MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Hemtentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2021-06-10, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Alla.
Examinator: Andreas Rosén. Under skrivningstiden nås examinator via e-post: rosenan@chalmers.se och via telefon: 0317725365.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Bestäm alla C^2 envariabelfunktioner $f(t)$, sådana att (4p)

$$u(x, y) = (x^2 - y^2)f(xy)$$

löser Laplaces ekvation $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$.

2. Finn alla lokala extrempunkter för funktionen (4p)

$$f(x, y, z) = 8x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz - 4yz - 32x - 10y + 10z.$$

3. Låt $P = (1/\sqrt{2}, 1, 1/2)$. Visa att kurvan (4p)

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(2t), \sin^2(t)), \qquad -\pi \leq t \leq \pi,$$

ligger på ellipsoiden $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ och att den går genom P. Bestäm en ON-bas $\{e_1, e_2, e_3\}$, där e_1 är tangentvektor till kurvan i P och e_2 är normalvektor till ytan i P.

Var god vänd!

4. Bevisa eller motbevisa följande påståenden, utifrån definitioner och kända satser. (3p)

   (a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ \sin(x^2 y) > 1/(2 + x^2 + y^2)\}$ är en öppen mängd.

   (b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 3 < 0\}$ är en sammanhängande mängd.

   (c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ \sin(x^2 y) < 2 + x^2 + y^2\}$ är en sluten mängd.

5. Avgör för vilka tal $a \in \mathbf{R}$ som gränsvärdet (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)^a}$$

   existerar.

6. I varje deluppgift (a)-(c), ge exempel på en punktföljd i $\mathbf{R}$ med givna egenskaper, eller motbevisa existensen av sådan följd. (3p)

   (a) En obegränsad följd som har en begränsad delföljd.

   (b) En konvergent följd som har en obegränsad delföljd.

   (c) En Cauchyföljd som inte är monoton.

7. Bestäm alla värden som funktionen (4p)

$$f(x, y) = \frac{5x + y^2}{1 + x^2}$$

   antar då $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.