

기공수 과제 #3

20192208 김형훈

2024-09-24

3장 1절

3번 문제

1

$y = x^3 + x - 8$ 와 $y = x$ 의 교점은 $x = 2$

$y = x^3 + x - 8 = 0$ 의 $x = 2$ 에서의 기울기는 13

$y = x$ 의 기울기는 1

$$|\tan \theta| = \left| \frac{13-1}{1+13} \right| = \frac{6}{7}$$

$$\therefore \frac{6}{7}$$

2

$y = \sqrt{x}$ 와 $x + 2y - 3 = 0$ 의 교점은 $x = 1$

$y = \sqrt{x}$ 의 $x = 1$ 에서의 기울기는 $\frac{1}{2}$, $x = 9$ 에서의 기울기는 $\frac{1}{6}$

$x + 2y - 3 = 0$ 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$

$$x = 1 \text{ 일 때, } |\tan \theta| = \left| \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4}} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{4}{3}$$

3

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, 교점은 $x = 1$

$y = x^2 + 1$ 의 $x = 1$ 에서의 기울기는 2

$y = x + x^{-1}$ 의 $x = 1$ 에서의 기울기는 0

$$|\tan \theta| = \left| \frac{2-0}{1+0} \right| = 2$$

$$\therefore 2$$

4

$x^3 + x = x^2$ 의 교점은 $x = 0$

$y = x^3 + x$ 의 $x = 0$ 에서의 기울기는 1

$y = x^2$ 의 $x = 0$ 에서의 기울기는 0

$$|\tan \emptyset| = \left| \frac{1-0}{1+0} \right| = 1$$

$\therefore 1$

4번 문제

$3x - y = 2$ 의 기울기는 3.

기울기가 3이되는 $y = x^2 - 3x - 5$ 의 어떤 점은 $y' = 2x - 3 = 3$ 을 만족하는 x .

$x = 3, y = -5$ 기울기는 3.

접선의 방정식은 $y = 3x - 14$ 이다.

5번 문제

$x = 4$ 일 때 기울기는 $\frac{5}{4}$

점 $(4,6)$ 에서의 법선은 $y = -\frac{4}{5}x + \frac{46}{5}$

y 축과 만나는 점은 $(0, \frac{46}{5})$

3장 2절

4번 문제

$$s' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$$

$$s'' = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}t^{-\frac{5}{3}}$$

가속도가 0이 되는 시각은 $t = \left(\frac{8}{9}\right)^6$

이때의 속도는 $\frac{3^6}{2^{12}}$

$$\therefore \frac{729}{4096}$$

3장 3절

5번 문제

1

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 18x + 15 \\&= 3(x-1)(x-5)\end{aligned}$$

극대점은 1, 극소점은 5이다.

2

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x + 3}{3\sqrt[3]{(2x^3 - x^2 + 3x - 1)^2}}$$

$6x^2 - 2x + 3$ 의 실근의 갯수를 구하면, $(-2)^2 - 4 * 6 * 3 = -68 < 0$ 이므로 실근이 없다.

따라서 극대점과 극소점이 없다.

3

$$f'(x) = -\frac{4x^3}{(x^4 + 4)^2}$$

0일 때 극대점이다.

4

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

극대점은 -1, 극소점은 1이다.

5

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$x = 1$ 에서 극솟점.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x(3x - 1) + 6(x^2 - 1) \\&= 2(9x^2 - 2x - 3)\end{aligned}$$

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면 $x = \frac{1 \pm 2\sqrt{7}}{9}$

극대점은 $\frac{1-2\sqrt{7}}{9}$, 극솟점은 $\frac{1+2\sqrt{7}}{9}$ 이다.

3장 4절

3번 문제

1

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

$$y'' = 6x - 6$$

$(1, \infty)$ 에서 위로 오목하다.

2

$$y' = -3x^2 - 4x + 1$$

$$y'' = -6x - 4$$

$(-\infty, -\frac{2}{3})$ 에서 위로 오목하다.

3

$$y' = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{4}{(x+1)^3}$$

$(-1, \infty)$ 에서 위로 오목하다.

4

$$y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$y'' = \frac{4x^2+2x+3}{4(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

모든 실수에서 위로 오목하다.

4번 문제

1

$$y' = 3x^2 - 1$$

$$\text{임계점은 } x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$y'' = 6x$$

$$\text{변곡점은 } x = 0$$

2

$$y' = (x - 2)(x + 1)$$

$$\text{임계점은 } x = 2, -1$$

$$y'' = 2x - 1$$

$$\text{변곡점은 } x = \frac{1}{2}$$

3

$$x \leq -2, x \geq 0$$

$$y' = \frac{3(x+1)}{2(x^2+2x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\text{임계점은 } x = -2, 0$$

$$y'' = \frac{3(2-(x+1)^2(x^2+2x)^{-1})}{4(x^2+2x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$(2 - (x + 1)^2(x^2 + 2x)^{-1}) = 0$$

$$(x + 1)^2 = 2(x^2 + 2x)$$

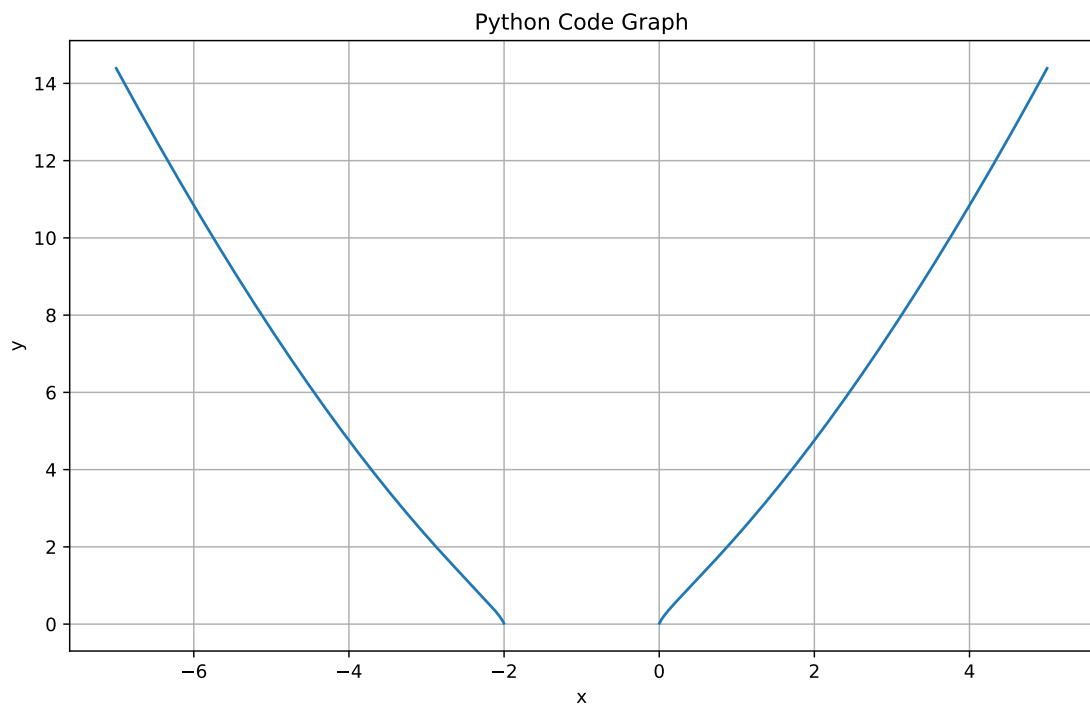
$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 4x$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{변곡점은 } x = -1 \pm \sqrt{2}$$

graph가 답지에 없어서 python으로 한번 그려보았습니다.



4

$$x \neq 0$$

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

임계점은 $x = 1, -1$

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

변곡점은 존재하지 않는다

3장 5절

4번 문제

직선 $y = x$ 위의 점에서 점 $(4,1)$ 에 가장 가까운 점은 접선이 직선 $y = x$ 와 수직이 되는 점이다.

점 $(4,1)$ 을 지나는 $y = x$ 의 법선은 $y = -x + 5$ 이다.

$y = x$ 와 $y = -x + 5$ 의 교점은 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

$\therefore (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

7번 문제

가로를 x , 세로를 y 라고 하자.

$$3x + 2y = 800$$

$$y = 400 - \frac{3}{2}x$$

$$xy = -\frac{3}{2}x^2 + 400x$$

이것의 일계도함수는 $-3x + 400$

$x = \frac{400}{3}$ 일 때 토지의 넓이가 최댓값을 가진다.

$$\therefore \frac{400}{3}, 200$$

3장 6절

5번 문제

1

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(25 + 2) \approx f(25) + f'(25)2$$

$$\therefore \frac{26}{5}$$

2

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f(64 - 3) \approx f(64) - f'(64)3$$

$$\therefore \frac{63}{16}$$

3

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

$$f(81 + 2.7) \approx f(81) + f'(81)2.7$$

$$\therefore \frac{121}{40}$$

4

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f(125 - 3) \approx f(125) - f'(125)3$$

$$\therefore \frac{124}{25}$$