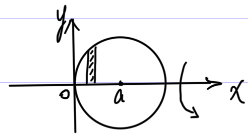
Volumes by Slicing

Solids of revolution

(①. method of disks)

$dv = (\pi y^2) \cdot dx \qquad \int_0^{2r} \pi f^2 \cdot dx$

Ex. V of ball of radius $= a$.



$dv = \pi y^2 \cdot dx \quad , \qquad (x-a)^2 + y^2 = a^2$

$V = \int_0^{2a} \pi \sqrt{a^2 - (x-a)^2}^{\,2} \cdot dx$

$= \pi \int_0^{2a} (a^2 - (x-a)^2)\, dx$

$= \pi \cdot \int_0^{2a} (a^2 - (x^2 - 2ax + a^2))\, dx$

$= \pi \cdot \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax)\, dx$

$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2a x^2}{2} \Big|_0^{2a} \right]$

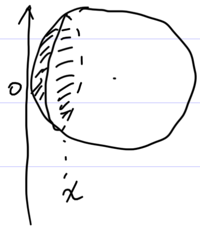
$= \pi \cdot \left[-\frac{1}{3}(2a)^3 + \frac{2a \cdot (2a)^2}{2} - 0 \right]$

$= \pi \cdot \frac{-2+3}{6} (2a)^3$

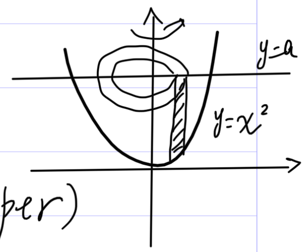
$= \pi \cdot \frac{8}{6} a^3$

$= \frac{4}{3} \pi a^3$

$Vol = \pi (a x^2 - \frac{1}{3} x^3)$



② method of shells.



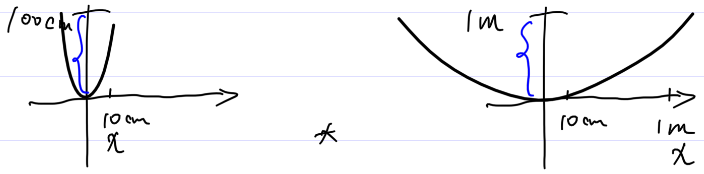
$$dV = dx \cdot h \cdot \text{Circum}$$
$$= dx \cdot (a-y) \cdot (2\pi x) \quad \text{(rolled paper)}$$
$$= (a-x^2)(2\pi x)\,dx$$

$$V = \int_0^{\sqrt{a}} (a-x^2)(2\pi x)\,dx.$$
$$= \frac{\pi}{2} a^2 \qquad (\leftarrow \text{not } a^3\text{, so in consistant with unit scaling})$$

Beware of Units

both are correct

cm		m
$a = 100\,cm$		$a = 1\,m$
$x = \sqrt{a} = 10\,cm$	*	$x = \sqrt{a} = 1\,m$
$V \simeq 16$ Liters	*	$V \approx 1600$ Liters



*

$y = x^2$ 就是 scalar，用单位的不同而不同。1 ⇒ 1m, 1cm.

但只要保持单位一致，计算结果就是正确的。

（根据所在的语境（所选的单位）不同，表示的意义也不同。

$y = x^2$ in cm:

$A_{cm} = (1\,cm)^2 = 1\,cm^2$

$A_{cm} = (10\,cm)^2 = 100\,cm^2$

$\boxed{A_{cm} = x_{cm}^2}$

$A_{dm} = 100 \cdot x_{cm}^2$

$A_{cm} = 10000\, x_m^2$

$y = x^2$ in m:

$A_m = (1\,m)^2 = 1\,m^2$

$\boxed{A_m = x_m^2}$

)

（在语境一致的情况下，如果他正确地描述了实际问题，保持单位一致（统一）的计算结果就是正确的。）

同样，$V = \frac{\pi}{2} a^2$ 也是 scalar. 都适用.

既适用于 cm 体系，也适用于 m 体系.

在 cm 体系下，描述了一种对应关系，计算结果也会跟前者(cm)一致(正确)

在 m 体系下，描述了另一种 x, y 对应关系，计算结果也适用本体系.