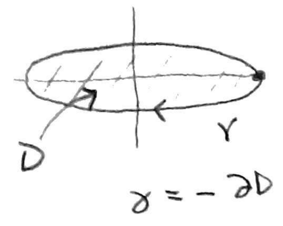
1. Lösn: $\int_\gamma F\cdot dr = -\iint_D (3\cos^2 x\cdot(-\sin x) - 3\sin^3 x)\,dx\,dy =$

Greens




$= 3\iint_D (\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1})\sin x\,dx\,dy = 3\iint_D \sin x\,dx\,dy.$

Notera att D är symmetriskt m a p spegling i y-axeln

$(x,y)\mapsto(-x,y)$, samt att $\sin(-x) = -\sin x$, så

$\iint_D \sin x\,dx\,dy = 0$ tack vare denna symmetri.

Vi får alltså att kurvintegralen $\int_\gamma F\cdot dr = 3\iint_D \sin x\,dx\,dy = 0.$

Svar: Kurvintegralen är noll.

2. Lösn: Notera att $\frac{7k}{10k-2} \le \frac{7}{8}$, så $\left(\frac{7k}{10k-2}\right)^{\sqrt{k}} \le \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{k}}$.

Vi noterar också att $\left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{k}} \le \frac{1}{k^2}$ om $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \le \frac{\ln\frac{8}{7}}{2}$

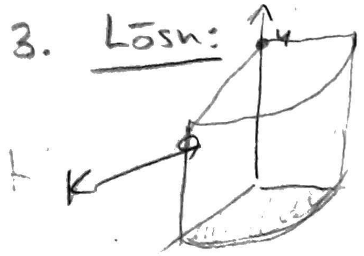
vilket gäller för stora k, eftersom $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ enligt standardgränsvärde.

Tillsammans får vi alltså att $\left(\frac{7k}{10k-2}\right)^{\sqrt{k}} \le \frac{1}{k^2}$ för stora k.

Eftersom $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$ är konv. följer det från jämförelsekriteriet

att också $\sum_1^\infty \left(\frac{7k}{10k-2}\right)^{\sqrt{k}}$ är konvergent.

3. Lösn:




Först noterar vi att $4 - x(1+e^y) > 0$ på $D: x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1$

ty $x\le 1$ och $y\le 1 \Rightarrow e^y \le e < 3$,

så $x(1+e^y) < 1(1+3) = 4$.

Vi får därför att $\mathrm{vol}(K) = \iint_D (4 - x(1+e^y))\,dx\,dy =$

$= 4\iint_D dx\,dy - \iint_D x\,dx\,dy - \iint_D x e^y\,dx\,dy.$

$\iint_D dx\,dy = \mathrm{Area}(D) = \frac{1}{4}(\underbrace{\text{arean av enhetscirkelskivan}}_{\pi}) = \frac{\pi}{4}$

3 forts:

$$\iint_D x\,dxdy = \left[ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, E: 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2, \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r \right] =$$

$$= \iint_E r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta \underset{\substack{\text{iter.} \\ \text{int.}}}{=} \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = [r^3/3]_0^1 \, [\sin\theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$\iint_D xe^y dxdy \underset{\substack{\text{samma} \\ \text{variabelbyte} \\ \text{som ovan}}}{=} \iint_E r\cos\theta\, e^{r\sin\theta} \cdot r\,dr\,d\theta \underset{\text{iter. int.}}{=} \int_0^1 r\left(\int_0^{\pi/2} r\cos\theta\, e^{r\sin\theta} d\theta\right) dr =$$

$$= \int_0^1 r\left[e^{r\sin\theta}\right]_0^{\pi/2} dr = \int_0^1 r(e^r - 1)\,dr = \int_0^1 re^r dr - \int_0^1 r\,dr \underset{\substack{\text{partiell} \\ \text{integr.}}}{=}$$

$$= [re^r]_0^1 - \int_0^1 e^r dr - [r^2/2]_0^1 = e - [e^r]_0^1 - \frac{1}{2} = e - e + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Sammanlagt får vi: $\mathrm{vol}(K) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \pi - \frac{5}{6}$.

Svar: Volymen är $\pi - \frac{5}{6}$.

4. Lösn: Vi visar först att $f(x) := \sum_1^\infty (-1)^k \sin(x/\sqrt{k})$ är kont. på $[0,R]$ för godt. $R > 0$. Vi använder Dirichlets test för likformig konvergens. Låt därför $h_k(x) := \sin(x/\sqrt{k})$, $g_k(x) := (-1)^k$.

Vi behöver visa:

1) $h_k(x)$ avtagande $\forall x \in [0,R]$

2) $h_k \longrightarrow 0$ likf. på $[0,R]$

3) $G_n := \sum_1^n g_n$ likf. begr. på $[0,R]$.

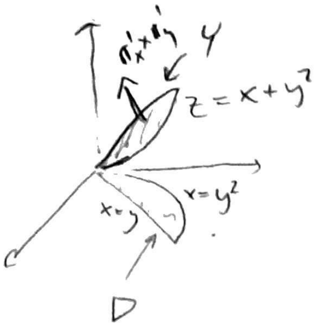
1) Notera att $\sin x$ växande i $x$ på intervallet $[0,\pi/2]$. Vi får därför att $\sin(x/\sqrt{k})$ är avtagande i $k$ för $k$ s.a. $x/\sqrt{k} \in [0,\pi/2]$, dvs $\forall x \in [0,R]$ om $\sqrt{k} \ge \frac{R\pi}{2}$, så det gäller för stora $k$, vilket räcker här.

2) Eftersom vi sag att för stora $k$ är $h_k(x)$ växande på $[0,R]$, så får vi att $\sup_{x\in[0,R]} h_k(x) = h_k(R) = \sin(R/\sqrt{k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, vilket visar att $h_k \longrightarrow 0$ likf. på $[0,R]$.

4. forts. 3) Det är klart att $G_n := \sum_1^n g_k$ är likf. begr.

ty $G_n(x) = \begin{cases} -1, & n \text{ udda} \\ 0, & n \text{ jämn} \end{cases}$. Dirichlets test för likf. konv. ger oss nu att $\sum_1^\infty (-1)^k \sin(x/\sqrt{k})$ är likf. konv. på $[0,R]$. Vi observerar också att de enskilda termerna $(-1)^k \sin(x/\sqrt{k})$ alla är kont. på hela $\mathbb{R}$, så enligt sats är även $f(x) = \sum_1^\infty (-1)^k \sin(x/\sqrt{k})$ kont. på $[0,R]$. Eftersom $R$ var godt. följer det att $f(x)$ är kont. på $[0,\infty)$. Vi noterar också att $f(0)=0$, samt att $f(-x) = -f(x)$, så det följer att $f$ är kont. på hela $\mathbb{R}$.

5.




Y är en funktionsyta, så som parametrisering väljer vi $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x+y^2)$, $D: y^2 \le x \le y$.

Vi får $\mathbf{r}'_x = (1,0,1)$, $\mathbf{r}'_y = (0,1,2y)$,

$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-1, -2y, \underbrace{1}_{>0!})$ som vi alltså ser pekar uppåt!

Vi får att flödet $= \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = + \iint_D (x+y^2, -y/2, x^2) \cdot (-1,-2y,1)\, dx\,dy =$

$= \iint_D (-x - \cancel{y^2} + \cancel{y^2} + x^2)\, dx\,dy = \iint_D (x^2 - x)\, dx\,dy$.

Notera att $y^2 \le y \Rightarrow 0 \le y \le 1$, så $D: 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le y$,

så $\iint_D (x^2-x)\, dx\,dy \underset{\text{it. int.}}{=} \int_0^1 \left( \int_{y^2}^{y} (x^2 - x)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^{y} dy =$

$= \int_0^1 \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{3} + \frac{y^4}{2} \right) dy = \left[ \frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{6} - \frac{y^7}{21} + \frac{y^5}{10} \right]_0^1 =$

$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{21} + \frac{1}{10} = \frac{35 - 70 - 20 + 42}{420} = -\frac{13}{420}$.

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5$ Svar: Flödet är $-\frac{13}{420}$.

6. Lösn: Antag istället att för något $n>0$ så

är $\sum_1^\infty a_{nk}$ konvergent. Vi ska härleda en motsägelse.

Eftersom $a_k$ är avtagande så är

$a_l \le a_{nk}$ för $l \ge nk$, och vi får att

$\sum_{l=nk}^{n(k+1)-1} a_l \le \sum_{l=nk}^{n(k+1)-1} a_{nk} = n a_{nk}$, och summerar vi detta över $k=1,\dots,M$ får:

$\sum_{l=1}^{n(M+1)-1} a_l \le \sum_{k=1}^{M} n a_{nk} = n \sum_{k=1}^{M} a_{nk}$. Vi antog att $\sum_{k=1}^\infty a_{nk}$ var konvergent,

dvs $\sum_1^\infty a_{nk} < \infty$, så vi får att $\sum_{l=1}^{n(M+1)-1} a_l \le n \sum_1^\infty a_{nk} < \infty$.

Vi ser alltså att delsummorna $\sum_{l=1}^{n(M+1)-1} a_l$ är likt. begr. då $n(M+1)-1 \to \infty$,

och då $\sum_1^\infty a_l$ är en positiv serie följer det att den är konvergent.

Men detta är en motsägelse, för $\sum_1^\infty a_n$ är divergent enl. antagande.

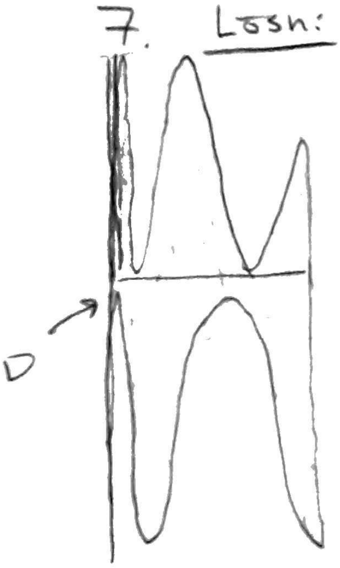
Detta visar att $\sum_1^\infty a_{nk}$ måste vara divergent för alla $n>0$.

7. Lösn: $\partial D$ har fyra delar: $N_1$: $0<x<1$, $y=\sin(1/x)+1$

$N_2$: $0<x<1$, $y=\cos(1/x)-1$

$N_3$: $x=0$, $-2\le y\le 2$

$N_4$: $x=1$, $\cos 1 - 1 \le y \le \sin 1 + 1$




Vi behöver visa att för ett givet $\varepsilon>0$ kan man täcka dessa fyra mängder med ett ändligt antal axelparallella rektanglar med sammanlagd area $\le \varepsilon$.

Låt $N_1(\delta)$: $\delta \le x < 1$, $y = \sin(1/x)+1$ &

$N_2(\delta)$: $\delta \le x < 1$, $y=\cos(1/x)-1$

Välj $\delta$: $0<\delta<\varepsilon/16$. Eftersom $\sin(1/x)$ & $\cos(1/x)$ kont. på $[\delta,1]$ är $N_1(\delta)$ & $N_2(\delta)$ nollmängder tack vare Lemma, så vi kan täcka var och en av dem med ett ändligt antal axelparallella rektanglar med sammanlagd area $< \frac{\varepsilon}{4}$

7 <u>forts:</u> Till dessa lägger vi till rektanglarna

$R_0: 0 \leq x \leq \varepsilon/16, \ -2 \leq y \leq 2$   o   $R_1: 1-\varepsilon/16 \leq x \leq 1, \ -2 \leq y \leq 2$.

Tillsammans täcker dessa nu hela randen till $D$,

och den sammanlagda arean $< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

Detta visar att $\partial D$ är en nollmängd, dvs att $D$ är mätbar.