

MATEMATIK

Göteborgs Universitet

Hemtentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300

2020-08-20, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Alla.

Examinator: Andreas Rosén. Under skrivningstiden nås examinator via zoom-chatten och via e-post: rosenan@chalmers.se.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

1. Betrakta ytan som beskrivs med parametriseringen (3p)

$$\begin{cases} x = 4 \cos u \cos v, \\ y = 2 \cos u \sin v, \\ z = 2 \sin u. \end{cases}$$

Bestäm dess tangentplan i punkten med $u = v = \pi/4$.

2. Finn alla lokala extrempunkter för funktionen (3p)

$$f(x, y) = 4y^2 e^x - 2y^4 - e^{4x}.$$

3. Skissa följande mängder och avgör om de är sammanhängande och/eller begränsade. Bevisa sedan dina påståenden utifrån definitioner eller kända satser. (4p)

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; 1 \leq xy \leq 4\}$

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

Var god vänd!

4. Motvisa följande påståenden om mängder M genom att använda satser om punktföljder i M . (3p)

- (a) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 < 1\}$ är sluten.
- (b) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 > 1\}$ är kompakt.
- (c) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq 1\}$ är kompakt.

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen (4p)

$$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - y^2}$$

antar då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x + y \leq 2$.

6. Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna i sådana fall dessa. (4p)

(a) $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} \frac{xy^2}{x^2y^2 + (x^2 + y^2)^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + y^2}{x^2 + 3y^2}$

7. Bestäm $f(x, y)$ som löser (4p)

$$f'_x - 2\frac{y}{x}f'_y = xy, \quad x, y > 0,$$

där $f(x, 1) = -x^2 \ln x$ för $x > 0$.

Ledning: Variabelbytet $x = 1/u$, $y = u^2v$ kan vara hjälpsamt.