Lösningsförslag MMG300, del 1, 210319

(1) Stationära punkter:

$f'_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0$ (1)

$f'_y = 2xy + 2y = 2y(x+1) = 0$ (2)

Fall 1: $y = 0$

(1) $\Rightarrow$ $3x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ el. $x = -\frac{5}{3}$

Fall 2: $x = -1$

(1) $\Rightarrow$ $y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ 4 kandidater: $(0,0)$, $(-5/3, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1,-2)$.

Kvadratiska former:

$f''_{xx} = 12x + 10$

$f''_{xy} = 2y$

$f''_{yy} = 2x + 2$

- $Q_{(0,0)} = 10h^2 + 2k^2$

  tecken $++$ $\Rightarrow$ pos. def $\Rightarrow$ f har lokalt min.

- $Q_{(-5/3,0)} = -10h^2 - \frac{4}{3}k^2$

  tecken $--$ $\Rightarrow$ neg. def. $\Rightarrow$ f har lokalt max.

- $Q_{(-1,2)} = -2h^2 + 2\cdot 4hk + 0\cdot k^2$
  $= -2(h-2k)^2 + 8k^2$

  tecken $-+$ $\Rightarrow$ indef. $\Rightarrow$ f har sadelpunkt.

- $Q_{(-1,-2)} = -2h^2 + 2\cdot(-4)hk + 0k^2$
  $= -2(h+2k)^2 + 8k^2$

  tecken $-+$ $\Rightarrow$ indef. $\Rightarrow$ f har sadelpunkt.

Svar: f har lokalt min i $(0,0)$ och lokalt max i $(-5/3, 0)$.

(2) Låt $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.

Normalvektor till $f=1$

i (a,b,c) är

$\nabla f = (2a, 2b, -2c) \parallel (a,b,-c)$

Kraven på (a,b,c) ger att:

$\nabla f \cdot [(a,b,c)-(2,2,3)] = 0$

$\nabla f \cdot [(a,b,c)-(3,3,5)] = 0$.

Då $a^2+b^2-c^2=1$, (1)

ger detta

$1 = 2a+2b-3c$ (2)

$1 = 3a+3b-5c$ (3)

$3\cdot(2) - 2\cdot(3) \Rightarrow$

$1 = c$

$(2) \Rightarrow a+b=2$

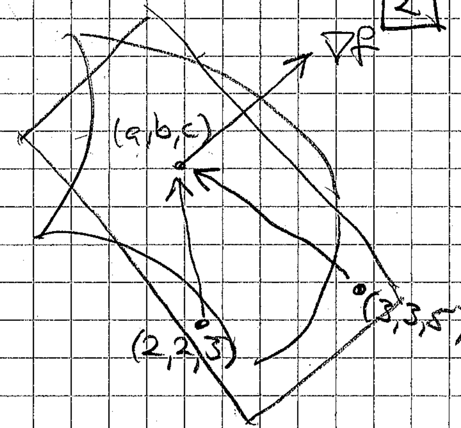
$(1) \Rightarrow a^2+(2-a)^2-1=1$

$\Leftrightarrow 2a^2-4a+2=0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2=0$

så $a=1=b$

<u>Svar</u>: $(a,b,c)=(1,1,1)$.



(3) Kedjeregeln $\Rightarrow$

$f'_x = u'_x f'_u + v'_x f'_v = y f'_u + f'_v$

$f'_y = u'_y f'_u + v'_y f'_v = x f'_u + 0 \cdot f'_v$

Insatt i PDEn:

$x(y f'_u + f'_v) - y(x f'_u) = f$

$\Leftrightarrow x\cdot f'_v = f$

$\Leftrightarrow v \cdot f'_v - f = 0$

Integrerande faktor $\Rightarrow \frac{1}{v} f'_v - \frac{1}{v^2} f = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{v} f\right)'_v = 0$

$\Rightarrow f(u,v) = C(u)\cdot v$, där $C(u)$ är en godtycklig envariabelfunktion av u.

Allmän lösning: $f(x,y) = x\cdot C(xy)$

Partikulär lösning:

$$f(x, 1/x^2) = x\cdot C(1/x) \quad , \forall x>0.$$

$$\quad\quad \| \; x\cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

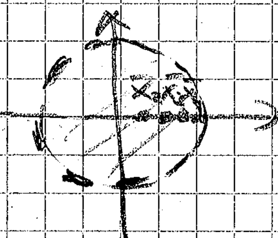
Sätt $t = 1/x$: $\quad C(t) = \ln(1+t)$, $\forall t>0$

Sätt $t = xy$:

$$f(x,y) = x\cdot \ln(1+xy)$$

Svar: $f(x,y) = x\cdot \ln(1+xy)$

(4) (a) Låt $\bar{x}_k = (1-\frac{1}{k}, 0)$.

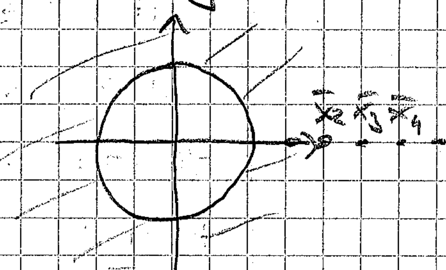


$\bar{x}_k \to \bar{x} = (1,0) \notin M$.

Därför konv. alla delföljder mot $\bar{x}$, enligt GLO Prop. 1.5.

Svar: Ja, $\left((1-\frac{1}{k}, 0)\right)_{k=1}^{\infty}$ är en sådan följd

(b) Låt $\bar{x}_k = (k,0)$.



Varje delföljd är obegränsad, och därmed ej konvergent, enligt GLO Prop. 1.3.

Svar: Ja, $\left((k,0)\right)_{k=1}^{\infty}$ är en sådan följd

(c) M är sluten och begränsad, således kompakt.

Enligt GLO sats 1.15 har varje $(\bar{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ i M en delföljd som konv. mot punkt i M.

Svar: Nej, ingen sådan följd existerar

5 $f(x,y,z) = x + yz$ är kontinuerlig

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2+y^2+z^2 = 9\}$ är kompakt.

Satsen om största och minsta värde visar att

f antar max & min på D.

Kandidater är punkter på D där

$\nabla f \parallel \nabla g$, med $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

$\nabla f = (1, z, y)$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z) \parallel (x,y,z)$

Villkoret blir

$$\begin{cases} x = \lambda \cdot 1 & (1) \\ y = \lambda \cdot z & (2) \\ z = \lambda \cdot y & (3) \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 9 \qquad (4)$$

(1) och (2) i (3) $\Rightarrow$

$z = x^2 z \iff z(x^2-1) = 0$

Fall 1: $z = 0$

(2) $\Rightarrow y = 0$

(4) $\Rightarrow x^2 = 9$, $x = \pm 3$

Fall 2: $x = \pm 1$

(1), (2) och (3) $\Rightarrow y = \pm z$

(4) $\Rightarrow 1 + 2y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 2$

Jämförelse av 6 kandidater:

$f(3,0,0) = 3$

$f(-3,0,0) = -3$

$\left.\begin{array}{l} f(1,2,2) = 5 \\ f(1,-2,-2) = 5 \end{array}\right\}$ max

$\left.\begin{array}{l} f(-1,2,-2) = -5 \\ f(-1,-2,2) = -5 \end{array}\right\}$ min

Då D är sammanhängande, visar satsen om mellanliggande värden att f antar alla värden mellan -5 och $+5$ också.

Svar: $f(D) = [-5, 5]$.

(6) (a) $M = [-1, 1] \Rightarrow \partial M = \{-1, 1\}$

(b) Oavsett vad M är, är ∂M en sluten mängd.

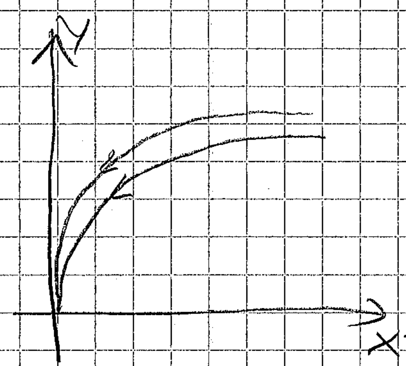
Ty $\partial M = \complement(\underbrace{\mathrm{Int}\, M}_{\text{öppen}} \cup \underbrace{\mathrm{Int}(\complement M)}_{\text{öppen}})$.

Eftersom $(-1, 1)$ ej är sluten, existerar ej M med $\partial M = (-1, 1)$.

(c) $M = [-1, 1] \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} ; -1 \leq x \leq 1\}$

$\Rightarrow \partial M = [-1, 1]$.

(7) $f(x, y) = e^{y \cdot \ln x}$



$\ln x \to -\infty$ då $x \to 0$, så

$\ln \frac{1}{x} = -\ln x \to +\infty$ då $x \to 0$.

För givet $a > 0$, betrakta kurvan

$y = \underbrace{a / \ln \frac{1}{x}}_{\text{går långsamt mot } 0 \text{, då } x \to 0}$, $x > 0$.

$f(x, a/\ln\frac{1}{x}) = e^{\frac{a}{-\ln x} \cdot \ln x} = e^{-a} =$ konstant längs kurvan.

Olika $a > 0$ ger olika gränsvärden, så

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y$ existerar ej.