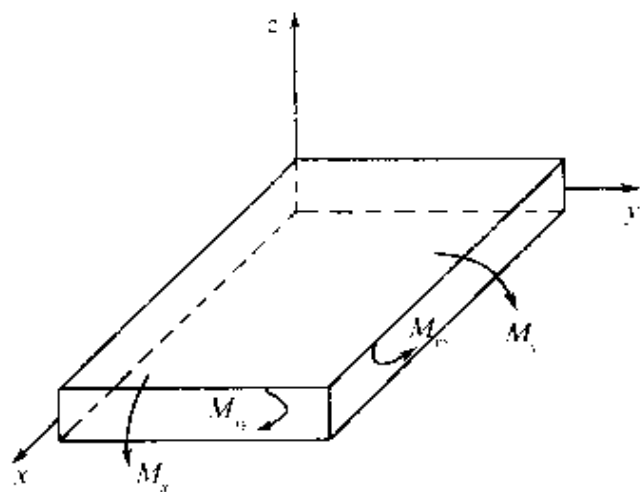


图 8-3 薄板弯矩和扭矩示意

比较式(8-11)和式(8-12)可得应力分量与弯矩、扭矩之间的关系式:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{12M_x}{t^3} z \\ \sigma_y = \frac{12M_y}{t^3} z \\ \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{t^3} z \end{cases} \quad (8-13)$$

式(8-8)~式(8-13)为描述薄板弯曲问题的部分力学方程,为简单计,引入矩阵符号:

$$\{\chi\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \{\mathbf{M}\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

则式(8-8)可写为

$$\{\epsilon\} = z\{\chi\} \quad (8-14)$$

式(8-13)可写为

$$\{\sigma\} = \frac{12z}{t^3}\{\mathbf{M}\} \quad (8-15)$$

式(8-12)可写为

$$\{\mathbf{M}\} = [\mathbf{D}]\{\chi\} \quad (8-16)$$

其中

$$[\mathbf{D}] = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{\mu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (8-17)$$

$$\text{式中 } d_{11} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}, d_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}, d_{12} = \frac{Et^3\mu}{12(1-\mu^2)} = d_{21},$$

$$d_{33} = \frac{Et^3}{24(1+\mu)}$$

式(8-17)称为薄板弯曲问题的弹性矩阵,它等于平面应力问题的弹性矩阵乘以 $\frac{t^3}{12}$ 。

§ 8-2 矩形单元薄板弯曲问题的有限元方程

我们仍采用第三章和第四章使用过的七个步骤来推导薄板弯曲问题的有限元方程。

一、选择合适的坐标系和节点变量

采用图 8-4 所示的右手坐标系。设矩形单元在 x 方向边长为 a , y 方向边长为 b , 节点排列如图按逆时针顺序, 共四个节点。每个节点取挠度 w 和 $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ 以及 $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$ 作为节点变量。相应的节点力(矩)为 F , m_x 和 m_y , 如图 8-5 所示。

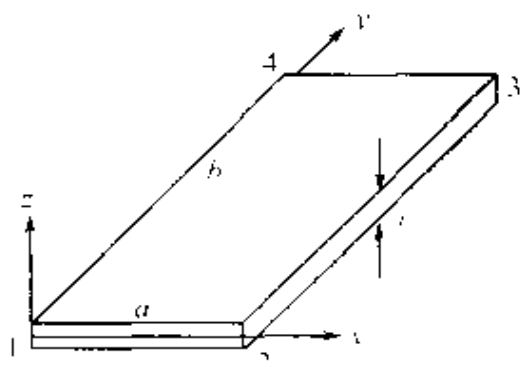


图 8-4 薄板单元及其坐标系

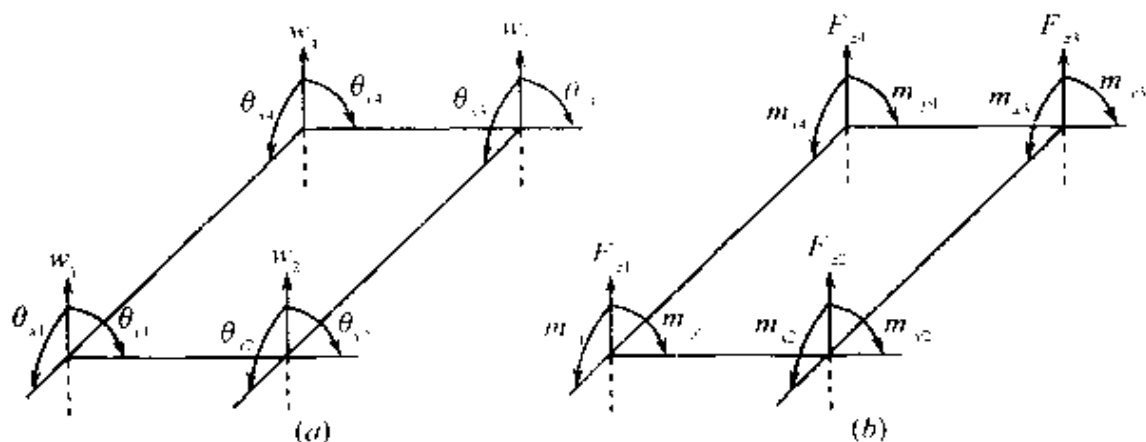


图 8-5 节点未知量作用方向

在几何上 θ_x 表示中面上过该点与 x 轴垂直的直线在板弯曲时绕 x 轴的转角, θ_y 表示中面上过该点与 y 轴垂直的直线在板弯曲时绕 y 轴的转角。

从式(8-2)可以看出,只要求出了各点的挠度 w , 单元所受的弯矩、扭矩和应力、应变都可以求出。那么为什么节点未知量除

了选择 w 外还要选择 θ_x 和 θ_y 呢? 这是因为尽管薄板弯曲时的应力及弯(扭)矩可以由挠度函数 $w = w(x, y)$ 所唯一决定, 但此时的应力和弯(扭)矩, 或者说薄板弯曲时的变形能依赖于挠度的二阶偏导数, 而不是像平面应力问题中那样变形能只依赖于位移的一阶偏导数。这个差别反映到位移插值函数的构造上, 就要求薄板弯曲问题挠度函数 $w = w(x, y)$ 的多项式插值函数的阶次 q 必须大于或等于 2 ($q \geq 2$), 即至少必须包含自变量 x, y 的完全二次多项式(而在平面应力问题中, 位移插值函数的阶次只要求 $q \geq 1$ 就可以了)。只有这样才能保证薄板弯曲问题有限元解的收敛性。而一个关于 x 和 y 的完全二次多项式有六个待定系数, 如果只取 w 作为节点未知量, 每个单元只有四个未知量, 即单元自由度数为四, 还不能决定一个完全二次多项式。因此, 又为了对称性, 每个节点还要取 θ_x 和 θ_y 作为节点未知量。

选择了坐标系统和节点未知量后, 就可以写出单元的位移向量和节点力向量:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix}, \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ m_{x1} \\ m_{y1} \\ F_{z2} \\ m_{x2} \\ m_{y2} \\ F_{z3} \\ m_{x3} \\ m_{y3} \\ F_{z4} \\ m_{x4} \\ m_{y4} \end{Bmatrix}$$

每个向量包含 12 个分量, 即单元自由度数为 12, 因此单元刚度矩阵的阶数为 12×12 。即有

$$\{F^e\}_{12 \times 1} = [K^e]_{12 \times 12} \{\delta^e\}_{12 \times 1} \quad (8-18)$$

二、选择适当的位移插值函数

单元有 12 个自由度,位移插值函数中可以有 12 个待定系数,因此取下述形式的位移插值函数:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (8-19)$$

这一位移插值函数当 x 或 y 为常数时,变为与第三章中梁单元的位移插值函数同样的形式。由式(8-19)可写出 θ_x 和 θ_y 的表达式:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3) \end{aligned}$$

下面来考察式(8-19)所示位移插值函数是否能满足相容性条件。

考虑图 8-6 所示矩形单元的节点 1、4 所在边。这里 $x=0$, 挠度和横向转角为

$$\begin{cases} w = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ \theta_x = \alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2 \\ \theta_y = -(\alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3) \end{cases}$$

边界上的节点值为

在节点 1, $y=0$, 则

$$w = w_1 = \alpha_1, \theta_x = \theta_{x1} = \alpha_3, \theta_y = \theta_{y1} = -\alpha_2 \quad (8-20)$$

在节点 4, $y=b$, 则

$$\begin{cases}
 w_1 = w_4 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3 \\
 \theta_{x1} = \theta_{x4} = \alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2 \\
 \theta_{y1} = \theta_{y4} = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3)
 \end{cases} \quad (8-21)$$

式(8-20)和式(8-21)所示两组共6个方程,但有8个未知量 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12})$,也就是说无法用节点位移值完全

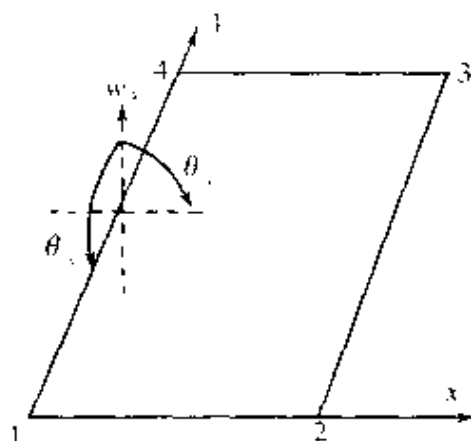


图8-6 单元插值函数相容性考察

确定所有的待定系数。但仔细观察可以看出,有关 w 和 θ_x 的四个方程包含相同的4个未知数 $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10})$;而有关 θ_y 的两个方程包含另外的4个未知数 $(\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{12})$ 。因此,有关 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}$ 的4个方程可解出这4个系数,这意味着插值函数 w 和 θ_x 在这一边上可以由其上节点处的 $w_1, w_4, \theta_{x1}, \theta_{x4}$ 所唯一决定,这样就保证了两个相邻单元公共边上挠度 w 和转角 θ_x 连续,故挠度插值函数 w 和转角 θ_x 在整个求解区域0阶连续。但是有关 θ_y 的两个方程无法解出4个未知数 $\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{12}$,即节点处的 θ_y 值无法确定挠度函数的法向导数 $\theta_y(x, y)$ 。因此,在两个相邻单元的公共边上挠度函数的法向导数不连续。所以,这里讨论的薄板弯曲问题的矩形单元在整个求解区域0阶连续,而未达到所要求的一阶连续,是不相容的单元。这一不相容的单元模型变形后会出现如图8-7所示情形,即变形后的薄板只连续不光滑。

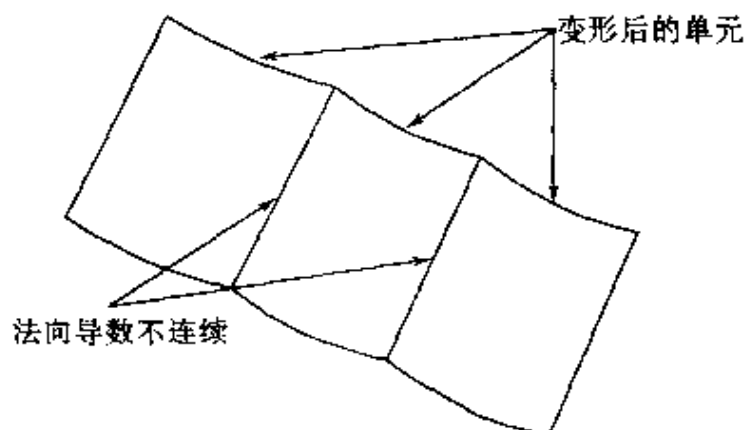


图 8-7 矩形弯曲板单元变形后的情形

不相容的单元是否可以使有限元解收敛呢？理论和实践都可以证明，为保证解的收敛性，相容性的要求并不是完全必要的，一些不相容的单元有时也可以保证解的收敛性。对于我们讨论的板单元，如果要使挠度和转角在相邻两单元公共边上都保持连续，则单元的构造和插值函数的形式往往相当复杂，不便于实际计算。因此求解薄板弯曲问题时，常采用一些构造比较简单，尽管不相容但仍能使解收敛且能取得较好结果的单元。矩形板单元就是其中之一。

矩形板单元位移插值函数的矩阵形式为

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (8-22)$$

或

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \\
 & \times \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (8-23)
 \end{aligned}$$

三、单元位移与节点位移间的关系

类似于第三章和第四章的方法,将节点坐标 $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) 和 $(0,b)$ 代入式(8-23),有

$$\begin{aligned}
 \{\delta^e\} &= \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{\alpha\} \\
 &= [A] \{\alpha\} \quad (8-24)
 \end{aligned}$$

其中

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 & 0 & -b^3 \end{bmatrix}$$

从而,待定系数可表示为

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (8-25)$$

将上式代入式(8-22)就得到用节点位移表示的单元位移插值函数:

$$\begin{aligned} \{\delta(x, y)\} &= [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \\ &= [N(x, y)]\{\delta^e\} \end{aligned} \quad (8-26)$$

其中

$$[N(x, y)] = [f(x, y)][A]^{-1} \quad (8-27a)$$

是形如式(8-19)的关于 x, y 的多项式。相当于第四、五章中的形状函数。

四、求单元应变与节点位移之间的关系

根据§ 8-1中式(8-8)或式(8-14),我们知道有下列矩阵形式:

$$\{\epsilon(x, y)\} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

将位移插值函数式(8-19)代入,有

$$\begin{aligned} \{\epsilon(x, y)\} &= z \begin{Bmatrix} -(2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy) \\ -(2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy) \\ -2(\alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2) \end{Bmatrix} \\ &= z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} = z[C]\{\alpha\} \end{aligned} \quad (8-27b)$$

将式(8-25)代入,有

$$\{\epsilon(x, y)\} = z[C][A]^{-1}\{\delta^e\} = z[B]\{\delta^e\} \quad (8-28)$$

其中

$$[B] = [C][A]^{-1} \quad (8-29)$$

相当于第三、四章中的几何矩阵

五、求单元应力与节点位移间关系

由式(8-15)和式(8-16)可写出

$$\{\sigma(x, y)\} = \frac{12z}{t^3} [M] = \frac{12z}{t^3} [D] \{\chi\} = \frac{12z}{t^3} [D] \{\epsilon(x, y)\} \quad (8-30)$$

将式(8-28)代入上式,有

$$\{\sigma(x, y)\} = \frac{12z}{t^3} [D] z [B] \{\delta^e\} \quad (8-31)$$

比较式(8-30)和式(8-31)可知下式成立

$$\{\chi\} = [B] \{\delta^e\} \quad (8-32)$$

六、求节点力与节点位移间的关系

利用第三章中虚功原理推导的结果,节点力与节点位移间的关系为

$$\begin{aligned} \{\delta^{e*}\} \{F^e\} &= \int_v \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} d(\text{vol}) \\ &= \int_v z [B]^T \{\delta^{e*}\} \frac{12z}{t^3} [D] [B] \{\delta^e\} dz dx dy \end{aligned}$$

对于矩形板单元,有

$$\{F^e\} = \left[\int_0^b \int_0^{t/2} \int_0^{t/2} \right] \frac{12z^3}{t^3} [B]^T [D] [B] dz dy dx \{\delta^e\}$$

从而单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_0^b \int_0^{t/2} \int_0^{t/2} \frac{12z^3}{t^3} [B]^T [D] [B] dz dy dx \\ &= \int_0^b \int_0^{t/2} [B]^T [D] [B] dy dx \end{aligned} \quad (8-33)$$

其中,几何矩阵 \$[B]\$ 由式(8-29)所决定,即 \$[B] = [C][A]^{-1}\$,

$[A]^{-1}$ 为常量矩阵。 $[C]$ 由式(8-27b)所定义,是 x, y 的函数,而 $[D]$ 由式(8-17)定义,也是常量矩阵。因此被积函数 $[B]^T[D][B]$ 是 x, y 的函数。式(8-34)所列积分可以在单元平面区域内进行,这一积分的计算比较复杂,但仍可以显式地写出。

令 $P = a/b$

$$SA = 20a^2d_{11} + 8b^2d_{33}$$

$$SB = 15abd_{12}$$

$$SC = 20b^2d_{11} + 8a^2d_{33}$$

$$SD = 30aPd_{11} + 15bd_{21} + 6bd_{33}$$

$$SE = \frac{30b}{P}d_{11} + 15ad_{21} + 6ad_{33}$$

$$SF = \frac{60}{P^2}d_{11} + 60P^2d_{22} + 30d_{21} + 84d_{33}$$

$$SG = 10a^2d_{22} + 2b^2d_{33}$$

$$SH = -30aPd_{21} + 6bd_{33}$$

$$SI = 10b^2d_{11} + 8a^2d_{33}$$

$$SJ = \frac{15b}{P}d_{11} + 15ad_{21} + 6ad_{33}$$

$$SM = \frac{30}{P^2}d_{11} + 60P^2d_{22} + 30d_{21} + 84d_{33}$$

$$SN = 10a^2d_{22} + 8b^2d_{33}$$

$$SO = -15Pad_{22} + 15bd_{21} + 6bd_{33}$$

$$SP = 5a^2d_{22} + 2b^2d_{33}$$

$$SQ = 15aPd_{22} + 6bd_{33}$$

$$SR = 10b^2d_{11} + 2a^2d_{33}$$

$$SS = \frac{30b}{P}d_{11} + 6ad_{33}$$

$$ST = 5b^2d_{11} + 2a^2d_{33}$$

$$SU = \frac{15b}{P}d_{11} + 6ad_{33}$$

$$SX = \frac{60}{P^2} d_{11} + 30P^2 d_{22} - 30d_{21} - 84d_{33}$$

$$SY = -\frac{30}{P^2} d_{11} - 30P^2 d_{22} + 30d_{21} + 84d_{33}$$

则矩形板单元刚度矩阵可表示为

$$[K^e] = \frac{1}{15ab} \begin{bmatrix} SA & & & & & & & & & & \\ -SB & SC & & & & & & & & & \\ -SD & SE & SF & & & & & & & & \\ SG & 0 & SH & SA & & & & & & & \\ 0 & SI & SJ & SB & SC & & & & & & \\ -SH & SJ & SM & SD & SE & SF & & & & & \\ SN & 0 & SO & SP & 0 & SQ & SA & & & & \\ 0 & SR & SS & 0 & ST & SU & SB & SC & & & \\ SO & -SS & SX & -SQ & -SU & SY & -SD & -SE & SF & & \\ SP & 0 & -SQ & SN & 0 & -SO & SG & 0 & SH & SA & \\ 0 & ST & SU & 0 & SR & SS & 0 & SI & -SJ & -SB & SC \\ SQ & -SU & SY & -SO & -SS & SX & -SH & -SJ & SM & SD & -SE & SF \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{对} \\ \text{称} \end{matrix} \quad (8-34)$$

仍为对称矩阵。

七、应力与节点位移间的关系

由式(8-31)可写出

$$\{\sigma(x, y)\} = \frac{12}{t^3} z [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\delta^e\}$$

$$= \frac{12z}{t^3} \cdot \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} [\mathbf{B}] \{\delta^e\}$$

$$\begin{aligned}
&= z \cdot \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} [\mathbf{B}][\boldsymbol{\delta}^e] \\
&= z[\mathbf{D}_0][\mathbf{B}][\boldsymbol{\delta}^e] = z[\mathbf{H}][\boldsymbol{\delta}^e] \quad (8-35)
\end{aligned}$$

其中 $[\mathbf{H}] = [\mathbf{D}_0][\mathbf{B}]$

而 $[\mathbf{D}_0]$ 是与平面应力问题弹性矩阵一样的矩阵。由式(8-28)我们已知 $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} = z[\mathbf{B}][\boldsymbol{\delta}^e]$, 从而式(8-35)可写为

$$\{\boldsymbol{\sigma}(x, y)\} = [\mathbf{D}_0]\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\}$$

这一结果与薄板弯曲问题物理方程式(8-10)是一致的。

八、单元负荷向量

在第六步中我们把单元所受载荷都作为节点力来看待,事实上单元所受的各种载荷确实可以转化为当量节点力,从而形成方程 $[\mathbf{K}^e][\boldsymbol{\delta}^e] = \{\mathbf{F}^e\}$ 的右端项 $\{\mathbf{F}^e\}$ 的各个分量。如第四章中图4-8将分布载荷等效转换成节点力就是一例。

1. 集中力

设单元某点 (x_0, y_0) 处作用有垂直于板面的集中力 P (规定其值沿 z 轴正方向为正),则 P 力在板变形时所作的功为

$$W_P = Pw = P[\mathbf{N}][\boldsymbol{\delta}^e] = [\boldsymbol{\delta}^e]^T P[\mathbf{N}]^T$$

w 为集中力作用处的挠度。从而此集中力的位能可以取为 $-[\boldsymbol{\delta}^e]^T P[\mathbf{N}]^T$ 。集中力 P 所形成的负荷列向量为

$$\{\mathbf{R}_1\}^e = P[\mathbf{N}]^T \quad (8-36)$$

这里, $[\mathbf{N}]$ 是将集中力 P 作用点坐标代入式(8-27a)得到的。

实际计算时,集中力作用处最好取为节点。

2. 分布载荷

设单元上法向分布的载荷密度为 $q(x, y)$,则板变形时此载荷所作的功为

$$W_q = \iint_{\Omega} q w dx dy = \iint_{\Omega} q [N] \{\delta^e\} dx dy = \{\delta^e\}^T \iint_{\Omega} [N]^T q dx dy$$

w 为载荷作用处的挠度。从而此分布载荷的位能可取为

$$= \{\delta^e\}^T \iint_{\Omega} [N]^T q dx dy$$

法向分布载荷所形成的负荷列向量为

$$\{R_2\}^e = \iint_{\Omega} [N]^T q dx dy \quad (8-37)$$

积分是在单元上进行的。合并式(8-36)和式(8-37)就得到单元负荷向量:

$$\{F^e\} = \{R_1\}^e + \{R_2\}^e \quad (8-38)$$

按节点号合成各单元负荷向量和各单元刚度矩阵,就得到总体负荷向量和总体刚度矩阵,以及薄板弯曲问题的线性代数方程组:

$$[K] \{\delta\} = [F]$$

引入约束条件后求解,可得各节点处的挠度 w 与转角 θ_x 和 θ_y 。根据节点位移 $\{\delta^e\}$,还可以求出节点处的弯矩和扭矩。注意式(8-15)和式(8-31),有

$$\{\sigma\} = \frac{12z}{t^3} \{M\} = \frac{12z}{t^3} [D][B]\{\delta^e\}$$

从而

$$\{M\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (8-39)$$

§ 8-3 三角形单元薄板弯曲问题的有限元方程

一、整体坐标下位移插值函数

矩形单元通常只适合求解矩形区域的薄板弯曲问题,工程中经常会遇到非矩形区域的薄板弯曲问题。下面介绍一种简化的三角形薄板弯曲单元。

如图 8-8 所示,设三角形单元有三个节点,其编号顺序按逆时针排列。在每个节点上仍取 $w, \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 作为节

点未知量。这样,一个三角形单元共有 9 个节点未知量,单元的位移向量为

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \quad (8-40)$$

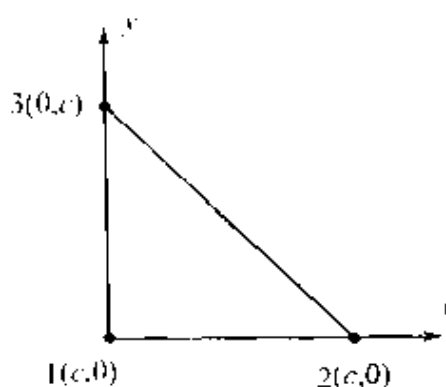


图 8-8 产生奇异矩阵的三角形单元

单元有 9 个自由度,但是一个关于 x 和 y 的完全三次多项式有 10 个未知系数:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \\ & \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 \end{aligned}$$

无法用式(8-40)中 9 个节点位移值来确定,因此应设法减少其中一个系数。为保证收敛性前 6 项必须保留,通常为了保持 x 和 y 的对称性是使 $x^2 y$ 和 xy^2 项的系数相等。如此,挠度插值函数可取为如下形式:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy +$$

$$\alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + x y^2) + \alpha_9 y^3$$

按照第三、四章和 § 8-2 所述第二、三步推导方法,我们可以利用三角形单元节点坐标值写出

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\} \quad \text{和} \quad \{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\}$$

从而用节点变量 w, θ_x, θ_y 描述插值函数的待定系数 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, 9)$ 。但是在某些情况下,上式中矩阵 $[A]$ 会出现奇异性。例如当三角形单元是两条边分别平行于坐标轴的等腰三角形时(图 8-8),矩阵 $[A]$ 为

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & c^2 & 0 & 0 & c^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c & 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2c & 0 & 0 & -3c^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 & c^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2c & 0 & 0 & 3c^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & -c^2 & 0 \end{bmatrix}$$

这一矩阵是奇异的(第 5 列与 8 列元素成比例),因此 $[A]^{-1}$ 不存在,故求不出用 $\{\delta^e\}$ 表示的 $\{\alpha\}$ 。所以实际应用中,在进行单元分割时应避免出现这种情况。但这种现象的存在总会带来应用上的不便,为此,可以在运算推导过程中想办法。采用一种称为面积坐标的坐标系统可以克服上述缺点。类似于等参数单元的应用,它使计算和推导过程变得复杂,但不计对计算结果产生本质影响。

二、面积坐标

1. 三角形单元的面积坐标定义

如图 8-9 所示三角形单元中,任意一点 P 的位置可以用下面三个比值确定:

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, L_2 = \frac{A_2}{A}, L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (8-41)$$

其中 A 为 $\triangle 123$ 的面积, A_1, A_2, A_3 分别为 $\triangle P23, \triangle P31, \triangle P12$ 的面积。比值 L_1, L_2, L_3 就称为 P 点的面积坐标。

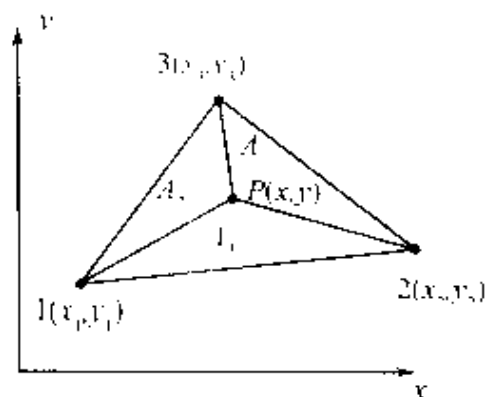


图 8-9 面积坐标示意图

因为 $A_1 + A_2 + A_3 = A$, 因此有

$$\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (8-42)$$

3 个节点处的面积坐标值为

$$\text{节点 1: } L_1 = 1, L_2 = 0, L_3 = 0$$

$$\text{节点 2: } L_1 = 0, L_2 = 1, L_3 = 0$$

$$\text{节点 3: } L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 1$$

此外, 面积坐标是局部坐标, 只在单元内有定义, 各个单元的面积坐标是不一样的。

2. 整体坐标表示的三角形面积

设 $P(x, y)$ 为三角形单元内任意一点, 由解析几何知识我们知道

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \end{aligned}$$

$$\text{同理 } A_2 = \frac{1}{2} [(c_3 y_1 - c_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$A_3 = \frac{1}{2} [(c_1 y_2 - c_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

令

$$\begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, b_1 = y_2 - y_3, c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, b_2 = y_3 - y_1, c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, b_3 = y_1 - y_2, c_3 = x_2 - x_1 \end{cases} \quad (8-43)$$

则

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \\ A_2 = \frac{1}{2} (a_2 + b_2 x + c_2 y) \\ A_3 = \frac{1}{2} (a_3 + b_3 x + c_3 y) \end{cases} \quad (8-44)$$

3. 面积坐标与整体坐标间的坐标变换

将式(8-44)代入式(8-41),有

$$L_1 = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y)$$

$$L_2 = \frac{1}{2A} (a_2 + b_2 x + c_2 y)$$

$$L_3 = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 x + c_3 y)$$

将其写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (8-45)$$

或

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (8-46)$$

这里应注意整体坐标表示一个点用两个参数 (x, y) , 而面积坐标表示一个点要用三个参数 (L_1, L_2, L_3) 。但因为 $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, 三个参数中只有两个是独立的

4. 两坐标系间导数的关系

(1) 一阶导数

将 $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ 带入式(8-45), 消去 L_3 , 有

$$\begin{cases} x = (x_1 - x_3)L_1 + (x_2 - x_3)L_2 + x_3 = c_2 L_1 - c_1 L_2 + x_3 \\ y = (y_1 - y_3)L_1 + (y_2 - y_3)L_2 + y_3 = -b_2 L_1 + b_1 L_2 + y_3 \end{cases} \quad (8-47)$$

由复合函数链导法则, 并利用式(8-47)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L_1} &= \frac{\partial x}{\partial L_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial L_1} \frac{\partial}{\partial y} = c_2 \frac{\partial}{\partial x} - b_2 \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} &= \frac{\partial x}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial y} = -c_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -b_2 \\ -c_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8-48)$$

式中 $[J]$ 为变换矩阵, 称为雅可比矩阵。将式(8-48)改写, 可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \quad (8-49)$$

不难解出

$$[J]^{-1} = \frac{1}{[J]} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \quad (8-50)$$

而

$$[J] = \begin{bmatrix} c_2 & -b_2 \\ -c_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

$$= b_1 c_2 - c_1 b_2 = 2A \quad (8-51)$$

称为雅可比行列式,其中 A 为三角形单元面积。

(2) 二阶导数

同理,可以推导出两坐标系二阶导数之间的关系:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial L_1^2} &= c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2b_2 c_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} &= c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2b_1 c_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} &= -c_1 c_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_1 b_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2(b_1 c_2 + c_1 b_2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

写成矩阵形式,有

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2^2 & b_2^2 & -2b_2 c_2 \\ c_1^2 & b_1^2 & -2b_1 c_1 \\ -c_1 c_2 & -b_1 b_2 & b_1 c_2 + c_1 b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$= [\mathbf{J}_A] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

将 $[\mathbf{J}_A]$ 求逆,可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_A]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1^2 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_1^2 & c_1 c_2 \\ 2b_1 c_1 & 2b_1 c_2 & b_1 c_2 + c_1 b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} \end{Bmatrix} \\
&= [J_B] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial L_1 \partial L_2} \end{Bmatrix} \quad (8-52)
\end{aligned}$$

三、面积坐标下位移插值函数

利用整体坐标 \$(x, y)\$ 与面积坐标 \$(L_1, L_2, L_3)\$ 之间的关系, 可写出用面积坐标表示的三角形弯曲板单元位移插值函数。

$$\begin{aligned}
w = & \beta_1 + \beta_2 L_1 + \beta_3 L_2 + \beta_4 L_1 L_2 + \beta_5 L_2 L_3 + \beta_6 L_3 L_1 + \\
& \beta_7 (L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2) + \beta_8 (L_2 L_3^2 - L_3 L_2^2) + \\
& \beta_9 (L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2)
\end{aligned}$$

利用式(8-49)~式(8-51)可导出

$$\begin{aligned}
\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1}{|J|} \left(b_1 \frac{\partial w}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial w}{\partial L_2} \right) \\
&= -\frac{1}{2A} \{ b_1 [\beta_2 + \beta_4 L_2 + \beta_6 L_3 + \beta_7 (L_2^2 - 2L_1 L_2) + \beta_9 (2L_3 L_1 - L_3^2)] \\
&\quad + b_2 [\beta_3 + \beta_4 L_1 + \beta_5 L_3 + \beta_7 (2L_1 L_2 - L_1^2) + \beta_8 (L_3^2 - 2L_3 L_2)] \} \\
\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{|J|} \left(c_1 \frac{\partial w}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial w}{\partial L_2} \right) \\
&= \frac{1}{2A} \{ c_1 [\beta_2 + \beta_4 L_2 + \beta_6 L_3 + \beta_7 (L_2^2 - 2L_1 L_2) + \beta_9 (2L_3 L_1 - L_3^2)] \\
&\quad + c_2 [\beta_3 + \beta_4 L_1 + \beta_5 L_3 + \beta_7 (2L_1 L_2 - L_1^2) + \beta_8 (L_3^2 - 2L_3 L_2)] \}
\end{aligned}$$

上述三个式子也可以写成矩阵形式:

$$\{\delta\} = [f(L_1, L_2, L_3)] \{\beta\} \quad (8-53)$$

其中

$$[f(L_1, L_2, L_3)] = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & L_2 & L_1 L_2 & L_2 L_3 & L_3 L_1 \\ 0 & -\frac{b_1}{2A} & -\frac{b_2}{2A} & -\frac{b_1 L_2 + L_1}{2A} & -\frac{b_2 L_3}{2A} & -\frac{b_1 L_3}{2A} \\ 0 & \frac{c_1}{2A} & \frac{c_2}{2A} & \frac{c_1 L_2 + c_2 + L_1}{2A} & \frac{c_2 L_3}{2A} & \frac{c_1 L_3}{2A} \\ L_1 L_2^2 - L_2 L_1^2 & L_2 L_3^2 - L_3 L_2^2 & L_3 L_1^2 - L_1 L_3^2 \\ -\frac{1}{2A} [b_1 (L_2^2 - 2L_1 L_2) + b_2 (2L_1 L_2 - L_1^2)] & -\frac{b_2 (L_3^2 - 2L_3 L_2)}{2A} & -\frac{b_1 (2L_3 L_1 - L_3^2)}{2A} \\ \frac{1}{2A} [c_1 (L_2^2 - 2L_1 L_2) + c_2 (2L_1 L_2 - L_1^2)] & \frac{c_2 (L_3^2 - 2L_3 L_2)}{2A} & \frac{c_1 (2L_3 L_1 - L_3^2)}{2A} \end{bmatrix}$$

位移插值函数中的 9 个待定系数 $\beta_1 \sim \beta_9$ 可以根据三角形弯曲板单元三个节点处的 9 个广义位移值 $w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}$ 求出。

利用上式,在节点 1 ($L_1=1, L_2=0, L_3=0$), 有

$$w|_1 = w_1 = \beta_1 + \beta_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_1 = \theta_{y1} = \frac{1}{2A} (c_1 \beta_2 + c_2 \beta_3 + c_2 \beta_4 + c_2 \beta_7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_1 = -\theta_{x1} = -\frac{1}{2A} (b_1 \beta_2 + b_2 \beta_3 + b_2 \beta_4 + b_2 \beta_7)$$

在节点 2 ($L_1=0, L_2=1, L_3=0$), 有

$$w|_2 = w_2 = \beta_1 + \beta_3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_2 = \theta_{y2} = \frac{1}{2A} (c_1 \beta_2 + c_2 \beta_3 + c_1 \beta_4 + c_1 \beta_7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_2 = -\theta_{x2} = -\frac{1}{2A} (b_1 \beta_2 + b_2 \beta_3 + b_1 \beta_4 + b_1 \beta_7)$$

在节点 3 ($L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=1$), 有

$$w|_3 = w_3 = \beta_1$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_3 = \theta_{y3} = \frac{1}{2A} (c_1 \beta_2 + c_2 \beta_3 + c_2 \beta_5 + c_1 \beta_6 + c_2 \beta_8 + c_1 \beta_9)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_3 = -\theta_{x3} = -\frac{1}{2A} (b_1 \beta_2 + b_2 \beta_3 + b_2 \beta_5 + b_1 \beta_6 + b_2 \beta_8 + b_1 \beta_9)$$

将上述 9 个式子写成矩阵形式, 有

$$\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_2 & b_2 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ 2A & 0 & 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & -b_2 & -b_1 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 \\ 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & 0 & c_2 & c_1 & 0 & c_2 & -c_1 \\ 0 & -b_1 & -b_2 & 0 & -b_2 & -b_1 & 0 & -b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix}$$

或写成

$$[A]\{\boldsymbol{\beta}\} = \{\boldsymbol{\delta}^e\}$$

从而, 待定系数 $\{\boldsymbol{\beta}\}$ 可表示为

$$\{\boldsymbol{\beta}\} = [A]^{-1}\{\boldsymbol{\delta}^e\}$$

将 $\{\boldsymbol{\beta}\}$ 代回到式(8-53),可得到用节点位移表示的插值函数:

$$\begin{aligned}\{\delta(L_1, L_2, L_3)\} &= [f(L_1, L_2, L_3)][\mathbf{A}]^{-1}[\boldsymbol{\delta}^e] \\ &= [N(L_1, L_2, L_3)][\boldsymbol{\delta}^e]\end{aligned}$$

其中 $[N(L_1, L_2, L_3)] = [f(L_1, L_2, L_3)][\mathbf{A}]^{-1}$

即为用面积坐标表示的三角形弯曲板单元形状函数。 $[N(L_1, L_2, L_3)]$ 的推导和整理过程比较繁琐,下面给出最后的结果:

$$[N] = [N_1, N_{1x}, N_{1y}, N_2, N_{2x}, N_{2y}, N_3, N_{3x}, N_{3y}] \quad (8-54)$$

其中 $N_1 = L_1(1 + L_1L_2 + L_1L_3 - L_2^2 - L_3^2)$

$$N_{1x} = -L_1^2(b_3L_2 - b_2L_3) - \frac{1}{2}(b_3 - b_2)L_1L_2L_3$$

$$N_{1y} = -L_1^2(c_3L_2 - c_2L_3) - \frac{1}{2}(c_3 - c_2)L_1L_2L_3$$

$$N_2 = L_2(1 + L_2L_3 + L_2L_1 - L_3^2 - L_1^2)$$

$$N_{2x} = -L_2^2(b_1L_3 - b_3L_1) - \frac{1}{2}(b_1 - b_3)L_1L_2L_3$$

$$N_{2y} = -L_2^2(c_1L_3 - c_3L_1) - \frac{1}{2}(c_1 - c_3)L_1L_2L_3$$

$$N_3 = L_3(1 + L_3L_1 + L_3L_2 - L_1^2 - L_2^2)$$

$$N_{3x} = -L_3^2(b_2L_1 - b_1L_2) - \frac{1}{2}(b_2 - b_1)L_1L_2L_3$$

$$N_{3y} = -L_3^2(c_2L_1 - c_1L_2) - \frac{1}{2}(c_2 - c_1)L_1L_2L_3$$

四、单元刚度矩阵

得到了位移插值函数或单元形状函数的表达式,就可以按照第三、四章所述7步推导中的4~6步过程推导三角形弯曲板单元的刚度矩阵。

第4步:求单元应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 与位移 $\{\boldsymbol{\delta}\}$ 及节点位移 $\{\boldsymbol{\delta}^e\}$ 的关系。

由§8-1中式(8-8)或式(8-14),有

$$\begin{aligned} & \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \{\epsilon(x, y)\} & \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \{\chi\} \\ & 2 \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

利用式(8-52)将位移 w 对整体坐标 x, y 的二阶导数转换为对面积坐标的二阶导数:

$$\begin{aligned} \{\chi\} &= \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_B] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial L_2^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial L_1 \partial L_2} \end{Bmatrix} \\ &= -[\mathbf{J}_B] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 N_{1x}}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 N_{1y}}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 N_{2x}}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 N_{1x}}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 N_{1y}}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 N_{2x}}{\partial L_2^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_1}{\partial L_1 \partial L_2} & 2\frac{\partial^2 N_{1x}}{\partial L_1 \partial L_2} & 2\frac{\partial^2 N_{1y}}{\partial L_1 \partial L_2} & 2\frac{\partial^2 N_2}{\partial L_1 \partial L_2} & 2\frac{\partial^2 N_{2x}}{\partial L_1 \partial L_2} \\ \frac{\partial^2 N_{2y}}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 N_{3x}}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 N_{3y}}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial^2 N_{2y}}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 N_{3x}}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 N_{3y}}{\partial L_2^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_{2y}}{\partial L_1 \partial L_2} & 2\frac{\partial^2 N_3}{\partial L_1 \partial L_2} & 2\frac{\partial^2 N_{3x}}{\partial L_1 \partial L_2} & 2\frac{\partial^2 N_{3y}}{\partial L_1 \partial L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$- [J_B] [B_A] \{\delta^e\} \quad (8-55)$$

由形状函数的表达式(8-54)可以导出

$$[B_A] = [L_B] [B_B]$$

其中

$$[L_B] = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$[B_B] = - \begin{bmatrix} 0 & -4b_2 & -4c_2 & 0 & 0 \\ 2 & b_1 & c_1 & -2 & -(b_3 - b_1) \\ 2 & 2b_2 & 2c_2 & 0 & 0 \\ -2 & -(b_2 - b_3) & -(c_2 - c_3) & 2 & -b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2b_1 \\ -2 & -(3b_3 + 5b_2) & -(3c_3 + 5c_2) & 0 & -(b_3 - b_1) \\ 0 & -(b_2 - b_3) & -(c_2 - c_3) & -2 & 3b_3 + 5b_1 \\ 0 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 & 0 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & -2b_2 & -2c_2 & - \\ -(c_3 - c_1) & 0 & -b_3 & -c_3 & \\ 0 & -2 & 4b_2 & 4c_2 & \\ -c_2 & 0 & b_3 & c_3 & \\ 4c_1 & 0 & 2b_1 & 2c_1 & \\ -2c_1 & -2 & -4b_1 & -4c_1 & \\ -(c_3 - c_1) & 2 & -(b_1 + 3b_2) & -(c_1 + 3c_2) & \\ 3c_3 + 5c_1 & 2 & 3b_1 + b_2 & 3c_1 + c_2 & \\ c_3 - c_1 & 0 & -3(b_1 - b_2) & -3(c_1 - c_2) & \end{bmatrix}$$

将 $[J_B]$, $[L_B]$, $[B_B]$ 代回到式(8-55)中去,有

$$\begin{aligned} \{\epsilon(L_1, L_2, L_3)\} &= z [J_B] [L_B] [B_B] \{\delta^e\} = z [J_B] [B_A] \{\delta^e\} \\ &= z [B] \{\delta^e\} \end{aligned} \quad (8-56)$$

$[B]$ 即为三角形弯曲板单元的几何矩阵。

第5步:单元应力 $\{\sigma\}$ 与单元应变 $\{\epsilon\}$ 及节点位移 $\{\delta^e\}$ 间的关系。

由式(8-15)、式(8-16)

$$\begin{aligned}\{\sigma(x, y)\} &= \frac{12z}{t^3} [M] = \frac{12z}{t^3} [D] \{\chi\} \\ &= \frac{12z}{t^3} [D] \{\epsilon(x, y)\}\end{aligned}$$

由式(8-56)有

$$\{\sigma(L_1, L_2, L_3)\} = \frac{12}{t^3} [D] [B] \{\delta^e\}$$

第6步:由虚功原理求单元刚度矩阵。

与§8-2中的第6步类似,由式(8-33)可写出

$$[F^e] = \left[\iint_{\Omega} \int_{-t/2}^{t/2} \frac{12}{t^3} z^2 [B]^T [D] [B] dz d\Omega \right] \{\delta^e\}$$

则单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned}[K^e] &= \iint_{\Omega} \left(\int_{-t/2}^{t/2} \frac{12}{t^3} z^2 [B]^T [D] [B] dz \right) d\Omega = \\ &\quad \iint_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega\end{aligned}$$

这里 Ω 为三角形单元区域,我们现在采用的坐标系为面积坐标,为使积分计算可行,还必须对积分域和微分 $d\Omega = dx dy$ 进行变换。

(1) 微分元素变换

$$d\Omega = dx dy = |J| dL_1 dL_2 = 2\Delta dL_1 dL_2$$

(2) 积分域变换

图8-10(a)中三角形单元在 (xOy) 坐标系中的图形变换到面积坐标系后成为图8-10(b)所示形状。从而,原积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

变换后积分域成为 $L_1(0 \sim 1)$, $L_2(0 \sim 1 - L_1)$, 即

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} g(L_1, L_2, 1-L_1-L_2) 2A dL_2 dL_1 \quad (8-10)$$

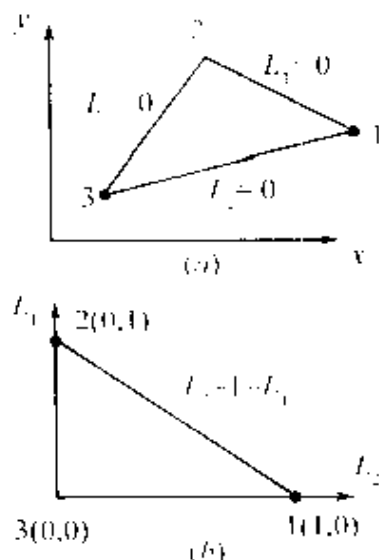


图 8-10 积分域变换示意图

(3) 积分 $\int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1^m L_2^n L_3^p dL_1 dL_2$ 计算结果推导

计算面积坐标条件下单元刚度矩阵时会遇到上述积分, 这里推导其结果。式中 m, n, p 可取 $0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1^m L_2^n L_3^p dL_1 dL_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1^m L_2^n (1-L_1-L_2)^p dL_1 dL_2 \\ &= \int_0^1 L_1^m \left[\int_0^{1-L_1} L_2^n [(1-L_1)-L_2]^p dL_2 \right] dL_1 \\ &= \int_0^1 L_1^m \left[(1-L_1)^{n+p+1} \cdot \left(\frac{n!}{(n+p+1)!} + \frac{p!}{(n+p+1)!} \right) \right] dL_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n! \cdot p!}{(n+p+1)!} \int_0^1 L_1^m (1-L_1)^{n-p+1} dL_1 \\
&= \frac{n! \cdot p!}{(n+p+1)!} \cdot \frac{m! \cdot (n+p+1)!}{(m+n+p+2)!} \\
&= \frac{m! \cdot n! \cdot p!}{(m+n+p+2)!}
\end{aligned} \tag{8-57}$$

回到单元刚阵计算式中，由式 $[\mathbf{B}] = [\mathbf{J}_B][\mathbf{L}_B][\mathbf{B}_B]$ ，则

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}^e] &= \iint_{\Omega} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d\Omega \\
&= \iint_{\Omega} [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{L}_B]^T [\mathbf{J}_B]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{J}_B] [\mathbf{L}_B] [\mathbf{B}_B] d\Omega
\end{aligned} \tag{8-58}$$

令

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D}_J] &= [\mathbf{J}_B]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{J}_B] \\
&= \begin{bmatrix} b_1^2 & c_1^2 & 2b_1c_1 \\ b_2^2 & c_2^2 & 2b_2c_2 \\ b_1b_2 & c_1c_2 & b_1c_2 + c_1b_2 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \\ \frac{1}{4A^2} & c_1^2 & c_2^2 & c_1c_2 \\ 2b_1c_1 & 2b_2c_2 & b_1c_2 + c_1b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_{j11} & d_{j12} & d_{j13} \\ d_{j21} & d_{j22} & d_{j23} \\ d_{j31} & d_{j32} & d_{j33} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8-59}$$

$[\mathbf{D}_J]$ 是一个常量矩阵，带入式(8-58)：

$$[\mathbf{K}^e] = \iint_{\Omega} [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{L}_B]^T [\mathbf{D}_J] [\mathbf{L}_B] [\mathbf{B}_B] d\Omega$$

由于 $[\mathbf{B}_B]$ 为常量矩阵,与面积坐标 L_1, L_2 无关,可以提到积分号之外,则单元刚阵成为

$$[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{B}_B]^T \iint_{\Omega} [\mathbf{L}_B]^T [\mathbf{D}_J] [\mathbf{L}_B] d\Omega [\mathbf{B}_B] \quad (8-60)$$

而积分

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [\mathbf{L}_B]^T [\mathbf{D}_J] [\mathbf{L}_B] d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 \\ L_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{j11} & d_{j12} & d_{j13} \\ d_{j21} & d_{j22} & d_{j23} \\ d_{j31} & d_{j32} & d_{j33} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} L_1 d_{j11} L_1 & L_1 d_{j11} L_2 & L_1 d_{j11} L_3 & L_1 d_{j12} L_1 & L_1 d_{j12} L_2 \\ L_2 d_{j11} L_1 & L_2 d_{j11} L_2 & L_2 d_{j11} L_3 & L_2 d_{j12} L_1 & L_2 d_{j12} L_2 \\ L_3 d_{j11} L_1 & L_3 d_{j11} L_2 & L_3 d_{j11} L_3 & L_3 d_{j12} L_1 & L_3 d_{j12} L_2 \\ L_1 d_{j21} L_1 & L_1 d_{j21} L_2 & L_1 d_{j21} L_3 & L_1 d_{j22} L_1 & L_1 d_{j22} L_2 \\ L_2 d_{j21} L_1 & L_2 d_{j21} L_2 & L_2 d_{j21} L_3 & L_2 d_{j22} L_1 & L_2 d_{j22} L_2 \\ L_3 d_{j21} L_1 & L_3 d_{j21} L_2 & L_3 d_{j21} L_3 & L_3 d_{j22} L_1 & L_3 d_{j22} L_2 \\ L_1 d_{j31} L_1 & L_1 d_{j31} L_2 & L_1 d_{j31} L_3 & L_1 d_{j32} L_1 & L_1 d_{j32} L_2 \\ L_2 d_{j31} L_1 & L_2 d_{j31} L_2 & L_2 d_{j31} L_3 & L_2 d_{j32} L_1 & L_2 d_{j32} L_2 \\ L_3 d_{j31} L_1 & L_3 d_{j31} L_2 & L_3 d_{j31} L_3 & L_3 d_{j32} L_1 & L_3 d_{j32} L_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} L_1 d_{j12} L_3 & L_1 d_{j13} L_1 & L_1 d_{j13} L_2 & L_1 d_{j13} L_3 \\ L_2 d_{j12} L_3 & L_2 d_{j13} L_1 & L_2 d_{j13} L_2 & L_2 d_{j13} L_3 \\ L_3 d_{j12} L_3 & L_3 d_{j13} L_1 & L_3 d_{j13} L_2 & L_3 d_{j13} L_3 \\ L_1 d_{j22} L_3 & L_1 d_{j23} L_1 & L_1 d_{j23} L_2 & L_1 d_{j23} L_3 \\ L_2 d_{j22} L_3 & L_2 d_{j23} L_1 & L_2 d_{j23} L_2 & L_2 d_{j23} L_3 \\ L_3 d_{j22} L_3 & L_3 d_{j23} L_1 & L_3 d_{j23} L_2 & L_3 d_{j23} L_3 \\ L_1 d_{j32} L_3 & L_1 d_{j33} L_1 & L_1 d_{j33} L_2 & L_1 d_{j33} L_3 \\ L_2 d_{j32} L_3 & L_2 d_{j33} L_1 & L_2 d_{j33} L_2 & L_2 d_{j33} L_3 \\ L_3 d_{j32} L_3 & L_3 d_{j33} L_1 & L_3 d_{j33} L_2 & L_3 d_{j33} L_3 \end{vmatrix} d\Omega \\
& = \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} [D_{j11}] & [D_{j12}] & [D_{j13}] \\ [D_{j21}] & [D_{j22}] & [D_{j23}] \\ [D_{j31}] & [D_{j32}] & [D_{j33}] \end{bmatrix} d\Omega \quad (8-61)
\end{aligned}$$

式中

$$[D_{j\mu q}] = \begin{bmatrix} L_1 d_{j\mu q} L_1 & L_1 d_{j\mu q} L_2 & L_1 d_{j\mu q} L_3 \\ L_2 d_{j\mu q} L_1 & L_2 d_{j\mu q} L_2 & L_2 d_{j\mu q} L_3 \\ L_3 d_{j\mu q} L_1 & L_3 d_{j\mu q} L_2 & L_3 d_{j\mu q} L_3 \end{bmatrix} \quad (8-62)$$

可见除常数 $d_{j\mu q}$ 不一样外,上式中每一个分块积分的结果都一样。任取一项积分,有

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \begin{bmatrix} L_1 d_{j\mu q} L_1 & L_1 d_{j\mu q} L_2 & L_1 d_{j\mu q} L_3 \\ L_2 d_{j\mu q} L_1 & L_2 d_{j\mu q} L_2 & L_2 d_{j\mu q} L_3 \\ L_3 d_{j\mu q} L_1 & L_3 d_{j\mu q} L_2 & L_3 d_{j\mu q} L_3 \end{bmatrix} 2A dL_1 dL_2 \\
& = d_{j\mu q} 2A \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_2 L_1 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_3 L_1 & L_3 L_2 & L_3^2 \end{bmatrix} dL_1 dL_2 \\
& = d_{j\mu q} [I_B] \quad (8-63)
\end{aligned}$$

由式(8-57)

$$2A \iint_{\Omega} L_1^2 dL_1 dL_2 = \frac{A}{6}$$

$$\begin{aligned}
2A \iint_{\Omega} L_2^2 dL_1 dL_2 &= \frac{A}{6} \\
2A \iint_{\Omega} L_3^2 dL_1 dL_2 &= \frac{A}{6} \\
2A \iint_{\Omega} L_1 L_2 dL_1 dL_2 &= \frac{A}{12} \\
2A \iint_{\Omega} L_1 L_3 dL_1 dL_2 &= \frac{A}{12} \\
2A \iint_{\Omega} L_2 L_3 dL_1 dL_2 &= \frac{A}{12}
\end{aligned}$$

因此

$$[\mathbf{I}_B] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8-64)$$

所以

$$\iint_{\Omega} [\mathbf{L}_B]^T [\mathbf{D}_f] [\mathbf{L}_B] d\Omega = \begin{bmatrix} d_{j11}[\mathbf{I}_B] & d_{j12}[\mathbf{I}_B] & d_{j13}[\mathbf{I}_B] \\ d_{j21}[\mathbf{I}_B] & d_{j22}[\mathbf{I}_B] & d_{j23}[\mathbf{I}_B] \\ d_{j31}[\mathbf{I}_B] & d_{j32}[\mathbf{I}_B] & d_{j33}[\mathbf{I}_B] \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_B] \quad (8-65)$$

将式(8-65)代入式(8-60)就得到单元刚度矩阵的最后表达式:

$$[\mathbf{K}^e] = [\mathbf{B}_B]^T [\mathbf{D}_B] [\mathbf{B}_B] \quad (8-66)$$

小结:

(1) 本章简要介绍了薄板弯曲问题的力学模型和力学方程。与平面问题不同,它的应变和应力只依赖于板的挠度 w ,但却是挠度的二阶导数的函数。

(2) 利用第三、四章推导有限元列式的七个步骤,推导了矩形薄板单元的有限元方程。其中选择节点未知量时,由于薄板弯曲问题的几何方程和物理方程是挠度的二阶方程,仅靠节点挠度

个参数无法保证单元间的相容,所以除了取 w 作为节点未知量外,还取了 $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ 和 $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ 为节点未知量。

(3) 尽管取了 w, θ_x 和 θ_y 作为节点未知量,所构造的挠度插值函数是包含完全二次多项式的不完全四次多项式,但是仍不能满足单元之间一阶连续的相容性要求。因此,矩形板单元是不相容的单元。但可以使有限元解收敛,只是精度不高。

(4) 本章推导的三角形弯曲板单元也是不相容的单元。但与矩形单元相比,在计算域剖分和应用上有许多方便之处,因此工程中应用较多。

(5) 取更多的单元节点和节点未知量可以构造相容的单元,但是插值函数和单元形式都比较复杂,花费的计算时间增加。

第九章 有限元法的前后处理

§9-1 引言

一般来讲,有限元法的分析过程包括以下几步:

- (1) 计算模型的几何剖分,数据生成和数据准备;
- (2) 计算分析;
- (3) 计算结果的分析、整理和图形显示。

有限元发展初期,第(1)步和第(3)步工作都是由人工来做的,即耗费时间又容易出错。有统计资料表明,由手工剖分有限元计算模型,其工作量占到整个有限元分析过程工作量的45%。用人工分析有限元计算结果则要占整个工作量的50%,而计算分析由于是计算机完成,工作量只占全部工作量的5%。以第(1)步工作为例,首先要将所分析的模型按一定比例放大或缩小地画在坐标纸上,其次按所选定的单元形式对它进行剖分,按一定的顺序编单元号和节点号。然后,准备各种数据以供有限元分析之用。这些数据主要有:

节点信息——包括节点编号和节点的二维或三维坐标;

单元信息——包括单元编号及单元中节点号的排列顺序;

材料信息——包括计算模型的材料性质(弹性模量、泊松比、比热、导热系数等);

载荷信息——包括计算模型所受负载信息(集中力、体积力、表面力、温度、压力等);

约束信息——包括计算模型的初始条件和边界条件。

最后还必须将所有这些数据输入计算机。

所有这些环节都是非常繁琐乏味的,而且不允许出现一点错误,否则将导致计算结果的不正确,甚至将算不出结果。因此,人们希望这部分工作能由计算机来完成。有限元分析的前处理就是使计算模型的几何剖分、数据生成和数据输入这部分工作部分或完全由计算机自动完成。而有限元分析的后处理则是将有限元计算结果由计算机整理成易于阅读或分析的数值或图形形式。

§ 9-2 有限元分析的前处理技术

有限元法的前处理主要有以下内容:

- (1) 计算模型的几何表示;
- (2) 模型网格的自动剖分;
- (3) 刚度矩阵的带宽优化;
- (4) 模型网格图的计算机绘制。

下面简要介绍各部分的主要内容。

一、计算模型的几何表示

对于一维或二维问题,有限元计算的几何模型可以用点、直线、曲线和平面来表示。例如图 9-1 所示二维模型,可以认为是由三段直线和一段圆弧围成,也可以认为是由一个矩形和一个半圆形组合而成,总起来说比较简单,对于三维问题则比较复杂。对设计阶段的零部件进行有限元分析,如果是采用计算机辅助设计,则模型的几何表示可采用计算机造型系统中的几何表示;常用的有表面模型和立体模型。对已有的零部件作有限元分析,则有时需要根据该零件的形状来决定其几何表示法。常用的有整体表示法和分块表示法。所谓整体表示法是由点表示线段,由线段形成表面,表面围成立体。用数据结构中术语就是用四叉树或八叉树来表示立体形状和线面几何的相互关系。分块表示是将复杂立体看成许多简单立体的组合,而简单立体则可用多边形和多面体表示。

二、有限元网络的自动剖分

有限元网络的自动剖分方法与计算模型的几何表示方法有密切的关系。常用的剖分方法有整体剖分法和分块剖分法。一般来讲,采用整体几何模型表示的计算模型适宜于采用整体剖分,它要用到较多的数学知识。下面讨论分块表示的几何模型所常用的一种分块剖分法。

以二维问题为例,如图 9-2 所示的二维区域,可以看成是由 A、B、C 三部分组成。每一部分都是简单的四边形,用四边形顶点的坐标可表示它们的形状和位置,这就是简单地表示计算模型的方法。我们讨论的网格自动剖分的方法可分为分块映射、网格剖分、顺序编码和总体合成四个部分。

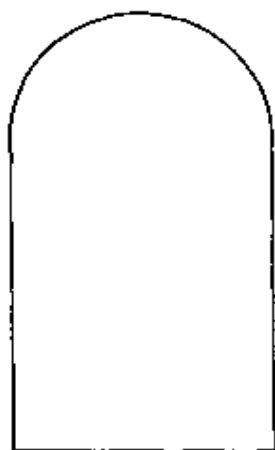


图 9-1 二维几何模型

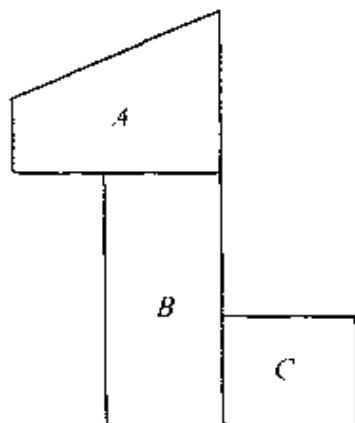


图 9-2 二维区域的分块表示

1. 分块映射

首先将计算区域手工粗分成若干个四边形区域的组合,每个四边形称为一个大单元。为既能表示直边大单元又能表示曲边大单元,采用 8 个节点来描述一个大单元。如图 9-2 中大单元 A 用图 9-3(a)中的 8 个节点表示其形状和位置。然后,为便于剖分,采用等参数映射的办法将大单元映射成边长为 2 的正方形。所用映射函数为八节点等参数单元的形状函数,已在第五章中介绍过。经过映射后的剖分域就是 $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$, 映射后

的图形如图 9-3(b)所示。同理,对大单元 B 和 C 可做相同映射,映射成为图 9-3(b)同样的正方形域。

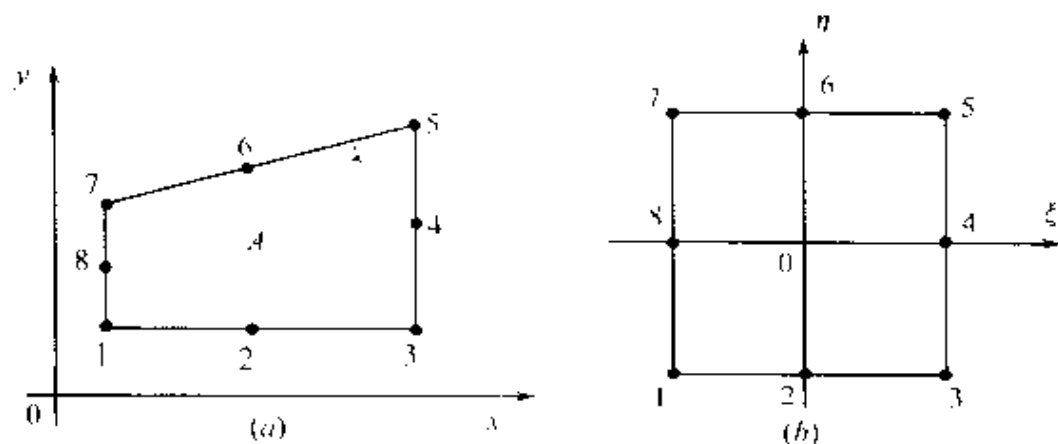


图 9-3 大单元的节点位置及映射图形

2. 网格剖分

网格剖分是在映射后的正方形域中进行的。四边形单元的剖分比较简单,因为每一个方向的分割数必须一致。例如 ξ 方向,在 $\xi = -1$ 一侧分成三份, $\xi = 1$ 的一侧也必须分成三份; η 方向也是如此。所以只要在映射后的正方形域中对 ξ 方向和 η 方向分别给出一个分割数 N_ξ 和 N_η 就可以将这一正方形区域分割成 $N_\xi \times N_\eta$ 个四边形单元,而对应的 $x-y$ 坐标系中四边形大单元也被分割成 $N_\xi \times N_\eta$ 个任意四边形单元。单元节点的 (x, y) 坐标可用下式计算:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{cases} \quad (9-1)$$

式中 $N_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 为映射函数,其形式为式(5-28)所述, (x_i, y_i) 为描述大单元形状和位置的 8 个节点的坐标。只要将剖分点处的局部坐标值 (ξ, η) 代入上式,即可求出整体坐标系中剖分点的坐标 (x, y) 。例如 ξ 方向的分割数 $N_\xi = 4$, η 方向的分割数 $N_\eta = 3$,求图 9-4 中 k 点的坐标 (x_k, y_k) 。

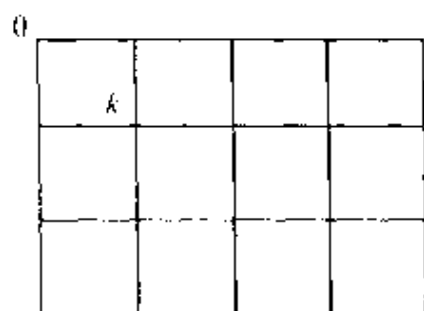


图 9-4 剖分点局部坐标计算

如果以 0 点为起点,则 k 点的局部坐标为

$$\begin{cases} \xi_k = \xi_0 + \frac{2}{N_\xi} \times K_\xi = -1 + \frac{2}{4} \times 1 = -\frac{1}{2} \\ \eta_k = \eta_0 + \frac{2}{N_\eta} \times K_\eta = 1 - \frac{2}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (9-2)$$

式中 (ξ_0, η_0) ——起算点的局部坐标 $(-1, 1)$;

K_ξ, K_η ——从 0 点算起 ξ 方向和 η 方向的分割线序数。

根据已知的 $(x_i, y_i), N_i(\xi, \eta), i = 1, 2, \dots, 8$, 将 (ξ_k, η_k) 代入式(9-1)即可求出对应的 (x_k, y_k) 。

三角形单元的剖分,大单元中某一个方向的分割数可以不一致。例如 ξ 方向, $\xi = -1$ 的一侧分割数设为 3, $\xi = 1$ 一侧的分割数可以是 3, 也可以大于或小于 3, 例如等于 7。所以, 计算剖分点处的局部坐标稍微复杂一些。但两侧的剖分数相等时, 剖分成四边形单元后, 再将每个四边形分割成两个三角形单元即可。若两侧的分割数不相等, 则要计算出每条等 ξ 线的分割数, 如图 9-5 所示。然后按前述方法求出每个剖分点的 (ξ, η) 坐标, 代入式(9-1)求出整体坐标 (x, y) 。形成单元时仍然是先分成四边形单元, 再一分为二。对于相邻两等 ξ 线分割数不相等的情况, 应将最后剩下的一个点与最后一个四边形的最外边连成一个三角形单元。

3. 顺序编码

所谓编码是将所有节点连续无缺地顺序编号, 并对每个单元编号和形成单元信息。在一个四边形大单元映射成的四边形内,

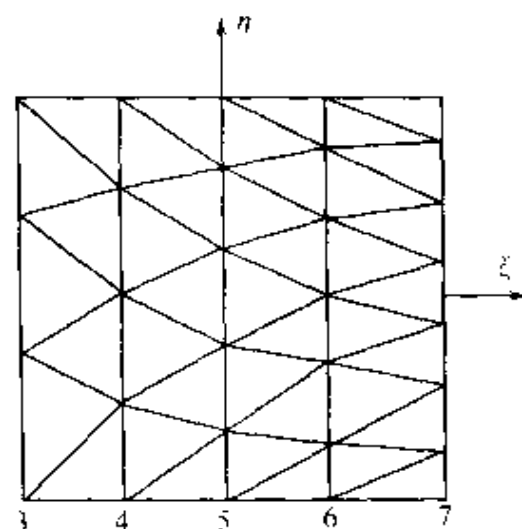


图 9-5 大单元的三角剖分

节点编号可按行(或按列)进行,每计算一个节点,则节点号加一。因此可以正确的编出所有节点号。单元编号同样可以按行(或按列)编。每个单元中,节点信息的获得可在节点编号时记录下大单元某一边的节点编号,如图 9-6 所示记录下大单元最左边的节点号码。对于四节点单元来说,图 9-6 中第二个单元的四个节点号为 $NS(3)$, $NS(3) + 1$, $NS(2) + 1$, $NS(2)$; 作为单元 2 的单元信息。对于八节点单元,还要纪录大单元最左边中间各节点的号码 $k1$, $k2$, $k3$ 等。

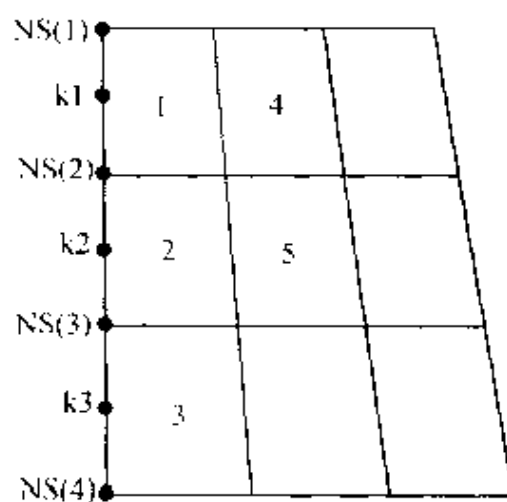


图 9-6 单元信息纪录标志

上面讨论的只是一个大单元的编码,由于计算模型可能是由几个大单元构成,编码时可暂时连续编号,如图 9-7 所示。这样可完全避免人工干预,由计算机连续编号。至于重复编号 18~21, 19~22, 20~23 等,留待总体合成时一并处理。

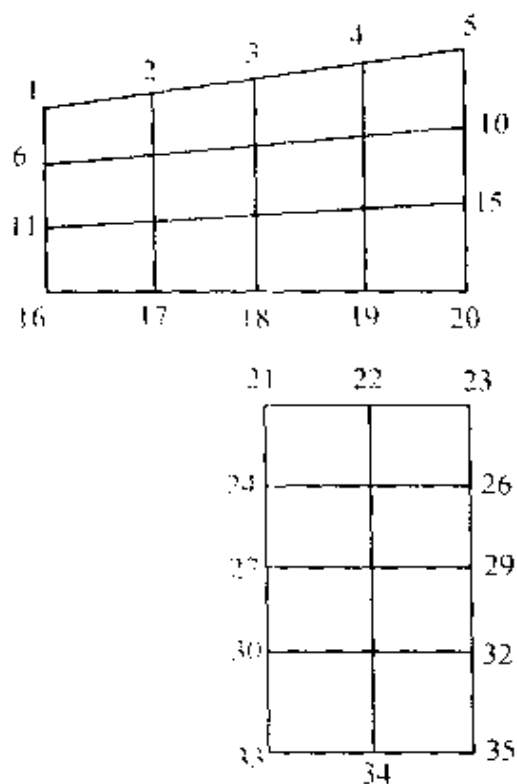


图 9-7 大单元连续编号

4. 总体合成

将经过剖分、编码后的大单元合在一起,去掉多重编号的节点,重排节点号,称为总体合成。它的主要任务是使整体节点编号连续无缺,并修改分开编码形成的单元信息。

剔除多重编号点可采用比较节点坐标的办法,如果

$$\begin{cases} |x_{i1} - x_{j2}| \leq \delta_x \\ |y_{i1} - y_{j2}| \leq \delta_y \end{cases} \quad (9-3)$$

同时成立,则节点 i 与节点 j 为重复编号点。其中 (x_{i1}, y_{i1}) 为第一大单元中节点 i 的坐标; (x_{j2}, y_{j2}) 为第二大单元中节点 j 的坐标, δ_x, δ_y 为预先给定的距离差。找出重复编号点后,将第二大单

元中的该点号取消,如图 9-7 中原节点 21 改为节点 18,第二大单元中比原节点号大的节点号均减 1,成为图 9-8 所示情况。同时修改第二大单元中与该节点号有关的单元信息。然后,再继续寻找是否有其他重复编号点,直至第二大单元所有节点循环完毕。用同样的方法寻找其余大单元,最后可得到整体节点编号连续无缺的有限元剖分网格。

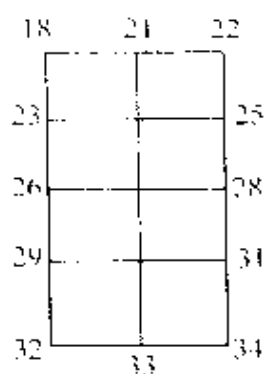


图 9-8 重复编号点的剔除

对于三维问题,也可以通过上面步骤实现有限元网络的自动剖分,只是分块区域为六面体或五面体,映射后的区域为正六面体和直三棱柱。

三、刚度矩阵的带宽优化

上述有限元网格自动剖分算法能保证节点编号连续无缺,单元信息正确无误。但编码时并未考虑有限元计算存储量问题。从第二章的讨论中可知,节点编号的顺序、方向与刚度矩阵的带宽有关,严格来讲是单元的节点最大编号差与刚度矩阵的带宽有关。从而影响等带宽存储或变带宽存储时刚度矩阵的存储量。自动编码很难使节点编号达到优化,因此有限元前处理技术中还应包含矩阵带宽优化,以减小有限元分析中的计算存储量。

我们知道单元节点编号决定了刚阵中非零元素的位置。改变单元中的节点编号,刚阵中非零元素的位置也会相应改变,从而影响到刚阵的带宽。反过来,调整或改变刚阵中非零元素的位置,单

元节点编号也要发生改变。实用的带宽优化方法就是通过类似于改变刚阵中非零元素位置的方法来修改单元信息,从而减小刚阵带宽的。

通常采用一个表示刚度矩阵中非零元素位置的矩阵来进行运算,这个矩阵称为与节点编号有关的邻接矩阵,记为 $[B] = \{b_{ij}\}$,它定义为

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} \neq 0 \\ 0 & a_{ij} = 0 \end{cases} \quad a_{ij} \text{ 为刚度矩阵中元素 } i = 1 \sim n, j = 1 \sim n$$

即 $[B]$ 矩阵是一个与刚度矩阵同阶的方阵,而且与刚度矩阵有相同的带状性质。

带宽优化有许多实用算法,有些要用到图论或较深的数学知识。下面介绍两种易于理解的带宽优化的方法,它们都是采用变换邻接矩阵行或列的办法来减小刚阵带宽。

1. 罗森算法

罗森(Rosen)1968年提出一种减小矩阵最大带宽的算法,其基本思想是找出引起 $[B]$ 矩阵最大带宽的一对顶点,取其中一个与其他顶点互换,看是否能减小带宽,若可以则进行交换。交换后再继续寻找引起当时 $[B]$ 矩阵最大带宽的一对顶点,并重复上述过程。罗森算法的基本步骤如下:

(1) 确定 $[B]$ 矩阵的带宽及两个达到最大带宽的第一对顶点。在这对顶点中若较高编号顶点能与一低编号顶点互换以减小带宽则转向(6);

(2) 若较低编号顶点能与一高编号顶点互换以减小带宽则转向(6);

(3) 若较高编号顶点能与一低编号顶点互换而保持带宽不变,则转向(6);

(4) 若较低编号顶点能与一高编号顶点互换而保持带宽不变,则转向(6);

(5) 如果在(3)、(4)步中已连续执行过规定的经验次数,或已交换过的顶点又重新选出来交换,则算法终止,否则转向(6);

(6) 执行所指出的顶点交换,即分别交换顶点表的对应分量以及 $[B]$ 矩阵的行和列,并转向(1)。

2. 阿基茨-厄特库算法

阿基茨(Akyuz)和厄特库(Utku)也在1968年提出一种减小平均带宽的方法,简称AU算法。平均带宽的定义为

$$\bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \quad (9-4)$$

式中 n ——刚度矩阵的阶数;

β_i ——矩阵第 i 行的带宽。

AU 算法的基本步骤:

(1) 从 $[B]$ 矩阵中取出相邻的两行列进行交换,并计算平均带宽。如果满足下列两个条件之一,则交换有效:

① 平均带宽减小;

② 平均带宽保持不变,但有较多元素的行从矩阵中心向外移。

(2) 在一个指定的交换循环内,按(1)①及(1)②执行行列交换,其交换顺序规定为 $(1,2), (n, n-1), (2,3), (n-1, n-2), \dots$,直至中心行。

(3) 如果在一个循环内没有发生交换,或经过经验数 $3 + \frac{n}{100}$ 次的循环而平均带宽不减小,交换运算停止,否则重复执行(1)、(2)。

一般来讲,实用的带宽优化算法并不能使刚度矩阵的带宽达到极小化,但是并不影响其实用性。大型的有限元分析软件包一般都具有带宽极小化的功能。

四、模型网格图的自动绘制

画有限元模型网格图的目的有两个:一是在有限元分析之前检查所有输入或生成的有关模型的几何数据是否正确;二是直接观察模型剖分结果。这两点对有限元计算结果的正确性和可信度

是至关重要的。因为对所有输入或生成的几何模型数据进行逐一的数值检查是不可能保证其正确无误的。试想一个 100 单元, 400 节点的平面八节点等参数单元计算模型, 其单元信息数据有 800 个, 节点坐标数据又是 800 个, 要逐一检查这 1600 个数据使之无一错误, 显然是一件十分艰巨的工作。而这样规模的问题在有限元分析中只能算是较小的模型。工程问题中有限元模型几万、十几万个节点的例子比比皆是。因此, 对于一个有限元分析系统, 自动绘制计算模型网格图的功能是必不可少的。

画网格图的关键是要从计算模型的描述数据中找出每个单元顺序排列的节点号和节点坐标, 再确定各节点的连线关系。然后就可以按一定比例将所有确定了连线关系的节点用直线连接起来, 画在计算机屏幕上或输出到绘图机上。画图时可按单元循环, 一个单元一个单元地画出, 最后即可得到所需要的网格图。当然, 对于三维模型的网格图绘制还有消除隐藏线的问题, 否则不消隐的网格图是零乱不堪的, 达不到数据检查的目的。

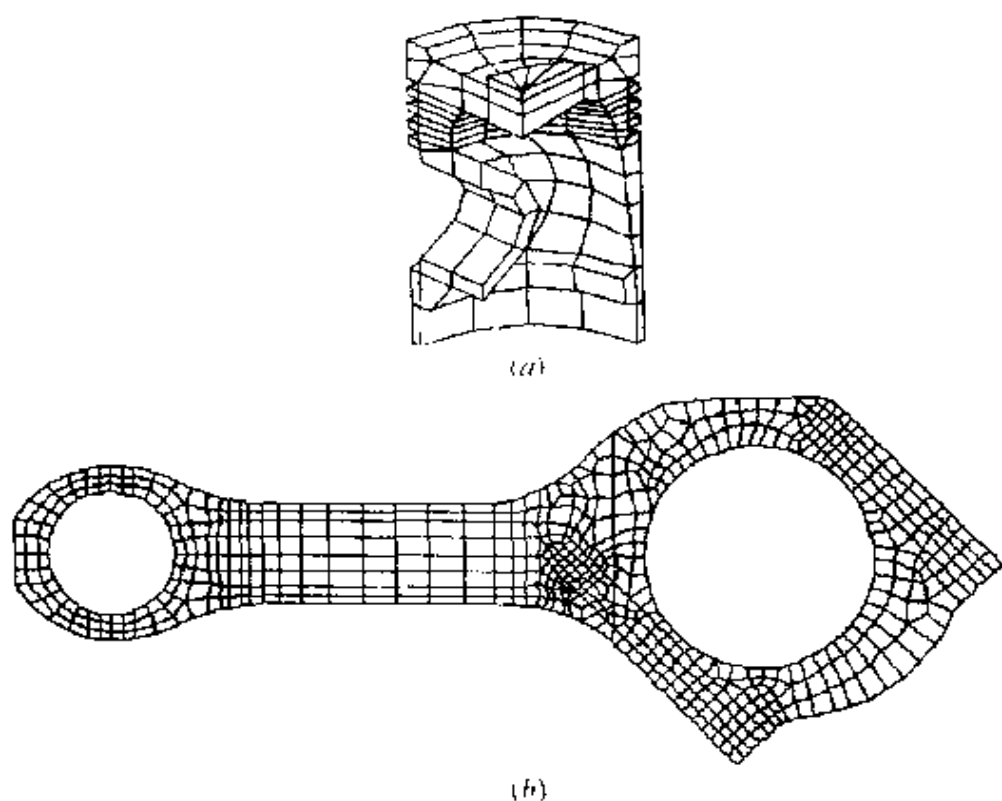


图 9-9 有限元模型网格图

单元节点号和节点坐标可以由有限元分析模型的几何描述数据——单元信息数组和节点坐标数组中提取。确定各节点的连线关系则要分析所用单元的节点排列顺序。一般为单元信息数组中相邻两节点连成一直线。但也有例外,有些单元的节点号不是按位置顺序排列的。连线作图和消除隐藏线是计算机图形学中的内容,在此不作讨论。

图 9-9 是计算机绘制的有限元模型网格图的两个例子。

§ 9-3 有限元分析的后处理

有限元的计算结果是大量的数值数据,从打印的数值结果中很难直接分析计算结果是否正确,是否合理,甚至看不出是否得到了预期的结果。例如结构强度分析问题,计算结果是节点位移值和应力值,位移值表示结构的变形,应力值可分析结构的安全性。但从成千上万的位移数据和应力数据中是看不出结构的变形情况和应力分布情况的。因此,必须对有限元计算结果进行再分析、再处理。

有限元分析的后处理可以分为数值处理和图形处理两类。数值处理是将有限元分析的数值结果转化为工程中常用的形式或设计师熟悉的形式。有时也对计算结果进行再加工,使之更可信或精度更高。图形处理则是将有限元计算的数值结果用图形直观地表示出来,以使计算结果一目了然。

一、数值处理

以应力分析问题为例。有限元计算的第一步结果得到节点处的位移,然后根据节点位移计算单元应力:

$$\{\sigma(x, y, z)\}^T = [D][B]^T \delta^e$$

可得单元内任一点处的应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 。但是程序输

出单元应力点的位置不同其计算精度也会有所不同,常见的应力输出位置点为数值积分点处应力、节点处应力或单元中心点处应力,其中数值积分点处的应力精度最高。无论程序输出的是那一点处的应力,我们可能需要的不是应力分量,而是主应力或等效应力。

1. 主应力计算和等效应力计算

工程中往往用一点的主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 来计算或判断结构的安全程度。对于二维问题,有限元分析可得任一点的 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} , 则主应力 σ_1, σ_2 与它们的关系为

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases} \quad (9-5)$$

主应力方向为

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (9-6)$$

最大剪应力和最小剪应力为

$$\begin{cases} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (9-7)$$

对于三维应力问题,主应力可以通过求解下述三次方程得到。

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (9-8)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

式(9-8)的解可用下式表示:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{I_1}{3} + R \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \\ \sigma_2 = \frac{I_1}{3} + R \cdot \cos \frac{2\pi + \varphi}{3} \\ \sigma_3 = \frac{I_1}{3} + R \cdot \cos \frac{4\pi + \varphi}{3} \end{cases} \quad (9-9)$$

其中

$$R = \frac{2}{3} \sqrt{(I^2 - 3I_2)}$$

$$\cos \varphi = \frac{2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{3/2}}$$

再将 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 按数值大小重新排列, 最大值就是主应力 σ_1 , 最小值就是主应力 σ_3 , 有 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。从理论上可以证明式 (9-8) 中的三个根均为实根, 因此有 $(I_1^2 - 3I_2) > 0$, 及 $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$ 存在, 否则一定是有限元计算结果有错误。

主应力的方向可由以下三式中的任意两式

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0 \\ \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0 \\ \tau_{xz}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0 \end{cases} \quad (9-10)$$

以及

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (9-11)$$

三式联立求解, 得出主应力的方向余弦 $l_i, m_i, n_i (i=1, 2, 3)$ 。式 (9-10) 的第一、第二两式与式 (9-11) 联立求解的结果为

$$\begin{cases} l_i = \frac{1}{A_{12}} [\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i)] \\ m_i = \frac{1}{A_{12}} [\tau_{xz}\tau_{xy} - \tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_i)] \\ n_i = \frac{1}{A_{12}} [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2] \end{cases} \quad (9-12)$$

式中 $A_{12} = \{[\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_i)]^2 + [\tau_{xz}\tau_{xy} - \tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_i)]^2 + [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2]^2\}^{1/2}$

令 $i=1,2,3$, 即得 σ_1, σ_2 和 σ_3 的方向余弦。

另外, 要校核所分析的构件强度是否符合要求, 工程中常根据一定的强度理论来计算某点的综合应力。各种强度理论的等效应力如下:

按第一强度理论 $\sigma_{\text{ed1}} = \sigma_1$

按第二强度理论 $\sigma_{\text{ed2}} = \sigma_1 + \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$

按第三强度理论 $\sigma_{\text{ed3}} = \sigma_1 - \sigma_3$

按第四强度理论 $\sigma_{\text{ed4}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$

2. 应力修匀

一般来讲, 为保证有限元解的收敛性, 单元的位移插值函数在单元边界上是连续的。因此, 有限元计算结果中的节点位移在各单元边界处是连续的。但对许多单元来说, 其位移插值函数的导数在单元边界处往往是不连续的, 因此, 单元边界处的应力也是不连续的。例如二阶等参数单元就是如此。理论和经验表明, 对于采用数值积分方法计算单元刚度矩阵的情况下, 应力值在单元积分点处的计算精度高而在单元边界处的精度最差。这也是由于位移插值函数的精度在靠近单元边界处通常是较差的缘故。

但是边界上的节点位置比积分点的位置固定易找, 分析处理方便, 因此工程上大多希望知道边界节点处的应力值。为提高边界节点处应力的精度, 比较有效的方法是在单元内用最小二乘法修匀应力, 在节点处取有关各单元的节点应力的平均值。修匀与未修匀的应力分布状况如图 9-10 所示。

下面以二维等参数单元为例简要介绍应力修匀原理。我们采用修匀后的节点应力作为未知量, 单元内任一点处修匀后的应力可用形状函数表示为

$$\bar{\sigma}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) \cdot \sigma_i \quad (9-13)$$

式中 $\bar{N}_i(\xi, \eta)$ ——用以修匀应力的形状函数, 与计算单元刚度

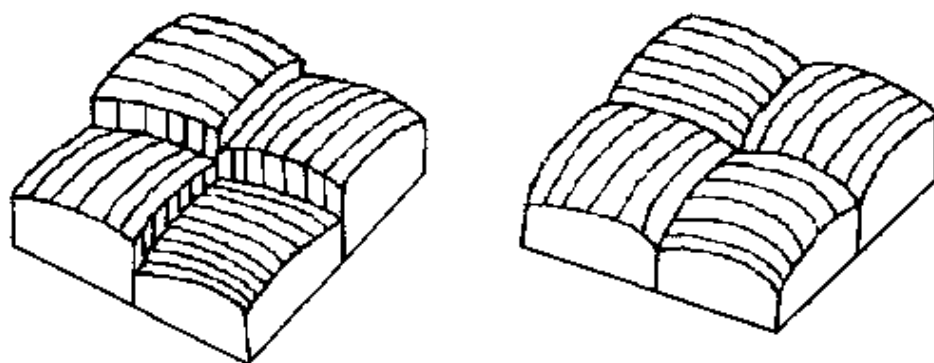


图 9-10 修匀与未修匀的应力

矩阵的形状函数可以是不同阶次的(例如 N_i 是二次的, \bar{N} 可以是一次的)。

在单元内任一点修匀应力与未修匀应力的误差为

$$e(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta) - \bar{\sigma}(\xi, \eta) \quad (9-14)$$

如果找到了使下述函数

$$\varphi = \iint e^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (9-15)$$

取极小值的 $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n$, 则这些应力即可作为修匀后的应力。

为使式(9-14)取极小值, 应有

$$\frac{d\varphi}{d\sigma_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9-16)$$

式中 n ——单元节点数。

利用上述原理, 我们可以求出等参数单元应力修匀的计算公式。对于二维四节点等参数单元, 若计算单元刚度矩阵时取了 2×2 个积分点, 如图 9-11 所示, 则将积分点坐标

$$A: \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), B: \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), C: \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), D: \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

代入公式

$$\sigma(\xi, \eta) = [D][B]\{\delta^e\}$$

即可求得积分点处的应力值, 不妨将其记为 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$ 。

设修匀应力在单元内按双线性变化, 即式(9-13)中所用形状函数为双线性函数。记修匀应力为

$$\bar{\sigma}(\xi, \eta) = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \quad (9-17)$$

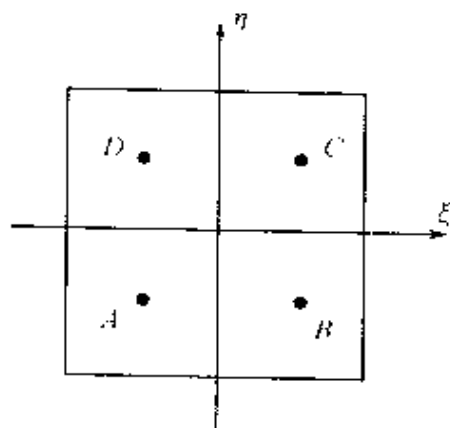


图 9-11 四边形单元积分点位置

在四个积分点上令修匀应力 $\bar{\sigma}$ 等于未修匀应力 σ ,将四个积分点的坐标代入式(9-17),可得

$$\begin{aligned} \{\bar{\sigma}_p\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \\ \sigma_D \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \\ &= [A] \{\sigma\} \end{aligned} \quad (9-18)$$

由式(9-18)可解出

$$[\sigma] = [A]^{-1} \{\bar{\sigma}_p\} \quad (9-19)$$

将上式代入式(9-17)有

$$\bar{\sigma}(\xi, \eta) = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta][A]^{-1} \{\bar{\sigma}_p\} \quad (9-20)$$

将四边形角点(单元节点)坐标代入上式可得单元四个节点处的修匀应力。角节点的坐标为 $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ 和 $(-1, 1)$, 代入上式, 有

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \\ \sigma_D \end{Bmatrix} \quad (9-21)$$

式中 $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

这样求得的修匀应力, 在各单元的公共边上, 不同的单元可能有不同的应力值, 这时可取相邻各单元的修匀应力值再平均。

二、图形处理

用图形来表示有限元计算结果最为简洁、直观、生动, 因此应用广泛。当然这些图形必须是计算机根据有限元计算结果自动绘制的才有意义。有限元分析的后处理图形主要有以下几种。

1. 变形图

结构在受力、受热或受冷后会产生变形, 有限元的计算结果是以各节点处的位移来表示这一变形的。将结构在变形后的图形和变形前的图形按比例叠画在一起就可以看出受载后结构的变形。二维结构变形图有两种形式, 一种是采用有限元模型网格图作为原始结构图, 将各节点受载产生位移后的网格图叠画出来或单独画出来。这对于了解结构内部变形情况非常直观, 特别是对于结构受载荷后外形变化不大, 而内部有较大变形的情况。例如轴颈受扭转时的情况。另一种变形图是表示结构外形变化的情形。作图时仍以原始结构模型为基准, 但应去掉模型内的网格线。将结构变形后的外廓线叠画在原始结构外廓线上就可以看出结构的外

形变化情况了。这类变形图对直观了解受载后结构外形的变化情况非常有利。例如受拉伸、压缩时连杆大小头外形,大小头孔变形,内燃机活塞在机械负荷和热负荷联合作用下头部和裙部的变形等。

变形图的作图与画有限元模型网格图没有什么差别,只是作图前要将有限元分析结果中的节点位移放大后叠加在相应的节点坐标上。例如某节点坐标为 (x, y) ,位移为 u, v ,则画变形图时该节点的坐标为

$$\begin{cases} x = x + P \cdot u \\ y = y + Q \cdot v \end{cases}$$

式中 P, Q ——变形放大倍数

一般来讲在弹性范围内节点的位移量是很小的,作图时必须放大变形量才看得出来。对没有特殊要求的变形图,可取 $P = Q$,其大小应根据位移量的大小和作图比例给出。图9-12是某柴油机连杆受拉伸时的整体变形图

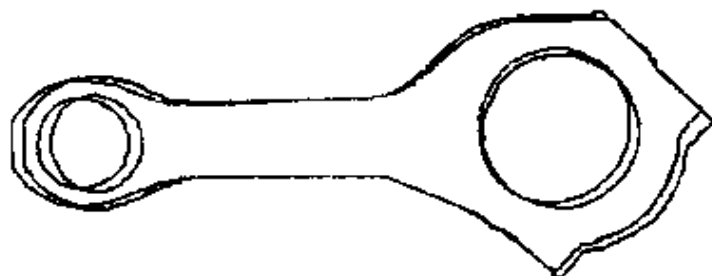


图9-12 柴油机连杆受拉伸时的变形图

表示三维结构的变形也可以有两种办法:一种为表示整体变形,即把立体表面节点的变形叠加在表面节点坐标上画出变形后的立体图;另一种是表示结构内部的变形,但这时若采用三维图形是不实际的,因为不消除隐藏线的三维网格图才能显示出内部节点,它本身已经非常零乱,若再叠画上变形后的网格会更加不清楚,达不到观察变形的目的。常用的方法是采用剖面图,画出剖面处的二维网格及其节点位移可以观察剖面上的变形。

2. 等值线图

将求解区域中解得的场变量值(位移、应力、温度、热流、电位等)相同的点用曲线连接起来,可以表示区域内变量的分布关系。例如,温度场分析中的等温度线图、热流线图、应力分析中的等应力线图,这些图形可以统称之为等值线图。利用计算机自动画出有限元计算结果的等值线图对计算结果的直观了解非常有利。

常用的等值线图的画法是利用网格节点上的离散数据追踪求解。利用单元某一条边上节点坐标和节点场变量值进行插值,可以求出等值线与网格边线的交点,即等值点。用适当的方法将这些交点连接起来,就构成一根等值线。所谓追踪就是先找到等值线的一个起点,由此顺着这条等值线一点一点求出各等值点,并同时得到连接顺序。

插值算法为:对于线性单元,单元每一边上两个节点,设坐标为 $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$, 节点变量为 (T_i, T_j) 。设待求等值线的值为 T_a , 则当

$$(T_a - T_j) \cdot (T_a - T_i) < 0$$

时该边上有一等值点 a , 其坐标为

$$\begin{cases} x_a = x_i + \frac{T_a - T_i}{T_j - T_i}(x_j - x_i) \\ y_a = y_i + \frac{T_a - T_i}{T_j - T_i}(y_j - y_i) \end{cases}$$

对于二次单元,每边上有三个节点 (i, j, k) , 等值点 a 的坐标可采用二次插值或分段线性插值求出。

追踪算法为:设已经求得图9-13中单元 A 某边等值点 a 的坐标 (x_a, y_a) 。我们称 a 点为等值线 T_a 在单元 A 的入口点。在单元 A 的其他边上用同样的插值方法可以找到另一个等值点 $b(x_b, y_b)$ 。我们称 b 点为等值线 T_a 在单元 A 的出口点。追踪算法的关键是找出与单元 A 在出口点 b 所在边相邻的单元 B 来。如果找到了单元 B ,将 b 点作为等值线 T_a 在单元 B 的入口点,用相同插值方法可以找出其出口点 c 的坐标。依此方法顺序追踪下

去,即得整条等值线。寻找单元 B 的方法是利用 b 点所在边为单元 A 、 B 的公共边,两单元在公共边上节点号和节点坐标相同。因此,只要在单元信息或节点坐标数组中找出除单元 A 之外与 b 点所在边具有相同的节点号,或节点坐标的单元来就是单元 B 。追踪算法求等值线简单迅速,对单元形式和节点排列无特殊限制,但使用中有几个问题应注意:

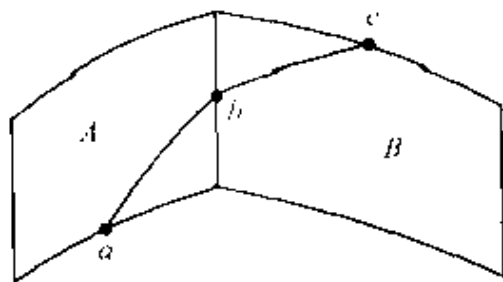


图 9-13 等值线追踪算法示意

(1) 起点的寻找对于有限元模型来说没有规律可循,只有按单元循环,每个单元按边循环。一旦找到一个起点就可以追踪下去了。但是由于单元排列的无规律性,起点可能是任意位置的。如图 9-14 所示, a 点为起点,追踪到 b 点时到了模型边界,但 ac 一段还是这一条等值线上的部分,因此,程序应能处理一条等值线追踪到模型边界时再回到起点进行反向追踪。

(2) 一个数值的等值线在结构模型的区域内可能不止一条,如图 9-14 所示,因此追踪完一条等值线后,应回到单元循环处继续将所有单元循环完。

(3) 在追踪过程中,等值线穿过的单元应记录下来,以免在追踪相邻单元时重复寻找,即寻找和比较相同节点号和节点坐标时,只将未被寻找过的单元取出,以提高效率。

图 9-15 为某柴油机连杆静强度计算结果的等应力线图。

上面讨论的等值线追踪算法主要针对二维模型,对于三维模型,也可以用等值线来表示有限元计算结果中场变量的分布,但是只能显示立体表面的场变量分布。至于立体内部,理论上应能用等值面表示有限元计算结果的分布规律,但实际中由于工程构件

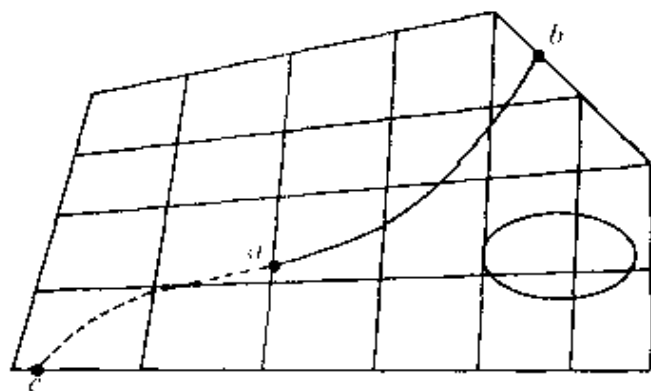


图 9-14 追踪算法求等值线

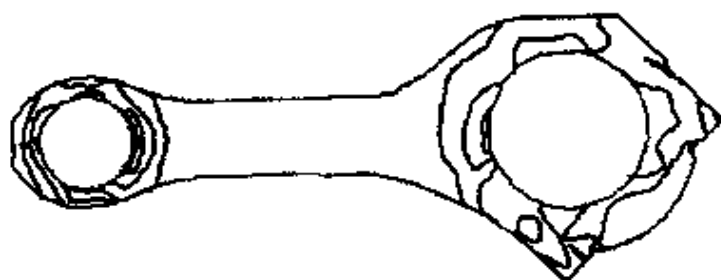


图 9-15 柴油机连杆应力分布等值线图

形状复杂,欲用内部等值面清楚地表示场变量的分布特征不易办到。

三维模型表面等值线仍可以用追踪算法求出,但这时的追踪区域是有限元模型中表面单元的外表面构成的曲面片集合,因此,追踪前应从有限元模型数据中筛选出这一曲面片集合,再进行计算。另外,与二维等值线图不同的是存在隐藏线问题,因为所求出的等值线有可能被其他曲面遮挡,因此求出等值线后还要进行消除隐藏线的计算。可见,三维立体表面等值线图的计算求解较之二维结构的等值线求解要复杂得多。

3. 浓淡色彩图(彩色云图)

等值线图尽管可以表示计算变量在求解区域内的分布,但仍然不能与实际情况中场变量的连续分布情形一致。用浓淡色彩对应不同的场变量值,通过对求解区域内设置不同颜色,可以比较真实地再现场变量的连续变化。具体算法是将单元在屏幕上的显示

区域不断剖分,直至达到一个像素的大小,同时用插值算法计算剖分后的小单元对应的场变量值,当小单元达到一个像素大小时,用当前场变量值对应的色彩显示该像素。图 9-16 为柴油机连杆应力分布云图。

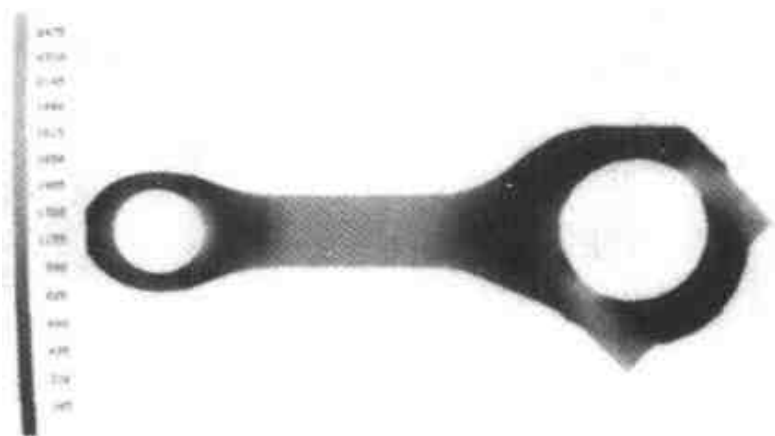


图 9-16 柴油机连杆等效应力分布云图

4. 节点变量变化图

动态问题的计算中节点变量随时间的变化关系,如应力随时间的变化,温度随时间的变化,电场强度随时间的变化等,都可以用曲线的形式表示出来,以使变化趋势一目了然。这时要用到曲线拟合或曲线插值技术,将各离散时间点上的某节点变量值按一定的函数形式拟合成一条或几条连续曲线,并按一定比例画出。

计算机绘图是一个很大的题目,有着非常丰富的内容,不是本书所能涉及的。因此上面有关计算机绘图的内容这里只能介绍一些原则和方法,具体的作图还有许多讲究。

参 考 文 献

- 1 Zienkiewica O C. 有限元法. 北京:科学出版社,1985
- 2 龙驭球. 有限元法概论. 北京:机械工业出版社,1987
- 3 李大潜等. 有限元素法续讲. 北京:科学出版社,1979
- 4 张佑启等. 有限单元法实用导论. 广西:广西人民出版社,1982
- 5 李明达主编. 有限单元法在燃气涡轮发动机零件强度计算中的应用. 北京:国防工业出版社,1987
- 6 徐次达等. 固体力学有限元理论、方法及程序. 北京:水利电力出版社,1983
- 7 Chung T J. 流体流动的有限元分析. 北京:电子工业出版社,1980
- 8 李景湧. 有限元法. 北京:北京邮电大学出版社,1999
- 9 刘万勋等. 大型稀疏线性代数方程组解法. 北京:国防工业出版社,1981
- 10 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用. 北京:科学出版社,1998
- 11 刘鸿文等. 材料力学. 北京:人民教育出版社,1979
- 12 黄炎. 工程弹性力学. 北京:清华大学出版社,1982
- 13 费祥麟主编. 高等流体力学. 西安:西安交通大学出版社,1993
- 14 苏铭德等. 计算流体力学基础. 北京:清华大学出版社,1997
- 15 David F Rogers. 计算机图形学的算法基础. 梁友栋等译. 北京:科学出版社,1987
- 16 Rockey K C. The finite element method. London: Granada Publishing, 1983
- 17 Baker A J. Finite element computational fluid mechanics. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1983
- 18 Versteeg H K. etc. An introduction to computational fluid dynamics. London: Pearson Education Limited, 1998
- 19 Ruas V. Finite element method for three - dimensional incompressible viscous flow. Finite element method in fluid Vol. 8, 1990
- 20 Chabard J P. etc. An efficient finite element method for the computation of three dimensional turbulent incompressible flow. Finite element method in fluid Vol. 8, 1990
- 21 Winterscheidt D. etc. , $P +$ version least - squares finite element formulation for two dimensional incompressible fluid flow, Journal of numerical method fluids Vol. 18, 1994
- 22 华俊. Navier - Stokes 方程积分表达式的有限元解法. 航空学报. Vol, 8, 1987(4)
- 23 周春华等. 二维欧拉方程在非结构网格上的自适应有限元法. 航空学报, Vol. 15, 1994(6)