3. Lösn: Inspektion antyder att differentialformen är exakt, eller ekvivalent att $\overline{F}(x,y,z) = (x\sin x, z\sin yz, y\sin yz)$ är konservativt.

Ty $\int x\sin x\,dx \underset{\text{PI}}{=} -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

och $\nabla(-\cos yz) = (0, z\sin yz, y\sin yz)$, så vi får att $\nabla(-x\cos x + \sin x - \cos yz) = \overline{F}$, dvs

$U(x,y,z) = -x\cos x + \sin x - \cos yz$ är en potential till F.

Vi noterar också att γ går från $r(0) = (1,1,1)$ till $r(1) = (e, 1/e, e)$, och enligt sats har vi då att

$$\int_\gamma x\sin x\,dx + z\sin yz\,dy + y\sin yz\,dz = \int_\gamma \overline{F}\cdot dr =$$

$$= U(e, 1/e, e) - U(1,1,1) = (-e\cos e + \sin e - \cos 1) - (-1\cos 1 + \sin 1 - \cos 1) = \cos 1 - e\cos e + \sin e - \sin 1$$

Svar: Kurvintegralen blir $\cos 1 - e\cos e + \sin e - \sin 1$

4. Lösn: Vi noterar att: $\sin(1/k - k) = -\sin(k - 1/k)$,

så $\sin(1/k + k) + \sin(1/k - k) = \sin(k + \frac{1}{k}) - \sin(k - \frac{1}{k})$.

M h a Taylorutveckling har vi också att

$$\sin(k+\tfrac{1}{k}) - \sin(k - \tfrac{1}{k}) = \sin'(k)\cdot\frac{2}{k} + \frac{\sin''(k + \frac{\theta_k}{k})\cdot(\frac{2}{k})^2}{2} =$$

$$= \frac{2\cos k}{k} - \frac{2\sin(k + \frac{\theta_k}{k})}{k^2}, \quad \text{där } -1 \le \theta_k \le 1.$$

Vi kan därför skriva $\sum_1^\infty \sin(1/k + k) + \sin(1/k - k)$ som

$\sum_1^\infty \left(\frac{2\cos k}{k} - \frac{2\sin(k + \frac{\theta_k}{k})}{k^2}\right)$, och det följer att om både $\sum_1^\infty \frac{2\cos k}{k}$ och $\sum_1^\infty \frac{2\sin(k+\frac{\theta_k}{k})}{k^2}$ är konvergenta,

då är också $\sum_1^\infty \left(\frac{2\cos k}{k} - \frac{2\sin(k+\frac{\theta_k}{k})}{k^2} \right)$ konvergent.

För att visa att $\sum_1^\infty \frac{2\cos k}{k}$ är konvergent använder vi Dirichlets test:

Låt $a_k := \frac{2}{k}$, $b_k := \cos k$.

1) a_k är uppenbart avtagande ✓

2) a_k går uppenbart mot 0 ✓

3) $B_n := \sum_1^n b_k$ är begr. enl. Lemma ✓

$$\xRightarrow[\text{Dirichlet}]{} \sum_1^\infty \frac{2\cos k}{k} \text{ är konv.}$$

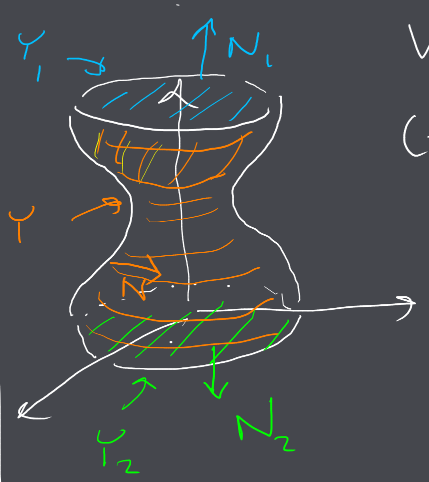
För att visa att $\sum_1^\infty -\frac{2\sin(k+\frac{\theta_k}{k})}{k^2}$ är konv. använder vi jämförelsekriteriet.

Vi noterar att $\left| -\frac{2\sin(k+\frac{\theta_k}{k})}{k^2} \right| \le \frac{2}{k^2}$,

$\sum_1^\infty \frac{2}{k^2}$ är konv. $\xRightarrow[\text{jmf.krit.}]{} \sum_1^\infty -\frac{2\sin(k+\frac{\theta_k}{k})}{k^2}$ är abs. konv. och därför också konv.

Sammantaget får vi alltså att $\sum_1^\infty \sin(1/k+k)+\sin(1/k-k)$ är konvergent.

5. Låt $K:\ x^2+y^2 \le 1+\cos^2 z,\ 0 \le z \le \pi$.



Vi får då att $\partial K = Y_1 + Y_2 - Y$ (eftersom insidan av Y är positiv), så det följer att

$$\iint_Y F\cdot N\,dS = \iint_{Y_1} F\cdot N_1\,dS + \iint_{Y_2} F\cdot N_2\,dS - \iint_{\partial K} F\cdot N_{\partial K}\,dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iint_{Y_1} F\cdot N_1\,dS + \iint_{Y_2} F\cdot N_2\,dS - \iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz.$$

Vi noterar att $N_1 = (0,0,1)$ och att $z = \pi$ på Y_1

så $$\iint_{Y_1} \bar{F} \cdot N_1 \, dS = \iint_{Y_1} x \underbrace{\sin \pi}_{=0} \, dS = 0.$$

Vi har också att $N_2 = (0,0,-1)$ och $z = 0$ på Y_2,

så $$\iint_{Y_2} \bar{F} \cdot N_2 \, dS = \iint_{Y_2} \underbrace{-x \sin 0}_{=0} \, dS = 0.$$

Vidare är $\operatorname{div} \bar{F} = 1 - x\cos z + x \cos z = 1$,

så $$\iiint_K \operatorname{div} \bar{F} \, dx\,dy\,dz = \iiint_K dx\,dy\,dz.$$

Vi inför cylindriska koordinater: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$,

$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,z)} = r$, vårt nya område blir då

$E: 0 \le r \le \sqrt{1+\cos^2\theta}, \; 0 \le \theta \le 2\pi, \; 0 \le z \le \pi.$

Vi får därför att:

$$\iiint_K dx\,dy\,dz \underset{VB}{=} \iiint_E r\,dr\,d\theta\,dz \underset{II}{=} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sqrt{1+\cos^2 z}} \left(\int_0^{2\pi} r\,d\theta \right) dr \right) dz =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1+\cos^2 z}} dz = \pi \int_0^{\pi} (1+\cos^2 z)\,dz = \pi \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2z}{2}\right) dz =$$

$$= \pi \left[\frac{3z}{2} + \frac{\sin 2z}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{3\pi^2}{2}.$$

Sammantaget får vi alltså att

$$\iint_Y \bar{F} \cdot N \, dS = -\frac{3\pi^2}{2}.$$

<u>Svar:</u> $\iint_Y F \cdot N \, dS = -\frac{3\pi^2}{2}.$

6. Lösn: Låt $*$: $(1-x^2)y'' = y$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Vi gör ansatzen $y(x)=\sum_0^\infty a_k x^k$, och vi antar att potensserien har konv.radie $R>0$.

Vi får: $y'(x) = \left(\sum_0^\infty a_k x^k\right)' \underset{\text{Sats}}{=} \sum_0^\infty (a_k x^k)' = \sum_1^\infty k a_k x^{k-1}$,

$$y''(x) = \left(\sum_1^\infty k a_k x^{k-1}\right)' \underset{\text{Sats}}{=} \sum_2^\infty k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_0^\infty (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k$$

$*$) kan därför skrivas som

$$\sum_0^\infty (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_2^\infty k(k-1)a_k x^k = \sum_0^\infty a_k x^k$$ vilket

implicerar att $2a_2=a_0$, $2\cdot3a_3=a_1$,

och för $k\geq2$: $(k+1)(k+2)a_{k+2} = (k^2-k+1)a_k$,

dvs $a_{k+2} = \frac{(k^2-k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$.

Begynnelsevärdena ger också att $a_0=y(0)=0$, $a_1=y'(0)=1$.

Vi ser därför att $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=\frac{a_0}{2}=0$, $a_3=\frac{a_1}{2\cdot3}=\frac{1}{3!}$,

och vidare för $k\geq2$: $a_{2k}=0$,

$$a_{2k+1} = \frac{((2k-1)^2-(2k-1)+1)}{(2k)(2k+1)}a_{2k-1} = \frac{(4k^2-6k+3)a_{2k-1}}{(2k)(2k+1)} = \frac{\prod_{m=1}^{k}(4m^2-6m+3)}{(2k+1)!}.$$

Vi får alltså att $y(x)=\sum_0^\infty a_k x^k = \sum_{k=0}^\infty b_k x^{2k+1}$ löser $*$ där

$b_0=1$, $b_1=\frac{1}{6}$, och för $k\geq2$: $b_k = \frac{\prod_{m=1}^{k}(4m^2-6m+3)}{(2k+1)!}$.

Notera att lösningen endast är giltig i konvergensintervallet $(-R,R)$ där R är konv.radien. Vi måste därför bestämma R.

Vi ser att $\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_k|^{1/k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} |a_{2k+1}|^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}\right|}$

givet att gränsvärdet finns.

Men $\left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}\right| = \frac{4k^2-6k+3}{2k(2k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, så $R = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$.

Vi får alltså att lösningen är giltig på intervallet

$(-1,1)$.

Svar: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}$, där $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{6}$, och för

$k \geq 2$, $b_k = \frac{\prod_{n=1}^{k}(4n^2-6n+3)}{(2k+1)!}$, giltig på $(-1,1)$.

7. Lösn: Vi behöver alltså visa att givet att ∂D_1 och ∂D_2 är nollmängder, så följer det att även $\partial(D_1 \cup D_2)$ är en nollmängd. Vi börjar med att visa att $\partial(D_1 \cup D_2) \subseteq \partial D_1 \cup \partial D_2$.

Låt $a \in \partial(D_1 \cup D_2)$. Detta betyder att för $\forall r > 0$ så skär bollen $B(a,r)$ både $D_1 \cup D_2$ och komplementet $(D_1 \cup D_2)^c = D_1^c \cap D_2^c$. Det följer att $B(a,r)$ skär både D_1^c och D_2^c för alla $r > 0$. Och antingen måste skära $B(a,r)$ D_1 för godt. små r, vilket ger att $a \in \partial D_1$, eller så måste $B(a,r)$ skära D_2 för godt. små r, dvs $a \in \partial D_2$, för annars kan inte $B(a,r)$ skära $D_1 \cup D_2$ för godt. små r.

Detta visar att $\partial(D_1 \cup D_2) \subseteq \partial D_1 \cup \partial D_2$.

Låt nu $\varepsilon > 0$. Eftersom ∂D_1 o ∂D_2 är nollmängder så kan vi hitta ett ändligt antal axelparallella rektanglar $\Delta_1^1, \dots, \Delta_N^1$ och $\Delta_1^2, \dots, \Delta_M^2$ s.a.

$\partial D_1 \subseteq \bigcup_1^N \Delta_i^1$, $\partial D_2 \subseteq \bigcup_1^M \Delta_i^2$ o $\sum_1^N \text{Area}(\Delta_i^1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ o

$\sum_1^M \text{Area}(\Delta_i^2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Vi ser nu att $\partial(D_1 \cup D_2) \subseteq \partial D_1 \cup \partial D_2 \subseteq \left(\bigcup_1^N \Delta_i^1\right) \cup \left(\bigcup_1^M \Delta_i^2\right)$

och $\sum_1^N \text{Area}(\Delta_i^1) + \sum_1^M \text{Area}(\Delta_i^2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, vilket

visar att $\partial(D_1 \cup D_2)$ är en nollmängd, dvs

att $D_1 \cup D_2$ är mätbar.