

기공수 과제 #1

20192208 김형훈

2024-09-24

1. 1장 1절

2번 문제

공집합인 집합을 구하여라.

1. $A = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x \text{는 복소수}\}$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$

$A = \{+i, -i\}$ 이므로 공집합이 아니다.

2. $B = \{y \mid y^2 + 1 = 0, y \text{는 실수}\}$

$$y^2 + 1 = 0$$

$$y^2 = -1$$

$$y = \pm\sqrt{-1}$$

$$y = \pm i$$

$B = \{+i, -i\}$ 이므로 공집합이 아니다.

...라고 생각할 수 있으나 y 의 범위는 실수이므로 허수는 포함할 수 없기때문에 공집합이다.

3. $C = \{z \mid z + 1 = 0, z + 2 = 0, z \text{는 복소수}\}$

$$z = -1, z = -2$$

$C = \{-1 + 0 * i, -2 + 0 * i\}$ 이므로 공집합이 아니다.

4. $D = \{t \mid \sin t = 2, t \text{는 실수}\}$

$$\sin t = 2$$

$$-1 \leq \sin t \leq 1$$

$\sin t$ 는 2가 될 수 없으므로 공집합.

답은 2번과 4번.

2. 1장 2절

2번 문제

다음 실수의 부분집합 A, B, C가 유계임을 보이고, 상계와 하계를 하나씩 구하여라.

1. $A = \{x | x = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}\}$

n 이 커질수록 x 는 0에 가까워진다.

따라서 하계는 0, 상계는 n 이 1일때의 값인 $\frac{1}{2}$ 이다.

2. $B = \{y | y = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

n 이 커질수록 y 는 상대 비율인 1에 가까워진다.

따라서 하계는 1, 상계는 n 이 1일때의 값인 2이다.

3. $C = \{z | z = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

n 이 커질수록 z 는 1에 가까워진다.

따라서 상계는 1, 하계는 n 이 1일때의 값인 0이다.

3. 1장 3절

2번 문제

다음 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

1. $y = \frac{1}{x^2+1}$

• 정의역:

분모가 0인 경우 식이 성립할 수 없다.

이 경우 분모가 0이 되는 x 는 $x^2 = -1$ 인 x 이다.

$x^2 = -1$ 인 x 는 실수에서는 존재하지 않으므로 정의역은 모든 실수이다.

• 치역:

$x^2 + 1 \geq 1$, 이의 역수로 식을 다시 구하면, $\frac{1}{(x^2+1)} \leq 1$

x 가 무한히 커지거나 작아질수록 y 는 0에 가까워진다.

따라서 치역은 $(0, 1]$ 이다.

2. $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

• 정의역: 0을 제외한 모든 실수

• 치역: $[-1, 1]$

3. $y = \tan x$

• 정의역: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 즉 $\cos x \neq 0$.

$\cos x = 0$ 인 경우는 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

답은 $\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

• 치역: 모든 실수

4번 문제

함수 $y = 2x^3 + 3$ 이 단사함수임을 증명하여라.

단사 함수: 서로 다른 x 값에 대해 서로 다른 y 값을 가지는 함수

즉, $x_1 \neq x_2$ 이면 $y_1 \neq y_2$

이의 대우는 $y_1 = y_2$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

이에 따라 식을 전개해보면

$$2(x_1)^3 + 3 = 2(x_2)^3 + 3$$

$$(x_1)^3 = (x_2)^3$$

$$(x_1 - x_2)((x_1)^2 + x_1x_2 + (x_2)^2) = 0$$

$$x_1 = x_2$$

즉 위의 식은 단사함수임을 증명할 수 있다.

4. 1장 4절

3번 문제

다음 수열 중 아래로 유계인 수열과 위로 유계인 수열을 찾아라.

1. $\left\{\frac{(-1)^n}{(n+1)}\right\}$

$$(n+1) > 1$$

$$\frac{1}{(n+1)} < 1$$

$(-1)^n$ 은 -1과 1을 번갈아가며 가짐

즉, 해당 수식은 -1과 1 사이의 값을 가지므로 위로 유계인 동시에 아래로 유계인 수열이다.

2. $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$

위 식은 -1과 1 사이의 값을 가지므로 위로 유계인 동시에 아래로 유계인 수열이다.

3. $\{2^n\}$

위 식은 2의 n승으로 n이 증가할수록 값이 무한대로 증가하므로 상계가 존재하지 않는다.

모든 항이 1보다 크므로 아래로 유계이다.

4. $\{(-2)^n\}$

위 식은 무한대로 증가하거나 감소하므로 상계, 하계가 없다.

즉 유계가 아님.

위로 유계: 1번, 2번

아래로 유계: 1번, 2번, 3번

4번 문제

다음 각 수열에 대하여 열린구간 $(2-0.1, 2+0.1)$ 안에 들어가는 항과 들어가지 않는 항을 찾아라.

1. $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\}$

$$2 - 0.1 < 2 - \frac{1}{n} < 2 + 0.1$$

$$-0.1 < \frac{1}{n} < 0.1$$

$$n > 10$$

따라서 11번째 항부터 구간에 들어감.

들어가는 항: 11번째 항부터

들어가지 않는 항: 1 ~ 10

$$2. \left\{ \frac{2n}{(n+1)} \right\}$$

$$2 - 0.1 < \frac{2n}{(n+1)} < 2 + 0.1$$

$$1.9n + 1.9 < 2n < 2.1n + 2.1$$

$$1.9 < 0.1n$$

$$19 < n$$

들어가는 항: 20, 21, 22, ...

들어가지 않는 항: 1~19번째 항

$$3. \left\{ 2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right\}$$

$$2 - 0.1 < 2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^n < 2 + 0.1$$

$$-0.1 < \left(\frac{-1}{2} \right)^n < 0.1$$

n이 짝수인 경우

$$-0.1 < \left(\frac{1}{2} \right)^n < 0.1$$

$2^n > 10$ 4, 6, 8, 10, ...번째 항이 포함된다.

n이 홀수인 경우

$$0.1 > \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ 혹은 } \left(\frac{1}{2} \right)^n > -0.1$$

$$10 < 2^n \text{ 혹은 } 2^n < -10$$

n = 4일때 16이므로 4번째 항부터 포함된다.

즉 5, 7, 9, 11, ...번째 항이 포함된다.

들어가는 항: 4, 5, 6, 7, ...번째 항 들어가지 않는 항: 나머지

5. 1장 5절

9번 문제

다음 우극한과 좌극한을 구하여라.

1. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2^2 - 4}{x^2 - 4} = 0$$

분자가 0이므로 답은 0

2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1^2 - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3}{x^2 - 4} = -\infty$$

따라서 답은 $-\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2 + [2 - x] - [x])$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) + \lim_{x \rightarrow 3^+} [2 - x] + \lim_{x \rightarrow 3^+} [x]$$

$$= 1 + (-1) + 3 = 3$$

따라서 답은 3

4. $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 2 + [2 - x] - [x])$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 2) + \lim_{x \rightarrow 3^-} [2 - x] + \lim_{x \rightarrow 3^-} [x]$$

$$= 1 + (-2) + 2 = 1$$

따라서 답은 1

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 + \sqrt{x}} - 2}$

0을 바로 대입하면 분모가 0이 되어버린다.

따라서 다음과 같이 식을 다시 구성해준다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{4 + \sqrt{x}} + 2)}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4 + \sqrt{x}} + 2$$

이제 다시 0을 넣어서 계산해보면 답은 4.

12번 문제

다음 극한이 존재하면 그 값을 구하여라.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt{x}}{1-x}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ 로 치환 가능.

$x = 1$ 에서 극한값이 존재하지 않음.

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (단, n 은 자연수, a 는 상수)

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})$$

x 에 a 를 대입하면 식은 다음과 같다.

$$a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$$= n * a^{n-1}$$

$$\text{답은 } n * a^{n-1}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{2+x}-1}$

변수에 1을 넣어서 계산해주겠다.

답은 0

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(\sqrt{x}-1)}{x^2+x-2}$

치환을 해주겠다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(\sqrt{x}-1)}{(x+2)(x-1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{(x+2)(\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

$$\text{답은 } -\frac{1}{6}$$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

1번 문제와 마찬가지로 치환을 통해 문제를 풀 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{답은 } \frac{1}{2}$$

6. 1장 6절

4번 문제

다음 함수의 불연속점을 구하고 그 점에서 불연속인 이유를 설명하여라

1. $f(x) = \frac{x}{x}$

$x = 0$ 에서 정의되지 않으므로 $x = 0$ 에서 불연속이다.

2. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$x = -1$ 에서 정의되지 않으므로 $x = -1$ 에서 불연속이다.

3. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$x = 0$ 에서 정의되지 않으므로 $x = 0$ 에서 불연속이다.

4. $f(x) = [x] + [-x]$

$[x]$ 와 $[-x]$ 는 x 가 정수일 때 불연속이다.

따라서 모든 정수에서 불연속이다.

5. $f(x) = x - [x]$

$[x]$ 는 x 가 정수일 때 불연속이다.

따라서 모든 정수에서 불연속이다.

5번 문제

다음 함수가 연속함수가 되도록 불연속인 점에서의 함숫값을 정의하여라.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

$x = 1$ 에서 정의되지 않으므로 $x = 1$ 에서 불연속이다.

따라서 인수분해를 이용해 식을 변형해서 함숫값을 정의해보겠다.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$$

$x = 1$ 에서의 함숫값은 2이다.

2. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8}$

$x = 2$ 에서 정의되지 않으므로 $x = 2$ 에서 불연속이다.

마찬가지로 인수분해를 이용해 함숫값을 정의해보겠다.

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x+2}{x^2+2x+4}$$

$x = 2$ 에서 함숫값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

$$3. f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

$x = 1$ 에서 정의되지 않으므로 $x = 1$ 에서 불연속이다.

역시 마찬가지로 인수분해를 이용해보겠다.

$$f(x) = \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad x = 1 \text{에성 함숫값은 } \frac{1}{2} \text{이다.}$$