НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри

____
(підпис)
М. В. Грайворонський
(ініціали, прізвище)
“____” ____________ 2017 р.

Дипломна робота

освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр”

за спеціальністю 8.04030101 «Прикладна математика»
на тему «Тема»
Виконав студент 6 курсу групи ФІ-51м
Кригін Валерій Михайлович ________ *(підпис)*
Керівник к.т.н., Барановський Олексій Миколайович ________ *(підпис)*
Рецензент , ________ *(підпис)*

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _______

Київ — 2017 року

РЕФЕРАТ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

ABSTRACT

KEYWORDS

РЕФЕРАТ

СЛОВА

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність роботи.

Об'єкт дослідження –

Предмет дослідження –

Мета дослідження.

Завдання наступні:

1) Вивчити;
2) Розробити.

Практичне значення одержаних результатів.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Задача

Маємо множину T зображень. Кольори — відтінки сірого, що визначаються лише інтенсивністю від 0 до 1. Введемо множину I пікселів зображення. Зображення $t \in T$ є відображення з множини пікселів на множину їх значень

$$t : I \to [0; 1] .$$

Інтенсивність пікселя i в зображенні t позначимо як t_i.

Взагалі кажучи, I — множина індексів матриць однакового розміру

$$I = \left\{ \langle i, j \rangle \;\middle|\; i = \overline{1..h}, \, j = \overline{1..w} \right\} .$$

Зазвичай зображення можуть бути розміром від $100 \times 100 = 10^4$ пікселів. Проте в середньому це значення досягає мільйона пікселів. Це означає, що при використанні $2^8 = 256$ градацій сірого маємо приблизно $10^{6 \cdot 256} = 10^{1536}$ різних зображень, тобто неймовірно багато.

Тривимірна модель обличчя визначається набором n дійсних параметрів. Множина всіх параметрів $X = \mathbb{R}^n$. Функцією, що перетворює набір параметрів на зображення, є відображення

$$f : X \to T.$$

Введемо позначення для зображення згенерованого з певним набором параметрів x

$$f(x) = t.$$

Інтенсивність i пікселя позначимо

$$f_i(x) = t_i.$$

Поставимо Баєсову задачу розпізнавання. Для цього потрібно визначитися з функцією витрат [1]

$$W : X \times X \to \mathbb{R}.$$

Введемо невідому функцию q, яку будемо шукати. Вона за пред'явленим зображенням t буде повертати набір параметрів x, які краще за все описують модель данного обличчя

$$q(t) = x.$$

Математичне очікування функції витрат для даного вирішального правила q як функції випадкової величини x за умови, що було пред'явлено зображення t, називається Баєсовим ризиком

$$R(q) = \sum_{t \in T} \sum_{x \in X} \mathbb{P}(x, q(t)) \cdot W(x, q(t)).$$

Задача — знайти таке вирішальне правило q, яке мінімізує Баєсів ризик

$$q^* = \arg\min_q R.$$

Вважаємо, що на даному зображенні t присутній нормальний шум з невідомою дисперсією σ_t^2. Тоді ймовірність того, що дане зображення було отримано саме з параметрами x

$$\mathbb{P}\left(x \mid t\right) = \prod_{i \in I} \frac{\exp\left\{-\frac{\left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}}.$$

1.1.1 Bin

$$W\left(x, x'\right) = \mathbb{1}\left(x = x'\right)$$

$$q^*\left(t\right) = \arg\max_x \mathbb{P}\left(x \mid t\right)$$

1.1.2 Parameters difference

$$W\left(x, x'\right) = \left\|x - x'\right\| = \sum_{p \in P} \left(x_p - x'_p\right)^2$$

$$q^*\left(t\right) = \sum_{x \in X} x \cdot \mathbb{P}\left(x \mid t\right)$$

1.1.3 Models difference

$$M_v\left(k\right) = \sum_{p \in P} \alpha_p^v \cdot k_p, \qquad v \in V$$

$$W(x,x') = \|M(x) - M(x')\| = \sum_{v\in V} \left[M_v(x) - M_v(x')\right]^2 =$$

$$= \sum_{v\in V}\sum_{p\in P} \left[\alpha_p^v \cdot \left(x_p - x_p'\right)\right]^2 = \sum_{p\in P} \left\{ \left(x_p - x_p'\right)^2 \cdot \sum_{v\in V} \left(\alpha_p^v\right)^2 \right\} =$$

$$= \left| \beta_p^2 = \sum_{v\in V} \left(\alpha_p^v\right)^2 \right| = \sum_{p\in P} \beta_p^2 \cdot \left(x_p - x_p'\right)^2$$

$$q^*(t) = M^{-1}\left(\sum_{x\in X} M(x) \cdot \mathbb{P}(x \mid t)\right)$$

1.1.4 Gaussian parameters difference

$$\mathbb{P}(x \mid t) = \prod_{i\in I} \frac{\exp\left\{-\frac{(t_i - f_i(x))^2}{2\cdot\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} \cdot \prod_{p\in P} \frac{\exp\left(-\frac{x_p^2}{2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi}}$$

$$c = (2\cdot\pi)^{\frac{|I|+|P|}{2}} \cdot \sigma^{|I|}$$

$$\mathbb{P}(x \mid t) = c \cdot \exp\left\{-\frac{\|t - f(x)\|}{2\cdot\sigma^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\|x\|}{2}\right\}$$

$$W(x,x') = \|x - x'\| = \sum_{p\in P} \left(x_p - x_p'\right)^2$$

$$q^*(t) = c \cdot \sum_{x\in X} x \cdot \exp\left\{-\frac{\|x\|}{2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\|t - f(x)\|}{2\cdot\sigma^2}\right\}$$

1.2 Розв'язок

1.2.1 Bin

$$\ln \mathbb{P}\left(x \mid t\right) = \sum_{i \in I} \left\{ -\frac{\left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2}{2 \cdot \sigma^2} - \frac{\ln 2 + \ln \pi + 2 \cdot \ln \sigma}{2} \right\} \to \max$$

$$\sum_{i \in I} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2 \to \min$$

$$\sum_{i \in I} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2 = \sum_{i \in F} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2 + \sum_{i \in I \setminus F} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2$$

$$\overline{\sigma_F^2} = \frac{\sum\limits_{i \in F} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2}{\left|F - 1\right|} \Rightarrow \overline{\sigma_F^2} \sim \frac{\sum\limits_{i \in I} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2}{\left|I\right| - 1}$$

$$\sum_{i \in I} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2 \sim \left(\left|I\right| - 1\right) \cdot \overline{\sigma_F^2} \to \min$$

$$\overline{\sigma_F^2} = \frac{\sum\limits_{i \in F} \left(t_i - f_i\left(x\right)\right)^2}{\left|F - 1\right|} \to \min$$

1.2.2 Gaussian parameters difference

$$\overline{\sigma^2} = \sum_{x \in X} \frac{\|f(x) - t\|}{N}, \qquad N = |X| \cdot |I| - 1$$
$$D_t^2(x) = \frac{\|f(x) - t\|}{2 \cdot \overline{\sigma^2}}$$

$$q'(t) = c \cdot \sum_{x \in X} x \cdot \exp\left\{-D_t^2(x) - \frac{\|x\|}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} \max\limits_x D_t^2(x) = 0, \\ \min\limits_x D_t^2(x) < \infty, \end{cases} \qquad \forall t \in T$$

$$q'(t) \sim q''(t) = c \cdot \int\limits_X x \cdot \exp\left\{-D_t^2(x) - \frac{\|x\|}{2}\right\} dx, \qquad X = \mathbb{R}^{|P|}$$

$$q_i''(t) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} x_i \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_{i-1}^2}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_{i+1}^2}{2}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_p^2}{2}} e^{-D_t^2(x)}\, dx$$

$$\max_f q_i''(t) = c \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} x_i \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}}\, dx_i \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\right)^{|P|-1}$$
$$c \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{|P|} = 1 \Longrightarrow c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{|P|}{2}}$$

$$|q_i''(t)| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

1.2.3 Monte-Carlo

$$z_\gamma^2 = 2.575^2$$

$$\varepsilon^2 = 0.01^2$$

$$M(N) = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{Q}^{(i)}(x)\right)^2$$

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{Q}^{(i)}(x)\right)$$

$$\hat{V}_r^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \left[M(N) - \frac{1}{N} \cdot (S(N))\right]$$

$$\hat{Q}_N^2 = \left(\frac{1}{N} \cdot S(N)\right)$$

2 ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

3 ОХОРОНА ПРАЦІ

ВИСНОВКИ

В результаті виконання роботи вдалося.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Berger, J.O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis / J.O. Berger // Springer Series in Statistics. — Springer New York, 1980.