Lösningsförslag MMG300, del 1, 200820

① Punkten P är $(x,y,z)=(4\cdot\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{\sqrt2}, 2\cdot\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{\sqrt2}, 2\cdot\frac{1}{\sqrt2})=(2,1,\sqrt2)$.

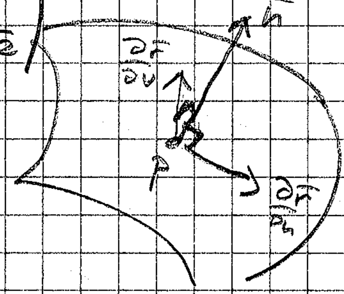
Tangentvektorer $(\bar r=(x,y,z))$

$$\frac{\partial \bar r}{\partial u}=(-4\sin u\cos v, -2\sin u\sin v, 2\cos u)\Big|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}=(-2,-1,\sqrt2)$$

$$\frac{\partial \bar r}{\partial v}=(-4\cos u\sin v, 2\cos u\cos v, 0)\Big|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}=(-2,1,0)$$

normalvektor

$$\bar n=\frac{\partial \bar r}{\partial u}\times\frac{\partial \bar r}{\partial v}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\\sqrt2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt2\\-2\sqrt2\\-4\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}1\\2\\2\sqrt2\end{pmatrix}$$



Tangentplanets ekv:

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+2\sqrt2(z-\sqrt2)=0$$

Svar: $x+2y+2\sqrt2 z=8$.

② $f'_x=4y^2e^x-4e^{4x}=0 \quad (1)$

$f'_y=8ye^x-8y^3=0 \quad (2)$

$(1)\Rightarrow y\neq0 \Rightarrow$

$(2)\Leftrightarrow(2'):\ e^x=y^2$

$(2')$ i $(1)\Rightarrow e^{2x}=e^{4x}$

$e^{2x}=1$

$x=0\Rightarrow y=\pm1$

$f''_{xx}=4y^2e^x-16e^{4x}$

$f''_{xy}=8ye^{x}$

$f''_{yy}=8e^x-24y^2$

$$Q_{(0,1)}=-12h^2+8\cdot2hk-16k^2$$
$$=-12(h-\tfrac{2}{3}k)^2-\tfrac{32}{3}k^2\leq0$$

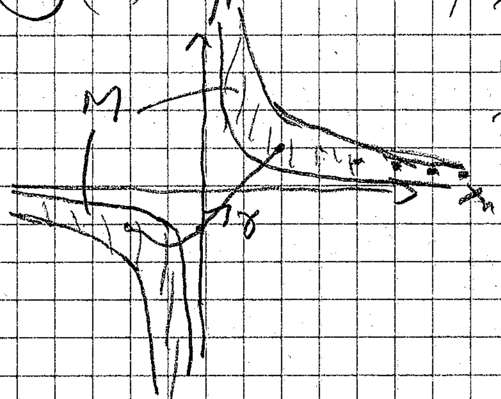
$Q_{(0,1)}=0\Leftrightarrow k=0=h-\frac{2}{3}k\Leftrightarrow(h,k)=(0,0)$

$\therefore Q_{(0,1)}$ är negativt definit $\Rightarrow$ f har lok. max. i $(0,1)$

$$Q_{(0,-1)}=-12h^2+(-8)2hk-16k^2$$
$$=-12(h+\tfrac{2}{3}k)^2-\tfrac{32}{3}k^2$$ neg. definit p.s.s.

$\Rightarrow$ f har lokal max i $(0,-1)$

(3) (a) Hyperblerna $y=\frac{1}{x}$ och $y=\frac{4}{x}$ avgränsar M.



M är <u>ej sammanhängande</u>.

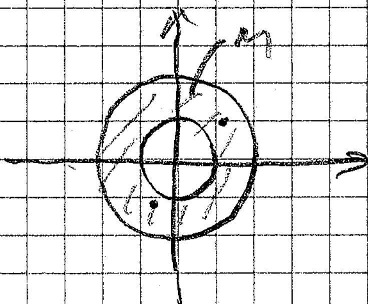
<u>Bevis</u>: Antag att det finns en kurva γ i M från $\gamma(0)=(-2,-1)$ till $\gamma(1)=(2,1)$. Första koordinatfunktionen $\gamma_1(t)$ måste enligt satsen om mellanliggande värden anta värdet $\gamma_1(t')=0$ för något $t\in(0,1)$.

Men M skär ej y-axeln. Motsägelse!

M är <u>obegränsad</u>

<u>Bevis</u>: punkterna $\bar{x}_n=(n,\frac{2}{n})$ ligger alla i M, men $|\bar{x}_n|\geq n\to\infty$ då $n\to\infty$.

(b) Cirklarna $x^2+y^2=1$ och $x^2+y^2=2^2$ avgränsar M.



M är <u>sammanhängande</u>

<u>Bevis</u>: Tag två punkter i M med polära koordinater r_1,θ_1 och r_2,θ_2.

Låt $\gamma(t)$ vara punkten med polära koordinater $(1-t)r_1+tr_2$, $(1-t)\theta_1+t\theta_2$.

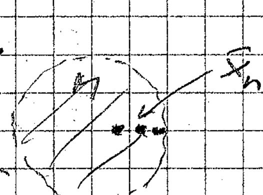
Det följer att γ är en kurva i M mellan dessa två punkter. $\square$

M är <u>begränsad</u>

<u>Bevis</u>: M:s definition $\Rightarrow$ $|\bar{x}|\leq 2$ för alla $\bar{x}\in M$.

(4) (a) Om M är sluten ska enl. GLO prop. 1.14 varje konvergent följd i M ha sitt gränsvärde i M.

Detta är ej fallet för $\bar{x}_n=(1-\frac{1}{n},0)$



(b) Om M är kompakt ska enl. GLO prop. 1.15 varje följd i M ha en delföljd som konv. i M.

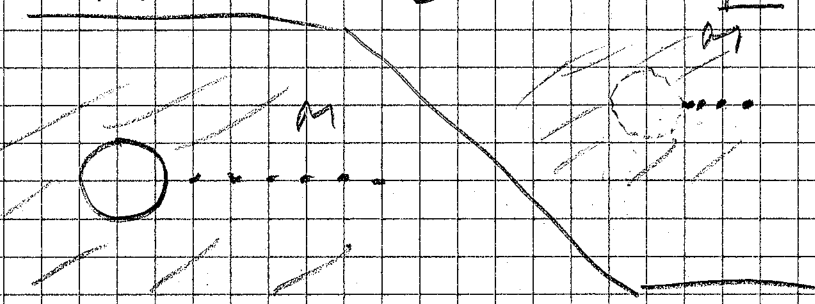
Detta är ej fallet för $\bar{x}_n=(1+\frac{1}{n},0)$

ty varje delföljd har $(1,0) \notin M$ som gränsvärde. $\boxed{3}$

(c) Betrakta nu följden

$\bar{x}_n = (n, 0)$ i M

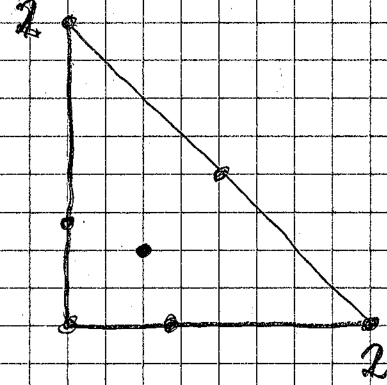
Denna saknar helt konvergenta delföljder, så enl. GLO prop. 1.15 är M ej kompakt.



(5) 1. Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = (1-2x(x+y))\,e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = (1-2y(x+y))\,e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x} = x+y \\ \frac{1}{2y} = x+y \end{cases} \Rightarrow x = y$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Kandidater: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2. Randpunkter

- $f(x,0) = xe^{-x^2} = g(x)$

$g'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ Kandidat: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

- $f(0,y) = ye^{-y^2}$. Symmetri $\Rightarrow$ Kandidat $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- $f(x, 2-x) = 2e^{-x^2-(2-x)^2} = h(x)$

$h'(x) = 2(-2x + 2(2-x))e^{-x^2-(2-x)^2} = 0 \Rightarrow x = 1$

Kandidatlista:

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-1/2}$ $\leftarrow$ max ty $e^{-1/2} > 2e^{-2}$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$ $\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}} > 4$ och $e > 2{,}7$

$f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$

$f(1,1) = 2e^{-2}$

$f(0,0) = 0$ $\leftarrow$ min

$f(2,0) = 2e^{-4}$

$f(0,2) = 2e^{-4}$

Mängden är kompakt och funktionen är kontinuerlig, så det finns punkter där f antar max resp. min.

Kandidatlistan $\Rightarrow$

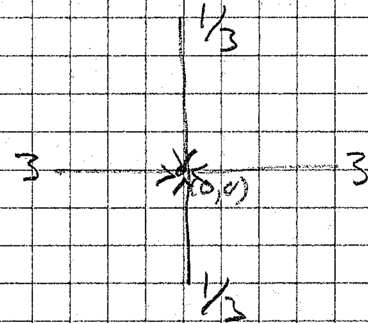
<u>Svar</u>: Min $= 0$ och Max $= 1/\sqrt{e}$

(6) (a) Med $r=\sqrt{x^2+y^2}$ har vi

$$\left|\frac{xy^2}{x^2y^2+(x^2+y^2)^2}\right| \le \frac{r\cdot r^2}{0+r^4} = \frac{1}{r} \longrightarrow 0 \text{ då } r\to\infty.$$

<u>Svar</u>: Gränsvärdet existerar och är lika med 0.

(b) Låt $f(x,y)=\dfrac{3x^2+y^2}{x^2+3y^2}$



$f(x,0)=3$

$f(0,y)=\frac{1}{3}$

Vi har olika gränsvärden av f längs olika kurvor in mot $(0,0)$.

<u>Svar</u>: Gränsvärdet existerar ej.

(7) För kedjeregeln behövs det inversa variabelbytet, så vi löser ut u,v: $\begin{cases} u = 1/x \\ v = x^2y \end{cases}$

Kedjeregeln $\Rightarrow \begin{cases} f'_x = -\frac{1}{x^2}f'_u + 2xy\,f'_v \\ f'_y = x^2 f'_v \end{cases}$

PDEn $\Rightarrow \left(-\frac{1}{x^2}f'_u + \cancel{2xy\,f'_v}\right) - 2\frac{y}{x}\left(\cancel{x^2 f'_v}\right) = xy$

$f'_u = -x^3y = -v/u$

okänd funktion

Integration $\Rightarrow f(u,v) = -v\ln u + C(v)$

$f(x,y) = x^2y\ln x + C(x^2y)$

$f(x,1) = x^2\ln x + C(x^2) = -x^2\ln x$

$\forall x: C(x^2) = -2x^2\ln x$

$\Leftrightarrow \forall t>0: C(t) = -t\ln t$

<u>Svar</u>: $f(x,y) = x^2y\ln x - x^2y\ln(x^2y)$

$= -x^2y\ln(xy)$