3. Vi tänker använda gränsvärdesformen av jämförelsekriteriet, och vi jämför med den harmoniska serien $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som ju är divergent.

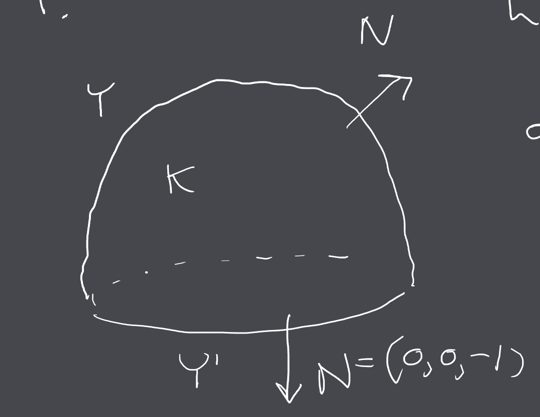
Vi noterar att $\dfrac{\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\right)^2}{1/k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)}{1/\sqrt{2k}}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) - \overset{=0}{\arctan 0}}{1/\sqrt{2k}}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}\big(\underbrace{\arctan'(0)}_{=1}\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} > 0 \underset{\text{jmf. krit.}}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\right)^2 \text{ div. ty } \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k} \text{ div.}$$

Svar: $\sum_{1}^{\infty}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\right)^2$ är divergent.

4.



Låt $K: x^2+y^2+z^6 \le 1,\ z \ge 0$ och $Y': z=0,\ x^2+y^2 \le 1$ orienterad nedåt. Då får vi att $\partial K = Y + Y'$.

Notera också att $\operatorname{div} F = y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2 = 0.$

Vi får att $\text{Flödet} = \iint_{Y} F\cdot N\,dS = \iint_{\partial K} F\cdot N\,dS \; -$

$$- \iint_{Y'} F\cdot N\,dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_{K} \underset{=0}{\operatorname{div} F}\,dx\,dy\,dz - \iint_{Y'} F\cdot \underset{=(0,0,-1)}{N}\,dS =$$

$$= -\iint_{Y'} (-1)\big(\underset{=0}{z}(x^2-y^2)+x^2\big)\,dS = \left[\begin{array}{l}\text{Param: } r(x,y)=(x,y,0)\\ D: x^2+y^2\le 1,\ dS = dx\,dy\end{array}\right] =$$

$$= \iint_{D} x^2\,dx\,dy = \left[\overset{\text{polära koord.}}{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}},\ E: 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\right| = r\right] =$$

$$\underset{\text{VB}}{=} \iint_E r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta \underset{\text{II}}{=} \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}} d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Svar: Flödet är $\pi/4$.

5. Notera att $\overset{u_k(x):=}{\sin\left((-1)^k x/k\right)} = (-1)^k \sin(x/k)$

är C^1 på $\mathbb{R}$, och $\left((-1)^k \sin(x/k)\right)' = \frac{(-1)^k\cos(x/k)}{k}$.

Enl. sats är $\sum_1^\infty u_k(x)$ likf. konv. på $I=(a,b)$

och $\left(\sum_1^\infty u_k(x)\right)' = \sum_1^\infty u_k'(x)$ om:

i) $\exists\, x_0 \in I : \sum_1^\infty u_k(x_0)$ konv.

ii) $\sum_1^\infty u_k'(x)$ likf. konv. på I.

Låt $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

i) $x_0 = 0$: $\sum_1^\infty (-1)^k \sin(0/k) = \sum_1^\infty 0$ konv. ✓

ii) Använder Dirichlets test med

$f_k(x) := \frac{\cos(x/k)}{k}$, $g_k(x) := (-1)^k$.

1. Låt $h(y) := \frac{\cos(x/y)}{y}$, $h'(y) = \frac{\frac{\sin(x/y)}{y} - \cos(x/y)}{y^2} \leq$

$\leq \frac{\frac{1}{y} - \cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} \leq 0$ om $y \geq 2$ och $x \in I$

ty då är $\cos\left(\frac{x}{y}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, så

$\frac{1}{y} - \cos\left(\frac{x}{y}\right) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 0$. Detta visar

att $f_k(x)$ är avtagande i k för $k \geq 2$.

2. $\sup_{x\in I} \left|\frac{\cos(x/k)}{k}\right| \le \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ dvs

$$\frac{\cos(x/k)}{k} \xrightarrow[I]{\text{likf.}} 0 .$$

3. $\sum_1^n (-1)^k$ likf. begr

$$\underset{\substack{\text{Dirichlet}\\ \text{likf.}}}{\Longrightarrow} \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^k \cos(x/k)}{k} \text{ likf. konv. på } I.$$

Vi får därför att $\sum_1^\infty \sin\left((-1)^k \frac{x}{k}\right)$ är likf. konv. på $[-1,1] \subseteq I$. Vi noterar också att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_1^\infty \sin((-1)^k x/k)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_1^\infty \sin((-1)^k x/k) - \sum_1^\infty \sin((-1)^k 0/k)}{x} =$$

$$= \left(\sum_1^\infty \sin((-1)^k x/k)\right)'\Bigg|_{x=0} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{tack vare}\\ \text{det vi visat!}}}{=} \sum_1^\infty \frac{(-1)^k \cos(0/k)}{k} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{k},$$

vilket skulle visas.

6. Vi genomför variabelbytet $\begin{cases} x = u \\ y = v^3 \\ z = w^3 \end{cases}$, och får då att den nya kroppen i uvw-rummet blir $E:\ u^2+v^2+w^2 \le 1$, dvs enhetsbollen.

Vi har också att $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{vmatrix} = 9v^2w^2$,

Så $\mathrm{vol}(K) = \iiint_K dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow\\ VB}}{=} \iiint_E 9v^2w^2\,du\,dv\,dw$.

För att beräkna detta inför vi sfäriska koord: $\begin{cases} u = r\sin\theta\sin\varphi \\ v = r\sin\theta\cos\varphi \\ w = r\cos\theta \end{cases}$, och kroppen i $r\theta\varphi$-rummet blir $D:\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\varphi$.

Vi vet också att $\frac{d(u,v,w)}{d(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$. Vi får

$$\mathrm{vol}(K) = 9\iiint_E v^2w^2\,du\,dv\,dw \underset{\substack{\uparrow\\ VB}}{=} 9\iiint_D r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\, r^2\cos^2\theta\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$\underset{\uparrow\ II}{=} 9\int_0^1 r^6\,dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

- r^6 har primitiv $r^7/7$
- $\sin^3\theta\cos^2\theta = \sin\theta(\sin^2\theta\cos^2\theta) = \sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta =$

  $= \sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\cos^4\theta$ har primitiv $-\dfrac{\cos^3\theta}{3} + \dfrac{\cos^5\theta}{5}$
- $\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ har primitiv $\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\sin 2\varphi}{4}$

$$= 9\left[r^7/7\right]_0^1 \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\cos^5\theta}{5}\right]_0^{\pi} \left[\varphi/2 + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 9\cdot\frac{1}{7}\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}}_{=\,4/15}\Big)\cdot\pi = \frac{12\pi}{35}.$$

Svar: $\mathrm{vol}(K) = \dfrac{12\pi}{35}$.

7. Det här går naturligtvis att visa på många sätt, här presenteras ett möjligt argument.

Notera att $\int_\gamma (F-G)\cdot dr = 0 \quad \forall \gamma$, så speciellt är kurvintegralerna oberoende av vägen.

Enligt sats följer det att $F-G$ är konservativt, dvs $\exists\ U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.a. $\nabla U = F - G$.

Men enligt en annan sats är

$U(b) - U(a) = \int_\gamma (F-G)\cdot dr$ om γ går från a till b.

Eftersom $\int_\gamma (F-G)\cdot dr = 0\ \forall\gamma$ följer det att U är konstant, och därmed också att $F - G = \nabla U = 0$, dvs $F = G$, vilket skulle visas.