기공수 과제 #1

20192208 김형훈

1. 1장 1절

2번 문제

공집합인 집합을 구하여라.

1. A = {x | x^2 + 1 = 0, x는 복소수}

$x^2 + 1 = 0$
$x^2 = -1$
$x = \pm\sqrt{-1}$
$x = \pm i$
$A = \{+i, -i\}$ 이므로 공집합이 아니다.

2. B = {y | y^2 + 1 = 0, y는 실수}

$y^2 + 1 = 0$
$y^2 = -1$
$y = \pm\sqrt{-1}$
$y = \pm i$
$B = \{+i, -i\}$ 이므로 공집합이 아니다.
…라고 생각할 수 있으나 y의 범위는 실수이므로 허수는 포함할 수 없기때문에 공집합이다.

3. C = {z | z + 1 = 0, z + 2 = 0, z는 복소수}

$z = -1, z = -2$
$C = \{-1 + 0 * i, -2 + 0 * i\}$ 이므로 공집합이 아니다.

4. D = {t | sin t = 2, t는 실수}

$sint = 2$
$-1 \leq sint \leq 1$
$sint$는 2가 될 수 없으므로 공집합.

답은 2번과 4번.

2. 1장 2절

2번 문제

다음 실수의 부분집합 A, B, C가 유계임을 보이고, 상계와 하계를 하나씩 구하여라.

1. $A = \{x | x = \frac{1}{2n}, n \in N\}$

n이 커질수록 x는 0에 가까워진다.
따라서 **하계는 0**, **상계는 n이 1일때의 값인** $\frac{1}{2}$이다.

2. $B = \{y | y = \frac{n+1}{n}, n \in N\}$

n이 커질수록 y는 상대 비율인 1에 가까워진다.
따라서 **하계는 1**, **상계는 n이 1일때의 값인 2**이다.

3. $C = \{z | z = 1 - \frac{1}{n}, n \in N\}$

n이 커질수록 z는 1에 가까워진다.
따라서 **상계는 1**, **하계는 n이 1일때의 값인 0**이다.

3. 1장 3절

2번 문제

다음 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

1. $y = \frac{1}{x^2+1}$

- 정의역:
  분모가 0인경우 식이 성립할 수 없다.
  이 경우 분모가 0이 되는 x는 $x^2 = -1$인 x이다.
  $x^2 = -1$인 x는 실수에서는 존재하지 않으므로 정의역은 모든 실수이다.

- 치역:
  $x^2 + 1 >= 1$, 이의 역수로 식을 다시 구하면, $\frac{1}{(x^2+1)} <= 1$
  x가 무한히 커지거나 작아질수록 y는 0에 가까워진다.
  따라서 치역은 (0, 1]이다.

2. $y = sin(\frac{1}{x})$

- 정의역: 0을 제외한 모든 실수
- 치역: [-1, 1]

3. $y = tanx$

- 정의역: $tanx = \frac{sinx}{cosx}$, 즉 $cosx \neq 0.$
  $cosx = 0$인 경우는 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$
  답은 $\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z\}$

- 치역: 모든 실수

4번 문제

함수 $y = 2x^3 + 3$이 단사함수임을 증명하여라.

단사 함수: 서로 다른 x값에 대해 서로 다른 y값을 가지는 함수
즉, $x_1 \neq x_2$이면 $y_1 \neq y_2$
이의 대우는 $y_1 = y_2$이면 $x_1 = x_2$이다.
이에 따라 식을 전개해보면
$2(x_1)^3 + 3 = 2(x_2)^3 + 3$

$(x_1)^3 = (x_2)^3$

$(x_1 - x_2)((x_1)^2 + x_1x_2 + (x_2)^2)$ = 0

$x_1 = x_2$

즉 위의 식은 단사함수임을 증명할 수 있다.

4. 1장 4절

3번 문제

다음 수열 중 아래로 유계인 수열과 위로 유계인 수열을 찾아라.

1. $\{\frac{(-1)^n}{(n+1)}\}$

$(n+1) > 1$
$\frac{1}{(n+1)} < 1$
$(-1)^n$은 -1과 1을 번갈아가며 가짐
즉, 해당 수식은 -1과 1 사이의 값을 가지므로 위로 유계인 동시에 아래로 유계인 수열이다.

2. $\{cos(\frac{n\pi}{2})\}$

위 식은 -1과 1 사이의 값을 가지므로 위로 유계인 동시에 아래로 유계인 수열이다.

3. $\{2^n\}$

위 식은 2의 n승으로 n이 증가할수록 값이 무한대로 증가하므로 상계가 존재하지 않는다.
모든 항이 1보다 크므로 아래로 유계이다.

4. $\{(-2)^n\}$

위 식은 무한대로 증가하거나 감소하므로 상계, 하계가 없다.
즉 유계가 아님.

위로 유계: 1번, 2번
아래로 유계: 1번, 2번, 3번

4번 문제

다음 각 수열에 대하여 열린구간 (2-0.1, 2+0.1) 안에 들어가는 항과 들어가지 않는 항을 찾아라.

1. $\{2 - \frac{1}{n}\}$

$2 - 0.1 < 2 - \frac{1}{n} < 2 + 0.1$
$-0.1 < \frac{1}{n} < 0.1$
$n > 10$
따라서 11번째 항부터 구간에 들어감.

들어가는 항: 11번째 항부터

들어가지 않는 항: 1 ~ 10

2. $\{\frac{2n}{(n+1)}\}$

$2 - 0.1 < \frac{2n}{(n+1)} < 2 + 0.1$

$1.9n + 1.9 < 2n < 2.1n + 2.1$

$1.9 < 0.1n$

$19 < n$

들어가는 항: 20, 21, 22, ⋯

들어가지 않는 항: 1~19번째 항

3. $\{2 + (\frac{-1}{2})^n\}$

$2 - 0.1 < 2 + (\frac{-1}{2})^n < 2 + 0.1$

$-0.1 < (\frac{-1}{2})^n < 0.1$

n이 짝수인 경우

$-0.1 < (\frac{1}{2})^n < 0.1$

$2^n > 10$ 4, 6, 8, 10, ⋯번째 항이 포함된다.

n이 홀수인 경우

$0.1 > (\frac{1}{2})^n$ 혹은 $(\frac{1}{2})^n > -0.1$

$10 < 2^n$ 혹은 $2^n < -10$

n = 4일때 16이므로 4번째 항부터 포함된다.

즉 5, 7, 9, 11, ⋯번째 항이 포함된다.

들어가는 항: 4, 5, 6, 7, ⋯번째 항 들어가지 않는 항: 나머지

5. 1장 5절

9번 문제

다음 우극한과 좌극한을 구하여라.

1. $lim_{x \to 2^+} \frac{[x]^2-4}{x^2-4}$

$lim_{x \to 2^+} [x] = 2$
$lim_{x \to 2^+} \frac{2^2-4}{x^2-4} = 0$
분자가 0이므로 답은 0

2. $lim_{x \to 2^-} \frac{[x]^2-4}{x^2-4}$

$lim_{x \to 2^-} [x] = 1$
$lim_{x \to 2^-} \frac{1^2-4}{x^2-4} = lim_{x \to 2^-} \frac{-3}{x^2-4}$ = -∞$
따라서 답은 $-\infty$

3. $lim_{x \to 3^+} (x - 2 + [2 - x] - [x])$

$lim_{x \to 3^+} (x-2)$ + $lim_{x \to 3^+} [2-x]$ + $lim_{x \to 3^+} [x]$
= 1 + (-1) + 3 = 3
따라서 답은 3

4. $lim_{x \to 3^-} (x - 2 + [2 - x] - [x])$

$lim_{x \to 3^-} (x-2)$ + $lim_{x \to 3^-} [2-x]$ + $lim_{x \to 3^-} [x]$
= 1 + (-2) + 2 = 1
따라서 답은 1

5. $lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2}$

0을 바로 대입하면 분모가 0이 되어버린다.
따라서 다음과 같이 식을 다시 구성해준다.
$lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{4+\sqrt{x}}+2)}{\sqrt{x}}$
= $lim_{x \to 0^+} \sqrt{4+\sqrt{x}} + 2$
이제 다시 0을 넣어서 계산해보면 답은 4.

12번 문제

다음 극한이 존재하면 그 값을 구하여라.

1. $lim_{x \to 1} \frac{1+\sqrt{x}}{1-x}$

$lim_{x \to 1} \frac{1}{1-\sqrt{x}}$로 치환 가능.
$x = 1$에서 극한값이 존재하지 않음.

2. $lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ **(단, n은 자연수, a는 상수)**

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1})$
따라서 $lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ = $lim_{x \to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1})$
x에 a를 대입하면 식은 다음과 같다.
$a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1}$
= $n * a^{n-1}$
답은 $n * a^{n-1}$

3. $lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{2+x+1}}$

변수에 1을 넣어서 계산해주겠다.
답은 0

4. $lim_{x \to 1} \frac{(x-2)(\sqrt{x}-1)}{x^2+x-2}$

치환을 해주겠다.
$lim_{x \to 1} \frac{(x-2)(\sqrt{x}-1)}{(x+2)(x-1)}$
= $lim_{x \to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{x}+1)}$
= $lim_{x \to 1} \frac{x-2}{(x+2)(\sqrt{x}+1)}$
답은 $-\frac{1}{6}$

5. $lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

1번 문제와 마찬가지로 치환을 통해 문제를 풀 수 있다.
$lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ = $\frac{1}{2}$
답은 $\frac{1}{2}$

6. 1장 6절

4번 문제

다음 함수의 불연속점을 구하고 그 점에서 불연속인 이유를 설명하여라

1. $f(x) = \frac{x}{x}$

$x = 0$에서 정의되지 않으므로 $x = 0$에서 불연속이다.

2. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$x = -1$에서 정의되지 않으므로 $x = -1$에서 불연속이다.

3. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

$x = 0$에서 정의되지 않으므로 $x = 0$에서 불연속이다.

4. $f(x) = [x] + [-x]$

$[x]$와 $[-x]$는 x가 정수일 때 불연속이다.
따라서 모든 정수에서 불연속이다.

5. $f(x) = x - [x]$

$[x]$는 x가 정수일 때 불연속이다.
따라서 모든 정수에서 불연속이다.

5번 문제

다음 함수가 연속함수가 되도록 불연속인 점에서의 함숫값을 정의하여라.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

$x = 1$에서 정의되지 않으므로 $x = 1$에서 불연속이다.
따라서 인수분해를 이용해 식을 변형해서 함숫값을 정의해보겠다.
$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$
$x = 1$에서의 함숫값은 2이다.

2. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-8}$

$x = 2$에서 정의되지 않으므로 $x = 2$에서 불연속이다.
마찬가지로 인수분해를 이용해 함숫값을 정의해보겠다.

$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x+2}{x^2+2x+4}$
$x = 2$에서 함숫값은 $\frac{1}{3}$이다.

3. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

$x = 1$에서 정의되지 않으므로 $x = 1$에서 불연속이다.

역시 마찬가지로 인수분해를 이용해보겠다.

$f(x) = \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ $x = 1$에성 함숫값은 $\frac{1}{2}$이다.