Lösningsförslag MMG300, del 1, 200608 (1)

(1) $f'_x = 2x + \frac{4y}{y-2} = 0$ (1)

$f'_y = 16y + \frac{4x(y-2)-4xy}{(y-2)^2} = 16y - \frac{8x}{(y-2)^2} = 0$ (2)

(1) i (2) $\Rightarrow$

$2y - \frac{1}{(y-2)^2}\left(-\frac{2y}{y-2}\right) = 0$

$y\left(1 + \frac{1}{(y-2)^3}\right) = 0$

Fall 1: $y = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = 0$

Fall 2: $(y-2)^3 = -1 \Rightarrow y = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = 2$.

Stat. punkter: $(x,y) = (0,0)$ och $(2,1)$

$f''_{xx} = 2$

$f''_{yy} = 16 + \frac{16x}{(y-2)^3}$

$f''_{xy} = \frac{4(y-2)-4y}{(y-2)^2} = -\frac{8}{(y-2)^2}$

$Q_{(0,0)} = 2h^2 + 16k^2 + 2hk\cdot(-2)$

$= 2\left((h-k)^2 + 7k^2\right)$

Tecken ++ $\Rightarrow$ pos. definit $\Rightarrow$ f har lokalt min.

$Q_{(2,1)} = 2h^2 + (-16)k^2 + 2hk\cdot(-8)$

$= 2\left((h-4k)^2 - 24k^2\right)$

Tecken +− $\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ f har en sadelpunkt

Svar: Endast ett lok. extremvärde: ett lokalt min i $(0,0)$.

(2) $\bar{a} \in \text{Int}\, M$ betyder $\exists r > 0 : B(\bar{a}, r) \subseteq M$

$\bar{a} \in \text{Int}\, \complement M$ betyder $\exists r > 0 : B(\bar{a}, r) \subseteq \complement M$, dvs

$B(\bar{a}, r) \cap M = \emptyset$.

Det kan ej gälla att $\bar{a} \in \text{Int}\, M \cap \text{Int}\, \complement M$, ty då finnes $r > 0$ där både $B(\bar{a},r) \subseteq M$ och $B(\bar{a},r) \cap M = \emptyset$.

Antag nu $\bar{a} \notin \text{Int}\, M \cup \text{Int}\, \complement M$. Alltså, för $\forall r > 0$:

$B(\bar{a},r) \not\subseteq M$ och $B(\bar{a},r) \not\subseteq \complement M$, dvs

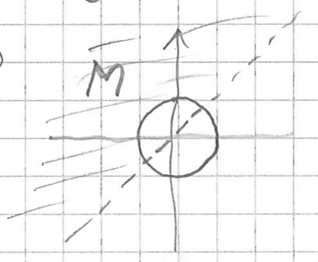
$B(\bar{a},r) \cap \complement M \neq \emptyset$ och $B(\bar{a},r) \cap M \neq \emptyset$.

Per definition betyder detta att $\bar{a} \in \partial M$.

Så: $\complement(\text{Int}\, M \cup \text{Int}\, \complement M) = \partial M$

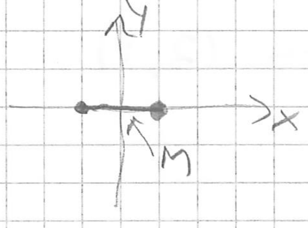
$\therefore \mathbb{R}^2 = \text{Int}\, M \cup \text{Int}\, \complement M \cup \partial M$, där de 3 mängderna är disjunkta.

(a)



$$\text{Int}\, M = \{x^2+y^2 > 1,\ x<y\}$$
$$\partial M = \{x^2+y^2 = 1,\ x \le y\} \cup \{x^2+y^2 \ge 1,\ x = y\}$$
$$\text{Int}\, \complement M = \{x^2+y^2 < 1\} \cup \{x > y\}$$

(b)

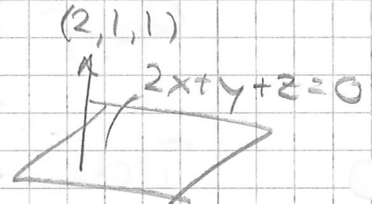


$$\text{Int}\, M = \emptyset$$
$$\partial M = M$$
$$\text{Int}\, \complement M = \complement M$$

(c) $M = \mathbb{R}^2$:

$$\text{Int}\, \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$
$$\partial \mathbb{R}^2 = \emptyset$$
$$\text{Int}\, \complement \mathbb{R}^2 = \emptyset$$

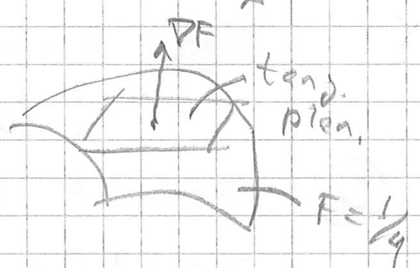
3. $F(x,y,z) = xy + yz + zx - x - y - z$



Vi betraktar nivåytan $F = 1/4$.

$\nabla F = (y+z-1,\ x+z-1,\ y+x-1)$

normal till planet: $(2,1,1) = \bar{n}$



$\nabla F \parallel \bar{n} \iff$

$$\begin{cases} y+z-1 = 2\cdot t & (1) \\ x+z-1 = 1\cdot t & (2) \\ y+x-1 = 1\cdot t & (3) \end{cases}$$

$(1)-(2)-(3) \Rightarrow$

$-2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$(2) \Rightarrow z = t + \frac{1}{2}$

$(3) \Rightarrow y = t + \frac{1}{2}$

$F = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}) + (t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 2(t+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$-\cancel{t}-\frac{1}{2}+t^2+\cancel{t}+\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\cancel{\frac{1}{4}}$

$t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$

$\Rightarrow (x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ eller $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

tang. planens ekv. : $2x+y+z=C$

Insättning $\Rightarrow$ $C=4$ resp. $C=0$

Svar: I $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ är tang. planet $2x+y+z=4$

I $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ är tang. planet $2x+y+z=0$.

4 $f(0,y)=\frac{-1}{y^2+1}=g(y)$

För $y\geq 0$ är g växande. $g(0)=-1$ och $g\to 0$ då $y\to+\infty$.

$f(x,0)=\frac{x-1}{9x^2+1}\geq\frac{-1}{9x^2+1}\geq -1$ för $x\geq 0$.

Vi noterar

$f(x,3x)=\frac{x-1}{0+1}=x-1\to+\infty$ då $x\to\infty$

så f obegränsad uppåt.

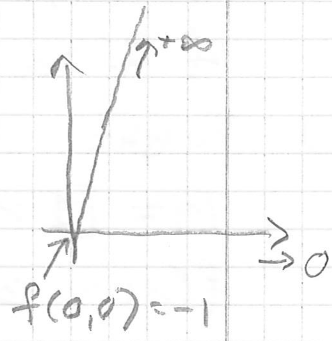
Vidare: för alla $x\geq 0,\ y\geq 0$

gäller

$f(x,y)\geq\frac{-1}{(3x-y)^2+1}\geq -1$

samt

$f(0,0)=-1$.



$\therefore$ f antar det minimala värdet $f=-1$.

Mängden $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$ är sammanhängande, så enligt satsen om mellanliggande värden:

Svar: f antar värdena $[-1,\infty)$.

5 Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$\begin{cases} f'_x = 2x f'_u + 2y f'_v \\ f'_y = -2y f'_u + 2x f'_v \end{cases}$$

$\Rightarrow x(2xf'_u+\cancel{2yf'_v})-y(-2yf'_u+\cancel{2xf'_v})=xy(x^2+y^2)$

$2f'_u=xy=\frac{1}{2}v$

$f'_u = \frac{1}{4} v$

Integration $\Rightarrow f = \frac{1}{4} uv + C(v)$

$f(x,y) = \frac{1}{2} xy(x^2 - y^2) + C(2xy)$

Villkoret $f(x,x) = x \Rightarrow$

$x = 0 + C(2x^2) \quad , \forall x > 0$

Låt $t = 2x^2 \Rightarrow C(t) = \sqrt{t/2} \quad , \forall t > 0$

Med $t = 2xy$:

<u>Svar</u>: $f(x,y) = \frac{1}{2} xy(x^2-y^2) + \sqrt{xy}$.

(6) (a) Falskt. Motexempel

$M = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$, begränsad.

$f(x) = \frac{1}{x}$

f är kont. Men tag $x = \frac{1}{k+1}$, $y = \frac{1}{k}$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = 1$ men $|x-y| \to 0$ då $k \to \infty$.

$\therefore$ f är ej likf. kont. på M.

(b) Falskt. Motexempel.

$M = [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ sluten.

$f(x) = \cos(\pi x^2)$

f är kont. på M. Men tag $x = \sqrt{k}$, $y = \sqrt{k+1}$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = 2$ och

$|x-y| = \frac{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \to 0, \ k \to \infty$.

$\therefore$ f är ej likf. kont. på M.

(c) Falskt. Motexempel

$M = [0,1]$

$f(x) = \sqrt{x}$

M kompakt och f kont. $\Rightarrow f$ likformigt kont.

Men $\frac{|f(x) - f(0)|}{|x-0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$ då $x \to 0$.

$\therefore$ f är ej Lipschitz kontinuerlig.

(7) $F(x,y,z) = xyz^2 + \ln(y+z)$

$G(x,y,z) = e^{yz} + y + \sin(xz)$

F och G är elementära funktioner och således C^1.

Vi kontrollerar

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + \frac{1}{y+z} \\ 2xyz + \frac{1}{y+z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z\cos(xz) \\ ze^{yz}+1 \\ ye^{yz} + x\cos(xz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi+1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi^2-\pi-2 \\ -1 \\ \pi+1 \end{pmatrix}$$

Då $\pi + 1 \neq 0$, följer det av implicita funktionssatsen att $F=0$, $G=1$ i en omgivning till $(\pi, 0, 1)$ utgör en C^1 kurva som kan parametriseras med z.

Vidare

$$x'(1) = \frac{(\nabla F \times \nabla G)_x}{(\nabla F \times \nabla G)_z} = \frac{-\pi^2-\pi-2}{\pi+1}$$

$$y'(1) = \frac{(\nabla F \times \nabla G)_y}{(\nabla F \times \nabla G)_z} = \frac{-1}{\pi+1}$$