Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2025-01-07

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Låt $\hat{x}$ är en approximation av ett exakt värde x där $|x - \hat{x}| \leq \delta$. Använd Taylors formel för att uppskatta $|f(x) - f(\hat{x})|$ givet funktionen $f = 15x^2 + 5x + 1$. Notera, att vi känner $\hat{x}$ och δ men inte x.
  (2p)
- b) Skriv talet -9 i binär form som flyttal i dubbel precision. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form.
  (3p)
- c) Antag att matrisen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har rank n. Visa att $A^T A$ är symmetrisk och positivt definit.
  (1p)
- d) Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$. Använd Taylors formel för $g(x_k)$ och ge en bevis för att vi får kvadratisk konvergens för fixpunktsiteration $x_{k+1} = g(x_k)$ om $g'(x^*) = 0$.
  (3p)

2.
Vi vill hitta en funktion på formen

$$f(x) = \cos ax + \sin bx + e^{cx^2},$$

som satisfierar följande villkor: $f(1) = 1, f'(1) = 10, f''(1) = 5$ (a, b och c skall alltså bestämmas). Ställ upp ett system av ekvationer för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand.
(3p)

3.

- a) Hur beräknar vi $p(t) = -10t^3 + 5t^2 - 3t + 1$ med hjälp av Horners metod?
  (1p)
- b) Transformera Chebyshevpunkterna

$$t_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right],\ k = 1, 2, ..., n, t_k \in [-1, 1]$$

  från intervalet $[-1, 1]$ till intervalet $[10, 15]$ och skriv hur ska beräknas transformerade Chebyshevpunkterna c_k.
  (2p)

4.

- a) Beräkna integralet

$$\int_5^{10} f(t)dt = \int_5^{10} (5t+1)dt$$

med hjälp av Gausskvadratur med 3 vikter.
Notera, att Gausskvadratur med 3 vikter är:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i),$$

var $x_1 = -\sqrt{3/5}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3/5}, \omega_1 = \omega_3 = 5/9, \omega_2 = 8/9.$
(2p)

- b)
Beräkna w, x_1, x_2, i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal m som möjligt. Vad blir detta gradtal ? Notera: <u>använd inte Gausskvadratur</u> i den här övningen.

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = w x_1^k + w x_2^k, \quad k = 0, 1, ..., m.$$

(2p)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} x'(t) & = 3t + xy + z'(t)y'(t), \\ y''(t) & = 5t^2 + y(t)z'(t) + y'(t), \\ z''(t) & = z(t) - y'(t) + t, \\ x(0) & = 1, \\ y(0) & = 1, \\ y'(0) & = 2, \\ z(0) & = 2, \\ z'(0) & = 2. \end{cases}$$

(2p)

- b) Sätt upp implicit Eulers, eller bakåt-Eulers, metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)t - y(t)t^2 + \cos(\pi t), \\ y'(t) = 5x(t) + 10y(t) - \sin(\pi t), \\ x(0) = 0. \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(2p)

6.

Vi har följande modell med känt $C = const. > 0$:

$$R \approx Ce^{(p_1+p_2T+p_3T^2)/(1+p_2)}$$

och vill bestämma parametrarna p_1, p_2, p_3 givet mätvärden $(T_1, R_1), (T_2, R_2), ..., (T_m, R_m)$. Gör en lämplig transformation och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem i formen $\min_p \|Ap - b\|_2^2$. Matrisen A samt vektorerna b och p skall redovisas.

(3p)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2025-01-07

1.

- a) Vi vet att absoluta felet $e_{abs} = |x - \hat{x}| \leq \delta$ eller $-\delta \leq x - \hat{x} \leq \delta$ och då $\hat{x} - \delta \leq x \leq \hat{x} + \delta$. Taylors formel ger

$$f(x) = f(\hat{x} + x - \hat{x}) = f(\hat{x}) + (x - \hat{x})f'(\xi), \xi \in (x, \hat{x}),$$

så

$$|f(x) - f(\hat{x})| \leq \delta \max_{\xi \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)} |f'(\xi)|.$$

Eftersom derivatan, $f'(x) = (15x^2 + 5x + 1)' = 30x + 5$, är strängt växande, då får vi följande uppskattning för $|f(x) - f(\hat{x})|$:

$$|f(x) - f(\hat{x})| \leq \delta \max_{\xi \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)} |f'(\xi)| = \delta \max_{\xi \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)} |30\xi + 5| = \delta(30(|\hat{x}| + \delta) + 5).$$

- b) Vi kan skriva talet -9 som $-9 = -[1+0.125] \cdot 2^3$. Exponenten är 3 då: $3+1023 = 1026 = 1024 + 2 = 2^{10} + 2^1$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.125 = 0 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/8 + 0....$ Vi får följande binär representation för -9 i dubbel precision:

$$|1| \underbrace{10000000010}_{exponenten\ 11\ bitar} | \underbrace{00100....0}_{mantissa\ 52\ bitar} |$$

där 1 är kod för $-$, exponenten 11 bitar kodas som 10000000010 och mantissa 52 bitar kodas som 00100....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:

1100 0000 0010 0010 ... 0000

och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned}
&1100 = 0 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3 = 12 = c, \\
&0000 = 0, \\
&0010 = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 0 * 2^2 + 0 * 2^3 = 2. \cdots
\end{aligned}$$

Hexadecimalt (bas 16) format för -9 är:

$$c022000000000000.$$

- c)

  Matrisen A^TA är symmetrisk eftersom $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$.
  Sedan $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T(A^TA)x = (Ax)^T(Ax) = ||Ax||_2^2 \geq 0.$$

  Så frågan är om det kan vara noll även om $x \neq 0$, eller om

$$||Ax||_2 = 0 \to Ax = 0$$

  vilket inte kan inträffa eftersom A har full kolonnrank.
- d) Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$

$$x_{k+1} - x^* = g(x_k) - x^* = \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + \underbrace{g'(x^*)}_{=0}(x_k - x^*) + \frac{1}{2}g'(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \right) - x^*$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{g'(\Theta_k)}_{\neq 0}(x_k - x^*)^2, \quad \Theta_k \in (x^*, x_k)$$

  så att

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{1}{2}|g'(\Theta_k|.$$

  Om g är tillräckligt snäll kommer $g'(\Theta_k) < C < \infty$ då $k \to \infty$ vi har kvadratisk konvergens $r = 2$.

2. Vi inför vektorn $M = [a, b, c]^T$ och skriver $f(M)$ istället för $f(a, b, c)$. Ekvationerna blir:

$$f(1) - 1 = 0 \to f_1 = \cos(a) + \sin(b) + e^c - 1 = 0,$$
$$f'(1) - 10 = 0 \to f_2 = -a\sin(a) + b\cos(b) + 2ce^c - 10 = 0,$$
$$f''(1) - 5 = 0 \to f_3 = -a^2\cos(a) - b^2\sin(b) + 2ce^c + 4c^2e^c - 5 = 0.$$

Newtons metod kan skrivas:

$$M_{k+1} = M_k - [J(M_k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \cos(a_k) + \sin(b_k) + e^{c_k} - 1 \\ -a_k\sin(a_k) + b_k\cos(b_k) + 2c_ke^{c_k} - 10 \\ -a_k^2\cos(a_k) - b_k^2\sin(b_k) + 2c_ke^{c_k} + 4c_k^2e^{c_k} - 5 \end{bmatrix},$$

där $J(M_k)$ är Jakobian på iteration k i Newtons metod, och Jakobianen $J(M_k)$ räknas som

$$J(M_k) = \begin{bmatrix} (f_1)'_a & (f_1)'_b & (f_1)'_c \\ (f_2)'_a & (f_2)'_b & (f_2)'_c \\ (f_3)'_a & (f_3)'_b & (f_3)'_c \end{bmatrix} (M_k)$$

och var

$$\begin{aligned}
(f_1)'_a &= -\sin(a_k),\\
(f_1)'_b &= \cos(b_k),\\
(f_1)'_c &= e^{c_k},\\
(f_2)'_a &= -\sin(a_k) - a_k\cos(a_k),\\
(f_2)'_b &= \cos(b_k) - b_k\sin(b_k),\\
(f_2)'_c &= 2e^{c_k}(1+c_k),\\
(f_3)'_a &= -2a_k\cos(a_k) + a_k^2\sin(a_k),\\
(f_3)'_b &= -2b_k\sin(b_k) - b_k^2\cos(b_k),\\
(f_3)'_c &= 2e^{c_k} + 2c_k e^{c_k} + 8c_k e^{c_k} + 4c_k^2 e^{c_k} = 2e^{c_k}(1+5c_k+2c_k^2).
\end{aligned}$$

3.

- a) Horner's method för polynom av grad 3 är:

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 = x_1 + t(x_2 + t(x_3 + t x_4))$$

eller för $p(t) = -10t^3 + 5t^2 - 3t + 1$ är:

$$p(t) = 1 - 3t + 5t^2 - 10t^3 = 1 + t(-3 + t(5 + t(-10))).$$

- b)

När t ligger i ett annat intervall, $[\alpha, \beta]$ får vi göra en linjär avbilding $kt + b$ av Chebyshevpunkterna $[-1, 1]$ till detta intervall $[\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned}
k \cdot (-1) + b &= \alpha,\\
k \cdot 1 + b &= \beta,
\end{aligned}$$

då

$$\begin{aligned}
b &= \alpha + k,\\
k \cdot 1 + \alpha + k &= \beta,
\end{aligned}$$

och från andra ekvation i systemet ovan har vi

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\beta - \alpha}{2},\\
b &= \alpha + k = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},
\end{aligned}$$

och linjär avbilding av Chebyshevpunkterna till intervall $[\alpha, \beta]$ är:

$$kt_k + b = \frac{\beta - \alpha}{2} \underbrace{t_k}_{[-1,1]} + \frac{\alpha + \beta}{2} \tag{0.1}$$

så de transformerade Chebyshevpunkterna

$$t_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right],\ k = 1, 2, ..., n$$

blir

$$-\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

I vårt fall när $\alpha = 10$ och $\beta = 15$ de transformerade Chebyshevpunkterna c_k blir

$$c_k = -\frac{15-10}{2}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \frac{10+15}{2} \to c_k = -\frac{5}{2}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \frac{25}{2}.$$

4.

- a) Om vi ska approximera integral

$$\int_a^b f(t)dt,$$

var t ligger i ett intervall $[a, b]$, och x ligger på $[-1, 1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

$$t = kx + m.$$

För att bestämma koefficienter k, m ska vi lösa system:

$$\begin{aligned} k \cdot (-1) + m &= 5, \\ k \cdot 1 + m &= 10, \end{aligned}$$

då

$$m = 7.5,\ k = 2.5.$$

Linjär avbilding är:

$$t = 2.5x + 7.5.$$

Notera att

$$dt = 2.5\ dx; f(t) = f(2.5x + 7.5),$$

integral $\int_5^{10} f(t)dt$ ska beräknas som:

$$\begin{aligned} \int_5^{10} f(t)dt &= 2.5 \cdot \int_{-1}^{1} f(2.5x + 7.5)\ dx \\ &\approx 2.5 \cdot \sum_{i=1}^{3} w_i f(2.5x_i + 7.5) \approx 2.5 \sum_{i=1}^{3} w_i(5(2.5x_i + 7.5) + 1) \\ &= 2.5(5/9(5(2.5(-\sqrt{3/5}) + 7.5) + 1) + 8/9(5(2.5 \cdot 0 + 7.5) + 1) \\ &+ 5/9(5(2.5(\sqrt{3/5}) + 7.5) + 1)) \approx 2.5(16.0097 + 34.2222 + 26.7681) \approx 192.5 \end{aligned}$$

var $\omega_i, i = 1, ..., n$ är Gaussvikter och $x_i, i = 1, 2, 3$ är Gausspunkter.

b)

Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, ..., m$ för maximalt m. Vi beräknar först

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^{k+1}}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Ekvationerna för olika $k = 0, 1, 2, ...$ i $wx_1^k + wx_2^k$ blir:

$$\begin{aligned} 2 &= w + w, k = 0, \\ 0 &= wx_1 + wx_2, k = 1, \\ 2/3 &= wx_1^2 + wx_2^2, k = 2 \end{aligned}$$

Första ekvationen ger $w = 1$. Från andra ekvationen: $x_1 = -x_2$. Från tredje ekvationen och eftersom $x_1 < x_2$ får vi: $x_1 = \sqrt{1/3}, x_2 = -\sqrt{1/3}$. Det polynomiella gradtalet är $m = 2$.

Vi har för kvadraturformel $\int_{-1}^{1} x^k dx = wx_1^k + wx_2^k, k = 0, 1, 2$: vikt $\omega = 1$, punkterna $x_1 = \sqrt{1/3}, x_2 = -\sqrt{1/3}$.

5.

- a) Sätt

$$\begin{aligned} u_1(t) &= x(t), \\ u_2(t) &= y(t), \\ u_3(t) &= y'(t), \\ u_4(t) &= z(t), \\ u_5(t) &= z'(t). \end{aligned}$$

Vi får följande första ordningens system:

$$\begin{cases} u_1'(t) & = 3t + u_1(t)u_2(t) + u_5(t)u_3(t), \\ u_2'(t) & = u_3(t), \\ u_3'(t) & = 5t^2 + u_2(t)u_5(t) + u_3(t), \\ u_4'(t) & = u_5(t), \\ u_5'(t) & = u_4(t) - u_3(t) + t, \\ u_1(0) & = 1, \\ u_2(0) & = 1, \\ u_3(0) & = 2, \\ u_4(0) & = 2, \\ u_5(0) & = 2. \end{cases}$$

- b) Se föreläsning 16. Implicit, eller bakåt-Eulers metod är:
  $v_{k+1} = v_k + \tau f(t_{k+1}, v_{k+1})$ för diskretiseringen $v'(t) \approx \frac{v_{k+1}-v_k}{\tau}$ var $v_k = v(t_k)$.
  Bakåt-Eulers metod för vårt problem är:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = x_{k+1}t_{k+1} - y_{k+1}(t_{k+1})^2 + \cos(\pi t_{k+1}),$$
$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = 5x_{k+1} + 10y_{k+1} - \sin(\pi t_{k+1}),$$

som kan skrivas om :

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k & = \tau x_{k+1}t_{k+1} - \tau y_{k+1}(t_{k+1})^2 + \tau\cos(\pi(t_k + \tau)), \\ y_{k+1} - y_k & = 5\tau x_{k+1} + 10\tau y_{k+1} - \tau\sin(\pi(t_k + \tau)), \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} x_{k+1} - \tau x_{k+1}(t_k + \tau) + \tau y_{k+1}(t_k + \tau)^2 & = x_k + \tau\cos(\pi(t_k + \tau)), \\ -5\tau x_{k+1} + y_{k+1} - 10\tau y_{k+1} & = y_k - \tau\sin(\pi(t_k + \tau)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \tau(t_k + \tau))x_{k+1} + \tau(t_k + \tau)^2 y_{k+1} & = x_k + \tau\cos(\pi(t_k + \tau)), \\ -5\tau x_{k+1} + (1 - 10\tau)y_{k+1} & = y_k - \tau\sin(\pi(t_k + \tau)). \end{cases}$$

För att hitta x_{k+1}, y_{k+1} konstruerar vi systemet av ekvationer $Av = b$ med okänt vektorn $v = [x_{k+1}, y_{k+1}]^T$, känt vektor $b = [x_k+\tau\cos(\pi(t_k+\tau)), y_k-\tau\sin(\pi(t_k+\tau))]^T$ och matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \tau(t_k + \tau) & \tau(t_k + \tau)^2 \\ -5\tau & 1 - 10\tau \end{bmatrix}.$$

För $k = 0$ har vi : $[x_0, y_0]^T = [x(t_0), y(t_0)]^T = [x(0), y(0)]^T = [0, 0]^T$. Första iteration i Bakåt-Eulers metod ska räknas som:

$$[x_1, y_1]^T = A^{-1}[\tau\cos(\pi\tau), -\tau\sin(\pi\tau)]^T.$$

6.
Modellproblemet är:

$$R \approx Ce^{(p_1+p_2T+p_3T^2)/(1+p_2)}$$

Logaritmera båda sidor :

$$\ln R = \ln C + \frac{p_1 + p_2T + p_3T^2}{1 + p_2}.$$

Skriv om:

$$\ln R(1 + p_2) = \ln C(1 + p_2) + p_1 + p_2T + p_3T^2$$

eller

$$\ln R + \ln R p_2 = \ln C + \ln C\ p_2 + p_1 + p_2T + p_3T^2$$

Samla all termer med parametrar på vänster sida och termer med kända värderna - på höger sida:

$$p_1 + p_2(T + \ln C - \ln R) + p_3\ T^2 = \ln R - \ln C.$$

eller

$$p_1 + p_2(T + \ln \frac{C}{R}) + p_3\ T^2 = \ln \frac{R}{C}$$

Konstruera matris A för att hitta $p = [p_1, p_2, p_3]^T$ i minstakvadratproblem $\min_p \|Ap - b\|_2$, där raderna i A innehåller

$$[1, T_k + \ln \frac{C}{R_k},\ T_k^2], \quad k = 1, ..., m.$$

och vectorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 - \ln C \\ \ln R_2 - \ln C \\ ... \\ \ln R_k - \ln C \\ ... \\ \ln R_m - \ln C \end{bmatrix}, k = 1, ..., m.$$