기공수 과제 #3

20192208 김형훈

2024-09-24

3장 1절

3번 문제

1

$y = x^3 + x - 8$와 $y = x$의 교점은 $x = 2$

$y = x^3 + x - 8 = 0$의 $x = 2$에서의 기울기는 13

$y = x$의 기울기는 1

$|tan\emptyset| = |\frac{13-1}{1+13}| = \frac{6}{7}$

$\therefore \frac{6}{7}$

2

$y = \sqrt{x}$와 $x + 2y - 3 = 0$의 교점은 $x = 1$

$y = \sqrt{x}$의 $x = 1$에서의 기울기는 $\frac{1}{2}, x = 9$에서의 기울기는 $\frac{1}{6}$

$x + 2y - 3 = 0$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$

$x = 1$일 때, $|tan\emptyset| = |\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}| = \frac{4}{3}$

$\therefore \frac{4}{3}$

3

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0,$ 교점은 $x = 1$

$y = x^2 + 1$의 $x = 1$에서의 기울기는 2

$y = x + x^{-1}$의 $x = 1$에서의 기울기는 0

$|tan\emptyset| = |\frac{2-0}{1+0}| = 2$

$\therefore$ **2**

4

$x^3+x=x^2$의 교점은 $x=0$

$y=x^3+x$의 $x=0$에서의 기울기는 1

$y=x^2$의 $x=0$에서의 기울기는 0

$|tan\emptyset|=|\frac{1-0}{1+0}|=1$

∴ 1

4번 문제

$3x - y = 2$의 기울기는 3.

기울기가 3이되는 $y = x^2 - 3x - 5$의 어떤 점은 $y' = 2x - 3 = 3$을 만족하는 x.

$x = 3, y = -5$ 기울기는 3.

접선의 방정식은 $y = 3x - 14$이다.

5번 문제

$x = 4$일 때 기울기는 $\frac{5}{4}$

점 (4,6)에서의 법선은 $y = -\frac{4}{5}x + \frac{46}{5}$

y축과 만나는 점은 $(0, \frac{46}{5})$

3장 2절

4번 문제

$s' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$

$s'' = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}t^{-\frac{5}{3}}$

가속도가 0이 되는 시각은 $t = (\frac{8}{9})^6$

이때의 속도는 $\frac{3^6}{2^{12}}$

$\therefore \frac{729}{4096}$

3장 3절

5번 문제

1

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$= 3(x-1)(x-5)$

극대점은 1, 극소점은 5이다.

2

$f'(x) = \frac{6x^2-2x+3}{3\sqrt[3]{(2x^3-x^2+3x-1)^2}}$

$6x^2 - 2x + 3$의 실근의 갯수를 구하면, $(-2)^2 - 4 * 6 * 3 = -68 < 0$이므로 실근이 없다.

따라서 극대점과 극소점이 없다.

3

$f'(x) = -\frac{4x^3}{(x^4+4)^2}$

0일 때 극대점이다.

4

$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

극대점은 -1, 극소점은 1이다.

5

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\frac{x-1}{x})$

$x = 1$**에서 극솟점.**

6

$f'(x) = 4x(3x-1) + 6(x^2-1)$

$= 2(9x^2 - 2x - 3)$

근의 공식을 이용하여 x를 구하면 $x = \frac{1 \pm 2\sqrt{7}}{9}$

극대점은 $\frac{1-2\sqrt{7}}{9}$, 극솟점은 $\frac{1+2\sqrt{7}}{9}$이다.

3장 4절

3번 문제

1

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

$y'' = 6x - 6$

$(1, \infty)$에서 위로 오목하다.

2

$y' = -3x^2 - 4x + 1$

$y'' = -6x - 4$

$(-\infty, -\frac{2}{3})$에서 위로 오목하다.

3

$y' = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

$y'' = \frac{4}{(x+1)^3}$

$(-1, \infty)$에서 위로 오목하다.

4

$y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$y'' = \frac{4x^2+2x+3}{4(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$

모든 실수에서 위로 오목하다.

4번 문제

1

$y' = 3x^2 - 1$

임계점은 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$y'' = 6x$

변곡점은 $x = 0$

2

$y' = (x-2)(x+1)$

임계점은 $x = 2, -1$

$y'' = 2x - 1$

변곡점은 $x = \frac{1}{2}$

3

$x \leq -2, x \geq 0$

$y' = \frac{3(x+1)}{2(x^2+2x)^{\frac{1}{4}}}$

임계점은 $x = -2, 0$

$y'' = \frac{3(2-(x+1)^2(x^2+2x)^{-1})}{4(x^2+2x)^{\frac{1}{4}}}$

$(2 - (x+1)^2(x^2+2x)^{-1}) = 0$

$(x+1)^2 = 2(x^2+2x)$

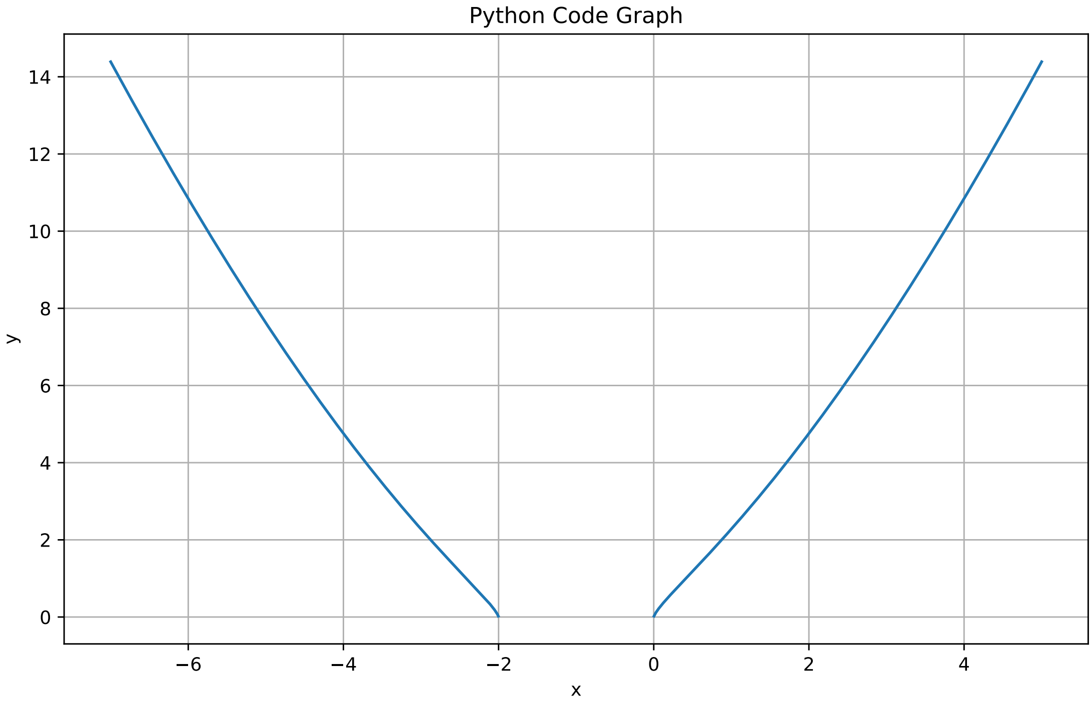
$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 4x$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{2}$

변곡점은 $x = -1 \pm \sqrt{2}$

graph가 답지에 없어서 python으로 한번 그려보았습니다.



4

$x \neq 0$

$y' = \frac{x^2-1}{x^2}$

임계점은 $x = 1, -1$

$y'' = \frac{2}{x^3}$

변곡점은 존재하지 않는다

3장 5절

4번 문제

직선 $y = x$ 위의 점에서 점 (4,1)에 가장 가까운 점은 접선이 직선 $y = x$와 수직이 되는 점이다.

점 (4,1)을 지나는 $y = x$의 법선은 $y = -x + 5$이다.

$y = x$와 $y = -x + 5$의 교점은 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\therefore \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

7번 문제

가로를 x, 세로를 y라고 하자.

$3x + 2y = 800$

$y = 400 - \frac{3}{2}x$

$xy = -\frac{3}{2}x^2 + 400x$

이것의 일계도함수는 $-3x + 400$

$x = \frac{400}{3}$일 때 토지의 넓이가 최댓값을 가진다.

$\therefore \frac{400}{3}$**, 200**

3장 6절

5번 문제

1

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(25+2) \approx f(25) + f'(25)2$

$\therefore \frac{26}{5}$

2

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(64-3) \approx f(64) - f'(64)3$

$\therefore \frac{63}{16}$

3

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

$f(81+2.7) \approx f(81) + f'(81)2.7$

$\therefore \frac{121}{40}$

4

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(125-3) \approx f(125) - f'(125)3$

$\therefore \frac{124}{25}$