MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Hemtentamen i Flervariabelanalys, del 1, MMG300
2020-06-08, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Alla.
Examinator: Andreas Rosén. Under skrivningstiden nås examinator via zoom-chatten och via e-post: rosenan@chalmers.se.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG. Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas via kursens hemsida.

---

1. Finn alla lokala extremvärden för funktionen (3p)

$$f(x,y) = x^2 + 8y^2 + \frac{4xy}{y-2}.$$

2. Visa utifrån definitionerna att (5p)

$$\mathbf{R}^2 = \mathrm{Int} M \cup \partial M \cup \mathrm{Int} \complement M$$

för varje delmängd $M \subseteq \mathbf{R}^2$, och att de tre mängderna i högerledet är disjunkta. Bestäm sedan dessa tre mängder $\mathrm{Int} M$, ∂M och $\mathrm{Int} \complement M$ för vart och ett av följande val av M.

   (a) $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \geq 1, x < y\}$.
   (b) $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$.
   (c) $M = \mathbf{R}^2$.

   Det ska framgå genom tydlig figur eller formel, exakt vad var och en av dessa 9 mängder är.

3. Bestäm alla punkter på ytan (3p)

$$xy + yz + zx = x + y + z + 1/4,$$

där ytans tangentplan är parallellt med planet $2x + y + z = 0$. Ange också ekvationerna för dessa tangentplan.

Var god vänd!

4. Bestäm samtliga värden som funktionen (4p)

$$f(x,y) = \frac{x-1}{(3x-y)^2+1}$$

antar i första kvadranten $x \geq 0$, $y \geq 0$.

5. Bestäm lösningen till den partiella differentialekvationen (3p)

$$xf_x'(x,y) - yf_y'(x,y) = xy(x^2+y^2), \qquad x, y > 0,$$

som uppfyller $f(x,x) = x$ för alla $x > 0$.

Ledning: Variabelbytet $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ kan vara hjälpsamt.

6. Låt $M \subseteq \mathbf{R}^n$ och antag att $f : M \to \mathbf{R}$ är en kontinuerlig funktion. Avgör om följande påståenden är sanna. Om sant ska påståendet bevisas, om falskt ska motexempel ges. Även vid motexempel ska noggrann motivering ges. (4p)

   (a) Om M är begränsad, så är f likformigt kontinuerlig.

   (b) Om M är sluten, så är f likformigt kontinuerlig.

   (c) Om f är likformigt kontinuerlig, så är f Lipschitz-kontinuerlig.

7. Visa att (3p)

$$\begin{cases} xyz^2 + \ln(y+z) = 0, \\ e^{yz} + y + \sin(xz) = 1, \end{cases}$$

i en omgivning till $(x,y,z) = (\pi, 0, 1)$ implicit definierar en C^1-kurva $x = x(z)$, $y = y(z)$. Beräkna även $x'(1)$ och $y'(1)$.