Flervariabelanalys, MMG300, del 2

2023 05 30, 14:00-18:00

Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 0-11 (U), 12-17 (G), 18-25 (VG)

---

1. Formulera och bevisa Greens formel.

   (4p)

2. Låt $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på $[0,1]$ mot en funktion f. Visa att integralerna $\int_0^1 f_n(x)dx$ konvergerar mot integralen $\int_0^1 f(x)dx$. Ge också ett exempel på en följd av kontinuerliga funktioner g_n som konvergerar punktvis på $[0,1]$ mot en kontinuerlig funktion g, men där integralerna $\int_0^1 g_n(x)dx$ inte konvergerar mot $\int_0^1 g(x)dx$.

   (4p)

3. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma x\sin(x)dx + z\sin(yz)dy + y\sin(yz)dz,$$
   där kurvan γ har parametriseringen $r(t) = (e^t, e^{-t^2}, e^{t^3}), 0 \le t \le 1$.

   (4p)

4. Bestäm huruvida serien
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sin(1/k + k) + \sin(1/k - k))$$
   är konvergent eller divergent.

   (3p)

5. Beräkna flödesintegralen $\iint_Y F \cdot N dS$, där $F(x,y,z) = (x + z\cos(y), -xy\cos(z), x\sin(z))$ och ytan $Y : x^2 + y^2 = 1 + \cos^2(z), 0 < z < \pi$ är orienterad så att den positiva sidan är den som syns från origo.

   (4p)

6. Lös differentialekvationen $(1-x^2)y'' = y$ med begynnelsevärdena $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ genom ansatsen $y(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$. Glöm inte att bestämma var lösningen är giltig.

   (3p)

7. Låt D_1 och D_2 vara två begränsade och mätbara delmängder till $\mathbb{R}^2$. Visa att unionen $D_1 \cup D_2$ också är mätbar.

   (3p)

8. Bonusuppgift: Låt a_k vara en positiv växande följd sådan att $a_k \to \infty$ då $k \to \infty$. Visa att serien
$$\sum_1^\infty \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right)$$
   är divergent.

   (?p)

Lycka till!
David