MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Hemtentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2021-08-19, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Alla.
Examinator: Andreas Rosén. Under skrivningstiden nås examinator via e-post: rosenan@chalmers.se och via telefon: 0317725365.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Bestäm lösningen $u(x, y)$ till den partiella differentialekvationen (4p)

$$yu'_x - xu'_y = 1$$

som uppfyller $u(x, x) = x$ för alla $x > 0$.

Ledning: polärt variabelbyte kan vara hjälpsamt.

2. Finn alla lokala extrempunkter för funktionen (4p)

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1).$$

3. Bestäm alla tangentplan till ytan (4p)

$$x - 2y^2 - z^2 = 1$$

som går genom $(3, 1, 1)$ och $(-1, 1, 0)$.

Var god vänd!

4. Betrakta talföljden (3p)

$$x_k = \sin(\tfrac{\pi}{4}k - \tfrac{1}{k}), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Avgör om följande existerar och ge i sådana fall ett explicit exempel.

(a) En delföljd som konvergerar mot $1/\sqrt{2}$.

(b) En delföljd som ej konvergerar.

(c) En delföljd som konvergerar mot -1

5. Betrakta funktionen (3p)

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2x^2y^2}.$$

(a) Avgör om $\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x, y)$ existerar, och bestäm i så fall dess värde.

(b) Avgör om $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ existerar, och bestäm i så fall dess värde.

6. Avgör om det finns en kontinuerlig funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ med följande bildmängd, och ge i sådana fall ett explicit exempel. (3p)

(a) $f(\mathbf{R}) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$

(b) $f(\mathbf{R}) = \{(x, y) \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}$

(c) $f(\mathbf{R}) = \{(x, 0) \ ; \ |x| < 1\}$

7. Bestäm alla värden som funktionen (4p)

$$f(x, y) = \frac{2y - 3}{(y - 2x)^2 + 1}$$

antar då $x \geq 0$, $y \geq 0$.