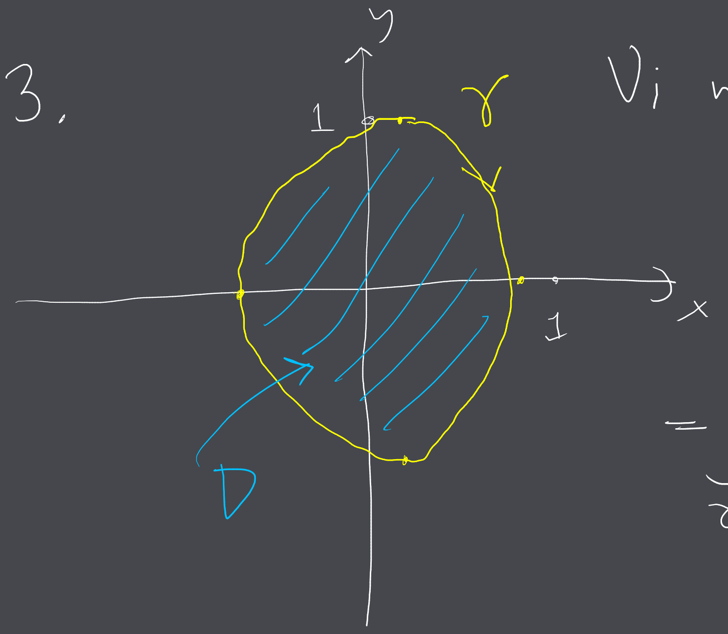
3.



Vi noterar att $\gamma = -\partial D$

$$\text{Area}(D) \underset{\text{Green}}{=} -\int_{\partial D} y\,dx =$$

$$= \int_\gamma y\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\cos t + \frac{\sin 2t}{5}\right)\left(\cos t - \frac{\sin 2t}{5}\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \frac{\sin^2 2t}{25}\right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} - \frac{1}{25}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2}\right)\right) dt =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{25}\right) = \dots = \frac{23\pi}{25}.$$

Svar: $\text{Area}(D) = \frac{23}{25}\pi$.

4. Vi börjar med att hitta konvergensradien.

$$a_k = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{m}\right), & k = m^2,\ m = 1,2,3,\dots \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \text{ så}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_k|^{1/k} = \overline{\lim_{m\to\infty}} |a_{m^2}|^{1/m^2} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \left(\sin\left(\frac{1}{m}\right)\right)^{1/m^2}$$

För $m >> 1$ har vi $\frac{1}{2m} \leq \sin\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}$, och

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/m^2} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{1/m^2} = 1 \underset{\text{instängningsreg.}}{\Rightarrow} \lim_{m\to\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

så $\text{konv.radien} = \dfrac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Enligt Huvudsatsen för potensserier konvergerar serien för $|x+3| < 1$ medan den divergerar för $|x+3| > 1$.

Återstår två fall.

$x + 3 = 1$: serien blir då $\sum_1^\infty \sin\left(\frac{1}{k}\right)$, men för $k >> 1$ har vi att $\sin\left(\frac{1}{k}\right) \geq \frac{1}{2k}$ och $\sum_1^\infty \frac{1}{2k}$ är divergent så jämf.krit. implicerar att $\sum_1^\infty \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ är <u>divergent</u>.

$x+3=-1$: serien blir då $\sum (-1)^k \sin(\frac{1}{k})$.

Vi testar Leibniz. 1) Eftersom $\sin x$ är växande på $[0, \pi/2]$ är $\sin(\frac{1}{k})$ avtagande i k. ✓

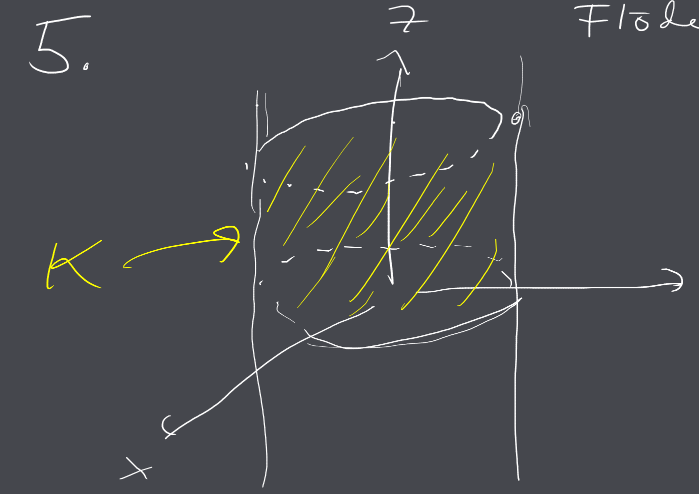
2) $\sin(\frac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sin(0)=0$ ✓

$\underset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \sin(\frac{1}{k})$ konvergent.

Svar: potensserien är konvergent omm.

$-4 \le x < -2$.

5.



Flödet ut ur $K = \iint_{\partial K} F\cdot N\, dS =$

$\underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div} F\, dx\,dy\,dz =$

y

$= \iiint_K (\sin y + z^2 - \sin x)\,dx\,dy\,dz.$

Eftersom K är symmetrisk i x och y (dvs $(x,y)\in K \Leftrightarrow (y,x)\in K$) följer det att $\iiint_K \sin y\, dx\,dy\,dz = \iiint_K \sin x\, dx\,dy\,dz$ så

$$\text{flödet} = \iiint_K z^2\, dx\,dy\,dz \underset{\text{II}}{=} \iint_D \left(\int_0^{x+y+2} z^2\, dz\right) dx\,dy = \iint_D \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{x+y+2} dx\,dy =$$

$(D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\})$

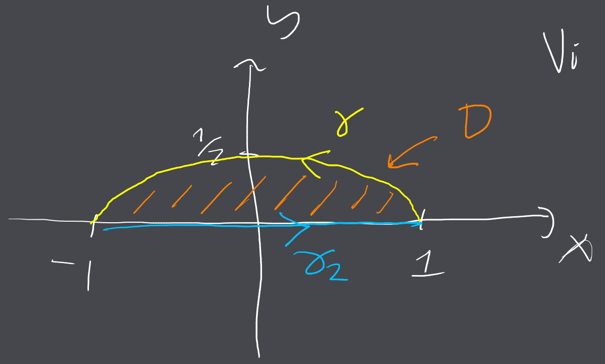
$$= \iint_D \frac{1}{3}(x+y+2)^3\, dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_D (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2+6xy+3y^2+$$

$$+12x+12y+8)\,dx\,dy \underset{\text{symmetrier}}{=} \frac{1}{3}\iint_D (3x^2+3y^2+8)\,dx\,dy \underset{\text{polära koord.}}{=} \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (3r^2+8)r\,dr\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\pi\left[r^3+8r\right]_0^1 = 6\pi.$$

Svar: Flödet $= 6\pi$.

6.



Vi låter γ_2 vara kurvan som går rakt från $(-1,0)$ till $(1,0)$, och vi får då att

$\gamma+\gamma_2 = \partial D$ där D är halvellipsen i figuren.

$$\int_{\gamma+\gamma_2} F\cdot dr = \int_{\partial D} F\cdot dr \underset{\substack{\text{Green} \\ (F=(P,Q))}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (1-2)\,dx\,dy =$$

$$= -\text{Area}(D) = -\frac{\pi}{4}.$$

Det följer att $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dr = \int_{\gamma+\gamma_2} F\cdot dr - \int_{\gamma_2} F\cdot dr = -\frac{\pi}{4} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$$= -\frac{\pi}{4} - \Big[\arctan x\Big]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{4} - \Big(\underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4} - \underbrace{\arctan(-1)}_{=-\pi/4}\Big) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Svar: arbetet $= -\frac{3\pi}{4}$.

7. Vi delar upp $[1/2, \infty)$ i två delar, $[1/2, 2]$ och $(2, \infty)$, och försöker först visa likf. konv. på delarna var för sig.

$[1/2, 2]$: Vi försöker använda Dirichlets test för likformig konvergens.

1) Behöver först visa att $f_k(x) := \dfrac{1}{\max(k, e^{k(x-1)})}$ är avtagande i k.

Om $x \le 1$ är $f_k(x) = \frac{1}{k}$ vilket är avtagande.

Om $x \ge 1$ är k och $e^{k(x-1)}$ växande i k så även $\max(k, e^{k(x-1)})$ är växande i k och därför är $f_k(x)$ avtagande i k. ✓

2) $0 \le f_k(x) \le \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ så $f_k(x) \xrightarrow[{[1/2,2]}]{\text{likf}} 0$. ✓

3) $\sum_{1}^{n} \sin kx$ likf. begr. på $[1/2, 2]$ enl. Lemma.

$\underset{\text{Dirichlet}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})}$ likf. konv. på $[1/2, 2]$.

$(2, \infty)$: Testar Weierstrass majorantsats.

$|\sin kx| \leq 1$, $\max(k, e^{k(x-1)}) \geq e^{k(x-1)} \geq e^{k}$

$\Longrightarrow \left| \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})} \right| \leqslant \frac{1}{e^k}$, $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k$ konv. ty $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$

$\underset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})}$ likf. konv. på $(2, \infty)$.

Eftersom $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})}$ är likf. konv. på $[1/2, 2]$ och $(2, \infty)$ följer det att den är pkt. konv. på $[1/2, \infty)$

och $\sup_{x \geq \frac{1}{2}} \left| \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})} \right| = \max\left(\underbrace{\sup_{x \in [1/2, 2]} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})}}_{\to 0}, \underbrace{\sup_{x > 2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})}}_{\to 0} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

vilket visar att $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\max(k, e^{k(x-1)})}$ är likf. konv. på $[1/2, \infty)$.