Квантовая структура околоядерного пространства, спектральные инварианты кулоновского поля и гипероператорная формализация

Владимир Гончаров

December 5, 2025

Abstract

В работе формализована фундаментальная структура околоядерного пространства водородоподобного атома. На основе решений уравнений Шрёдингера и Дирака выделены спектральные, топологические и масштабные инварианты, образующие *инвариантное ядро* — набор величин, сохраняющихся при действии масштабной группы перенормировки. Введён *гипероператор*, отображающий тройку $(\mathcal{M}, V, \mathcal{H})$ в пару $(\Sigma, \mathcal{I}_{\text{inv}})$, где Σ — спектр гамильтониана, а $\mathcal{I}_{\text{inv}}$ — инвариантное ядро. Показано, что кулоновский гамильтониан обладает строгой масштабной гомогенностью, а инвариантное ядро является структурным мостом между микроскопической квантовой физикой и масштабными космологическими моделями.

1 Введение

Околоядерная область атома является фундаментальным объектом спектральной теории, отображающим квантово-механическую организацию меры вероятности вблизи кулоновского центра. Несмотря на классическую простоту вида потенциальной энергии $V(r) = -Z/r$, кулоновский гамильтониан демонстрирует уникальную структурную *масштабную инвариантность*, связывающую спектральные уровни, плотности, топологию узлов и безразмерные отношения физических параметров.

Цель работы — построение **инвариантного ядра**, сохраняющегося при действии масштабной группы перенормировки, и формализация универсального **гипероператора**, сопоставляющего гамильтониану его спектрально-инвариантные характеристики.

Эта структура, как будет показано, имеет прямые аналоги в космологических моделях (например, спектрах мод Мукханова–Сасаки), что позволяет рассматривать гипероператор как инструмент, связывающий квантовые микросистемы и масштабы Вселенной.

2 Основная модель: уравнение Шрёдингера

Гамильтониан водородоподобного атома:

$$\hat{H}_Z = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{2.1}$$

В сферических координатах волновая функция разделяется:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi). \tag{2.2}$$

Радиальное уравнение принимает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} R = E_n R. \tag{2.3}$$

Решение:

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right)^l e^{-Zr/(na_0)} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right). \tag{2.4}$$

Энергетический спектр:

$$E_n = -\frac{R_\infty Z^2}{n^2}. \tag{2.5}$$

3 Структура околоядерной области

Плотность вероятности:

$$\rho_{nlm}(r, \theta, \phi) = |\psi_{nlm}|^2. \tag{3.1}$$

s-орбитали имеют ненулевую плотность в ядре:

$$|\psi_{n0}(0)|^2 = \frac{Z^3}{\pi a_0^3 n^3}. \tag{3.2}$$

Количество радиальных узлов:

$$N = n - l - 1. \tag{3.3}$$

4 Релятивистские поправки

Уравнение Дирака:

$$\left[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi = E\psi. \tag{4.1}$$

Спектр:

$$E_{n,j} = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - j - 1/2 + \sqrt{(j+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}. \tag{4.2}$$

5 Спектральные инварианты кулоновского поля

Инвариант	**Математическое выражение**	**Физическая интерпретация**	**Масштб. инвариантность**
Энергетические отношения	$\frac{E_n}{E_m} = \frac{m^2}{n^2}$	Отношение уровней энергии	Да (строгий инвариант)
Число узлов	$n - l - 1$	Топология волновой функции	Да
Безразмерная плотность	$\lvert\psi_{n0}(0)\rvert^2 a_0^3 = \frac{Z^3}{\pi n^3}$	Вероятность в ядре	Да
Отн. тонкой структуры	$\Delta E/E_n \sim \alpha^2$	Релятивистские поправки	Да
Отн. радиуса	$r_{\max}/a_0 = 1/Z$	Характерный размер	Да

Table 1: Инвариантное ядро кулоновского поля

6 Гипероператор и масштабные преобразования

Определим гипероператор:

$$\mathfrak{H} : (\mathcal{M}, V, \mathcal{H}) \mapsto (\Sigma, \mathcal{I}_{\text{inv}}), \tag{6.1}$$

где:

- $\Sigma = \sigma(\hat{H})$ — спектр,
- $\mathcal{I}_{\text{inv}}$ — инвариантное ядро (см. таблицу 1).

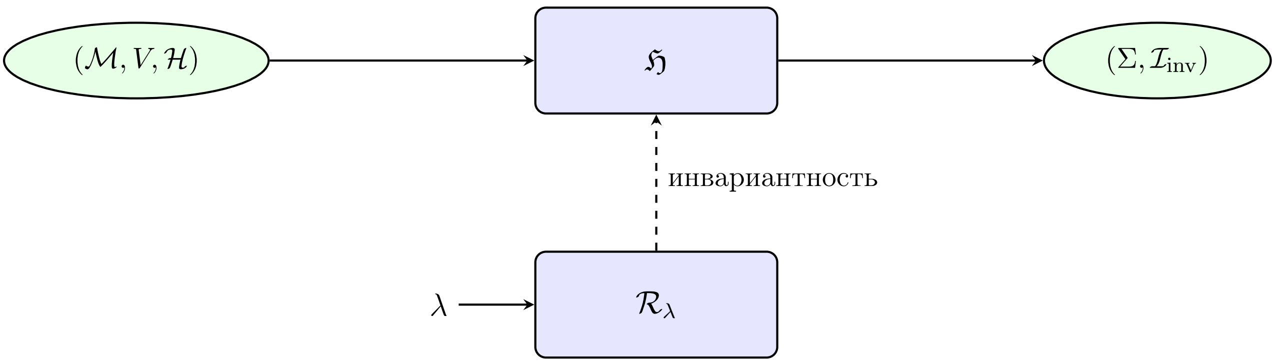

Figure 1: Схема гипероператора $\mathfrak{H}$ и его связь с перенормировочной группой $\mathcal{R}_\lambda$

Масштабная группа:

$$r \mapsto \lambda r, \quad Z \mapsto \lambda Z. \tag{6.2}$$

Тогда:

$$\hat{H}_Z^{(\lambda)} = \lambda^{-2}\hat{H}_Z, \qquad \Sigma^{(\lambda)} = \lambda^{-2}\Sigma. \tag{6.3}$$

Но:

$$\mathcal{I}_{\text{inv}}(\hat{H}_Z) = \mathcal{I}_{\text{inv}}(\hat{H}_Z^{(\lambda)}), \tag{6.4}$$

что и формирует фундаментальную масштабную инвариантность.

7 Визуализации

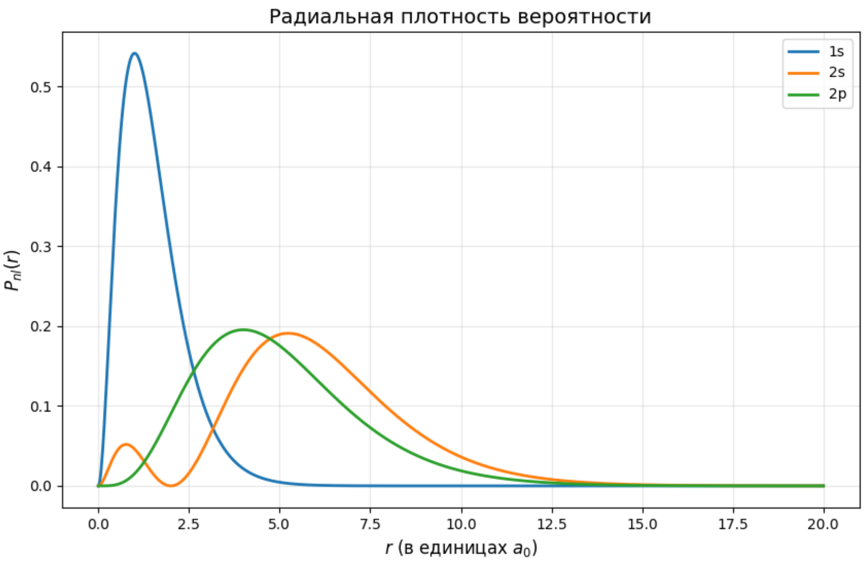

Figure 2: Радиальная плотность вероятности $P_{nl}(r) = r^2|R_{nl}(r)|^2$ для состояний 1s, 2s и 2p водородоподобного атома ($Z = 1$)

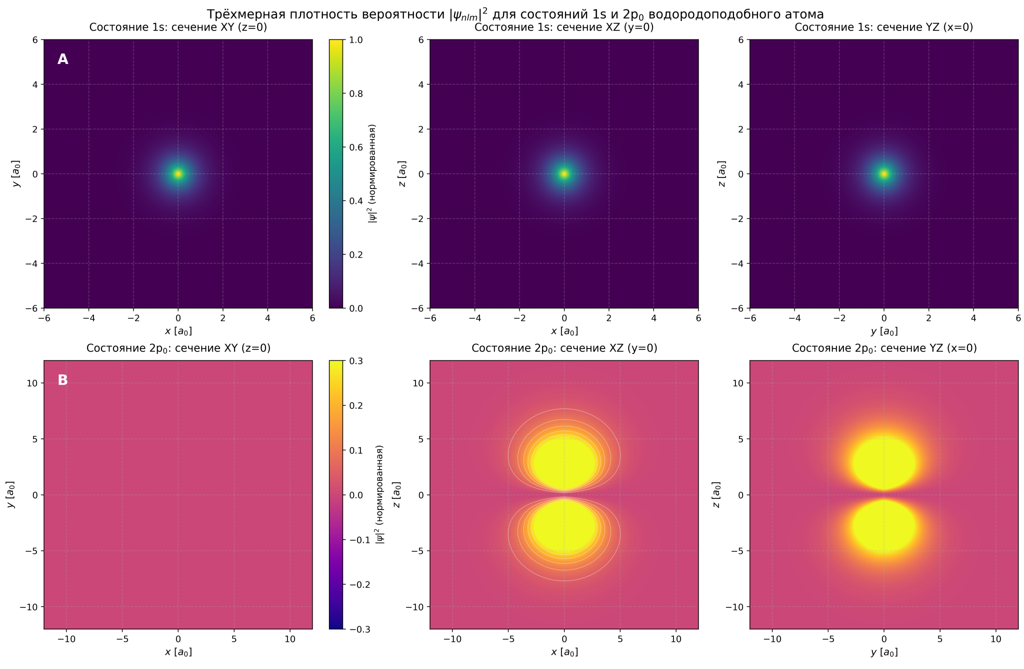

Figure 3: 3D-визуализация плотности $|\psi|^2$ для состояний 1s (слева) и 2p$_0$ (справа)

A Инвариантное ядро

A.1 Масштабная группа $\mathcal{R}_\lambda$

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{M}, V, \mathcal{H}) = (\mathcal{M}_\lambda, V_\lambda, \mathcal{H}_\lambda), \tag{A.1}$$
$$V_\lambda(x) = \lambda^{-2} V(\lambda^{-1} x).$$

A.2 Определение инвариантного ядра

Пусть:

$$\mathcal{I} : (\mathcal{M}, V, \mathcal{H}) \to \mathbb{R}^k.$$

Определение. $\mathcal{I}$ называется инвариантным ядром, если существует диагональная матрица Λ_λ такая, что:

$$\mathcal{I}(\mathcal{R}_\lambda X) = \Lambda_\lambda \mathcal{I}(X). \tag{A.2}$$

Если $(\Lambda_\lambda)_{ii} = 1$, величина называется строгим инвариантом.

A.3 Теорема о масштабной инвариантности

Теорема. Для гамильтониана H_Z кулоновского типа:

$$\mathfrak{H}(\mathcal{R}_\lambda H_Z) = (\lambda^{-2}\Sigma, \mathcal{I}_{\text{inv}}). \tag{A.3}$$

Доказательство. Следует из гомогенности потенциала $1/r$ и линейности оператора Лапласа. □

A.4 Примеры инвариантного ядра для кулоновского потенциала

Для кулоновского потенциала $V(r) = -Z/r$ инвариантное ядро включает:

1. Энергетические отношения: $\dfrac{E_n}{E_m} = \dfrac{m^2}{n^2}$
2. Топологические инварианты: число узлов $n - l - 1$
3. Безразмерные комбинации: $|\psi_{n0}(0)|^2 a_0^3 = \dfrac{Z^3}{\pi n^3}$
4. Отношения параметров: $\dfrac{\Delta E}{E_n} \sim \alpha^2$

B Потенциалы $V(r) = r^{-k}$

Для потенциала:

$$V(r) = V_0 r^{-k}$$

масштабирование даёт:

$$V(r) \mapsto \lambda^{-k} V(r). \tag{B.1}$$

Строятся аналогичные инвариантные комбинации.

C Космологический мост

Для уравнения Мукханова–Сасаки:

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 a^2,$$

инвариант:

$$m/H \quad \text{аналогичен} \quad Z\alpha. \tag{C.1}$$

References

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* Физматлит, 1989.

[2] Bjorken J.D., Drell S.D. *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill, 1964.

[3] Hawking S.W. *The quantum state of the universe.* Nucl. Phys. B 239, 257–276 (1984).

[4] Peskin M., Schroeder D. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Addison-Wesley, 1995.

[5] Mukhanov V.F., Chibisov G.V. *Quantum fluctuations and a nonsingular universe.* JETP Lett. 33, 532–535 (1981).

[6] Coleman S., De Luccia F. *Gravitational effects on and of vacuum decay.* Phys. Rev. D 21, 3305 (1980).