

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**  
**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ**

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_  
(підпис)  
**М. В. Грайворонський**

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_  
(ініціали, прізвище) 2017 р.

**Дипломна робота**

освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр”

за спеціальністю 8.04030101 «Прикладна математика»

на тему «Тема»

Виконав студент 6 курсу групи ФІ-51м

Кригін Валерій Михайлович

Керівник к.т.н., Барановський Олексій Миколайович

Рецензент ,

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі  
немає запозичень з праць інших авторів  
без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

## РЕФЕРАТ

### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

## **ABSTRACT**

## **KEYWORDS**

## **РЕФЕРАТ**

**СЛОВА**

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	6
1 Теоретичні відомості . . . . .	7
1.1 Задача . . . . .	7
1.1.1 Bin . . . . .	8
1.1.2 Parameters difference . . . . .	8
1.1.3 Models difference . . . . .	9
1.1.4 Gaussian parameters difference . . . . .	9
1.2 Розв’язок . . . . .	10
1.2.1 Bin . . . . .	10
1.2.2 Gaussian parameters difference . . . . .	11
2 Практичні результати . . . . .	13
3 Охорона праці . . . . .	14
Висновки . . . . .	15
Перелік посилань . . . . .	16

## ВСТУП

**Актуальність роботи.**

*Об'єкт дослідження —*

*Предмет дослідження —*

**Мета дослідження.**

Завдання наступні:

- 1) Вивчити;
- 2) Розробити.

**Практичне значення одержаних результатів.**

# 1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

## 1.1 Задача

Маємо множину  $T$  зображень. Кольори — відтінки сірого, що визначаються лише інтенсивністю від 0 до 1. Введемо множину  $I$  пікселів зображення. Зображення  $t \in T$  є відображення з множини пікселів на множину їх значень

$$t : I \rightarrow [0; 1].$$

Інтенсивність пікселя  $i$  в зображенні  $t$  позначимо як  $t_i$ .

Взагалі кажучи,  $I$  — множина матриць однакового розміру. Зазвичай зображення можуть бути розміром від  $100 \times 100 = 10^4$  пікселів. Проте в середньому це значення досягає мільйона пікселів. Це означає, що при використанні  $2^8 = 256$  градацій сірого маємо приблизно  $10^{6 \cdot 256} = 10^{1536}$  різних зображень, тобто неймовірно багато.

Тривимірна модель обличчя визначається набором з  $n$  дійсних параметрів. Позначимо їх через  $x$ . Множина всіх параметрів  $X = \mathbb{R}^n$ . Функцією, що перетворює набір параметрів на зображення, є відображення

$$f : X \rightarrow T.$$

Поставимо Байесовську задачу розпізнавання. Для цього потрібно визначитися з функцією витрат [1]

$$W : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

та мінімізувати її математичне очікування

$$R(q) = \sum_{t \in T} \sum_{x \in X} \mathbb{P}(x, q(t)) \cdot W(x, q(t)).$$

Задача

$$q^* = \arg \min_q R.$$

Введемо ймовірність того, що дане зображення  $t$  було отримано саме з параметрами  $x$ . Вважаємо, що на зображенні присутній нормальний шум з дисперсією  $\sigma^2$

$$\mathbb{P}(x | t) = \prod_{i \in I} \frac{\exp \left\{ -\frac{(t_i - f_i(x))^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}}.$$

### 1.1.1 Bin

$$W(x, x') = \mathbb{1}(x = x')$$

$$q^*(t) = \arg \max_x \mathbb{P}(x | t)$$

### 1.1.2 Parameters difference

$$W(x, x') = \|x - x'\| = \sum_{p \in P} (x_p - x'_p)^2$$

$$q^*(t) = \sum_{x \in X} x \cdot \mathbb{P}(x | t)$$



### 1.1.3 Models difference

$$M_v(k) = \sum_{p \in P} \alpha_p^v \cdot k_p, \quad v \in V$$

$$\begin{aligned} W(x, x') &= \|M(x) - M(x')\| = \sum_{v \in V} [M_v(x) - M_v(x')]^2 = \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{p \in P} [\alpha_p^v \cdot (x_p - x'_p)]^2 = \sum_{p \in P} \left\{ (x_p - x'_p)^2 \cdot \sum_{v \in V} (\alpha_p^v)^2 \right\} = \\ &= \left| \beta_p^2 = \sum_{v \in V} (\alpha_p^v)^2 \right| = \sum_{p \in P} \beta_p^2 \cdot (x_p - x'_p)^2 \end{aligned}$$

$$q^*(t) = M^{-1} \left( \sum_{x \in X} M(x) \cdot \mathbb{P}(x | t) \right)$$

### 1.1.4 Gaussian parameters difference

$$\mathbb{P}(x | t) = \prod_{i \in I} \frac{\exp \left\{ -\frac{(t_i - f_i(x))^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \prod_{p \in P} \frac{\exp \left( -\frac{x_p^2}{2} \right)}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$$

$$c = (2 \cdot \pi)^{\frac{|I|+|P|}{2}} \cdot \sigma^{|I|}$$

$$\mathbb{P}(x | t) = c \cdot \exp \left\{ -\frac{\|t - f(x)\|^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{\|x\|^2}{2} \right\}$$

$$W(x, x') = \|x - x'\|^2 = \sum_{p \in P} (x_p - x'_p)^2$$

$$q^*(t) = c \cdot \sum_{x \in X} x \cdot \exp \left\{ -\frac{\|x\|}{2} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{\|t - f(x)\|}{2 \cdot \sigma^2} \right\}$$

## 1.2 Розв'язок

### 1.2.1 Bin

$$\ln \mathbb{P}(x \mid t) = \sum_{i \in I} \left\{ -\frac{(t_i - f_i(x))^2}{2 \cdot \sigma^2} - \frac{\ln 2 + \ln \pi + 2 \cdot \ln \sigma}{2} \right\} \rightarrow \max$$

$$\sum_{i \in I} (t_i - f_i(x))^2 \rightarrow \min$$

$$\sum_{i \in I} (t_i - f_i(x))^2 = \sum_{i \in F} (t_i - f_i(x))^2 + \sum_{i \in I \setminus F} (t_i - f_i(x))^2$$

$$\overline{\sigma_F^2} = \frac{\sum_{i \in F} (t_i - f_i(x))^2}{|F| - 1} \Rightarrow \overline{\sigma_F^2} \sim \frac{\sum_{i \in I} (t_i - f_i(x))^2}{|I| - 1}$$

$$\sum_{i \in I} (t_i - f_i(x))^2 \sim (|I| - 1) \cdot \overline{\sigma_F^2} \rightarrow \min$$

$$\overline{\sigma_F^2} = \frac{\sum_{i \in F} (t_i - f_i(x))^2}{|F| - 1} \rightarrow \min$$

### 1.2.2 Gaussian parameters difference

$$\overline{\sigma^2} = \sum_{x \in X} \frac{\|f(x) - t\|}{N}, \quad N = |X| \cdot |I| - 1$$

$$D_t^2(x) = \frac{\|f(x) - t\|}{2 \cdot \overline{\sigma^2}}$$

$$q'(t) = c \cdot \sum_{x \in X} x \cdot \exp \left\{ -D_t^2(x) - \frac{\|x\|}{2} \right\}$$

$$\begin{cases} \max_x D_t^2(x) = 0, \\ \min_x D_t^2(x) < \infty, \end{cases} \quad \forall t \in T$$

$$q'(t) \sim q''(t) = c \cdot \int_X x \cdot \exp \left\{ -D_t^2(x) - \frac{\|x\|}{2} \right\} dx, \quad X = \mathbb{R}^{|P|}$$

$$q_i''(t) = c \cdot \int_{\mathbb{R}} x_i \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_{i-1}^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_{i+1}^2}{2}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_P^2}{2}} e^{-D_t^2(x)} dx$$

$$\max_f q_i''(t) = c \cdot \int_{\mathbb{R}} x_i \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)^{|P|-1}$$

$$c \cdot \left( \frac{\pi}{2} \right)^{|P|} = 1 \implies c = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{-\frac{|P|}{2}}$$

$$|q_i''(t)| \leq \left( \frac{\pi}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$



## **2 ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ**

### **3 ОХОРОНА ПРАЦІ**

## **ВИСНОВКИ**

В результаті виконання роботи вдалося.

## **ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Berger, J.O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis / J.O. Berger // Springer Series in Statistics. — Springer New York, 1980.