

西安电子科技大学

硕士学位论文

基于变密度法的连续体结构拓扑优化研究

姓名：杨志勇

申请学位级别：硕士

专业：机械电子工程

指导教师：段宝岩

20090101

摘 要

本文针对连续体结构拓扑优化的变密度法展开讨论, 分别就各种密度插值模型的种类、特点, 优化准则法(OC)和移动渐近线法(MMA)两种常用优化算法的基本原理以及各种数值不稳定现象的产生机理和消除方法等三方面进行了探讨。主要工作如下:

1. 通过数值算例分析, 在 RAMP 密度刚度插值模型的基础上, 对比了优化准则法(OC)和移动渐近线法(MMA)的计算效率, 确定了惩罚因子、过滤半径等参数的合理取值范围。
2. 针对自重载荷下连续体结构拓扑优化的两个主要困难: 低密度区域的附属效应问题和材料的非主动体积约束问题, 对自重载荷作用下连续体结构拓扑优化进行了如下研究:
 - (1) 对自重载荷作用下连续体结构拓扑优化出现的附属效应现象, 阐明了该现象出现的原因, 并探讨了避免该现象的策略。
 - (2) 针对自重载荷作用下非主动体积约束问题, 从库恩-塔克条件出发, 对实际体分比随惩罚因子的变化情况进行了分析, 解释了该现象产生的原因, 并考察了两种插值模型在不同罚因子下体积约束的临界情况。

关键词: 拓扑优化 变密度法 自重载荷

Abstract

Focused on alterable density method of topology optimization for continuum structure, the species and characters of density interpolation models, the optimization criterion method (OC) and the method of moving asymptotes (MMA), the definitions, causations of the numerical problems and the methods to eliminate them were studied systemically. The following aspects were mainly investigated in this paper:

Firstly, based on RAMP interpolation model, the performances of OC and MMA were compared numerically, the range of the penalty factor was studied, and the effect on the final topology of different filter radiuses was studied numerically and the range of the filter radius was given.

Secondly, the topology optimization problem for continuum structures with self-weight loads was investigated with focusing on two main difficulties namely the parasitic effect and inactive volume constraint.

(1) For the parasitic effect appeared in low density regions during topology optimization procedure, the reasons and the elimination methods were investigated.

(2) For the difficulty of inactive volume constraint arisen in topology optimization problem with self-weight loads, the reason was analyzed by using Kuhn-Tucker condition. In order to eliminate this phenomenon, two interpolation models, namely RAMP model and multinomial model, were compared by varying the associated penalty factors.

Keyword: Topology optimization Alterable density method Self-weight

西安电子科技大学

学位论文独创性（或创新性）声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切的法律责任。

本人签名： 杨志勇

日期 09.1.8

西安电子科技大学

关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律署各单位为西安电子科技大学。

（保密的论文在解密后遵守此规定）

本学位论文属于保密，在___年解密后适用本授权书。

本人签名： 杨志勇
导师签名： 马宝岩

日期 09.1.8

日期 09-1-10

第一章 绪论

1.1 前言

结构优化技术是上世纪六十年代随着计算机应用技术和有限元方法的迅速发展而发展起来的一门力学分支，它是力学理论与数学规划理论在结构工程中的应用。完整的结构优化设计技术过程包括尺寸优化、形状优化、拓扑优化、以及布局和选型优化几个不同的优化阶段和层次。尺寸优化是最简单的优化设计类型，整个结构的框架是预先确定的，变化的仅仅是厚度、长和宽等尺寸变量，以达到一定约束条件下的最优目标，尺寸优化于 20 世纪初提出，目前的理论和应用研究已经发展得比较成熟。结构形状优化主要包括确定结构的部分边界框架和布局，常用方法是变厚度法，优化过程中单元节点坐标是随着边界的变化不断变化，这使大型结构或三维结构问题的求解变得困难，同时形状优化是在结构的初始拓扑形式已知的情况下，追求一定约束下结构的最佳布局，并使目标函数最优。形状优化的理论和算法也已基本建立，待提高算法在应用中的稳定性和效率问题。结构尺寸优化一般对应产品设计的详细设计阶段；形状优化对应产品设计的基本设计阶段；而拓扑优化对应产品设计的概念设计阶段，可看作是一种更高层次的综合优化技术。结构的拓扑优化设计是结构的尺寸优化设计和形状优化设计以后，在结构优化领域出现的一种新型的富有挑战性的研究方向。虽然国际上对拓扑优化技术的研究已有 20 多年的历史，但由于结构拓扑优化设计因其描述及算法的复杂性，一些关键性的技术，如优化模型到优化算法都还处于探索和发展阶段，目前拓扑优化技术已成为国际结构优化领域的热点研究问题。

1.2 文献综述

现代结构优化设计，主要是基于有限元数值模拟技术的结构优化，其研究内容是把数学规划理论与力学分析方法结合起来，建立一套科学的、系统的、可靠而又高效的方法，能自动地改进和优化各种条件限制下的承载结构设计。

拓扑优化是目前结构优化设计研究的热点之一。一方面，随着结构优化设计理论研究的不断深入，尤其是尺寸优化理论的完善和形状优化理论的建立，更高层次的拓扑优化逐渐成为新的研究焦点；另一方面，企业在面对越演越烈的全球化国际竞争中，迫切需要更自由、高效的设计工具，而结构拓扑优化设计与尺寸和形状优化设计相比具有更大的设计自由度和更广阔的设计空间以满足苛刻的设

计要求, 这种需求也加速了拓扑优化设计的研究。

以下主要从三方面对拓扑优化技术作必要的综述:

1.2.1 拓扑优化技术研究现状和进展

结构拓扑优化的基本概念是指在给定设计空间、支撑条件、载荷条件和某些工艺设计等要求下, 确定结构构件的相互连接方式, 结构内有无孔洞、孔洞的数量、位置等拓扑形式, 使结构能将外载荷传递到支座, 同时使结构的某种性能指标达到最优, 这个过程称为结构拓扑优化。根据优化对象的不同, 结构拓扑优化可以分为两大类: 一类是以桁架结构为代表的离散结构拓扑优化, 主要确定节点间单元的相互连接方式, 同时包括节点的删除与增加; 另一类是连续体结构的拓扑优化, 主要是确定其内部有无空洞、孔洞的位置、数量和形状等等。

结构拓扑优化的研究最早是从离散结构中最具代表性的桁架结构开始的, 可以追溯到 1904 年由 Michell 提出的 Michell 桁架理论^[1], 但其只能适用于单工况并且依赖于选择适当的应变场, 并不适用工程实际。然而受其启发, 近年来在尺寸优化及形状优化领域的研究已经取得了重要进展, 但拓扑布局优化理论发展仍然进展缓慢。拓扑优化属于结构优化的较高层次, 拓扑变量是比尺寸型与形状型变量更为重要的、效益更为显著的设计变量^[2], 因而结构拓扑优化与传统的尺寸优化、形状优化相比, 具有更大的收益、更重要的工程结构领域应用前景。然而结构布局和拓扑优化也许是结构优化设计中最富有挑战性、最困难的一类问题, 拓扑布局优化方法仍然处在发展初期, 在设计实践中的应用相对来说较少。下面分别简单回顾一下离散结构和连续体结构拓扑优化的研究情况。

1. 离散结构的拓扑优化设计

在离散结构中, 桁架在工程中的应用较为广泛。由于其重要性, 也由于其分析比较简单, 桁架结构的拓扑优化在文献中研究得最多。在一般的桁架拓扑优化问题中, 通常假定外力、支撑和基本节点已经给定, 要求确定节点之间杆件的最优连接情况及杆件的截面积, 使结构的重量或造价最小, 同时满足应力、节点位移和结构柔顺度等动态要求。由 Dorn、Gomory 和 Greenberg^[3]提出的基结构法是桁架结构拓扑优化的主要方法。根据这一方法, 对于给定的桁架节点外载荷作用点和支承, 在每两个节点之间用杆件连接起来, 得到的结构称为基结构。用基结构作为拓扑优化的初始设计又可分为两类: 线性规划类方法和非线性规划类方法。线性规划类方法的特点是: 一般以杆件内力作为拓扑设计变量, 节点平衡方程或者预定位移场下的刚度方程为约束条件, 把结构拓扑优化问题简化为线性规划问题求解, 如段宝岩和叶尚辉^[4, 5]等人的研究。非线性规划类方法的特点是: 一般以杆件断面积作为拓扑设计变量, 采用优化算法来优化杆件断面积, 在迭代过程中,

如果某根杆的断面积足够小,则将其从基结构中删除,迭代收敛的结果便认为是最优拓扑,如王跃方和孙纯焕^[6]等人的研究。另外,程耿东^[7]等研究了用模拟退火算法对桁架进行拓扑优化,许素强^[8]等研究了用遗传算法对桁架进行拓扑优化。程耿东^[9]对桁架结构拓扑优化设计中的奇异最优解做了专门的研究和探讨。

2. 连续体结构的拓扑优化设计

Bendsoe 和 Kikuchi^[10]提出的均匀化方法,标志着连续体结构拓扑优化设计研究的开始。连续体结构拓扑优化模型主要分为两类,一类是根据拓扑优化问题 0-1 离散变量组合优化的本质,建立基于 0 和 1 离散变量描述的优化模型,采用组合优化方法求解拓扑优化问题。组合优化方法对于小规模问题具有较强的全局寻优能力,同时也不存在其它连续变量拓扑优化中的“奇异最优解”问题。但当优化问题的规模较大时,优化求解效率低且易出现所谓的“组合爆炸”问题。另一类是避开原问题离散变量的本质描述方式,将拓扑变量取为单元尺寸或材料物理参数等连续变量,使原问题优化模型转化为连续变量问题的优化模型,通过连续变量取下限值,实现结构拓扑变更。根据连续变量描述方法的不同,该类方法又可以大体上分为两类,以几何(尺寸)描述形式的拓扑优化和以材料(物理)描述形式的拓扑优化方法。几何(尺寸)描述形式的拓扑优化方法主要有变厚度法^[11]和泡泡法^[12]等。其中变厚度法较多采用,基本思想是以单元厚度为拓扑设计变量,以优化结果中厚度的分布确定最优拓扑,是尺寸优化的推广,但很难用于三维连续体结构的拓扑优化。

材料(物理)描述形式是目前连续体结构拓扑优化问题描述的一种很有效的形式,主要有均匀化方法和变密度方法,主要思想是将结构拓扑优化问题定义为确定材料在设计空间中最优分布的问题,即确定设计空间中哪一点有材料,哪一点没有材料。

(1) 均匀化方法

均匀化方法的基本思想就是在组成拓扑结构的材料中引入微结构单胞,优化过程中以微结构单胞的几何尺寸和空间方位角作为设计变量,以单胞尺寸的变化来实现微结构的增删。均匀化方法应用于连续体结构的拓扑优化设计,起源于程耿东、Olhoff^[13]对实心弹性薄板形状优化所做的研究工作,他们首次将微结构引入结构优化设计中,拓展了设计空间。Bendsoe 和 Kikuchi^[10]在 1988 年首次将均匀化方法成功用于连续体结构的拓扑优化设计中,建立了以结构柔顺度最小为目标函数,结构体积为约束的连续体结构的拓扑优化设计模型,这标志着连续体结构的拓扑优化设计技术进入一个新的阶段。均匀化方法对二维结构每个单元有三个设计变量,三维有七个设计变量,设计变量多,敏度计算复杂。并且优化后的结构含有多孔质材料,不易制造。

(2) 变密度法

变密度法人为假定单元的密度和材料物理属性(如:许用应力,弹性模量)之间的某种对应关系,以连续变量的密度函数形式显式地表达这种对应关系。变密度法基于各向同性材料,以每个单元的相对密度作为设计变量,每个单元有唯一的设计变量。程序实现简单,计算效率高。当然这里所讲的密度是单元正则化以后的相对密度。变密度法不仅可以采用结构的柔顺度为优化的目标函数,也可以用于特征值优化、柔性机构的优化、多学科优化等领域。变密度法主要的密度-刚度插值格式有“带惩罚指数的固体各向同性微结构模型”(SIMP: Solid Isotropic Microstructures with Penalization)^[14]、“材料属性的理性近似模型”(RAMP: Rational Approximation of Material Properties)^[15]两种。对于 SIMP 模型, Bendsoe 和 Sigmund^[16]两人已证实了其物理意义的存在。对于 RAMP 模型, Stople 和 Svanberg^[17]两人详细讨论了其属性。SIMP 或 RAMP 通过引入适当的惩罚因子对中间密度值进行惩罚。

其它的结构拓扑优化方法主要有以下一些。Xie 和 Steven^[18]等基于进化策略的进化结构法(Zhou 和 Rozvany^[19]等对进化结构法的合理性进行了探讨)。Michael^[20]等提出了一种所谓的水平集方法(Level set method),优化问题中结构的边界用嵌入到高维尺度函数中的水平集模型来表示,该模型在描述复杂结构的拓扑及边界变化方面具有较好的灵活性。关于连续体结构拓扑优化设计方法更详细的介绍,可参考 Bendsoe 和 Sigmund^[21]于 2003 年出版的专著。

1.2.2 拓扑优化算法研究进展

在结构拓扑优化设计技术的发展过程中,出现了许多优化算法,主要两大类:一类是确定性的算法,另一类是随机性的算法。确定性的算法主要有优化准则法(OC: Optimality Criteria Method)和数学规划法(MP: Mathematical Programming)。优化准则法从一个空间的一个初始设计点 $x^{(k)}$ 出发,着眼于每次迭代应满足的优化条件,依据迭代公式 $x^{(k+1)} = C^{(k)} x^{(k)}$ 来得到一个改进的设计 $x^{(k+1)}$,而无需再考虑目标函数和约束条件的信息状态;数学规划法,它虽然也从空间的一个初始设计点 $x^{(k)}$ 出发,但它是按照迭代公式 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ 来得到一个改进的设计 $x^{(k+1)}$ 。在数学规划方法中,许多算法是沿着某个搜索方向 $d^{(k)}$,以适当步长 a_k 的迭代格式 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k d^{(k)}$,来实现对 $x^{(k)}$ 的修改,以获得 $\Delta x^{(k)}$ 的值,而 $d^{(k)}$ 是依据几何概念和数学原理,由目标函数和约束条件的局部信息状态形成的。一般地讲,从空间的某一点出发,沿某一规定的方向求函数的过程,组成了求多维函数优化解的基本过程。所以,数学规划法的核心一是建立搜索方向 $d^{(k)}$,二是计算最佳步长 a_k 。

1. 优化准则法

优化准则法是依据工程经验、力学概念以及数学规划的最优条件,预先建立某种准则,通过相应的迭代方法,获得满足这一准则的设计方案,作为问题的最优解。优化准则法是在六十年代后期发展起来的一种可以替代数学规划法的结构优化设计方法,准则法最初的基本思想见于 Michell 在 1904 年的文献中^[1]。优化准则法不像数学规划法那样直接优化目标函数,它以一种间接的方式试图满足一系列与结构行为相关的准则,这些准则或者来源于设计经验、或者来源于理性的准则,从而准则法的发展基本上经历了从经验准则法到理性准则法的过程。经验准则法是在结构优化的初期,依据工程经验建立的一些准则,如等强度设计准则、同步失效准则、满应力设计准则和满应变能准则等。二十世纪七十年代,人们把数学中最优解应满足的 Kuhn-Tucker(库恩-塔克)条件作为结构优化设计的准则,形成所谓的理性准则法。Kuhn-Tucker 条件的引入,增强了准则法的数学基础和通用性,并使准则法最终得到优化问题的局部最优解甚至全局最优解成为可能。准则法中设计变量的更新是根据该准则构造的某种显式的启发式的迭代公式来实现的,公式中常常引入一些经验系数来调整优化过程的收敛性和稳定性,如步长因子、阻尼因子等系数。九十年代初,优化准则法被加以改进和推广后,用于拓扑优化设计这样具有几万个甚至上百万个设计变量的大型结构优化设计问题。优化准则法对于求解像刚度优化这类具有大量设计变量和单个约束的拓扑优化设计问题,具有很高的优化效率。虽然准则法简单明了、易于理解,但基于准则法的设计变量更新来源于一种启发式的迭代格式,在实际的应用中还存在着一些缺陷:(1) 对于多约束的结构优化问题,对每个不同性质的约束,准则法都要使用不同的准则、引入不同的拉格朗日乘子。这样在每一步迭代过程中,更新多个拉格朗日乘子的时间往往多于对设计变量本身的求解;(2) 对于不具有凸性的目标函数,准则法不容易构造设计变量的启发式迭代格式,对于复杂的目标函数,同样不容易构造设计变量的迭代格式,因为准则法或多或少是一种启发式的准则;(3) 考虑稳定性和动态性能等稍复杂一些的设计,准则法难以应用。

2. 数学规划法

数学规划法将优化问题归结为在设计空间中由等式约束超曲面和不等式约束半空间所构成的可行域内,寻求位于最小目标等值面上的可行点。数学规划法有着严格的数学理论基础,在一定条件下更容易得到问题的最优解。但数学规划法一般要求设计问题能够显式表示,大多数要求设计变量为连续变量,目标函数和约束函数连续且性态较好。数学规划类结构优化算法主要分为两类:线性规划方法和非线性规划方法。(1) 线性规划问题中目标函数和约束函数均为设计变量的线性函数,目前求解线性规划问题的解法在理论上和方法上都比较成熟,实际应用也比较广泛。此外,在实际的工程设计中,可采用线性规划方法逼近非线性规划问题,线性规划方法也可用作解决非线性规划中子优化问题的方法。常见的方法

有：单纯形法和修正的单纯形法^[22]、椭球算法^[23]等。(2) 对于非线性规划问题(目标函数和约束函数中存在非线性函数)，常见的方法主要有序列线性规划法(SLP: Sequential Linear Programming)、凸规划方法(Convex Programming)等。在实际的结构优化设计当中，凸规划方法已逐渐成为一种很有效的求解算法。Schmit 和 Farshi^[24]两人 1974 年首先将凸规划方法应用于结构尺寸优化设计中，现在已推广到形状优化和拓扑优化当中。序列凸规划方法的基本思想是用凸近似方法以显式的形式利用泰勒级数展开目标函数和约束函数，从而构造和求解一系列子优化问题。凸规划方法中，Fleury 和 Braibant^[25]于 1986 年提出了一种具有单调性的“凸近似线性化方法”(CONLIN: Convex Linearization Method)；瑞典数学家 Svanberg^[26, 27, 28]提出和研究了具有单调性的“移动渐进线方法”(MMA: Method of Moving Asymptotes)；非单调性近似方法主要有“序列二次规划方法”(SQP: Sequential Quadratic Programming)、Zhang 和 Fleury^[29]的“对角二次近似法”(DQA: Diagonal Quadratic Approximation)。Svanberg^[30, 31]提出的“全局收敛的移动渐进线方法”(GCMMA: Globally Convergent version of the Method of Moving Asymptotes)以及 Zhang^[32]等人研究了带等式约束的“广义的移动渐进线方法”(GMMA: Generalized Method of Moving Asymptotes)。

结构拓扑优化问题一般为非线性规划问题，数学规划方法中的 SLP 和 MMA 等方法已成功运用于大规模结构拓扑优化设计的求解当中。MMA 方法更是结构拓扑优化设计方法中一种高效的适合于求解具有复杂目标函数和多约束条件的高级优化求解器。关于 MMA 系列方法的详细介绍可以参考 Bruyneel^[33]等人的文献。

上面对优化设计方法的分类是相对的。国内外许多学者将优化准则法和数学规划法有机结合起来，形成了更广泛的优化设计方法。Fleury^[34]等将数学规划中非线性规划的对偶理论和优化准则方法有机结合起来，形成了结构优化的对偶理论。对偶理论是准则法和规划法的统一，对偶方法已用于结构拓扑优化设计中。对偶理论以维数较小的对偶变量空间寻优替代原来的设计空间寻优，大大改善了寻优的效率，而对偶变量的确定自动地确定了主动约束，解决了准则法不能合理判断临界约束的特点。这使得优化拓扑设计的研究又向前发展了一步。

3. 随机性的优化算法

在复杂机械系统的优化设计中，由于实际优化问题的数学模型表现出的复杂性、非线性、随机性和模糊性等特点，传统的优化方法已不能有效的求解这类优化问题。常见的随机性优化算法有基于生命科学的基因遗传算法、蚁群系统算法、模拟退火优化算法以及神经网络优化算法等。基因遗传算法最早是由美国 Michigan 大学的 Holland^[35]教授于 1975 年提出的。主要思想是利用二进制串表示染色体来模拟生物群体的演化过程。在结构拓扑优化领域，遗传算法主要用于非凸域上且目标函数不连续问题的全局优化问题，比如离散结构的拓扑优化设计问题。

但对于连续体结构的拓扑优化设计问题,遗传算法多用于较小规模连续体结构或离散的优化问题。模拟退火算法、蚁群系统算法和神经网络^[36]等优化方法,在结构拓扑优化领域,具有同遗传算法类似的特点。

概率优化法、数学规划法、优化准则法和其它优化方法可以混合使用以提高效率。

1.2.3 拓扑优化的数值不稳定现象及抑制技术

在利用固定有限元网格(渐进法、均匀法、密度法)进行连续体结构拓扑优化中,存在着数值不稳定现象,如灰度单元、棋盘格、网格依赖性和局部极值问题。灰度单元和棋盘格导致计算结果的可制造性差,网格依赖性使计算结果的可靠性下降,局部极值问题导致计算得不到全局最优解或得不到工程可行解。棋盘格和网格依赖现象一般同时出现在优化结果中,能有效去除棋盘格的方法通常也能有效克服网格依赖性。

棋盘格的产生与分析单元的选择有关,Diaz 和 Sigmund^[37]等的研究表明:合理选择高阶单元或采用非协调元,可有效降低或消除棋盘格。国内学者吴长春^[38]等采用非协调元进行了结构拓扑优化设计,对协调等参元和非协调元的拓扑优化结果进行了对照,计算表明:采用非协调元时能得到比等参元具有更高精度的拓扑优化结果,因此能有效克服拓扑优化计算中出现的棋盘格现象。

除了采用高阶单元外,许多学者深入研究了消除拓扑优化中的棋盘格和网格依赖性等数值不稳定现象的方法,这些方法包括: Haber^[39]等提出的周长约束方法, Sigmund^[40]提出的网格过滤方法, Petersson 和 Sigmund^[41]提出的局部梯度约束方法, Zhou^[42]提出的最小尺寸控制法等。Petersson^[43]等提出了一种显式约束方法以控制中间密度单元的生成。

拓扑优化设计的数值不稳定现象是由于结构力学响应的变化与结构拓扑构形的变化呈现强非线性,以及有限元分析误差造成的,目前可通过对灵敏度等相关量的数值处理得到抑制和减弱。

1.3 本文的研究工作

本文从以下三个方面对连续体结构的拓扑优化进行了研究:

首先,探讨了连续体结构拓扑优化的基本理论,分别就各种密度插值模型的种类、特点,优化准则法(OC)和移动渐近线法(MMA)两种常用优化算法的基本原理,各种数值不稳定现象的产生机理和消除方法等三方面进行了探讨。

然后,通过数值算例分析,在 RAMP 密度刚度插值模型的基础上,对比了优化准则法(OC)和移动渐近线法(MMA)的计算效率,确定了惩罚因子、过滤半径等参数的合理取值范围。

最后,针对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化两个主要困难:低密度区域的附属效应问题和材料的非主动体积约束问题,对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化进行了探讨:

(1) 对不能合理描述低密度区域材料属性的插值模型,进行自重载荷作用下的拓扑优化时出现的附属效应现象,阐明了该现象出现的原因,并探讨了避免该现象的策略。

(2) 针对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化中,非主动体积约束问题中实际体分比随惩罚因子变化的现象,基于多项式插值模型和 RAMP 插值模型,利用优化理论的库恩-塔克条件,对实际体分比随惩罚因子变化的原因进行了分析和探讨,从理论上解释了该现象产生的原因,并对比了随着惩罚因子的增大,两种插值模型下非主动体积约束达到有效约束的速度。

全文分为六章:

第一章 绪论。主要对拓扑优化技术研究现状和进展、拓扑优化算法研究进展以及拓扑优化的数值不稳定现象及抑制技术进行了综述。同时对全文的工作进行了概要介绍。

第二章 连续体结构拓扑优化的材料插值方法。对拓扑优化的各种材料插值方法的原理、特点进行了探讨,重点讨论了 RAMP 方法,并基于 RAMP 方法实例分析了惩罚因子对于拓扑优化结果及计算效率的影响,从而确定惩罚因子合理取值范围。

第三章 基于变密度法的连续体结构拓扑优化的数值算法。对于优化过程中常用的优化算法进行了探讨,重点分析了优化准则法(OC)和移动渐近线(MMA)方法的原理及其应用范围,实例对比了二者收敛效率。

第四章 连续体结构拓扑优化中的数值不稳定现象及处理策略。对拓扑优化结果中常见的数值不稳定现象进行了分类总结,详细分析了灰度单元、棋盘格式、网格依赖性等数值不稳定现象的表现形式。给出了一些常用的消除数值不稳定现象的方法。通过实例分析了网格过滤法的过滤半径对于拓扑优化结果的影响,从而确定了网格过滤半径合理的取值范围。

第五章 基于变密度法的自重载荷作用下连续体结构拓扑优化研究。针对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化两个主要困难:低密度区域的附属效应问题和材料的非主动体积约束问题,对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化进行了探讨。首先,对不能合理描述低密度区域材料属性的插值模型,进行自重载荷作用下的拓扑优化时出现的附属效应现象,阐明了该现象出现的原因,并探讨了避

免该现象的策略。其次，针对自重载荷作用下非主动体积约束问题中实际体分比随惩罚因子变化的现象，基于多项式插值模型和 RAMP 插值模型，利用优化理论的库恩-塔克条件，对实际体分比随惩罚因子变化的原因进行了分析和探讨，从理论上解释了该现象产生的原因，并对比了随着惩罚因子的增大，两种插值模型下非主动体积约束达到有效约束的速度。

第六章 总结与展望。对整篇文章进行了总结，对于一些应深入研究的关键技术和应用领域进行了展望。

第二章 连续体结构拓扑优化的材料插值方法

2.1 前言

材料插值方法是拓扑优化技术的重要研究领域, 直接决定着该领域的研究进展。经过一代代国内外学者的努力逐渐形成了一系列成熟的方法和理论, 促进了拓扑优化技术的进步。具有代表性的材料插值方法有均匀化方法(homogenization method)、变密度法(最典型的就是 SIMP 法(Solid Isotropic Material with Penalization Model)和 RAMP 法(Rational Approximation of Material Properties))、变厚度法、进化结构优化方法(Evolutionary Structural Optimization, ESO)等。其中对于均匀化方法、变密度法的研究相对较为成熟, 应用较为广泛, 作为连续体结构拓扑优化的主流方法, 被应用于许多结构拓扑优化问题之中。

2.2 连续体结构拓扑优化的材料插值方法

2.2.1 均匀化方法

均匀化法是 1988 年 Bendsoe、Kikuchi^[10]首次提出来的, 他们将多孔材料的复合介质概念引入拓扑优化领域, 通过在材料中引入微结构模型, 将复杂的拓扑优化问题转化为简单的尺寸优化问题, 通过不同微结构构成宏观结构的性能(如图 2.1 所示), 从而使得连续体结构拓扑优化理论得到了快速发展, 为许多国内外的研究者所关注。

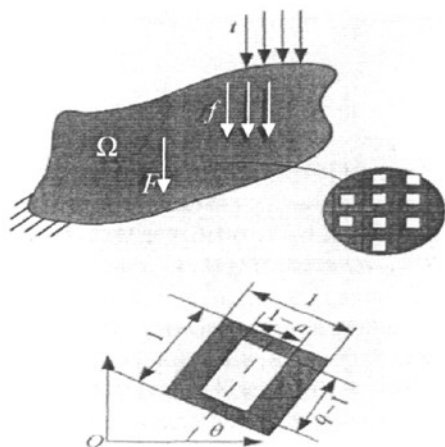


图 2.1 均匀化方法的原理模型

图 2.1 中 Ω 为设计区域, F 、 f 和 t 分别表示作用在该区域上的集中力、体力和均布力, 右下角为微观区域的放大, 可以看出该区域由多个胞元构成, 下面的图为单个胞元的构成结构示意图。

在使用均匀化方法进行拓扑优化的过程中, 描述微结构胞元的参数为 a 、 b 、 θ , 当 $a=0$ 且 $b=0$ 表示单元为实体单元, 当 $a=1$ 且 $b=1$ 表示单元为空洞单元。通过微结构的密度从 0(空洞)连续变化到 1(实体)来实现结构的拓扑优化。

均匀化方法的数学理论严谨, 在理解拓扑优化的理论框架方面有着重要的意义。但另一方面, 均匀化方法单元的设计变量多, 敏度计算复杂, 优化后的结构常常含有灰度单元, 难以制造。因此, 均匀化方法主要应用在拓扑优化理论研究方面。

2.2.2 变密度法

变密度法是从均匀化方法发展而来的, 以区间 $[0, 1]$ 内的密度值为设计变量, 直接定义一个经验公式来表达密度与弹性模量间假定的函数关系, 这样结构的拓扑优化问题就被转换为材料的最优分布问题。其实质是将拓扑变量依附于单元材料上以便应用基于连续变量的优化算法。变密度法设计变量少, 程序实现简单, 与均匀化方法相比它可以取结构重量为目标而不存在多目标问题。变密度法在工程研究中得到了广泛的重视和研究, 是目前算法上便于实施应用较多的一种材料插值方法。但是, 虽然它避免了均匀化方法的微结构构造, 但是代之以人造密度的假定, 导致最终必须处理中间密度(自然界不存在的材料)的困难。

变密度方法主要有: SIMP (Solid Isotropic Microstructures with Penalization)^[14] 和 RAMP(Rational Approximation of Material Properties)^[15] 模型两种。SIMP 模型和 RAMP 模型主要通过引入惩罚因子, 在材料的弹性模量和单元相对密度之间建立起一种显式的非线性对应关系。它的作用是当设计变量的值在 $(0, 1)$ 之间时, 对中间密度值进行惩罚, 使中间密度值逐渐向 0/1 两端聚集, 这样可以使连续变量的拓扑优化模型能很好地逼近原来 0-1 离散变量的优化模型。这时中间密度单元对应一个很小的弹性模量, 对结构刚度矩阵的影响将变得很小, 可以忽略不计。

SIMP 密度刚度插值模型对中间密度的惩罚由下式进行:

$$E_i = x_i^p E_0 \quad (2-1)$$

式中 E_i 表示第 i 单元的弹性模量, E_0 为单元充满材料时的弹性模量(也就是相对密度为 1 时), p 为惩罚因子。通过上式以连续变量的密度函数表达单元相对密度与材料弹性模量之间的对应关系, 得到光滑的材料插值模型。惩罚因子 p 的取值大小对于抑制中间密度单元的效果不一样, 参数 p 取值越大, 效果越好, 但太大的

参数值又容易引起棋盘格现象。惩罚情况如图 2.2 所示。

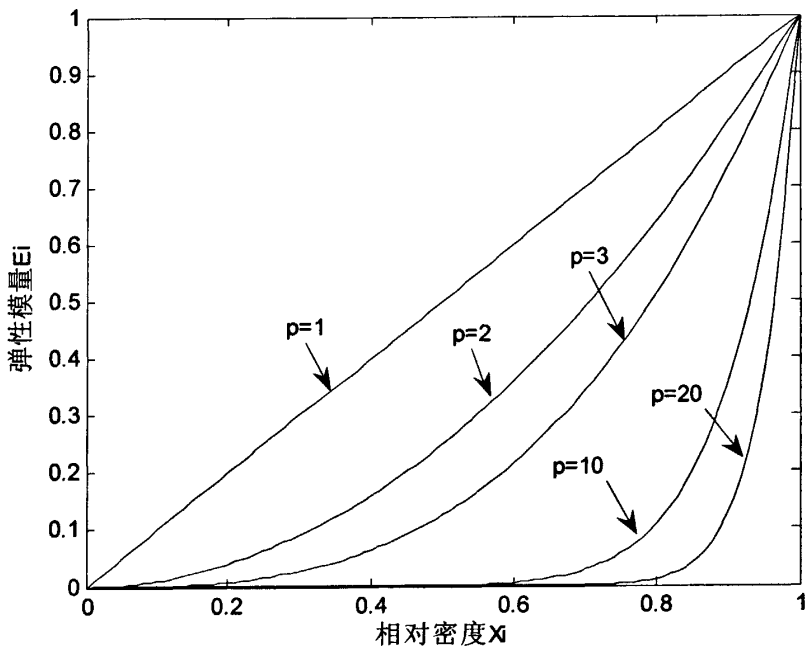


图 2.2 SIMP 密度惩罚(p 分别为 1、2、3、10、20)

而 RAMP 密度刚度插值模型对中间密度的惩罚则由下式进行：

$$E_i = \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} E_0 \quad (2-2)$$

式中 E_i 表示第 i 单元的弹性模量， E_0 为单元充满材料时的弹性模量， p 为惩罚因子。惩罚情况如图 2.3 所示：

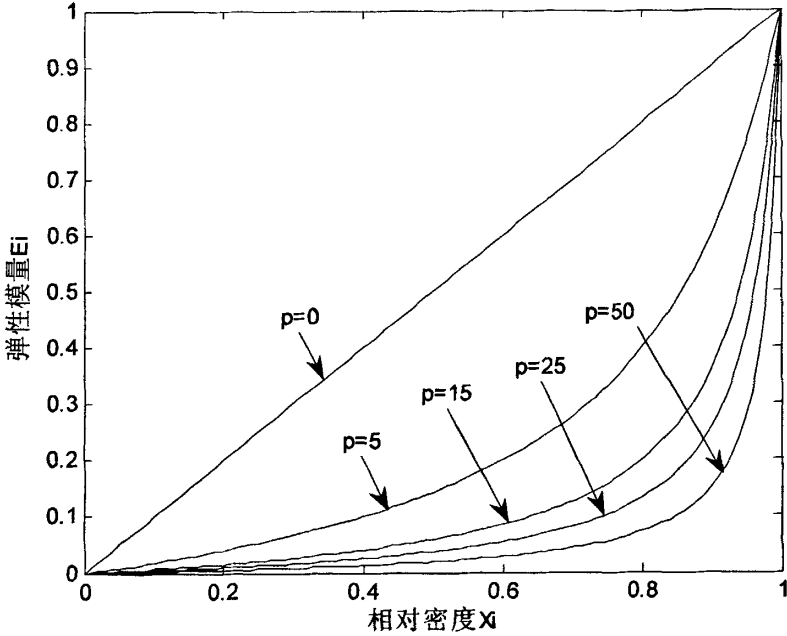


图 2.3 RAMP 密度惩罚 (p 分别为 0、5、15、25、50)

对比图 2.2 和图 2.3 的材料伪弹性模量与真实弹性模量的比值随材料密度以及惩罚因子的变化曲线, 可以看出 SIMP 法和 RAMP 法具有很大的相似性, 在相同条件下, 二者优化结果也是十分相似的, 但是 RAMP 法随着 p 值的增大相对 SIMP 法优化过程呈现更好的稳定性。

一般情况, 基于变密度法的优化模型为:

$$\begin{aligned}
 &\text{Find: } \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\
 &\text{Min: } C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \\
 &\text{S.T: } \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\
 &V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v_i \leq f V_0 = V^* \\
 &0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2-3}$$

式中, x_i 为设计变量, 为材料相对密度; n 为设计域中有限单元个数; $C(\mathbf{x})$ 为目标函数, 为结构的柔顺度; \mathbf{K} 为结构的总体刚度矩阵; \mathbf{U} 为结构的总体位移向量; \mathbf{F} 为结构所受载荷向量; V 为结构优化后的体积; v_i 为结构单元体积; f 为给定材料体分比; V_0 为初始结构体积; V^* 为体积上限; x_{\min} 为最小相对密度。

2.2.3 其他材料插值方法

变厚度法：变厚度法是以基结构中单元厚度为拓扑设计变量，将拓扑变量依附于单元厚度上，使拓扑优化问题降格为尺寸优化问题，通过删除厚度为尺寸下限的单元来实现结构拓扑的变更。它是尺寸优化方法的直接推广，具有方法简单、概念清晰等优点，但其优化对象受到限制，不能推广到三维连续体结构拓扑优化，只适用于平面问题(如膜、板、壳等)。关于变厚度法的代表性工作有 Tenek 和 Hagiwara^[11]的研究。

进化结构优化方法：进化结构优化方法(Evolutionary Structural Optimization, ESO)是由 Xie^[18]等人于 1993 年提出的，为结构优化提供了一种新途径，它克服了以往传统优化技术的许多问题，并且适用于复杂的三维实体结构的拓扑优化^[44]。其思想很简单，即根据各单元的贡献大小，通过将无效或低效的材料逐步去掉，使结构趋于优化。尽管进化结构方法在收敛性的证明方面有所欠缺，但许多算例已证明了 ESO 方法在解决实际问题时是非常成功的^[45, 46, 47]。

另外，还有其它的一些材料插值方法和求解策略，如隋允康^[48]提出的 ICM(independent, continuous, mapping)方法、Jog 和 Haber^[49]提出的“等周方法”、Eschenauer^[12]提出的“泡泡法”等。

2.3 RAMP 法中惩罚因子对优化结果的影响

为了分析 RAMP 密度刚度插值模型中的惩罚因子对于拓扑优化结果的影响效果，这里以图 2.4 所示 MBB 简支梁结构的拓扑优化问题为例来说明惩罚因子的变化对拓扑优化结果的影响。

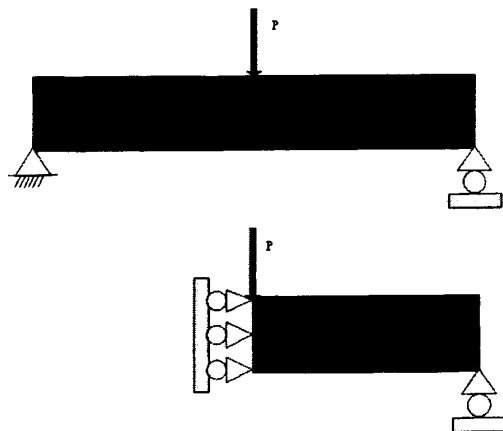


图 2.4 MBB 简支梁

如图 2.4 所示，结构离散为 120×20 个四节点双线性正四边形单元(只关心定性

结果，算例无量纲)，上边界中点受一竖直向下的力 P ，弹性模量和泊松比分别为 $E=1.0$ ， $\nu=0.3$ ，受力 $P=1$ ，体积比分为 0.5。根据结构的对称性，只取一半进行优化，结构的离散单元数为 1200。惩罚因子对优化结果的影响如图 2.5 所示。

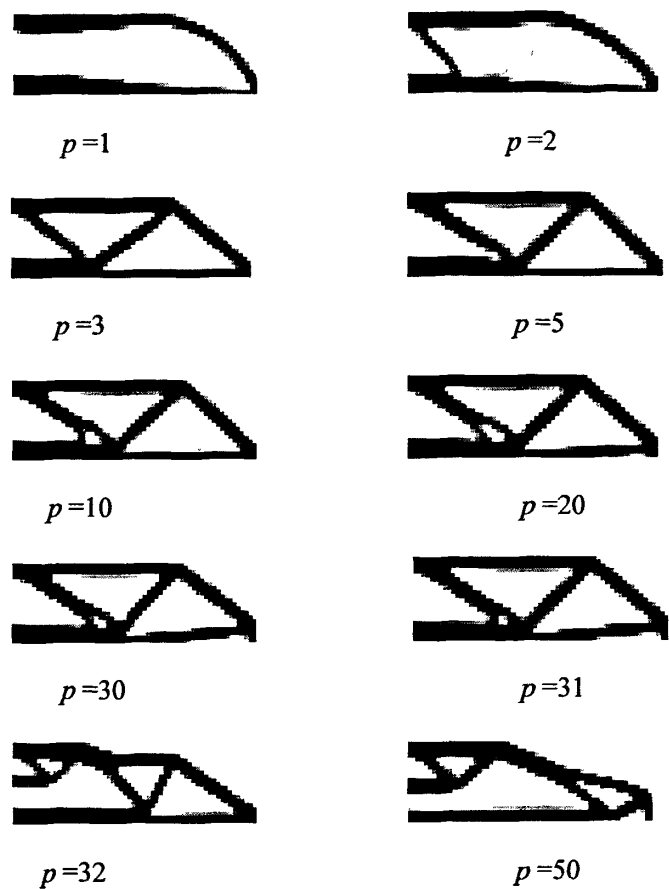


图2.5 不同惩罚因子 p 条件下的优化结果

从图2.5的优化结果可以看出当 $p \leq 2$ 时，拓扑优化结果存在着大量的中间密度材料单元，随着惩罚因子 p 的减小这种趋势不断的加强，甚至有些结果几乎是无法识别的结构，这显然不利于结果的制造；当 $3 \leq p \leq 31$ 时，结果清晰，易于工程制造，而且随着值的不断增大结果几乎没有变化；当 $p \geq 32$ 时，结果发生显著变化，变得复杂，不利于结构的制造。

由上可以看出，在用RAMP法进行拓扑优化时，惩罚因子 p 选择合理与否，直接关系到能否有效地消除中间密度材料，获得清晰的优化结果。综上考虑，在用RAMP法进行拓扑优化时，惩罚因子 p 的取值范围建议为 $3 \leq p \leq 31$ 。

2.4 本章小结

本章系统介绍了连续体结构拓扑优化的均匀化方法、变密度法、变厚度法及进化结构方法等材料插值方法的原理和思想。主要讨论了变密度法中的 SIMP 法和 RAMP 法材料插值模型，分析了 SIMP 法和 RAMP 法取不同惩罚因子时对单元弹性模量的影响，通过对比可以看出，相对 SIMP 法，RAMP 法随着惩罚因子的增大优化过程呈现更好的稳定性。同时从工程制造性角度出发，基于 RAMP 材料插值模型，通过 MBB 简支梁的实例来讨论了惩罚因子 p 的合理的取值范围。

第三章 基于变密度法的连续体结构拓扑优化的数值算法

3.1 前言

在第二章中建立了连续体结构的拓扑优化模型后,就需要采用合适的优化求解数值算法来对优化模型进行求解。优化求解数值算法是结构拓扑优化的核心内容之一。拓扑优化是一种复杂的结构优化问题,其特点是:(1)设计变量多。拓扑优化的设计变量往往与结构有限单元的数目成正比,在基于均匀化理论的二维拓扑优化问题中设计变量可达结构有限单元数目的三倍之多,而在基于均匀化理论的三维拓扑优化问题中设计变量可达结构有限单元数目的七倍之多。在基于RAMP材料插值模型的拓扑优化问题中设计变量数目一般等价于结构的有限单元数目。因此当结构单元的数目较多时,优化设计变量的数目就非常庞大。(2)计算规模大。拓扑优化过程中一般需要通过求解结构有限元方程来获得结构整体或局部响应,然后再由结构响应得到优化目标和约束函数值,通过一定的优化寻优策略,经过迭代计算找到满足约束条件的最优目标函数值。在寻优过程中需要不断调用结构分析过程,这样导致计算求解规模变大。(3)结构性态响应函数通常为设计变量的隐式非线性函数。

针对拓扑优化的以上特点,有效的优化算法是有效解决拓扑优化问题的关键,也是国内外研究者研究的焦点问题。目前利用变密度法常用的优化算法主要有优化准则法(OC)和移动渐近线法(MMA)。

本章主要探讨了优化准则法和移动渐近线法的基本原理,基于RAMP密度刚度插值模型,对使用优化准则法和移动近似方法进行最小柔度拓扑优化的计算过程进行了推导。分别使用这两种方法对MBB简支梁结构进行了拓扑优化,对比了二者的优化结果和计算效率。

3.2 优化准则法的基本原理

优化准则法从工程上有一定依据的假设出发,建立优化设计的准则和迭代公式,然后进行迭代求解。此法最大的特点是收敛速度快,迭代次数少,要求重分析的次数一般同结构变量多少和复杂程度无关,这对于大、中型结构的优化设计具有实际意义。其不足之处是不同类型的优化问题需要推导其各自不同的优化准则,同时对于不具有凸性的目标函数,准则法不容易构造设计变量的启发式迭代格式,另外优化准则法需要正确区分起作用约束集和不起作用约束集。因此优化

准则法多用于约束条件不多的单约束优化问题。

拓扑优化问题的设计变量多, 求解多采用有限元法, 每次重分析都要重新组装结构刚度矩阵, 求解多元方程组, 计算工作量大, 因此采用优化准则方法是一种很好的选择^[50]。本节针对 RAMP 材料插值理论, 推导了最小柔度拓扑优化问题的优化准则算法, 用于设计变量的更新。数值试验表明该算法具有较好的收敛性和应用价值。

由第二章可知, RAMP 法对中间密度的惩罚形式为:

$$E_i = \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} E_0 \quad (3-1)$$

那么基于 RAMP 法最小柔度拓扑优化问题的优化模型为:

$$\begin{aligned} \text{Find: } & \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\ \text{Min: } & C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i \\ \text{S.T: } & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v_i \leq f V_0 = V^* \\ & 0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-2)$$

式中, x_i 为设计变量, 为材料相对密度; n 为设计域中有限单元个数; $C(\mathbf{x})$ 为目标函数, 为结构的柔顺度; \mathbf{K} 为结构的总体刚度矩阵; \mathbf{k}_0 为单元的初始刚度矩阵; \mathbf{U} 为结构的总体位移向量; \mathbf{u}_i 为单元 i 的位移列向量; \mathbf{F} 为结构所受载荷向量; V 为结构优化后的体积; v_i 为结构单元体积; f 为给定材料体分比; V_0 为初始结构体积; V^* 为体积上限; x_{\min} 为最小相对密度(为了避免有限元方程在求解过程中出现刚度矩阵的奇异, 在这里 $x_{\min}=0.01$)。

3.2.1 灵敏度分析

1. 位移

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = 0 \quad (3-3)$$

从而可得位移对设计变量的偏导为:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} \quad (3-4)$$

2. 体积

$$V = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad (3-5)$$

得体积对设计变量的偏导为：

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = v_i \quad (3-6)$$

3. 目标函数

$$C(x) = F^T U = U^T K U = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} u_i^T k_0 u_i \quad (3-7)$$

将(3-4)代入(3-7)得目标函数对设计变量的偏导为：

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -\frac{1 + p}{[1 + p(1 - x_i)]^2} u_i^T k_0 u_i \quad (3-8)$$

3.2.2 准则算法

针对该优化问题构造相应的拉格朗日函数：

$$L = C + \lambda_1 (V - V^*) + \lambda_2 (F - KU) + \lambda_3 (x_{\min} - x) + \lambda_4 (x - 1) \quad (3-9)$$

当 $x = x^*$ 时取极值，上述拉格朗日函数应满足 Kuhn-Tucker 必要条件为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ V = V^* \\ KU = F \\ \lambda_3 (x_{\min} - x^*) = 0 \\ \lambda_4 (x^* - 1) = 0 \\ \lambda|_{x=x^*} \geq 0 \\ x_{\min} \leq x^* \leq 1 \end{array} \right. \quad (3-10)$$

当 $x_{\min} \leq x^* \leq x_{\max}$ 时，设计变量的上下限约束均不起作用，当 $x_{\min} = x^*$ 时，设计变量的下限约束起作用，当 $x^* = x_{\max}$ 时，设计变量的上限约束起作用，故上述 Kuhn-Tucker 条件等价于下式：

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial(KU)}{\partial x_i} \begin{cases} = 0 (x_{\min} \leq x^* \leq 1) \\ > 0 (x^* = x_{\min}) \\ < 0 (x^* = 1) \end{cases} \\ V = V^* \\ KU = F \\ \lambda|_{x=x^*} \geq 0 \end{cases} \quad (3-11)$$

对于上式等于 0 的情况，并且由 $C = U^T KU$ 可得：

$$\frac{\partial U^T}{\partial x_i} KU + U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U + U^T K \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + \lambda_2 \left(\frac{\partial K}{\partial x_i} U + K \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3-12)$$

将 $k_i = \frac{x_i}{1+p(1-x_i)} k_0$ ， $V = \sum_{i=1}^n x_i V_i$ 代入上式，并利用结构刚阵的对称性

则：

$$\frac{\partial U^T}{\partial x_i} (2KU + K\lambda_2) + \lambda_2 \frac{\partial K}{\partial x_i} U + \frac{1+p}{[1+p(1-x_i)]^2} u_i^T k_0 u_i + \lambda_1 V_i = 0 \quad (3-13)$$

可以通过选取适当的 λ_2 值来消除式中的 $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ 项得到：

$$-\frac{1+p}{[1+p(1-x_i)]^2} u_i^T k_0 u_i + \lambda_1 v_i = 0 \quad (3-14)$$

变换上式得：

$$\frac{\frac{1+p}{[1+p(1-x_i)]^2} u_i^T k_0 u_i}{\lambda_1 v_i} = 1 \quad (3-15)$$

由上式可以看出，设计区域的应变能密度为常量拉格朗日乘子(λ_1 是一个比例因子为常量)，因而对相对密度的设计变量建立如下迭代公式：设

$$H_i^k = \frac{\frac{1+p}{[1+p(1-x_i)]^2} u_i^T k_0 u_i}{\lambda_1 v_i} \quad (3-16)$$

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} (H_i^k)^\xi x_i^k & \text{if } x_{\min} < (H_i^k)^\xi x_i^k < 1 \\ x_{\min} & \text{if } (H_i^k)^\xi x_i^k \leq x_{\min} \\ 1 & \text{if } (H_i^k)^\xi x_i^k \geq 1 \end{cases} \quad (3-17)$$

式中 ξ 为阻尼系数, 引入 ξ 的目的是为了确保数值计算的稳定性和收敛性。

3.2.3 Kuhn-Tucker 条件乘子 λ_i 迭代方案

每次迭代中与体积有关的拉格朗日乘子 λ_i 的值是变化的, 它的求取可以通过常用的牛顿法或二分法, 为简便起见运用二分法进行求解, 迭代步骤为

(1) 因为 $dV/d\lambda < 0$, 找到极限

$$\lambda_{\min}^0, \lambda_{\max}^0$$

$$V(\lambda_{\min}^0) > V^*, V(\lambda_{\max}^0) < V^* \quad (3-18)$$

(2) 计算:

$$\lambda^m = \frac{1}{2}(\lambda_{\min}^m + \lambda_{\max}^m) \quad (3-19)$$

(3) 计算: $V(\lambda^m)$ 并更新 $\lambda_{\min}^m, \lambda_{\max}^m$

$$\text{若 } V < V^* \text{ 则 } \lambda_{\max}^{m+1} = \lambda^m \quad (3-20)$$

$$\text{若 } V > V^* \text{ 则 } \lambda_{\min}^{m+1} = \lambda^m \quad (3-21)$$

(4) 迭代次数加 1, 并且重复步骤(2), (3), 直到 $|V - V^*| \leq \delta$

式中 δ 为可接受的体积约束容差度(可取 $\delta = 0.0001$), $\lambda_{\max}^0, \lambda_{\min}^0$ 为的初始 Kuhn-Tucker 条件拉格朗日乘子上下限, V, V^* 为实际体积与给定体积的约束值, λ^m 为二分法 Kuhn-Tucker 条件拉格朗日乘子的中间变量。

3.2.4 优化准则法计算流程

在 RAMP 密度刚度插值模型基础上, 基于优化准则法的结构拓扑优化求解过程如下:

(1) 定义设计域、约束、载荷等边界条件。设计域内的单元相对密度可随迭代

过程变化。

(2) 将结构离散为有限元网格，计算优化前的单元刚度矩阵。

(3) 初始化单元设计变量，即给定设计域内的每个单元一个初始单元相对密度。

(4) 计算各离散单元的材料特性参数，计算单元刚度矩阵，组装结构总刚度矩阵，计算结点位移。

(5) 计算总体结构的柔度值及其敏度值，求解拉格朗日乘子。

(6) 用优化准则方法进行设计变量更新。

(7) 检查结果的收敛性，如未收敛则转(4)循环迭代，如收敛则转(8)。

收敛性检查可用如下方法：分别取两次邻近设计变量的最大分量，用两个分量的绝对差值式(3-22)作为评判标准，也可用两次邻近设计目标函数的绝对差值式(3-23)作为评判标准。

$$\left| \frac{\max(x^{k+1}) - \max(x^k)}{\max(x^k)} \right| < \varepsilon \quad (3-22)$$

$$\left| \frac{C^{k+1} - C^k}{C^k} \right| < \varepsilon \quad (3-23)$$

(8) 输出目标函数值及设计变量值，结束计算，绘制密度轮廓图。

流程图为：

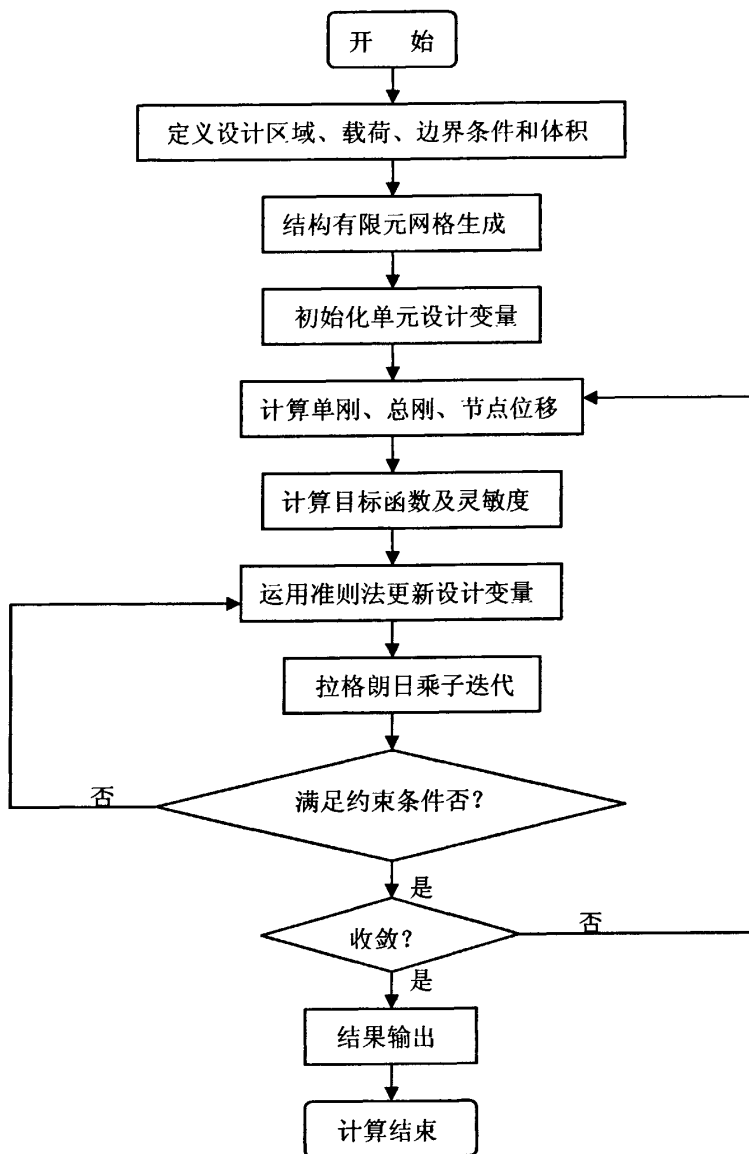


图 3.1 基于 RAMP 法的优化准则法流程

3.3 MMA 法的基本原理

MMA(The Method of Moving Asymptotes)算法最初由瑞典数学家 Svanberg^[26]于 1987 年提出。其方法和思想是：对结构响应函数在当前设计点处进行一阶倒变量泰勒展开，进行凸线性显式化近似，用一系列凸显式化子问题来近似原问题，然后用对偶方法或初始对偶内点算法^[26, 27, 28]求解凸线性显式化子问题，用移动近似子问题的解来不断逼近原问题的解。

一般非线性优化问题可表示为：

$$\begin{aligned}
& \text{Find: } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \\
& \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m, \\
& \mathbf{z} \in \mathbb{R} \\
& \text{Min: } f_0(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \quad (3-24) \\
& \text{S.T: } f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 \quad i=1, \dots, m \\
& x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j=1, \dots, n \\
& y_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m \\
& z \geq 0
\end{aligned}$$

其中: \mathbf{x} 为设计变量, \mathbf{y} 、 \mathbf{z} 为附加设计变量。 f_0, f_1, \dots, f_m 为连续可微实函数, x_j^{\min}, x_j^{\max} 为实数, 且有 $x_j^{\min} \leq x_j^{\max}$, a_0, a_i 为实数, $a_0 > 0, a_i \geq 0$, c_0, d_i 为实数, $c_i \geq 0, d_i \geq 0, c_i + d_i \geq 0$, m 为设计约束数目, n 为设计变量数目。

一般的非线性规划问题可看作上述优化问题的一种特例, 如当优化问题(3-24)式中取 $a_i = 0$ 、 $d_i = 0$ 、 $c_i = 0$ 时即可得到下面的标准优化问题:

$$\begin{aligned}
& \text{Min: } f_0(\mathbf{x}) \\
& \text{S.T: } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, i=1, \dots, m \quad (3-25) \\
& x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j=1, \dots, n
\end{aligned}$$

上述优化问题中, 目标函数和约束函数常常是设计变量的隐式非线性函数, 这使得优化问题的直接求解常常难以进行。因此, 必须采用数值方法来求解问题(3-24)的解, 常用的方法是通过一阶或二次凸近似, 将问题(3-24)转化为易于求解的凸性可分离子问题(又称为移动近似子问题), 然后建立对应于移动近似子问题的拉格朗日函数, 并将拉格朗日函数转换为对偶问题, 由于对偶变量的数目依赖于起作用约束的数目, 因此对于设计约束不是太多的结构优化问题, 对偶设计变量空间相对于原始设计变量空间将大大缩减, 有利于优化问题的求解。然后求解对偶问题, 近似得到原问题的解。

在 MMA 算法中, 一般将目标函数和约束函数在倒变量 $1/(u_j - x_j)$ 或 $1/(x_j - l_j)$ 上线性展开, 构造移动近似子问题, 然后求解移动近似子问题, 得到一个原问题的近似解。问题(3-24)的移动近似子问题可构造为:

$$\begin{aligned}
& \text{Find: } \mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n, \\
& \quad \mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbf{R}^n, \\
& \quad z \in \mathbf{R} \\
& \text{Min: } \tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x}) + a_0 z + \sum_{i=1}^m \left(c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \right) \\
& \text{S.T: } \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 \quad i=1, \dots, m \\
& \quad \alpha_j^{\min} \leq x_j \leq \alpha_j^{\max} \quad j=1, \dots, n \\
& \quad y_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m \\
& \quad z \geq 0
\end{aligned} \tag{3-26}$$

近似函数 $\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x})$ 为:

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{u_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - l_j^{(k)}} \right), i=0, 1, \dots, m \tag{3-27}$$

其中:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(k)} &= (x_j - l_j^{(k)})^2 \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ + k_{ij}^{(k)} \right) \\
q_{ij}^{(k)} &= (u_j^{(k)} - x_j)^2 \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- + k_{ij}^{(k)} \right) \\
\alpha_j^{(k)} &= \max \{ x_j^{\min}, 0.9 l_j^{(k)} + 0.1 x_j^{(k)} \} \\
\beta_j^{(k)} &= \max \{ x_j^{\max}, 0.9 u_j^{(k)} + 0.1 x_j^{(k)} \} \\
\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^+ &= \max \left\{ 0, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\} \\
\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^- &= \max \left\{ 0, -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right\}
\end{aligned}$$

上界近似 $u_j^{(k)}$ 和下界近似 $l_j^{(k)}$ 也随着迭代过程而更新。

$k=1, 2$ 时有:

$$\begin{aligned}
l_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min}) \\
u_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + 0.5(x_j^{\max} - x_j^{\min})
\end{aligned}$$

$k \geq 3$ 时有:

$$\begin{aligned} l_j^{(k)} &= x_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)}(x_j^{(k-1)} - l_j^{(k-1)}) \\ u_j^{(k)} &= x_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)}(u_j^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}) \end{aligned}$$

其中变量 $\gamma_j^{(k)}$ 的更新采用经验化的更新策略为:

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0.7 & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) < 0 \\ 0.2 & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) > 0 \\ 1 & \text{if } (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}) = 0 \end{cases}$$

参数 $k_{ij}^{(k)}$ 的缺省值采用经验化的更新策略为:

$$k_{ij}^{(k)} = 10^{-3} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \right| + \frac{10^{-6}}{u_j^{(k)} - l_j^{(k)}}, i = 0, 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

那么基于 RAMP 插值模型以及 MMA 算法, 结构的最小柔顺度拓扑优化模型为:

$$\begin{aligned} \text{Find: } & \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\ & y \in R \\ & z \in R \\ \text{Min: } & \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} u_i^T k_0 u_i + z + 1000y \\ \text{S.T: } & V(\mathbf{x}) - fV_0 - y \leq 0 \\ & 0 < x_{\min} < x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{aligned} \quad (3-28)$$

式(3-28)中, x_i 为设计变量, 为材料相对密度; n 为设计域中有限单元个数; k_0 为单元的初始刚度矩阵; u_i 为单元 i 的位移列向量; V 为结构优化后的体积; f 为给定材料体分比; V_0 为初始结构体积; x_{\min} 为最小相对密度(为了避免有限元方程在求解过程中出现刚度矩阵的奇异, 在这里 $x_{\min} = 0.01$)。

对比 MMA 算法的标准形式, 对应的变量分别为: $f_0 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} u_i^T k_0 u_i$,

$f_1 = V(\mathbf{x}) - fV_0$, $a_0 = 1$, $c_1 = 1000$, $d_1 = 0$ 。目标函数, 约束函数相对于设计变量的灵敏度为:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = - \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} u_i^T k_0 u_i$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = v_i$$

基于 MMA 算法的连续体结构拓扑优化计算流程如下：

- (1)将结构拓扑优化问题构造成为 MMA 标准算法的求解形式。
- (2)选择设计变量的初始迭代值。
- (3)计算目标函数、约束函数对应于自变量的函数值及敏度值。
- (4)构造 MMA 子问题及其对偶问题，并进行求解得到原问题的近似解。
- (5)更新设计变量的上下移动界限。
- (6)判定结果是否符合给定的收敛条件，如果不符合返回步骤(3)进行新一轮的循环。如果符合，结束循环，输出需要的图形及数据。

流程图为：

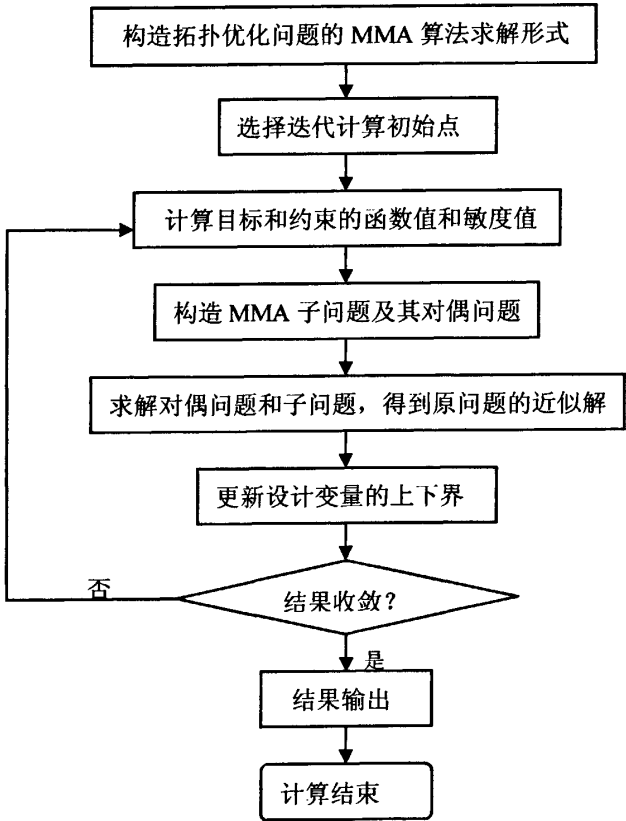


图 3.2 基于 RAMP 法的 MMA 法流程

3.4 优化准则法和 MMA 法的性能对比

以第二章 2.3 节中的 MBB 简支梁为例，用 RAMP 密度刚度插值模型，各变量的取值以及结构的边界条件完全不变，分别采用优化准则法和移动渐近线方法进行优化，结果如图 3.3、图 3.4 所示(惩罚因子 $p=15$ ，体积比 $f=0.5$)



图 3.3 OC 法对应的优化结果(60×20)

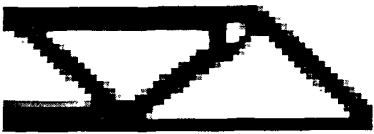


图 3.4 MMA 法对应的优化结果(60×20)

表 3.1 OC 法与 MMA 法优化结果统计表

| 算法 | 惩罚因子 | 给定体分比 | 柔顺度终值 | 迭代步数 |
|-------|------|-------|----------|------|
| OC 法 | 15 | 0.5 | 209.8647 | 91 |
| MMA 法 | 15 | 0.5 | 209.1595 | 130 |

对比图 3.3、图 3.4 的优化结果可以看出，OC 法与 MMA 法的优化后最终的拓扑形状几乎一样，从表 3.1 可以看出，OC 法与 MMA 法优化后的柔顺度值误差非常小。但从迭代次数来看，MMA 算法迭代次数要比准则法多，结果收敛较准则法要慢。

3.5 本章小结

本章首先研究了优化准则法和移动渐进法的基本原理，分析了各自的适用范围，并推导了优化准则法和移动渐进线方法进行最小柔度结构拓扑优化的理论和公式；其次，基于 RAMP 材料插值模型，分别建立了优化准则法和移动渐近线法的数学模型。通过使用优化准则法和移动渐近线法，对 MBB 简支梁结构进行了优化结果和计算效率的对比，可以看出优化准则法与移动渐近线法的结果相差不大，两种算法通过算例在结果上得到了很好的统一。同时，从计算效率上来看，MMA 算法迭代次数要比准则法多，优化准则法收敛速度要快于移动渐近线法。

第四章 连续体结构拓扑优化中的数值不稳定现象及处理策略

4.1 前言

数值不稳定现象的处理是拓扑优化技术的重要研究领域。数值不稳定现象主要包括灰度单元、局部极值问题、棋盘格、网格依赖性等。数值不稳定现象处理的好坏直接关系到模型的进一步提取、分析、制造等问题。因此对数值不稳定现象的研究,对于拓扑优化能够在工程上的应用有着重要的意义。本章主要探讨了数值不稳定现象的分类以及其基本原理和相应的解决策略。

4.2 数值不稳定现象分类

在拓扑优化理论实际研究的过程中常见的数值不稳定现象主要有灰度单元、局部极值、棋盘格式、网格依赖性现象。下面就针对这些现象的不同表现形式采用图示的方法分别加以阐述。

1. 灰度单元是指在拓扑优化的结果中出现许多中间密度单元,使最终的拓扑结果可制造性差。灰度单元的拓扑结果如图4.1所示:

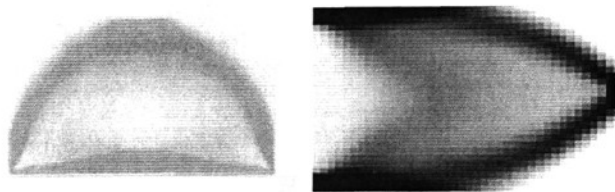


图4.1 灰度单元

2. 局部极值问题是指在相同离散格式下,选择不同的算法参数以及不同的计算初始点时,得到的拓扑结构也不同,即拓扑优化结果收敛于局部极值。而且初始参数的一些小变化,可能导致优化设计结果的较大变化。产生这些问题的原因部分是由于目标函数的光滑度,但主要是由于求解问题时的数值优化过程。通常,收敛性算法可用于求解凸函数问题,而对于非凸函数,收敛性证明只能保证收敛于初始点附近的一个稳定点。一些全局优化方法由于计算量方面的限制难以应用到连续体结构的拓扑优化中。工程上一般采用多次计算的方法来确定最优结果,但是要从多个结果中决定最优结果对于工程人员的专业素质要求较高。

3. 棋盘格式是指拓扑优化结果中的材料密度高低不同的周期性分布, 在形式上极像国际象棋的棋盘, 故得其名。棋盘格式的出现使得优化结果不易辨识, 给进一步的模型抽象、分析、制造带来了极大的困难。图 4.2b 所示便是棋盘格拓扑优化结果, 从图上可以看出, 结构的具体形式很难辨识, 中间出现许多黑白相间的小块, 这种结构在工程上是无法进行直接制造的, 没有实际意义。

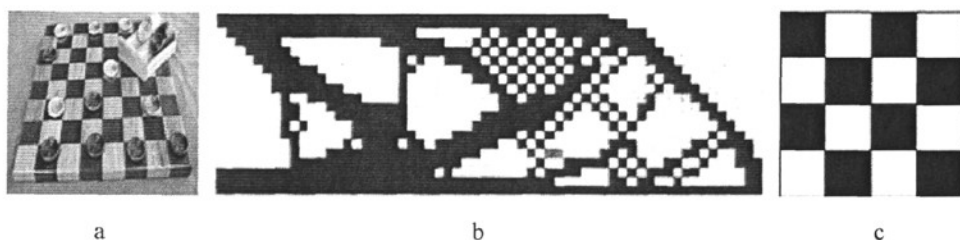


图4.2 棋盘格

4. 网格依赖是指随着对设计区域离散单元数目的增加, 优化结果中会出现许多细小的结构, 这种结果依赖于网格划分疏密程度, 因此这种现象就称之为网格依赖性。从图4.3中我们可以很明显的看出, 随着单元划分数目的不断增加, 结果越来越复杂, 出现了一些纤细的结构, 这也是不利于工程制造的。

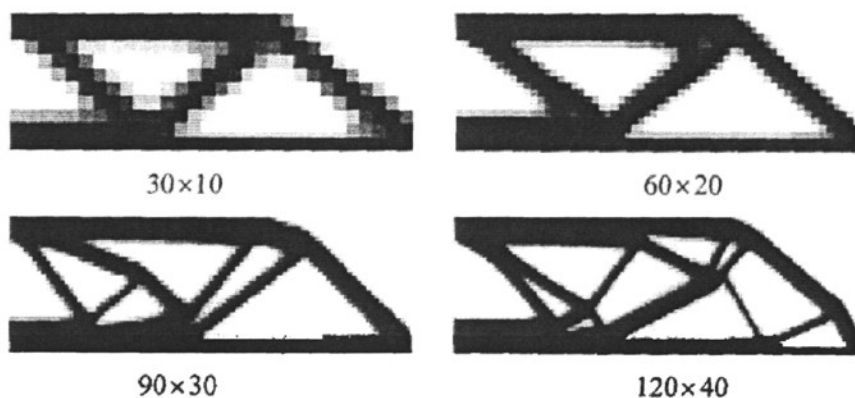


图 4.3 网格依赖

4.3 数值不稳定现象的处理策略

4.3.1 灰度单元问题和局部极值问题的解决

1. 灰度单元问题的解决一般通过在材料模型中引入惩罚因子来达到。例如在 RAMP 密度刚度插值模型中, 引入惩罚因子对设计变量在 $(0, 1)$ 之间的中间密度值

进行惩罚，使连续变量的拓扑优化结果很好地逼近离散的0-1结果。中间密度单元对应很小的弹性模量，对结构刚度矩阵的影响很小，可以忽略不计，如图4.4所示。

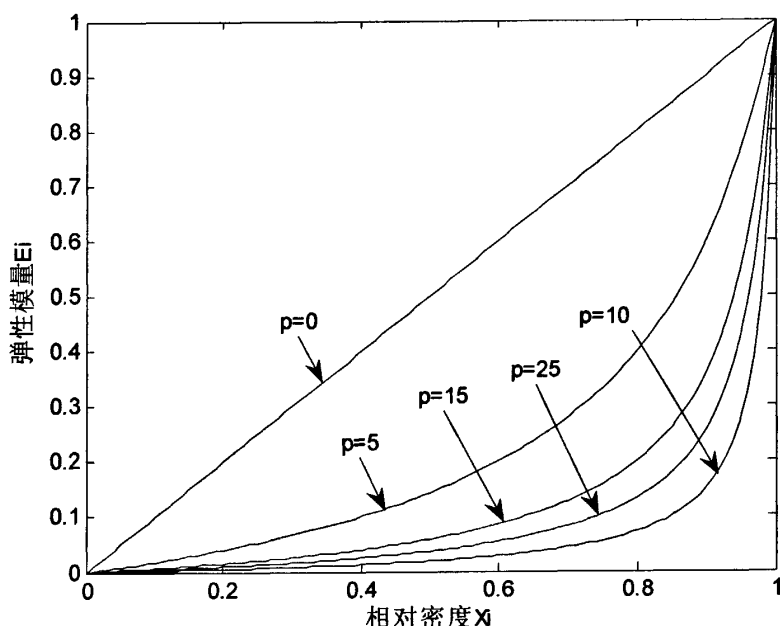


图4.4 中间密度值惩罚

2. 局部极值问题当前还没有一种有效的克服方法，一般采用下面两种办法来减少局部极值问题的影响：一是从优化算法上考虑，寻找一种合适的全局优化算法。目前拓扑优化中大多采用连续化方法，通过适当的构造使其包含整体信息。二是从迭代初值上考虑，采取选用不同的初始计算值来进行试算，选取较好的优化结果。

4.3.2 棋盘格和网格依赖现象的克服

棋盘格和网格依赖这两种现象一般同时出现在拓扑优化结果中，Zhou、Shyy^[42]认为棋盘格现象是网格依赖的一种具体表现形式，并且能够有效去除棋盘格的方法通常也能有效克服网格依赖现象。常用的去除棋盘格和网格依赖现象的方法有高阶单元法、周长约束法、局部梯度法、网格过滤法等。

1. 高阶单元法

Diaz、Sigmund^[37]等的研究表明，合理选择高阶单元，可有效降低或消除棋盘格。当采用8节点或9节点等参元时结构单元的总应变能要小于采用较低的4节点时结构单元总应变能。因此在最小柔度问题中，4节点单元中容易生成棋盘格，而8

节点或9节点单元中则不易生成棋盘格。该方法的不足是计算量太大，故不是很实用。

2. 周长约束法

Haber^[39]等提出，在优化模型中引入了一个额外的周长约束

$$p = \sum_{k=1}^m l_k (\sqrt{(\rho_i - \rho_j)^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon) \leq \bar{p} \quad (4-1)$$

式中， p 为离散结构的边界周长， m 是单元界面总数， l_k 为相邻单元 i 和 j 间的界面长度， ρ_i 和 ρ_j 为单元 i 和 j 的密度， ε 是一个小的正数，引入的目的是确保周长具有可微性。通过上限 \bar{p} 控制所有邻接单元密度变化总量。周长约束是全局约束，因而这种约束不能防止局部的细条形成，而且参数 \bar{p} 的取值不好确定，并会影响到算法的稳定性。其控制方法可如图4.5解释：

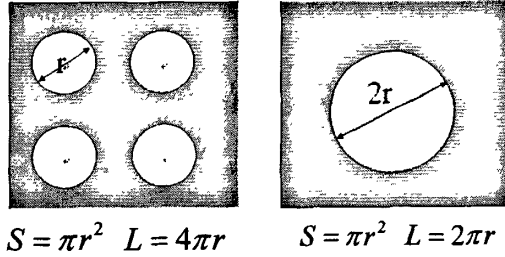


图4.5 周长控制

周长约束的上限值需要依靠经验来确定，因为局部尺寸和周长边界间没有直接的关系。如果周长约束边界定得太紧，则可能导致没有计算结果，如果定的太松又达不到预期的效果。因此约束边界很难确定，这种情况在三维问题下特别明显。

3. 局部梯度约束方法

Petersson^[41]等人采用局部密度斜率约束

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right| \leq c \quad (i=1,2) \quad (4-2)$$

限制邻近单元的密度的变化，式中 x_i 为单元的坐标， c 为一极限参数。局部斜率约束属于局部约束，可防止局部细条的形成，从而降低结构拓扑的几何复杂性，但优化结果难以满足全局最佳，并且，这种方法在优化问题中引入了 $2N$ (二维) 或 $3N$ (三维) 个额外约束，使计算效率大大降低。

4. 网格过滤方法

由Sigmund^[40]提出，用于修改目标函数的敏度信息

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho_k} = (\rho_k)^{-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^N H_i} \sum_{i=1}^N H_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (4-3)$$

式中 $H_i = r_{\min} - \text{dist}(i, k)$, $\{i \in N | \text{dist}(i, k) \leq r_{\min}\}$, r_{\min} 是预先定义的最小单元直径 d_{\min} 的一半, $\text{dist}(i, k)$ 为邻近单元 i 和 k 的距离。当 r_{\min} 趋近于0时, 敏度收敛于原始敏度, 当 r_{\min} 趋近于无限大时, 各敏度相等。通过对目标函数敏度的修改, 去除数值奇异现象。

网格过滤方法只需定义一个局部长度尺寸, 相对较为容易, 在约束尺度下的结构变量都被过滤掉。网格过滤方法的优点是不需要在优化问题中加入额外约束, 且容易实施。缺点是过滤方法为一种基于启发式求解规则的方法。

综上所述, 目前一些消除数值不稳定性现象的策略都有各自的优缺点, 在实际工程应用中, 不同的数值方法对计算收敛性和计算速度影响较大, 选择一种合适的克服数值不稳定性方法非常重要。

4.4 网格过滤法中过滤半径对优化结果的影响

由Sigmund^[40]提出的网格过滤法是目前最常用到的来抑制棋盘格现象的方法。其过滤半径 r_{\min} 的大小反映了过滤区域的大小, 其选择对于优化结果的数值稳定性有着决定性的影响。

以第二章2.3节中的MBB简支梁为例, 用RAMP密度刚度插值模型, 取惩罚因子 $p=10$ 时, 通过取不同的过滤半径 r_{\min} 来观察 r_{\min} 对优化结果的影响。不同的过滤半径 r_{\min} 对应的优化结果如图4.6所示。

从图4.6的拓扑优化结果我们可以看出当 $r_{\min} < 1.1$ 时, 优化结果出现了棋盘格式, 其结果等效于不施加过滤函数; 当 $1.1 \leq r_{\min} \leq 1.8$ 时, 优化结果清晰, 过滤效果明显, 有效的去除了棋盘格现象; 当 $r_{\min} \geq 1.9$ 时, 优化后的拓扑较 $1.1 \leq r_{\min} \leq 1.8$ 出现较大变化, 且结果的灰色单元开始增多, 出现少量的中间密度材料; 而且随着过滤半径 r_{\min} 的不断增大, 结果越来越模糊, 出现大量的中间密度材料, 由上综合考虑优化结果的数值稳定性, 建议过滤半径的取值范围为 $1.1 \leq r_{\min} \leq 1.8$ 。

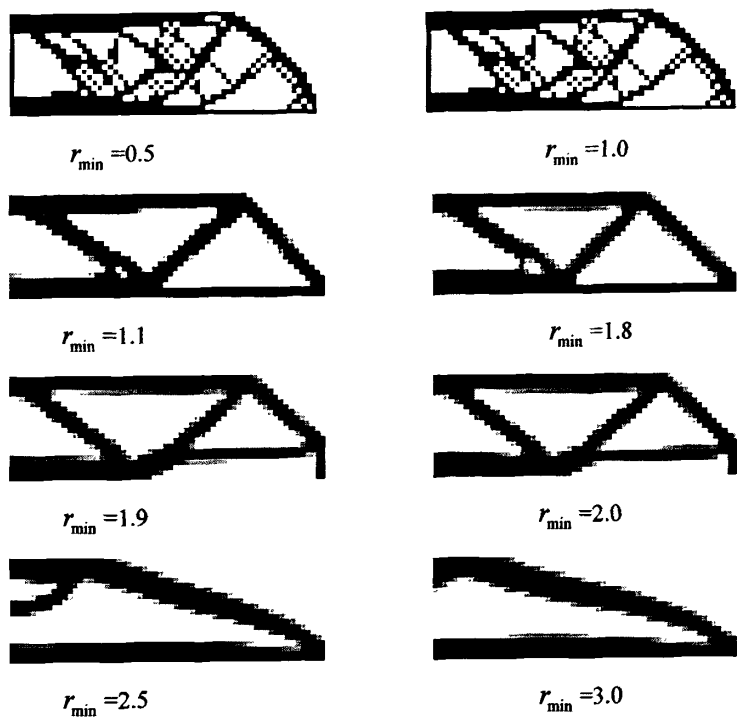


图4.6 不同过滤半径 r_{\min} 下的优化结果

4.5 本章小结

本章主要探讨了连续体结构拓扑优化中的各种数值不稳定现象，阐明了各种数值不稳定现象产生的原因，分析了一些常用的克服数值不稳定现象的数值方法，得出了各种方法的特点及其优缺点并指出了各种方法的适用范围。特别对变密度法中常用到的网格过滤法进行了探讨，基于 RAMP 密度刚度插值模型，分析了不同的过滤半径 r_{\min} 对拓扑优化结果的影响。

第五章 基于变密度法的自重载荷作用下连续体结构拓扑优化

研究

5.1 前言

在以往的拓扑优化设计中,通常忽略结构的自重而仅考虑结构在外在载荷作用下的最优拓扑形式。然而在许多实际结构如天线背架、大坝、桥梁等,其自身的重量对结构的影响往往比外在载荷的影响要大得多,因此在许多大型结构的初始设计阶段,自重作为一个主要的影响因素需要被考虑到结构的设计中。

因此,对于自重载荷对自身影响很大的大型结构,考虑其自重载荷作用下的拓扑优化设计,对提高结构的静态特性具有重要的意义。

考虑自重载荷的连续体拓扑优化主要存在两个困难:低密度区域的附属效应问题和材料的非主动体积约束问题。本章基于以上两个困难,对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化进行了探讨。

5.2 基于变密度法的自重载荷作用下连续体结构拓扑优化数学描述

到目前为止,连续体结构拓扑优化将自重载荷作为主要的影响因素考虑到结构的设计中,研究还只是刚刚开始。Turteltaub 和 Washanaugh^[51]以设计域内各点处的弹性张量为设计变量,对集中载荷和体力作用下,结构的拓扑和材料性能进行了研究,并比较了四棱柱结构在各种载荷情况下的优化结果。Bruyneel 和 Duysinx^[52]针对自重载荷作用下连续体结构拓扑优化中出现的柔顺度随单元密度变化的非单调性行为 and SIMP 方法在材料低密度区域出现的附属效应现象进行了研究,对优化求解过程和材料插值模型进行了改进。Zhu 和 Zhang^[57]等人针对自重载荷作用下 SIMP 方法在材料低密度区域出现的附属效应现象,提出了多项式插值模型,并有效的处理了自重载荷作用下多构件结构内部布局的拓扑优化问题。张晖和刘书田^[53]等人利用 RAMP 材料插值模型,研究了惩罚因子的选择对材料体积约束的影响。Yang^[54]等人分别采用进化算法(ESO)和双向进化算法(BESO)对传递载荷、结构自重和表面载荷进行了研究。

5.2.1 基于变密度法的自重载荷作用下连续体结构拓扑优化模型

变密度法是以区间[0, 1]内的密度值为设计变量, 直接定义一个经验公式来表达密度与弹性模量间假定的函数关系, 一般性的表达形式为:

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (5-1a)$$

$$E_i = P(x_i) E_0 \quad (5-1b)$$

式中 ρ_i 为变化后的单元密度, ρ_0 为初始单元密度, x_i 为相对密度, E_i 为变化后的单元弹性模量, E_0 为初始单元的弹性模量, $P(x_i)$ 为弹性模量的惩罚形式。

一般情况下, 基于变密度法的自重载荷作用下连续体结构拓扑优化模型, 以结构的柔顺度最小为优化目标, 以结构的材料用量也就是体积作为约束来建立的, 其优化模型如下:

$$\begin{aligned} \text{Find: } & \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\ \text{Min: } & C(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^n P(x_i) \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i \\ \text{S.T: } & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ & V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v_i \leq f V_0 = V^* \\ & 0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5-2)$$

式中, x_i 为设计变量, 为材料相对密度; n 为设计域中有限单元个数; $C(\mathbf{x})$ 为目标函数, 为结构的柔顺度; \mathbf{K} 为结构的总体刚度矩阵; \mathbf{k}_0 为初始单元刚度矩阵; \mathbf{U} 为结构的总体位移列向量; \mathbf{u}_i 为单元 i 的位移列向量; V 为结构优化后的体积; V^* 为体积上限; v_i 为结构单元体积; V_0 为初始结构体积; f 为给定材料体分比; x_{\min} 为最小相对密度(为了避免有限元方程在求解过程中出现刚度矩阵的奇异, 在这里 $x_{\min}=0.01$); $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 在为结构载荷向量, 在这里指的是结构自重, 由于数值计算中采用 4 节点双线性四边形单元离散, 因此, i th 单元 j th 节点的载荷为:

$$\begin{aligned} f_{ij,x} &= 0 \\ f_{ij,y} &= \frac{1}{4} G_i = -\frac{1}{4} x_i \rho_0 v_0 g \end{aligned} \quad (5-3)$$

其中: G_i 为 i th 单元的自重; ρ_0 为实体单元的密度; v_0 为实体单元的体积; g 为重力加速度。

5.2.2 敏度分析

1. 目标函数敏度分析

由 $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ 可以导出:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} U + K \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (5-4)$$

那么有位移的灵敏度为：

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = K^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} - K^{-1} \frac{\partial K}{\partial x_i} U \quad (5-5)$$

由 $C = F^T U$ 导出目标函数的灵敏度表达式为：

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (F^T U) = \frac{\partial F^T}{\partial x_i} U + F^T \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (5-6)$$

将式(5-4)，(5-5)代入到(5-6)中，可以得到目标函数的灵敏度为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_i} &= -U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U + 2U^T \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ &= -P(x_i)' u_i^T k_0 u_i + 2u_i^T f_0 \end{aligned} \quad (5-7)$$

式中 f_0 为实体单元的自重载荷列向量，表达式如下：

$$\begin{aligned} f_0 &= (0, -\frac{1}{4}G_0, 0, -\frac{1}{4}G_0, 0, -\frac{1}{4}G_0, 0, -\frac{1}{4}G_0) \\ &= (0, -\frac{1}{4}\rho_0 g v_0, 0, -\frac{1}{4}\rho_0 g v_0, 0, -\frac{1}{4}\rho_0 g v_0, 0, -\frac{1}{4}\rho_0 g v_0) \end{aligned}$$

其中： G_0 为实体单元的自重； ρ_0 为实体单元的质量密度； v_0 为实体单元的体积； g 为重力加速度。

2. 体积的敏度分析

由 $V = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ 可以导出体积对设计变量的敏度为

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = v_i \quad (5-8)$$

5.2.3 优化模型的求解

由上节式(5-7)可以看出，目标函数的敏度由两部分组成，第一部分

$$-U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U = -P(x_i)' u_i^T k_0 u_i < 0 \quad (5-9)$$

总为负, 如果不考虑自重作用的话, 结构的柔顺度呈单调变化, 因此可以用优化准则法(OC)来进行求解。

但是考虑到自重载荷作用, 则第二部分

$$2U^T \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2u_i^T f_0 > 0 \quad (5-10)$$

总为正, 那么目标函数的敏度(5-7)既能为正也能为负, 在这种情况下, 结构的柔顺度呈非单调变化, 因此不能用优化准则法(OC)来进行求解, 考虑到 MMA 算法的非单调近似属性, 在这里对优化模型(5-2)用 MMA 算法来进行求解。

那么基于变密度法, 式(5-2)构造为 MMA 算法的优化模型为:

$$\begin{aligned} \text{Find: } & x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\ & y \in R \\ & z \in R \\ \text{Min: } & \sum_{i=1}^n P(x_i) u_i^T k_0 u_i + z + 1000y \\ \text{S.T: } & V(x) - fV_0 - y \leq 0 \\ & 0 < x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{aligned} \quad (5-11)$$

对比 MMA 算法的标准形式, 对应的变量分别为: $f_0 = \sum_{i=1}^n P(x_i) u_i^T k_0 u_i$,

$f_1 = V(x) - fV_0$, $a_0 = 1$, $c_1 = 1000$, $d_1 = 0$ 。

那么由 5.2.2 中的敏度分析, 可得出对应 MMA 算法的优化模型中目标函数、约束函数的敏度分别为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} &= -P(x_i)' u_i^T k_0 u_i + 2u_i^T f_0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i} &= v_i \end{aligned}$$

5.2.4 基于敏度过滤技术消除棋盘格的解决策略

Sigmund^[40]的过滤法对消除棋盘格简单有效, 并保证一定的网格无关性。敏度过滤方法独立于优化算法, 且简单易用已成为控制棋盘格的最常用方法之一, 它只需定义一个局部长度尺寸, 相对较为容易, 在约束尺度下的结构变量都被过滤

掉。过滤方法不需要在优化问题中加入额外约束，且容易实施。鉴于此，本文应用此方法来克服棋盘格数值不稳定现象。

根据过滤技术，修改目标函数的灵敏度信息。对任意单元 k ，设其灵敏度过滤半径为 r_{\min} ，以单元 k 的质心为圆心，半径为 r_{\min} 的圆作为单元 k 的灵敏度过滤区域，则所有中心位于该区域内的单元 i 均参与单元 k 的灵敏度过滤。修订灵敏度为

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} = (x_k)^{-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^N H_i} \sum_{i=1}^N H_i x_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (5-12)$$

式中灵敏度卷积因子 $H_i = r_{\min} - \text{dist}(i, k)$, $\{i \in N | \text{dist}(i, k) \leq r_{\min}\}$ ， r_{\min} 是预先定义的最小单元直径 d_{\min} 的一半， $\text{dist}(i, k)$ 为邻近单元 i 和 k 的距离。当 r_{\min} 趋近于0时，灵敏度收敛于原始灵敏度，当 r_{\min} 趋近于无限大时，各灵敏度相等。 $r_{\min}=1.5$ ，则表示过滤半径的最小尺寸为单元尺寸的1.5倍。过滤半径的取值应随着单元网格密度的增多适当有所增加。这样通过对目标函数灵敏度的修改，去除数值奇异现象。

由于优化算法中加入了过滤法消除数值不稳定现象，因而整个拓扑优化过程将包括四个步骤：(1)有限元数值求解；(2)目标函数及其关于设计变量的灵敏度计算；(3)用材料插值方法和MMA法进行设计变量的更新迭代；(4)过滤法消除数值不稳定现象。

5.3 附属效应现象及其处理策略

在考虑自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化过程中，如果式(5-1)不能合理的近似低密度区域材料的属性，在低密度区域单元的自重和刚度之间的差异 (Pederson^[56]引入比值 $x_i / P(x_i)$ 来表征该差异)太大时，结构自身不能够支撑自重而导致结构大变形，会在最终拓扑形状中出现灰色单元的现象，这种现象称之为附属效应现象。

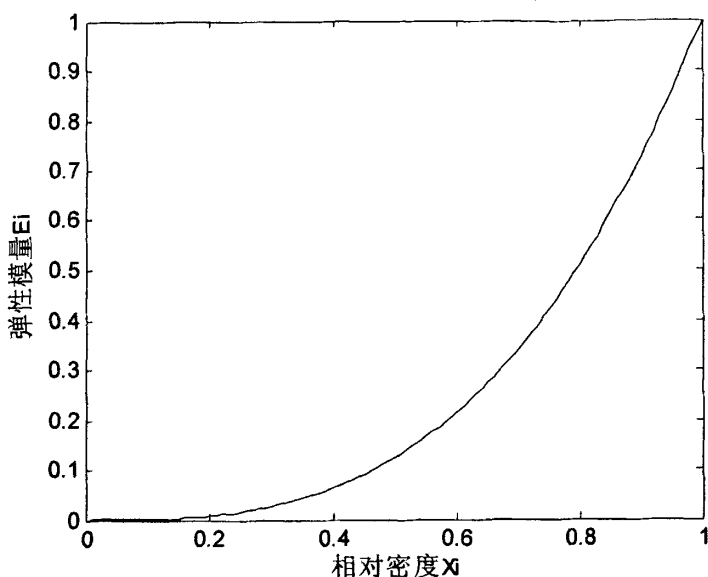
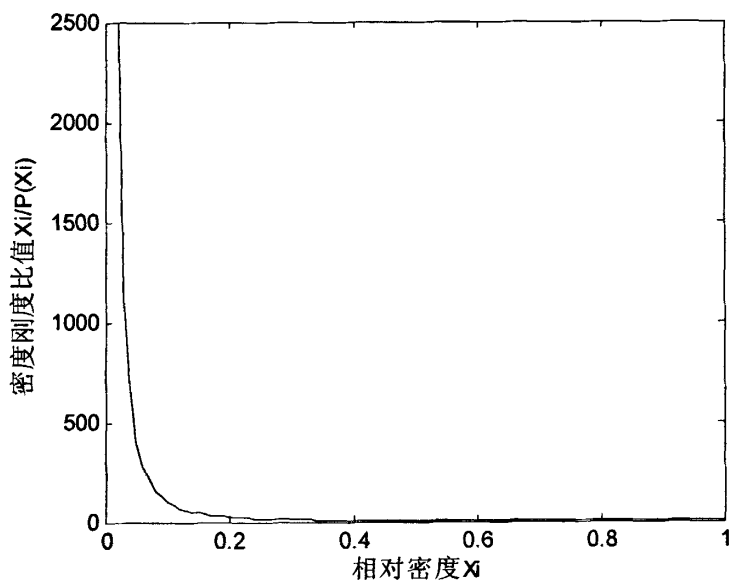
一般的拓扑优化可以用经典的 SIMP 材料插值模型(对弹性模量惩罚如图 5.1 所示)来对材料进行近似，但是在用 SIMP 材料插值模型进行自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化时，由于 SIMP 材料插值模型其对密度和弹性模量的惩罚形式分别为

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (5-13a)$$

$$E_i = P(x_i) E_0 = x_i^p E_0 \quad (5-13b)$$

$x_i / P(x_i)$ 的比值为：

$$x_i / P(x_i) = \frac{1}{x_i^{p-1}} \quad (5-13c)$$

图 5.1 SIMP 法对弹性模量惩罚图 ($p=3$)图 5.2 SIMP 法密度与刚度惩罚函数的比值 ($p=3$)

在低密度区域也就是相对密度趋于 0 时, 如图 5.2 所示, 比值 $\rho_i / P(\rho_i)$ 趋于无穷大, 自重和刚度之间的差异太大, 从而结构自身不能够支撑自重而导致结构大变形, 最终得到的拓扑形状如图 5.3 所示, 可以明显的看到最终结果中有灰色单元组成的长条区域, 产生了附属效应。

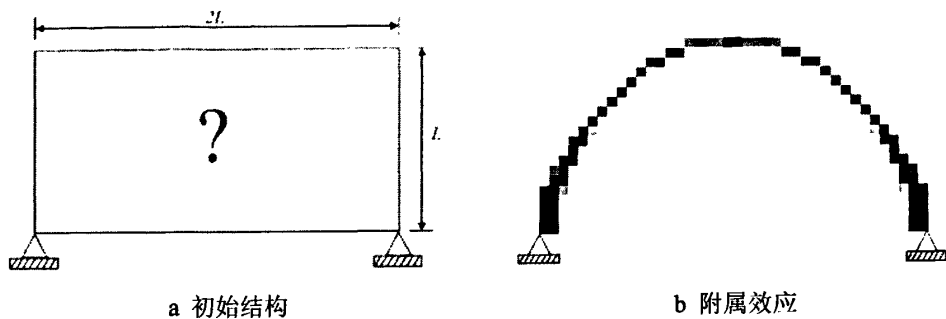


图 5.3 附属效应

为了避免采用 SIMP 法进行自重载荷作用下连续体结构拓扑优化时附属效应的产生, Pedersen^[56]、Bruyneel 和 Duysinx^[52]等人通过改进低密度区域的弹性模量惩罚形式来抑制 $x_i / P(x_i)$ 的比值, 从而达到避免附属效应的目的。改进后的 SIMP 材料插值模型如下:

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (5-14a)$$

$$E_i = P(x_i) E_0 = \begin{cases} (x_i/a) E_0 ; x_i \leq a^{\frac{1}{1-p}} \\ x_i^p E_0 ; x_i > a^{\frac{1}{1-p}} \end{cases} \quad (5-14b)$$

$x_i / P(x_i)$ 的比值为:

$$x_i / P(x_i) = \begin{cases} a ; x_i \leq a^{\frac{1}{1-p}} \\ \frac{1}{x_i^{p-1}} ; x_i > a^{\frac{1}{1-p}} \end{cases} \frac{1}{x_i^{p-1}} \quad (5-14c)$$

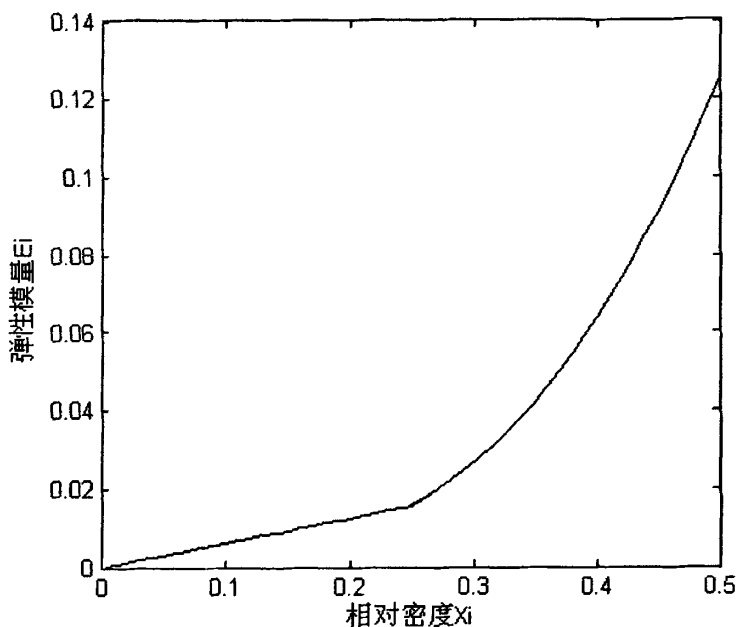


图 5.4 改进的 SIMP 法对弹性模量惩罚 ($p=3, a=16$)

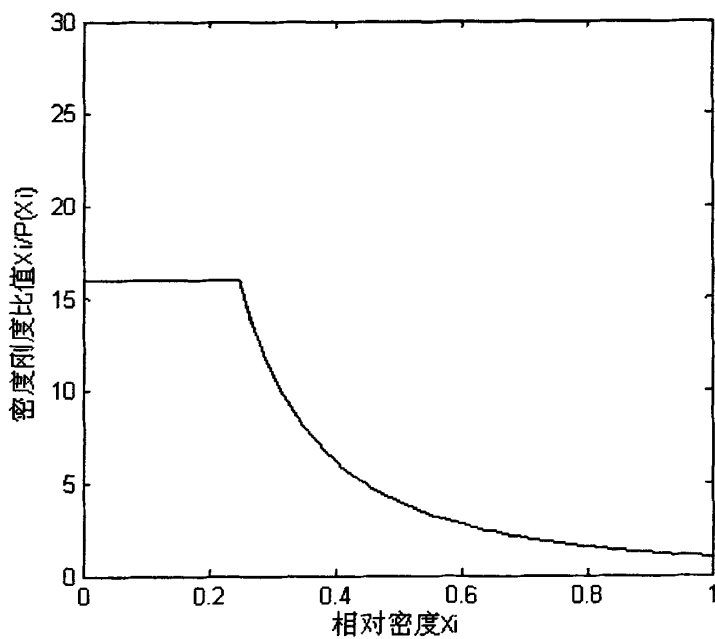


图 5.5 改进的 SIMP 法密度与刚度惩罚函数的比值 ($p=3, a=16$)

对应的惩罚函数图以及 $x_i/P(x_i)$ 比值变化图如图 5.4、图 5.5 所示，可以看出

通过给定一个 a 值， $x_i/P(x_i)$ 比值在 $x_i \leq a^{\frac{1}{1-p}}$ 的低密度区域保持不变，从而达到避

免附属效应的目的。改进的 SIMP 材料插值模型处理自重载荷下的连续体结构拓扑优化问题的有效性已经得到了 Bruyneel 和 Duysinx^[52]等人验证。

然而从图 5.4 可以看出, 当相对密度值取 $x_i = a^{\frac{1}{1-p}}$ 时, 惩罚函数对设计变量的敏感度是不连续的, 这必将对优化求解过程产生不稳定的影响。基于此点出发, Zhu 和 Zhang^[57]等人提出了一个新的多项式插值模型:

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (5-15a)$$

$$E_i = P(x_i)E_0 = \left(\frac{a-1}{a}x_i^p + \frac{x_i}{a}\right)E_0 \quad (5-15b)$$

$x_i / P(x_i)$ 的比值为:

$$x_i / P(x_i) = \frac{a}{(a-1)x_i^{p-1} + 1} \quad (5-15c)$$

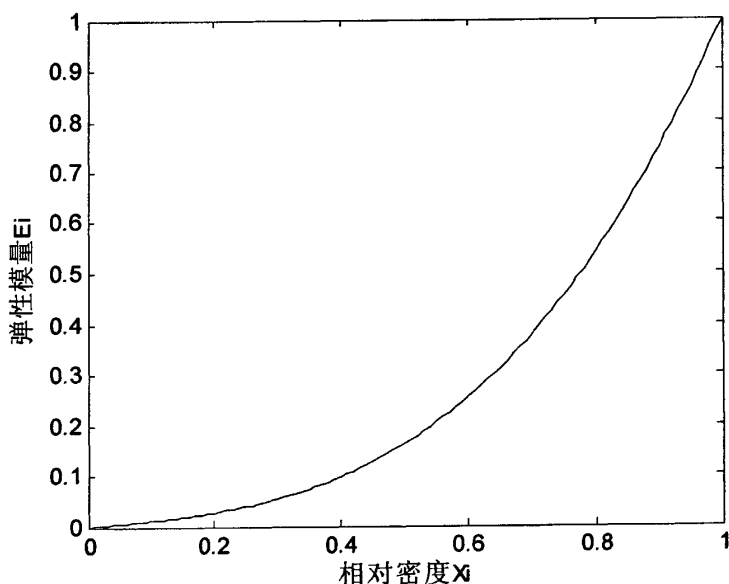


图 5.6 多项式插值模型对弹性模量惩罚 ($p=3, a=10$)

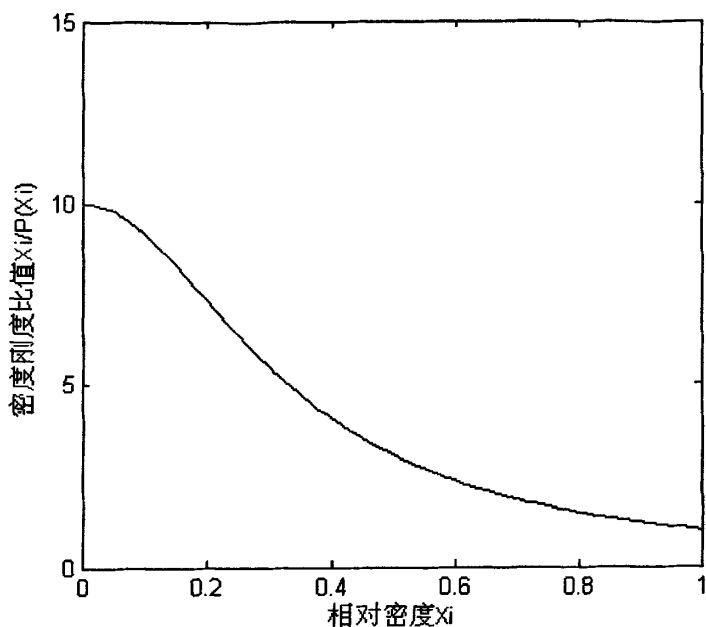


图 5.7 多项式插值模型密度与刚度惩罚函数比值 ($p=3$, $a=10$)

对应的惩罚函数图以及 $x_i / P(x_i)$ 比值变化图如图 5.6、图 5.7 所示，可以看出通过给定一个 a 值， $x_i / P(x_i)$ 比值可以有效的限制在 a 值之内，从而达到避免附属效应的目的。Zhu 和 Zhang^[57]等人用多项式插值模型有效的处理了自重载荷作用下多构件结构内部布局的拓扑优化问题。

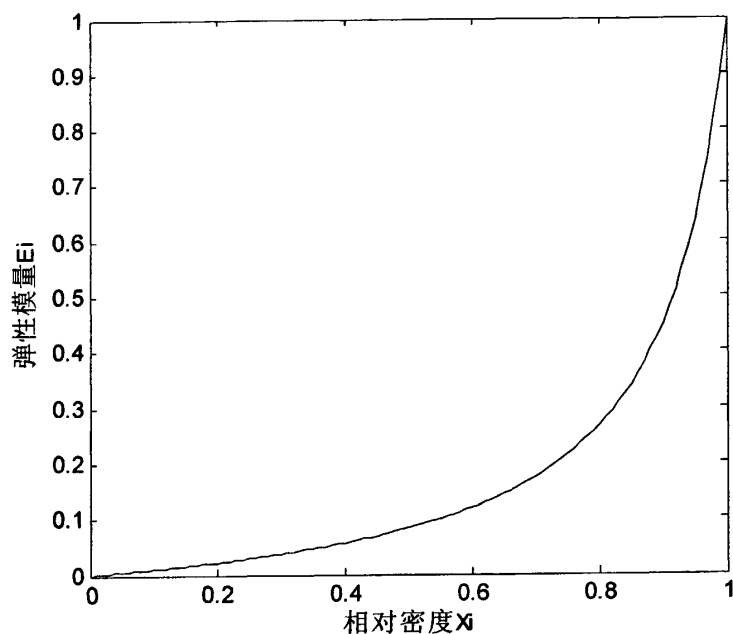
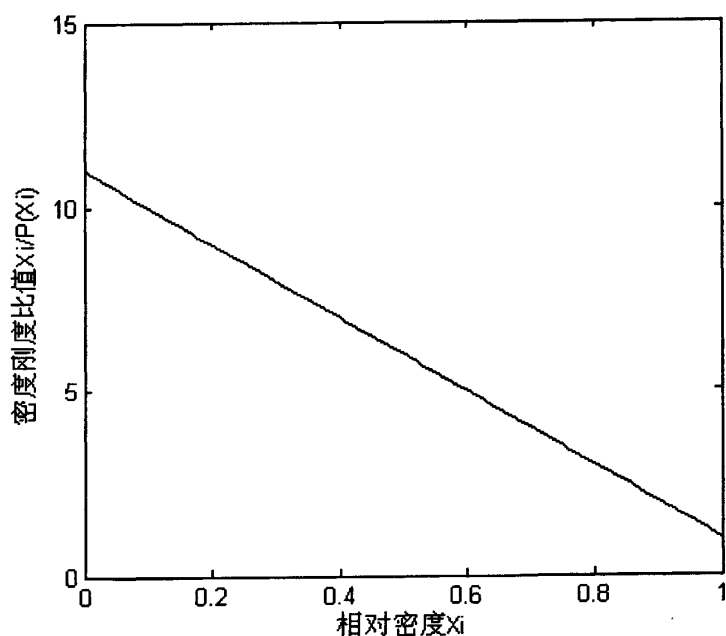
张晖和刘书田^[53]等人研究了自重载荷下的拓扑优化中 RAMP 材料插值模型惩罚因子选择对最优拓扑以及材料体积约束的影响。RAMP 材料插值模型为：

$$\rho_i = x_i \rho_0 \quad (5-16a)$$

$$E_i = P(x_i) E_0 = \frac{x_i}{1 + p(1 - x_i)} E_0 \quad (5-16b)$$

$x_i / P(x_i)$ 的比值为：

$$x_i / P(x_i) = 1 + p(1 - x_i) \quad (5-16c)$$

图 5.8 RAMP 法对弹性模量惩罚($p=10$)图 5.9 RAMP 法密度与刚度惩罚函数比值($p=10$)

对应的惩罚函数图以及 $x_i / P(x_i)$ 比值变化图如图 5.8、图 5.9 所示, 与 SIMP 材料插值模型相比, RAMP 材料插值模型 $x_i / P(x_i)$ 的值由惩罚因子 p 值决定, 即使在惩罚因子 p 取值较大时仍能够有效的控制 $x_i / P(x_i)$ 的值, 从而能有效的避免附属效应的

产生。

通过以上分析,可以得出如下结论:

首先,在用变密度法进行自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化时, SIMP 材料插值模型因为在低密度区域不能合理的近似低密度区域材料的属性,会导致附属效应的产生。改进后的 SIMP 材料插值模型虽然能有效的避免附属效应,但因其惩罚形式在相对密度值取 $x_i = a^{\frac{1}{1-p}}$ 时,惩罚函数对设计变量的敏度不连续,这必将对优化求解过程产生不稳定的影响。因此在用变密度法进行自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化时, SIMP 材料插值模型不是最佳选择。

其次,与 SIMP 材料插值模型相比,多项式材料插值模型和 RAMP 材料插值模型因其自身的特点,不用对模型进行改进就能有效的控制 $x_i / P(x_i)$ 的值(多项式材料插值模型通过给定 a 值、RAMP 材料插值模型通过给定 p 值来控制 $x_i / P(x_i)$ 的值),从而抑制附属效应现象的产生。因此在用变密度法进行自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化时,多项式材料插值模型和 RAMP 材料插值模型优于 SIMP 材料插值模型。

5.4 算例及非主动的体积约束随惩罚因子变化的原因分析

非主动的体积约束,是自重载荷作用下连续体结构拓扑优化所特有的一种现象,指的是体积约束在给定初始体分比后,最终得到的实际体分比可能不是初始体分比,从而体积约束为无效约束的现象。这一特点在 Turteltaub 和 Washabaugh^[51]以及 Bruyneel 和 Duysinx^[52]的工作中都有提及。国内张晖和刘书田^[53]等人基于 RAMP 材料插值模型,研究了惩罚因子的选择对材料体积约束的影响,发现随着惩罚因子的增大,优化后的实际体分比逐渐趋近给定体分比。但实际体分比随惩罚因子变化的原因,张晖和刘书田等人并没有对该现象从理论上予以说明。

由上节的讨论可知,从避免附属效应的角度出发,多项式插值模型和 RAMP 插值模型优于 SIMP 插值模型。因此本节针对非主动的体积约束现象,分别用多项式插值模型和 RAMP 密度刚度插值模型,结合 Bruyneel 和 Duysinx^[52]的工作中的 MBB 梁算例,利用优化理论中的库恩-塔克条件,从理论上对实际体分比随惩罚因子变化的原因进行探讨。

本节拓扑优化算例在 Matlab 软件中编程实现,每个算例由有限元分析、敏度分析、MMA 优化算法求解、循环迭代判断、结果后处理等几部分组成。其中循环迭代判断部分取两次邻近设计变量的最大分量的绝对差值

$$\left| \frac{\max(x^{k+1}) - \max(x^k)}{\max(x^k)} \right| < \varepsilon$$

作为评判标准，在这里 $\varepsilon = 0.01$ 。

算例：

如图 5.10 所示 MBB 梁结构，只做定性计算，不考虑量纲，将结构离散成为 80×20 个 4 结点双线性正四边形单元，弹性模量和泊松比分别为 $E = 10^8$ ， $\nu = 0.3$ ，密度为 $\rho = 1$ ，重力加速度 $g = 10$ 。

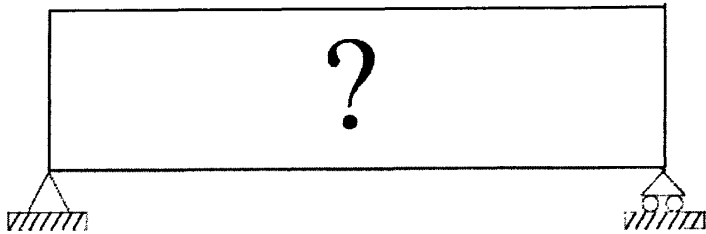


图 5.10 MBB 梁结构

1. 多项式插值模型下($a=10$):

给定体分比为 0.5 时，不同惩罚因子时的优化结果：



图 5.11 多项式插值模型下材料体分比为 0.5，不同惩罚因子时的拓扑

表 5.1 多项式插值模型下材料体分比为 0.5，不同惩罚因子时优化结果

| 惩罚因子 | 初始体分比 | 最终体分比 | 最终柔顺度 | 迭代步数 |
|------|-------|-------|----------|------|
| 2 | 0.5 | 0.032 | 25.0943 | 72 |
| 3 | 0.5 | 0.252 | 53.1700 | 488 |
| 4 | 0.5 | 0.393 | 88.5515 | 166 |
| 5 | 0.5 | 0.5 | 125.1735 | 682 |

2. RAMP 插值模型下：

(1) 给定体分比为 0.5 时，不同惩罚因子时的优化结果：



图 5.12 RAMP 插值模型下材料体分比为 0.5，不同惩罚因子时的拓扑

表 5.2 RAMP 插值模型下材料体分比为 0.5，不同惩罚因子时优化结果

| 惩罚因子 | 初始体分比 | 最终体分比 | 最终柔顺度 | 迭代步数 |
|------|-------|-------|----------|------|
| 3 | 0.5 | 0.018 | 12.29 | 52 |
| 5 | 0.5 | 0.5 | 126.3592 | 135 |
| 10 | 0.5 | 0.5 | 134.9303 | 122 |
| 15 | 0.5 | 0.5 | 138.4256 | 121 |

(2) 给定体分比为 0.8 时，不同惩罚因子时的优化结果

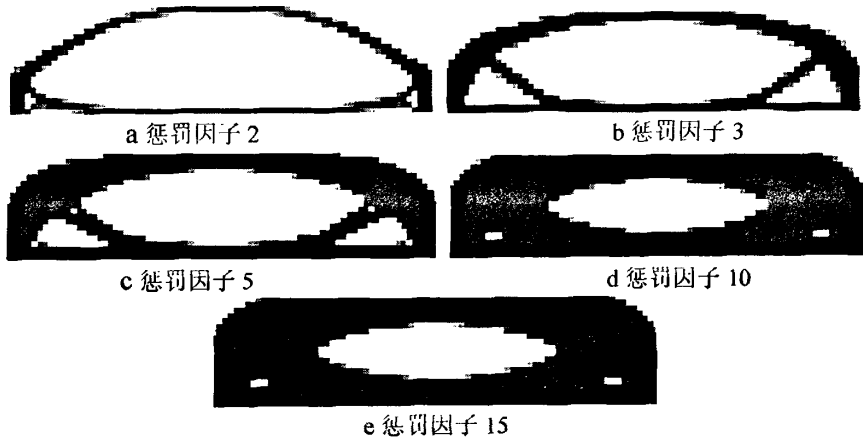


图 5.13 材料体分比为 0.8，不同惩罚因子时的拓扑

表 5.3 材料体分比为 0.8，不同惩罚因子时优化结果

| 惩罚因子 | 初始体分比 | 最终体分比 | 最终柔顺度 | 迭代步数 |
|------|-------|-------|--------|------|
| 2 | 0.8 | 0.199 | 39.01 | 122 |
| 3 | 0.8 | 0.386 | 85.47 | 243 |
| 5 | 0.8 | 0.582 | 154.18 | 102 |
| 10 | 0.8 | 0.796 | 261.43 | 87 |
| 15 | 0.8 | 0.8 | 265.80 | 39 |

分析与讨论：

通过对算例结果的分析，不难得出如下结论：

(1)无论是从得到的最终拓扑还是优化结果，多项式插值模型与 RAMP 插值模型二者得到了统一。

(2)无论是多项式插值模型还是 RAMP 插值模型，当惩罚因子取值较小的时候，得到的最终拓扑的中间单元较多（图 5.11a、图 5.12a、图 5.13a）甚至最终拓扑不能形成结构(图 5.12a)。这是因为惩罚因子过小，对单元的惩罚力度不够，从而 0/1 化程度不高而造成的。

(3)分析表 5.1 和表 5.3，可以发现，结构在受自重载荷作用下时，当给定体分比约束后，得到的最终体分比有可能不是初始给定体分比，体积约束在这里为非主动的约束。从表 5.1 和 5.3 可以看出，随着惩罚因子的增加，结果的实际体分比趋近给定体分比，当惩罚因子增大到一定值时，体积约束为有效约束。这一点很好的符合了文献[53]的结论。

在这里，针对上面结论的第(3)点，基于优化理论中的库恩-塔克条件，对实际体分比随惩罚因子的增加而趋于给定体分比的现象进行理论上的探讨：

考虑只含有不等式约束的非线性规划：

$$\begin{aligned}
 &\text{Find: } x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\
 &\text{Min: } f(x) \\
 &\text{S.T: } h_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}
 \tag{5-17}$$

其取得极值点的库恩-塔克条件为：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, (i=1,2,\dots,n) \\ \lambda_j h_j = 0, (j=1,2,\dots,m) \\ h_j \leq 0, \lambda_j \geq 0, (j=1,2,\dots,m) \end{cases} \quad (5-18)$$

在式(5-18)中, 如果对于最优点 x^* , 某一约束 $h_j(x)$ 满足

$$h_j(x^*) < 0 \quad (5-19)$$

则由条件式(5-18)可知, 相应的拉格朗日乘子 λ_j 应该为零, 因而在式(5-18)的第一个条件中, 该约束相应的梯度 $\frac{\partial h_j}{\partial x_i}$ 不起作用, 反之, 只有在最优点 x^* 处满足

$$h_j(x) = 0 \quad (5-20)$$

的约束时, 相应的拉格朗日乘子 λ_j 才可能不为零, 相应的梯度也才在式(5-18)的第一个条件中起作用。通常, 把最优点满足式(5-19)称为非主动约束, 而满足式(5-20)的约束称为主动约束。

对一般情况下仅考虑外载荷的拓扑优化模型:

$$\begin{aligned} \text{Find: } x &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\ \text{Min: } C(x) &= F^T U = U^T K U \\ \text{S.T: } K U &= F \end{aligned} \quad (5-21)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{i=1}^n x_i v_i \leq f V_0 = V^* \\ 0 < x_{\min} &\leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

由库恩-塔克条件, 有

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_{i=1}^n x_i v_i - f V_0) = 0 \quad (5-22)$$

即

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U + \lambda v_i = 0 \quad (5-23)$$

易知

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U \neq 0 \quad (5-24)$$

那么 $\lambda \neq 0$ ，所以体积约束为主动约束。

对考虑自重载荷作用下的拓扑优化模型：

$$\begin{aligned} \text{Find: } & \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n \\ \text{Min: } & C(\mathbf{x}) = F^T U = U^T K U \\ \text{S.T: } & K U = F(\mathbf{x}) \\ & V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i v_i \leq f V_0 = V^* \\ & 0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5-25)$$

由库恩-塔克条件，有

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i - f V_0 \right) = 0 \quad (5-26)$$

即

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U + 2U^T \frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda v_i = 0 \quad (5-27)$$

由算例可知，体积约束为非主动约束，则 $\lambda = 0$ ，那么要使(5-27)成立，则要求

$$-U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U + 2U^T \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (5-28)$$

对多项式插值模型(在这里 $a=10$)，式(5-28)变为：

$$\sum_{i=1}^n \frac{9 p x_i^{p-1} + x_i}{10} u_i^T k_0 u_i = \sum_{i=1}^n 2 u_i^T f_0 = 2 U^T F_0 \quad (5-29a)$$

对 RAMP 密度刚度插值模型，式(5-28)变为：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1+p}{[1+p(1-x_i)]^2} u_i^T k_0 u_i = \sum_{i=1}^n 2 u_i^T f_0 = 2 U^T F_0 \quad (5-29b)$$

单元的应变能为 ε_i ，而

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} u_i^T k_0 u_i \quad (5-30)$$

同时由虚功原理，有

$$U^T F_0 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (5-31)$$

将式(5-30), 式(5-31)分别代入式(5-29a)、式(5-29b), 那么多项式插值模型下和RAMP插值模型下分别有:

$$\sum_{i=1}^n \frac{9px_i^{p-1} + x_i}{10} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (5-32a)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1+p}{[1+p(1-x_i)]^2} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (5-32b)$$

易知, (5-32)能否成立与 p 及 x_i 的取值有关。进一步, 以一个单元为例对式(5-32)作定性讨论, 若只有一个单元, 则式(5-32a)、式(5-32b)变为:

$$\frac{9px^{p-1} + x}{10} \varepsilon = \varepsilon \quad (5-33a)$$

$$\frac{1+p}{[1+p(1-x)]^2} \varepsilon = \varepsilon \quad (5-33b)$$

即多项式插值模型下 $\frac{9px^{p-1} + x}{10} = 1$, RAMP 插值模型下 $\frac{1+p}{[1+p(1-x)]^2} = 1$ 时, 式(5-27)

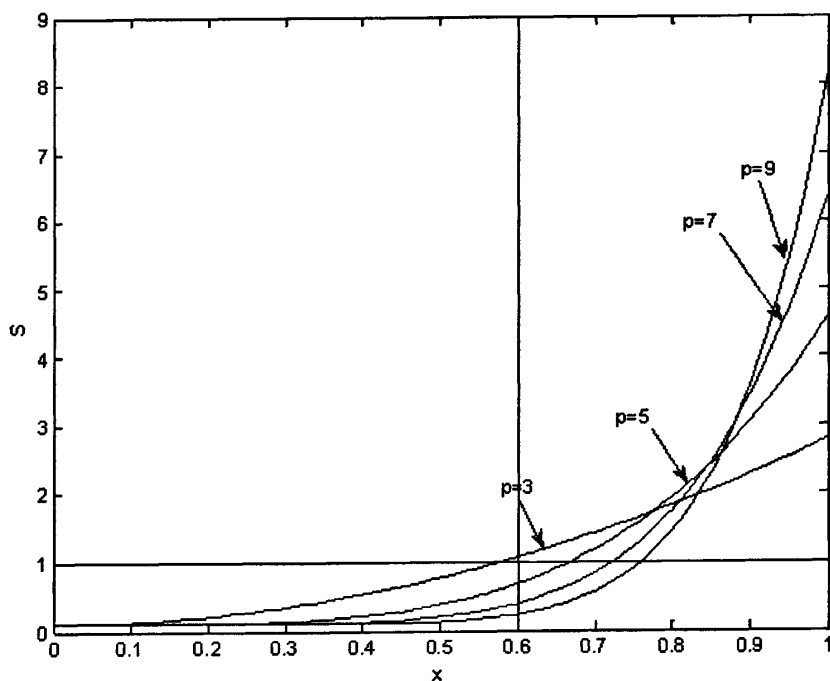
成立, 目标函数取到极值。

令

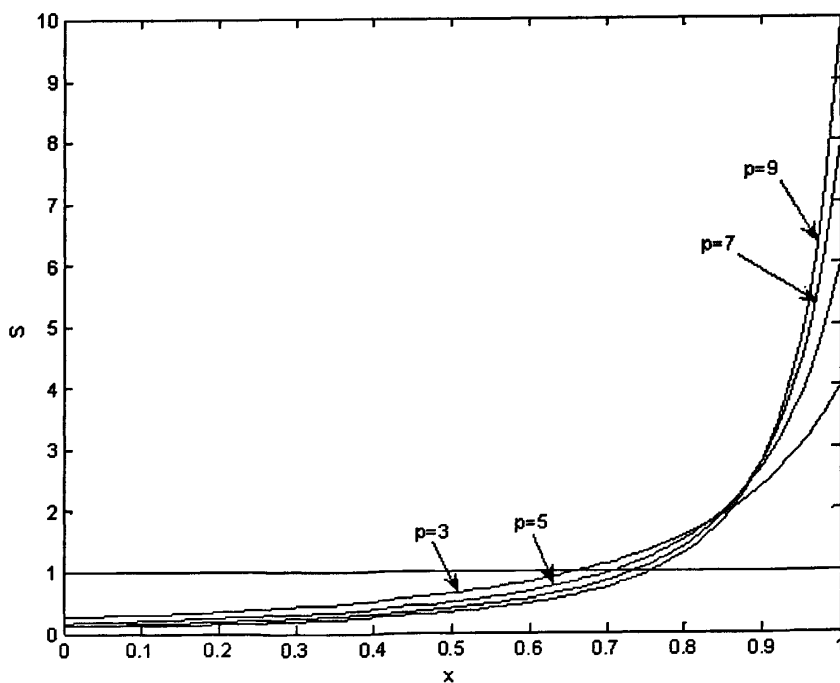
$$S = \frac{9px^{p-1} + x}{10} \quad (5-34a)$$

$$S = \frac{1+p}{[1+p(1-x)]^2} \quad (5-34b)$$

因为约束为 $V(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i \leq fV_0$, 当只取一个单元时, $V(x) = xv \leq fV_0$, 那么(5-34)中相对密度 x 同时也是单元的体分比。多项式插值模型下, 当惩罚因子分别取 3、5、7、9 时, S 关于 p 的函数图形如图 5.14 所示:

图 5.14 多项式插值模型下 S 关于 p 的函数图

RAMP 插值模型下, 当惩罚因子分别取 3、5、7、9 时, S 关于 p 的函数图形如图 5.15 所示:

图 5.15 RAMP 密度刚度插值模型下 S 关于 p 的函数图

以多项式插值模型为例, 来对图 5.14、图 5.15 进行说明:

如图 5.14, 由以上推导可知, 当 $S=1$ 时, 目标函数取到极值, 任意给定一个初始体分比 $x=a(0 < a \leq 1)$ 的直线(为定性说明问题, 图中取 $a=0.6$), 该直线左边部分为可行域, 那么从图上可以看出, 随着惩罚因子 p 的增大, 目标函数的极值逐渐向不可行域移动, 这就意味着随着惩罚因子的增大, 体积约束逐渐趋近有效约束。而从算例中可以看出, 多项式插值模型下体分比取 0.5 时, 随着惩罚因子的增大, 实际体分比逐渐趋近给定体分比, 当惩罚因子增大到 5 时, 体积约束为有效约束。算例中的结果和理论上的分析得到了统一, 从而从理论上说明了自重载荷作用下随着惩罚因子的增大, 非主动的体积约束逐渐变为有效约束的原因。

同理, 在 RAMP 插值模型下, 结合算例结果和图 5.15, 不难得出与上面相同的结论。

但是对比多项式插值模型与 RAMP 插值模型, 无论是从算例结果上还是从 S 关于 p 的函数图上都可以看出, 随着惩罚因子的增大, 多项式插值模型达到有效约束的速度要快于 RAMP 插值模型。

5.5 本章小结

本章基于自重载荷作用下的附属效应和非主动体积约束两个困难, 对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化进行了探讨。

首先, 对不能合理描述低密度区域材料属性的插值模型, 进行自重载荷作用下拓扑优化时出现的附属效应现象, 阐明了该现象出现的原因, 并探讨了避免该现象的策略, 结果表明, 与 SIMP 材料插值模型相比, 在用变密度法进行自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化时, 多项式材料插值模型和 RAMP 材料插值模型优于 SIMP 材料插值模型。

其次, 针对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化中, 非主动体积约束问题中实际体分比随惩罚因子变化的现象, 基于多项式插值模型和 RAMP 插值模型, 利用优化理论的库恩-塔克条件, 对实际体分比随惩罚因子变化的原因进行了分析和探讨, 从理论上解释了该现象产生的原因, 并对比了两种插值模型下非主动约束达到有效约束的快慢, 结果表明, 随着惩罚因子的增大, 多项式插值模型下体积约束更容易达到有效约束。

第六章 总结与展望

6.1 总结

拓扑优化设计是一门新兴的研究领域,也是结构优化领域的难点。然而拓扑优化的应用前景非常可观,其理论和应用的研究必将对传统的优化设计产生深远的影响,可以预见:在不远的将来,拓扑优化将可能会成为产品设计的必要步骤和标准环节,将会对提高产品设计质量,缩短产品开发周期起到非常关键的作用。本文在紧密跟踪国内外研究现状,收集国内外研究资料基础之上,主要从以下几个方面对连续体结构拓扑优化进行了研究:

1. 对拓扑优化中的变密度法材料插值理论进行了研究,基于 RAMP 插值模型,通过数值算例讨论了惩罚因子对优化结果的影响,确定了惩罚因子的取值范围。

2. 对基于变密度法拓扑优化中常用的两种数值算法(优化准则法(OC)和移动渐近线法(MMA))的基本理论进行了研究,分析了各自的适用范围,并基于 RAMP 插值模型,通过数值算例对二者优化结果及计算效率进行了对比。

3. 探讨了拓扑优化中的数值计算不稳定性现象产生机理以及现有的消除数值计算不稳定性现象的方法,并对各种方法的优缺点进行了分析和对比。重点探讨了网格过滤法,基于 RAMP 插值模型,通过数值算例讨论了网格过滤半径对于优化结果的影响,确定网格过滤半径的合理取值范围。

4. 针对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化两个主要困难:低密度区域的附属效应问题和材料的非主动体积约束问题,对自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化进行了探讨。主要包括:

首先,对不能合理描述低密度区域材料属性的插值模型,进行自重载荷作用下的拓扑优化出现的附属效应现象,阐明了该现象出现的原因,并探讨了避免该现象的策略,结果表明,与 SIMP 材料插值模型相比,在用变密度法进行自重载荷作用下的连续体结构拓扑优化时,多项式材料插值模型和 RAMP 材料插值模型优于 SIMP 材料插值模型。

其次,针对自重载荷作用下非主动体积约束问题中实际体分比随惩罚因子变化的现象,利用优化理论的库恩-塔克条件,对实际体分比随惩罚因子变化的原因进行了分析和探讨,从理论上解释了该现象产生的原因,并对比了两种插值模型下非主动约束达到有效约束的快慢,结果表明,随着惩罚因子的增大,多项式插值模型下体积约束更容易达到有效约束。

6.2 展望

连续体结构的拓扑优化，目前是结构优化领域的热点和难点。国内外对于连续体结构拓扑优化研究时间都还不很长，虽然也取得了一定的成就，但是距离实际应用还有很长一段路要走。本文分别就连续体结构拓扑优化的材料插值方法、数学求解算法及解决拓扑优化中数值计算不稳定性的方法等三方面进行了研究，另外，对自重载荷作用下连续体结构拓扑优化中出现的附属效应现象以及非主动的体积约束现象进行了探讨。作者认为有以下几个方面还需要深入的研究：

1. 本文只研究了二维问题，有限元的离散单元也只是简单的四边形单元，但是实际工程中的结构设计要远比这复杂的多。下一步应该将二维问题拓展到三维问题，进行相应拓扑优化理论和优化算法的深入研究，对于离散单元需要进一步的扩展到如四面体，六面体，等参单元等。

2. 本文只考虑简单的自重载荷作用下结构的拓扑优化问题，而工程实际中，结构的工作环境异常复杂，除了自重载荷和一般的外载荷作用外，还有着强烈的热、电、磁场的作用。未来的研究应该将外部载荷进一步的扩展，充分考虑固、热、电、磁等多场耦合的作用，建立合理的拓扑优化数学模型，进行多场耦合拓扑优化理论和算法的研究，使得优化结果更加接近工程实际要求。

3. 本文只考虑了体积约束和自重载荷作用下的拓扑优化，对于实际问题还需要考虑扩展到：精度约束、动态载荷作用下的拓扑优化设计。

4. 将非线性因素考虑到拓扑优化中，研究非线性问题的拓扑优化理论和设计方法。

5. 将拓扑优化与尺寸优化、形状优化相集成，实现其与常用系统之间的无缝连接，构建一个集合设计、优化、分析、后续处理的集成系统，缩小理论研究与制造之间的距离。

致谢

论文是在导师段宝岩教授的悉心指导下完成的。段宝岩教授为人通达，睿智博学，治学严谨。恩师那高尚的人格、渊博的知识、求实的工作作风、乐观的生活态度、不倦的敬业精神给我留下了深刻的印象，并深深地感染了我，恩师对我的影响将使我受益终生。三年来，恩师言传身教，不仅教导我如何治学，更教会了我如何做人。恩师学富五车、素养深厚，国际化的视野，前沿而精髓的学术造诣，是一位能以人格魅力指引学生一生的导师。对恩师的感激之情，一言难以言表。

特别感谢曹鸿钧副教授，感谢曹老师在研究生期间，在学习上给予我的无私而耐心的指导和帮助。曹老师严谨求实的治学态度、诲人不倦、高度负责的敬业精神让我敬佩不已。

硕士生期间，能和沈国强、姜世波、乔晖、何瑜、卢娴、张逸群、刁玖胜、李娜成为同一届学友，能结识焦保存、李尚军、韩培宇、胡森强、王俊磊、邵瑜、黄宇、帅飞、谢鑫刚、强力、莫春晓、周育宝等同学，是我一生的幸运，和他们相处的三年中我深深地感受到了友情的珍贵，衷心感谢他们无论生活还是学习上给予我的诸多关怀和无私帮助。

衷心感谢博士生师兄马洪波、王伟、王丛思、冷国俊、尤国强、赵飞、师姐李素兰在学习上的帮助和指导。

谢谢师弟吴顶峰、杜利贺、罗先义，同他们在学习过程中的上的探讨使我受益匪浅。

衷心感谢西北工业大学朱继宏副教授、高彤博士和章胜冬同学的指导和帮助！

感谢 Krister Svanberg 教授提供的 MMA 算法程序包！

叩谢我的父母，感谢您们多年的辛苦操劳对我的学业默默的支持，是您们的言传身教给了我积极向上的人生态度和不断求学上进的动力！衷心祝愿我们永远幸福，祝愿天下的家庭永远幸福，祝愿您们永远健康，天下的父母永远健康！

感谢所有关心、帮助和支持我的师长、亲人和朋友！

参考文献

- [1] Michell A G M. The limit of economy of material in frame structures. *Philosophical Magazine*, 1904, 8 (6): 589~597
- [2] 段宝岩. 天线结构分析、优化与测量. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005
- [3] Dorn W, Gomory R, Greeberg H. Automatic design of optimal structures. *J. de Mecanique*, 1964, 3 (1): 25~52
- [4] 段宝岩, 叶尚辉. 两工况作用下杆系结构拓扑优化设计. *计算结构力学及其应用*, 1991, 8(2): 170~177
- [5] 段宝岩, 叶尚辉. 考虑性态约束时多工况桁架结构拓扑优化设计. *力学学报*, 1992, 24 59~69
- [6] 王跃方, 孙焕纯. 对离散变量结构拓扑优化设计几个问题的探讨. *大连理工大学学报*, 1997, 37 (6): 733~735
- [7] 蔡文学, 程耿东. 桁架结构拓扑优化设计的模拟退火算法. *华南理工大学学报 (自然科学版)*, 1998, 26 (9): 78~84
- [8] 许素强, 夏人伟. 桁架结构拓扑优化与遗传算法. *计算结构力学及其应用*, 1994, 11(4): 436~446
- [9] 程耿东. 关于桁架结构拓扑优化设计中的奇异最优解. *大连理工大学*, 2000, 40 (2): 379~383
- [10] Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating Optimal Topology in Structural Design Using a Homogenization Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71: 197~224
- [11] Tenek L H, Hagiwara I. Optimal rectangular plate and shallow shell topologies using thickness distribution or homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 115: 111~124
- [12] Eschenauer H A, Kobelev H A, Schumacher A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 1994, 8: 142~151
- [13] Cheng G D, Olhoff N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1981, 17: 305~323
- [14] Rietz A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP Power law method. *Structural and Multidiscipline Optimization*, 2001, 21: 159~163
- [15] Stolpe M, Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidiscipline Optimization*,

- 2001, 22: 116~124
- [16] Bendsoe M P, Sigmund O. Material interpolation Schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69: 635~654
- [17] Stolpe M, Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidiscipline Optimization*, 2001, 22: 116~124
- [18] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, 1993, 49 (5): 885~896
- [19] Zhou M, Rozvany G I N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. *Structural and Multidiscipline Optimization*, 2001, 21: 80~83
- [20] Michael Y W, Xiaoming Wang, Dongming Guo. A level set for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192: 227~246
- [21] Bendsoe M P, Sigmund O. *Topology optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer, New York, 2003
- [22] 孙靖民等.机械优化设计(第三版).机械工业出版社, 2004
- [23] Khachiyan, L G. A polynomial algorithm in linear programming, *Soviet Math. Dokl*, 1979, Vol. 20, 191~194
- [24] Schmit L A, Farshi B. Some approximation concepts for structural synthesis. *AIAAJ*, 1974, 12: 692~699
- [25] Fleury C, Braibant V. Structural optimization – a new dual method using mixed variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, 24: 359~373
- [26] Svanberg K. The method of moving asymptotes: A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24: 359~373
- [27] Svanberg K. two primal-dual interior-point methods for the MMA subproblems. Technical Report TRITA.MAT.1998.OS12, Dept. of mathematics, KTH, Stockholm, 1998
- [28] Svanberg K. The MMA for modeling and solving optimization problems. WCSMO.3 (held in Buffalo, NY). 1999
- [29] Zhang W H, Fleury C. Structural shape optimization and convex programming methods. Lecture at Symp. on Optimization of Mechanical Systems (IUTAM) (held in Stuttgart, Germany)
- [30] Svanberg K. A new globally convergent version of MMA. Technical Report

- TRITA.MAT.1999.OS2, Dept. of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden, 1999
- [31] Svanberg, K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations, *SIAM Journal on Optimization*, 2002, 12: 555~573
- [32] Zhang W H, Fleury C and Duysinx. A generalized method of moving asymptotes (GMA) including equality constraints. *Structural Optimization*, 1996, 12: 143~146
- [33] Bruyneel M, Duysinx P, Fleury C. A family of MMA approximations for structural optimization. *Structural and Multidiscipline Optimization*, 2002, 24: 263~276
- [34] Fleury C, Schmit L A. Dual methods and approximation concepts in structural synthesis. NASA CR 3226, 1980
- [35] Holland J H. Adaptive in natural and artificial systems, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975
- [36] Kirkpatrick S, Gelatl C D, Vecchi M P. Optimization by simulated annealing, *J. Science*. 1983, 220, 671~680
- [37] Diaz A. and Sigmund O. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, 1995, 10: 40~45
- [38] 袁振, 吴长春. 采用非协调元的连续体拓扑优化设计. *力学学报*, 2003, 3(35): 176~180
- [39] Haber R. B., Jog C. S. and Bendsoe M. P. A new approach to variable topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural Optimization*, 1996, 11: 1~12
- [40] Sigmund O. and Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 1998, 16: 68~75
- [41] Petersson J. and Sigmund O. Slope constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1998, 41: 1417~1434
- [42] Zhou M., Shyy Y. K. and Thomas H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2001, 21: 152~158
- [43] Thomas Borrvall, Joakim Petersson. Topology optimization using regularized intermediate density control. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.* 2001, 190: 4911~4928
- [44] 荣见华, 唐国金, 杨振兴, 傅建林. 一种三维结构拓扑优化设计方法. *固体力学学报*, 2005, 26(3): 289~296

- [45] X.Y.Yang, Y.M. Xie, G.P.Steven. Evolutionary methods for topology optimization of continuous structures with design dependent loads. *Computers & Structures*,2005,83:956~963
- [46] Y M Xie, G P Steven. Evolutionary structural optimization for dynamic problems [J]. *Computers and Structures*, 1996, 58(6): 1067~1073
- [47] 李芳, 凌道盛. 移频迭代法及其在动力拓扑优化中的应用[J]. *浙江工业大学学报*, 2001, 29(1): 44~47
- [48] 隋允康.建模·变换·优化-结构综合方法新进展.大连:大连理工大学出版社,1996
- [49] C S Jog, R B Haber. Stability of finite element models for distributed parameter optimization and topology design [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 130(3/4): 203~226
- [50] 袁振,吴长春,庄守兵. 基于杂交元和变密度法的连续体结构拓扑优化设计. *中国科学技术大学学报*,2001, 3(16):694~699
- [51] Turteltaub, S. and Washabaugh, P. (1999). Optimal distribution of material properties for an elastic continuum with structure dependent body force. *International Journal of Solids and Structures*, 36:4587~4608
- [52] M. Bruneel, P. Duysinx. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight .*Struct Multidisc Optim* 2005,29:245.256
- [53] 张晖,刘书田,张雄. 考虑自重载荷作用的连续体结构拓扑优化. *力学学报* 2009 41: 98-104
- [54] X.Y.Yang, Y.M.Xie, G.P.Steven. Evolutionary methods for topology optimization of continuous structures with design dependent loads. *Computers and Structures* 2005,83:956.963
- [55] Kosaka I, Swan C C. A symmetry reduction method for continuum structural topology optimization. *Computers and Structures*, 1999, 70(1): 47~61
- [56] Pederson N L. 2000: Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 20: 2~11
- [57] Jihong Zhu, Weihong Zhang, Pierre Beckers. Integrated layout design of multi-component system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (accept).