MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Hemtentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2020-03-20, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Alla.
Examinator: Andreas Rosén
Under skrivningstiden nås examinator per e-post: rosenan@chalmers.se

---

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Avgör om följande påståenden om följder $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ av tal $x_k \in \mathbf{R}$ är sanna. Om sant ska påståendet bevisas, om falskt ska motexempel ges.
   (a) Om $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ är monoton, så är den konvergent. (1p)
   (b) Om $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ är konvergent, så är den monoton. (1p)
   (c) Om $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ är begränsad, så är den konvergent. (1p)
2. Betrakta nivåytan $2x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Normallinjen i $(1, -1, 1)$ skär ytan i ytterligare en punkt P. Bestäm P samt tangentplanet till ytan i P. (3p)
3. Bestäm alla lokala extrempunkter och sadelpunkter till funktionen (3p)
$$f(x, y) = (2x + y)^3 + 2x^2 + y^2.$$
4. Skissa följande mängder samt avgör om de är öppna, slutna respektive sammanhängande.
   (a) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 2 < x^2 + y^2 < 3, y^2 \leq x^2\}$ (2p)
   (b) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x^2 y = 1\}$ (2p)

Var god vänd!

5. Bestäm alla värden som funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ antar på mängden som ges av (4p)

$$x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0.$$

6. Betrakta den partiella differentialekvationen (4p)

$$3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Bestäm två tal $a, b \in \mathbf{R}$ så att

$$\begin{cases} u = ax + y, \\ v = bx + y, \end{cases}$$

blir ett bijektivt variabelbyte som överför differentialekvationen på en ekvation av formen $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$.

7. Låt $n \geq 1$ och låt $f : D \to \mathbf{R}$ vara definierad i en öppen mängd $D \subseteq \mathbf{R}^n$, där $\mathbf{a} \in D$. Avgör om följande påståenden är sanna. Om sant ska påståendet bevisas, om falskt ska motexempel ges.

   (a) Om f är kontinuerlig i $\mathbf{a}$ så är f differentierbar i $\mathbf{a}$. (1p)

   (b) Om f är partiellt deriverbar i $\mathbf{a}$ så är f differentierbar i $\mathbf{a}$. (1p)

   (c) Om f är differentierbar i varje punkt i D så är f en C^1 funktion i D. (2p)