Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2025-01-07

- Ansvarig: Larisa Beilina, tel. 031 - 772 35 67, (mob.) 072 - 961 44 47, e-post: larisa@chalmers.se.

- Resultat: e-post från LADOK.
- Betygsgränser: 12 poäng, av maximalt 26, räcker för godkänt, 19 poäng för VG.
- Lösningsförslag: på www. Jag kommer meddela på www-sidan när tentan är rättad.
- Hjälpmedel: godkända enkla miniräknare och kursens formelblad eller godkända ordlistor/formelblad (1 sida på A4 lappen).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs! Specialfall ger inga poäng, när allmänna lösningar krävs.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom alla uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

1.

- a) Låt $\hat{x}$ är en approximation av ett exakt värde x där $|x - \hat{x}| \leq \delta$. Använd Taylors formel för att uppskatta $|f(x) - f(\hat{x})|$ givet funktionen $f(x) = 15x^2 + 5x + 1$. Notera, att vi känner $\hat{x}$ och δ men inte x.
  (2p)
- b) Skriv talet -9 i binär form som flyttal i dubbel precision. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form.
  (3p)
- c) Antag att matrisen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har rank n. Visa att $A^T A$ är symmetrisk och positivt definit.
  (1p)
- d) Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$. Använd Taylors formel för $g(x_k)$ och ge en bevis för att vi får kvadratisk konvergens för fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ om $g'(x^*) = 0$.
  (3p)

2.
Vi vill hitta en funktion på formen

$$f(x) = \cos ax + \sin bx + e^{cx^2},$$

som satisfierar följande villkor: $f(1) = 1, f'(1) = 10, f''(1) = 5$ (a, b och c skall alltså bestämmas). Ställ upp ett system av ekvationer för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

3.

- a) Hur beräknar vi $p(t) = -10t^3 + 5t^2 - 3t + 1$ med hjälp av Horners metod?
  (1p)
- b) Transformera Chebyshevpunkterna

$$t_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right], \ k = 1, 2, ..., n, t_k \in [-1, 1]$$

  från intervalet $[-1, 1]$ till punkterna c_k som är på intervalet $[10, 15]$. Skriv hur ska beräknas transformerade Chebyshevpunkterna c_k.
  (2p)

4.

- a) Beräkna integralet

$$\int_5^{10} f(t)dt = \int_5^{10} (5t + 1)dt$$

  med hjälp av Gausskvadratur med 3 vikter.
  Notera, att Gausskvadratur med 3 vikter är:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i),$$

  var $x_1 = -\sqrt{3/5}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3/5}, \omega_1 = \omega_3 = 5/9, \omega_2 = 8/9$.
  (2p)
- b)
  Beräkna w, x_1, x_2, i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal m som möjligt. Vad blir detta gradtal ? Notera: <u>använd inte Gausskvadratur</u> i den här övningen.

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = wx_1^k + wx_2^k, \quad k = 0, 1, ..., m.$$

  (2p)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} x'(t) & = 3t + xy + z'(t)y'(t), \\ y''(t) & = 5t^2 + y(t)z'(t) + y'(t), \\ z''(t) & = z(t) - y'(t) + t, \\ x(0) & = 1, \\ y(0) & = 1, \\ y'(0) & = 2, \\ z(0) & = 2, \\ z'(0) & = 2. \end{cases}$$

  (**2p**)
- b) Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)t - y(t)t^2 + \cos(\pi t), \\ y'(t) = 5x(t) + 10y(t) - \sin(\pi t), \\ x(0) = 0. \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

  (**2p**)

6.
Vi har följande modell med känt $C = const. > 0$:

$$R \approx Ce^{(p_1+p_2T+p_3T^2)/(1+p_2)}$$

och vill bestämma parametrarna p_1, p_2, p_3 givet mätvärden $(T_1, R_1), (T_2, R_2), ..., (T_m, R_m)$. Gör en lämplig transformation och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem i formen $\min_p \|Ap - b\|_2^2$. Matrisen A samt vektorerna b och p skall redovisas.
(**3p**)