Lösningsförslag MMG300, del 1, 210819

(1) Gör variabelbytet

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases}$$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \overbrace{\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}}^{=-y/r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y\left(\cancel{\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) - x\left(\cancel{\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -1$$

Integration $\Rightarrow u(r,\varphi) = -\varphi + f(r)$

där f är en godtycklig envariabelfunktion.

$$u(x,y) = -\arctan\frac{y}{x} + f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Randvillkoren ger

$$x = u(x,x) = -\arctan 1 + f(\sqrt{2}\cdot x)$$

Med hjälpvariabel $t = \sqrt{2}\cdot x$:

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$$

Svar: $u(x,y) = -\arctan\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{\pi}{4}$

(2) Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = y(x^2+y^2-1) + xy\cdot 2x = 0 \\ f'_y = x(x^2+y^2-1) + xy\cdot 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(3x^2+y^2-1) = 0 \\ x(x^2+3y^2-1) = 0 \end{cases}$$

Fall 1: $x=0 \Rightarrow y(y^2-1)=0 \Rightarrow y = 0$ el. ± 1

Fall 2: $y=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x = 0$ el. ± 1

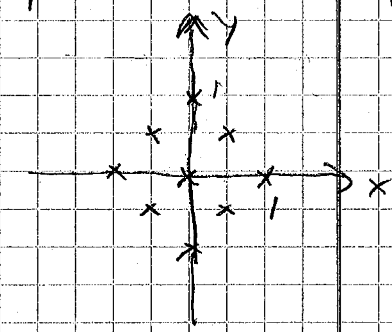
Fall 3: $x \neq 0$ och $y \neq 0$:

$$\Rightarrow 3x^2+y^2 = 1 = x^2+3y^2$$

Subtrahera $\Rightarrow 2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm y$

$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

Vi har de 9 kandidaterna i figuren.



Kvadratisk form:

$$\begin{cases} f''_{xx} = 6xy \\ f''_{yy} = 6xy \\ f''_{xy} = 3x^2+3y^2-1 \end{cases}$$

1. $(x,y) = (0,0)$

$Q = 2\cdot(-1)\cdot hk$ är indef. $\Rightarrow$ sadelpunkt

2. De 4 punkterna på koordinataxlarna:

$Q = 2\cdot(3-1)\cdot hk$ är indef. $\Rightarrow$ sadelpunkt.

3. $(x,y) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$Q = \frac{3}{2}h^2 + \frac{3}{2}k^2 + \underbrace{2\left(\frac{3}{2}-1\right)}_{=1} hk$

$= \frac{3}{2}\left(h^2+k^2+\frac{2}{3}hk\right) = \frac{3}{2}\left[\left(h+\frac{1}{3}k\right)^2 + \frac{8}{9}k^2\right]$

pos. def. $\Rightarrow$ lok. min

4. $(x,y) = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$Q = -\frac{3}{2}h^2 - \frac{3}{2}k^2 + hk = -\frac{3}{2}\left[\left(h-\frac{1}{3}k\right)^2 + \frac{8}{9}k^2\right]$

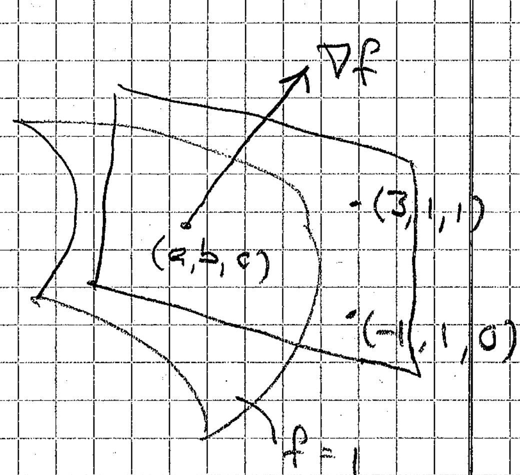
neg. def. $\Rightarrow$ lok. max.

Svar: f har lok. max i $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

lok. min i $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

3) Låt $f(x,y,z) = x - 2y^2 - z^2$

$\nabla f = (1, -4y, -2z)$



Tang. planets ekv. i (a,b,c):

$1(x-a) - 4b(y-b) - 2c(z-c) = 0$

$x - 4by - 2cz = a - 4b^2 - 2c^2$

Att de 2 punkterna ligger på tang. planet betyder:

$3-4b-2c = a-4b^2-2c^2$ (1)

$-1-4b = a-4b^2-2c^2$ (2)

Att (a,b,c) ligger på ytan betyder:

$a-2b^2-c^2 = 1$ (3)

(1) − (2) $\Rightarrow 4-2c=0 \Rightarrow c=2$

(3) i (2) $\Rightarrow -1-4b = a+2(1-a) = 2-a$

$a-4b=3$

(3) $\Rightarrow (3+4b)-2b^2-4=1$

$2b^2-4b=-2$

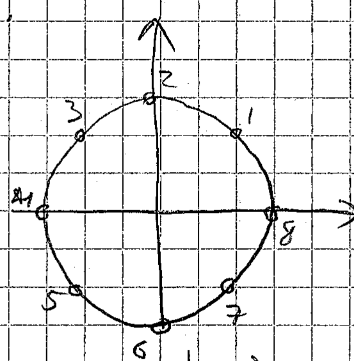
$(b-1)^2=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=7$

∴ $(a,b,c)=(7,1,2)$ är tang. planets ekv.

$x-4y-4z=7-4-8=-5$

Svar: $-x+4y+4z=5$

4 Idé: Då $\frac{1}{k}\to 0$ är $x_k \approx \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$.



(a) Betrakta delföljden $(x_{8j+1})_{j=0}^{\infty}$,

dvs $x_1, x_9, x_{17}, x_{25}, \ldots$

$$x_{8j+1} = \sin\left(\frac{\pi}{4}(8j+1) - \frac{1}{8j+1}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \left(2\pi j - \frac{1}{8j+1}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{=1/\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\cos\left(2\pi j - \frac{1}{8j+1}\right)}_{\to 1} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{=1/\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\sin\left(2\pi j - \frac{1}{8j+1}\right)}_{\to 0}$$

$\to 1/\sqrt{2}$, $j\to\infty$

(b) Betrakta delföljden $(x_{4j+2})_{j=0}^{\infty}$, dvs

$x_2, x_6, x_{10}, x_{14}, \ldots$

Vi har

$$x_{4j+2} = \sin\left(\pi j + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4j+2}\right) = \cos\left(\pi j - \frac{1}{4j+2}\right)$$

$$= \underbrace{\cos(\pi j)}_{=(-1)^j} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{4j+2}\right)}_{\to 1} + \underbrace{\sin(\pi j)}_{=0} \cdot \sin\frac{1}{4j+2}$$

∴ $(x_{4j+2})_{j=1}^{\infty}$ konvergerar ej.

(c) Betrakta delföljden $(x_{8j+6})_{j=0}^{\infty}$

$$x_{8j+6} = \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1} \underbrace{\cos\left(2\pi j - \frac{1}{8j+6}\right)}_{\to 1} + \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} \sin\left(2\pi j - \frac{1}{8j+6}\right)$$

$\to -1, \ j \to \infty.$

Svar: (a) $(x_{8j+1})_{j=0}^{\infty}$

(b) $(x_{4j+2})_{j=0}^{\infty}$

(c) $(x_{8j+6})_{j=0}^{\infty}$

5 (a) $f(x,0) = \frac{0}{x^2+0} = 0 \to 0 \ , x \to \infty$

Kandidat till gränsvärde: 0.

Vi visar att 2D gränsvärdet är 0 med polära koordinater:

$$f = \frac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{r^2 + 2r^4\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{r} \ \frac{r\sin\theta\cos\theta}{1+2(r\sin\theta\cos\theta)^2}$$

$$= \Big/ \text{sätt } A = r\sin\theta\cos\theta \Big/ = \underbrace{\frac{1}{r}}_{\to 0} \ \underbrace{\frac{A}{1+2A^2}}_{\text{begränsad}}, \text{ ty}$$

$g(A) = \frac{A}{1+2A^2}$ är kontinuerlig och

$\lim_{A \to \pm\infty} g(A) = 0.$

(b) $f(x,0) = 0 \to 0 \ , x \to 0$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2+2x^4} = \frac{1}{2+2x^2} \to \frac{1}{2} \ , x \to 0$$

Svar: (a) $\lim_{|(x,y)| \to \infty} f = 0$

(b) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f$ existerar ej.

6 (a) $\mathbb{R}$ sammanhängande, f kontinuerlig, $\{(\pm 1, 0)\}$ ej sammanhängande

GLO, Prop. 1.30 $\Rightarrow$ sådan f existerar ej.

(b) $f(t) = (\cos t, \sin t)$ duger.

(c) $f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\arctan(t), 0\right)$ duger.

7 $f(x,y) \geq \frac{-3}{(y-2x)^2+1} \geq -3$ för alla $x \geq 0$, $y \geq 0$

$f(0,0) = -3$

$f(x,2x) = 4x-3 \to +\infty$ då $x \to \infty$

f kontinuerlig

G20, Kor. 1.32 visar:

Svar: $f(\{(x,y) ; x,y \geq 0\}) = [-3,\infty)$