Lösningsförslag MMGJ00, del 1, 210610

(1) Vi använder kedjeregeln:

$u'_x = 2x\, f(xy) + (x^2-y^2)\, f'(xy)\cdot y$

$u''_{xx} = 2f(xy) + 4x\, f'(xy)\cdot y + (x^2-y^2)\, f''(xy)\cdot y^2$

$u'_y = -2y\, f(xy) + (x^2-y^2)\, f'(xy)\cdot x$

$u''_{yy} = -2f(xy) - 4y\, f'(xy)\cdot x + (x^2-y^2)\, f''(xy)\, x^2$

$\Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = (x^4-y^4)\, f''(xy)$

Om $u''_{xx}+u''_{yy}=0$, följer att $f''(xy)=0$ om $x \neq y$.

Då f'' är kontinuerlig, följer att $f''(t)=0$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

Integration $\Rightarrow$ $\underline{f(t) = At+B}$ för några konstanter A, B

(Så två lösningar $u(x,y)$ är

$u = (x^2-y^2)\cdot xy \qquad (A=1,\ B=0)$,

$u = x^2-y^2 \qquad (A=0,\ B=1)$)

(2) Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 16x+2y+2z-32 = 0 \\ f'_y = 2y+2x-4z-10 = 0 \\ f'_z = 10z+2x-4y+10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+y+z = 16 & (1) \\ x+y-2z = 5 & (2) \\ x-2y+5z = -5 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z = 5 & (1')=(2) \\ -7x \quad -3z = -11 & (2')=(2)-(1) \\ 3x \quad +z = 5 & (3')=(3)+2\cdot(2) \end{cases}$$

$3\cdot(3')+(2') \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$(3') \Rightarrow z = 5-3\cdot 2 = -1$

$(1') \Rightarrow y = 5-2+2\cdot(-1) = 1$

Kandidat: $(2, 1, -1)$

Kvadratisk form: [2]

$f''_{xx} = 16$ $f''_{xy} = 2$

$f''_{yy} = 2$ $f''_{xz} = 2$

$f''_{zz} = 10$ $f''_{yz} = -4$

$Q_{(2,1,-1)} = 16h^2 + 2k^2 + 10l^2$
$\quad + 2(2hk + 2hl - 4kl)$

$Q/2 = 8h^2 + k^2 + 5l^2 + 2hk + 2hl - 4kl$
$= (k + h - 2l)^2 + \underbrace{7h^2 + l^2 + 6hl}_{= (l+3h)^2 - 2h^2}$

tecken $++-$ $\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$

f har sadelpunkt i $(2,1,-1)$

Svar: f saknar lokala extrempunkter

(3) Ligger γ på ytan?

$4(\cos t)^2 + (\sin 2t)^2 + 4(\sin^2 t)^2$

$= \underbrace{4\cos^2 t}_{= 1-\sin^2 t} + 4\sin^2 t \underbrace{\cos^2 t}_{= 1-\sin^2 t} + 4\sin^4 t = 4$ för alla t.

Detta visar att γ ligger på ytan.

Går γ genom P?

$$\begin{cases} \cos t = 1/\sqrt{2} & \Leftrightarrow \quad t = \pm\frac{\pi}{4} \\ \sin 2t = 1 & \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{4} \\ \sin^2 t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Enda lösningen $-\pi < t \leq \pi$ är $t = \frac{\pi}{4}$.

Tangentvektor till γ i P:

$\gamma'(\frac{\pi}{4}) = (-\sin t, 2\cos 2t, \sin 2t)\big|_{t=\frac{\pi}{4}}$
$\quad = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$

Normalisera: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, \sqrt{2})$

Normalvektor till ytan i P:

$f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2$.

$\nabla f(P) = (8x, 2y, 8z)\big|_P = (4\sqrt{2}, 2, 4)$

Normalisera: $e_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\sqrt{2}, 1, 2)$

Välj $e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 13}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{39}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ON-bas $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{39}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

4 (a) Låt $f(x,y) = \sin(x^2 y) - \frac{1}{2 + x^2 + y^2}$

f är en väldefinierad och kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$.

$M_1 = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, där $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R};\ t > 0\}$ är en öppen mängd.

GLU Prop. 1.25(1) $\Rightarrow$ $M_1 \subset \mathbb{R}^2$ är öppen.

(b) Skriv $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. M_2 definieras av

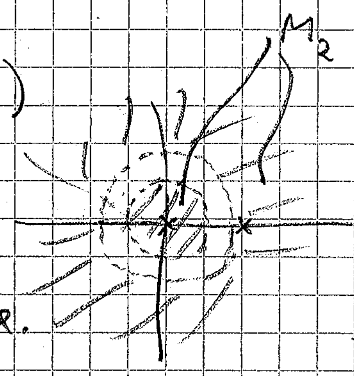
$r^4 - 4r^2 + 3 < 0$

$\Leftrightarrow (r^2 - 2)^2 < 1$

$\Leftrightarrow r^2 > 3$ eller $r^2 < 1$

$\Leftrightarrow r > \sqrt{3}$ eller $r < 1$ (då $r \geq 0$)

Tex $(0,0)$ och $(2,0)$ kan inte förbindas med en kurva i M_2. $\therefore$ M_2 är ej sammanhängande.



(c) $\sin(x^2 y) \leq 1$ alltid

$2 + x^2 + y^2 \geq 2$ alltid

$\Rightarrow M_3 = \mathbb{R}^2$, vilket är en sluten mängd.

(5) Använd polära koordinater!

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^a} = f(x,y) = r^{3-2a}\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)$$

Fall 1: $a < \frac{3}{2} \Rightarrow 3-2a > 0$

$$\underbrace{r^{3-2a}}_{\to 0}\underbrace{\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)}_{\text{begränsad}} \to 0.$$

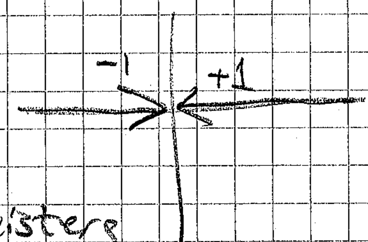
Fall 2: $a > \frac{3}{2}$

$f(x,0) = x^{3-2a} \to \infty$ då $x \to 0^+$

Så gränsvärdet existerar inte.

Fall 3: $a = \frac{3}{2}$

$$f(x,0) = \frac{x^3}{(x^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



så tvåvariabelgränsvärdet kan ej existera

Svar: Gränsvärdet existerar om och endast om $a < 3/2$, och är då 0.

(6) (a) Låt

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{om } k \text{ är jämn,} \\ k & \text{om } k \text{ är udda.} \end{cases}$$

$(x_k)_{k=1}^{\infty}$ är obegränsad, men delföljden $(x_{2j})_{j=1}^{\infty}$ är begränsad.

(b) Om en följd är konvergent är varje delföljd också konvergent (GLO Prop. 1.5). Men konvergenta (del)följder är begränsade (GLO Prop. 1.3).

$\therefore$ En följd med givna egenskaper existerar ej.

(c) Låt $x_k = \frac{(-1)^k}{k}$ 5

$(x_k)_{k=1}^{\infty}$ är uppenbarligen ej monoton, och konvergerar mot 0.

GLO Sats 1.9 $\Rightarrow (x_k)_{k=1}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.

(7) Stationära punkter:

$$f'_x = \frac{5(1+x^2) - 2x(5x+y^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \quad (1)$$

$$f'_y = \frac{2y}{1+x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$y = 0$: (1) $\Rightarrow 5 - 5x^2 = 0$, $x = \pm 1$

$f(1,0) = \frac{5}{2}$

$f(-1,0) = -\frac{5}{2}$

Då $\mathbb{R}^2$ ej är kompakt måste vi undersöka gränsvärdet mot ∞.

$f(0,y) = y^2 \to +\infty$ då $y \to \infty$ visar att f ej antar max, utan är obegränsad uppåt.

Men f är nedåt begränsad:

$$f(x,y) = \frac{5x}{1+x^2} + \underbrace{\frac{y^2}{1+x^2}}_{\geq 0} \geq \frac{5x}{1+x^2} = g(x) \quad (*)$$

Vi undersöker envariabelfunktionen g:

$$g'(x) = \frac{5(1+x^2) - 2x(5x)}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ som ovan.}$$

$g(\pm 1) = \pm\frac{5}{2}$ och $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$.

$\Rightarrow g(x) \geq -\frac{5}{2}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x,y) \geq -\frac{5}{2}$ för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ enligt (*).

Satsen om mellanliggande värden visar nu

Svar: $f(\mathbb{R}^2) = [-5/2, \infty)$.