MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Hemtentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2021-03-19, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Alla.
Examinator: Andreas Rosén. Under skrivningstiden nås examinator via e-post: rosenan@chalmers.se och via telefon: 0317725365.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Finn alla lokala extrempunkter för funktionen (4p)

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

2. Bestäm de plan som tangerar ytan (4p)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

   och som innehåller punkterna $(2, 2, 3)$ och $(3, 3, 5)$.

3. Bestäm lösningen till den partiella differentialekvationen (4p)

$$xf'_x(x, y) - yf'_y(x, y) = f(x, y), \qquad x, y > 0,$$

   som uppfyller $f(x, 1/x^2) = x\ln(x + 1) - x\ln x$ för alla $x > 0$.

   Ledning: Variabelbytet $u = xy$, $v = x$ kan vara hjälpsamt.

Var god vänd!

4. Avgör för var och en av följande mängder $M \subseteq \mathbf{R}^2$, om det existerar en punktföljd $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ i M, sådan att ingen delföljd konvergerar mot en punkt i M. Om sådan följd existerar ska ett explicit exempel på $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ ges, och om $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ inte existerar ska detta motiveras noga. (3p)

   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < 1\}$

   (b) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \geq 1\}$

   (c) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \text{ eller } x^2 + y^2 = 4\}$

5. Bestäm alla värden som funktionen (4p)

$$f(x, y, z) = x + yz$$

   antar då $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

6. I varje deluppgift (a)-(c), ge exempel på en delmängd $M \subseteq \mathbf{R}$ som har följande given rand, eller motbevisa existensen av sådan M. (3p)

   (a) $\partial M = \{-1, 1\}$

   (b) $\partial M = (-1, 1)$

   (c) $\partial M = [-1, 1]$

7. Definiera för $x > 0$ och $y > 0$ funktionen (3p)

$$f(x, y) = x^y.$$

   Avgör om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existerar.

   (Med andra ord: finns en naturlig definition av 0^0?)