쌍대이론

■ 표 6.7 원문제와 쌍대문제의 연관성

	원변수	관련 쌍대변수
어떤 문제	(결정변수) x_j (여유변수) x_{n+i}	$z_j - c_j$ (잉여변수) $j = 1, 2, \ldots, n$ y_i (결정변수) $i = 1, 2, \ldots, m$
Wyndor 문제	결정변수: x_1 x_2 여유변수: x_3 x_4 x_5	$z_1 - c_1$ (잉여변수) $z_2 - c_2$ y_1 (결정변수) y_2 y_3

■ 표 6.14 대응하는 원–쌍대 형태들

라벨	원문제(혹은 쌍대문제)	쌍대문제(혹은 원문제)
	Maximize Z (or W)	Minimize W (or Z)
	Constraint i:	Variable y_i (or x_i):
상식	$\leq$ form $\longleftrightarrow$	$y_i \geq 0$
이상	$=$ form $\longleftrightarrow$	Unconstrained
기괴	$\geq$ form $\longleftrightarrow$	$y_i' \leq 0$
	Variable x_j (or y_j):	Constraint j:
상식	$x_j \geq 0$ $\longleftrightarrow$	$\geq$ form
이상	Unconstrained $\longleftrightarrow$	$=$ form
기괴	$x_j' \leq 0$ $\longleftrightarrow$	$\leq$ form

민감도 분석

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	0	2	5	0	100
x_2	0	-1	1	3	1	0	20
x_5	0	16	0	-2	-4	1	10

$b_1 = 30$으로 바꾸어라

- $B^{-1}b_{new} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix}$
- $Z_{new} = [5, 0] \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix} = 150.$

(0) $Z + 2x_3 + 5x_4 = 150$
(1) $-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 30$
(2) $16x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = -30$

- 기저해: (0, 30, 0, 0, -30)
- $x_5 < 0$ (infeasible)
- Z-행의 비기저 변수 x_1, x_3, x_4의 계수는 각각 $0, 2, 5$. bfs였다면 최적 조건을 만족

$b_2 = 70$으로 바꾸어라.

- $B^{-1}b_{new} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}$
- $Z_{new} = [5, 0] \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix} = 100.$

(0) $Z + 2x_3 + 5x_4 = 100$
(1) $-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20$
(2) $16x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = -10$

- 기저해: (0, 20, 0, 0, -10). infeasible
- rc: (0, 0, 2, 5, 0). bfs였다면 최적

$b_1 = 10, b_2 = 100$으로 바꾸어라.

- $B^{-1}b_{new} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \end{bmatrix}$
- $Z_{new} = [5, 0] \begin{bmatrix} 10 \\ 60 \end{bmatrix} = 50.$

(0) $Z + 2x_3 + 5x_4 = 50$
(1) $-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$
(2) $16x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 60$

- 기저해: (0, 10, 0, 0, 60). feasible
- rc: 0, 0, 2, 5, 0. 최적

$c_3 = 80$으로 바꾸어라.

- origin: $z - c_3 = 2, z = 15$
- new: $z - c_3 = 15 - 80 = -65$

(0) $Z - 65x_3 + 5x_4 = 100$
(1) $-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20$
(2) $16x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 10$

- 기저해: (0, 20, 0, 0, 10). feasible
- rc: (0, 0, 7, 5, 0). 최적

$c_1 = -2, a_{11} = 0, a_{21} = 5$으로 바꾸어라.

- x_1의 rc: $c_B B^{-1} A_{\cdot 1} - c_1 = [5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - (-2) = 2$
- $N_{\cdot 1}$: $B^{-1} A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

(0) $Z + 2x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 100$
(1) $x_2 + 3x_3 + x_4 = 20$
(2) $5x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 10$

- 기저해: (0, 20, 0, 0, 10). feasible
- rc: (2, 0, 7, 5, 0). 최적

$c_2 = 6, a_{12} = 2, a_{22} = 5$으로 바꾸어라.

- $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
- $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$
- $c_B = [6, 0]$
- $B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}$
- $Z = [6, 0] \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix} = 60.$
- x_1의 rc: $c_B B^{-1} A_{\cdot 1} - c_1 = [6, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix} - (-5) = 2$
- $N_{\cdot 1}$: $B^{-1} A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{29}{2} \end{bmatrix}$
- x_3의 rc: $c_B B^{-1} A_{\cdot 3} - c_3 = [6, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} - 13 = -4$
- $N_{\cdot 3}$: $B^{-1} A_{\cdot 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$
- x_4의 rc: $c_B B^{-1} A_{\cdot 4} - c_4 = [6, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 3$
- $N_{\cdot 4}$: $B^{-1} A_{\cdot 4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(0) $Z + 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 = 60$
(1) $-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 10$
(2) $\frac{29}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 + x_5 = 40$

- 기저해: (0, 10, 0, 0, 40). feasible
- rc: (2, 0, -4, 3, 0). 최적 아님.

$c_6 = 10, a_{16} = 5, a_{26} = 3$을 도입하라

- $N_{\cdot 6}$: $B^{-1}A_{\cdot 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$
- x_6의 rc: $(5,0)\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix} - 10 = 5.$

(0) $Z + 2x_3 + 5x_4 + 5x_6 = 100$
(1) $-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_6 = 20$
(2) $16x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 - 7x_6 = 10$

- 기저해: (0, 20, 0, 0, 10, 0). feasible
- rc: (0, 0, 2, 5, 0, 5). 최적.

새로운 제약식 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 50$을 도입하라.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	2	5	0	0	100
x_2	0	-1	1	3	1	0	0	20
x_5	0	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6	0	2	3	5	0	0	1	50

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	2	5	0	0	100
x_2	0	-1	1	3	1	0	0	20
x_5	0	16	0	-2	-4	1	0	10
x_6	0	5	0	-4	-3	0	1	-10

(0) $Z + 2x_3 + 5x_4 = 100$
(1) $-x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20$
(2) $16x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 10$
(3) $5x_1 - 4x_3 - 3x_4 + x_6 = -10$

- 기저해: (0, 20, 0, 0, 10, -10). infeasible
- rc: (0, 0, 2, 5, 0). bfs면 최적.

제약식 2를 $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \le 100$으로 바꾸어라.

- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
- $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$
- $c_B = [5, 0]$
- $B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $Z = [5, 0]\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} = 100$
- x_1의 rc: $c_B B^{-1} A_{\cdot 1} - c_1 = [5,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix} - (-5) = 0$
- $N_{\cdot 1}$: $B^{-1}A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix}$
- x_3의 rc: $c_B B^{-1} A_{\cdot 3} - c_3 = [6,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} - 13 = 2$
- $N_{\cdot 3}$: $B^{-1}A_{\cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$
- x_4의 rc: $c_B B^{-1} A_{\cdot 4} - c_4 = [6,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 5$
- $N_{\cdot 4}$: $B^{-1}A_{\cdot 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

(0) $Z + 0x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 100$
(1) $x_2 - x_1 + 3x_3 + x_4 = 20$
(2) $x_5 + 15x_1 - 5x_3 - 5x_4 = 0$

- 기저해: (0, 20, 0, 0, 0). feasible
- rc: (0, 0, 2, 5, 0). 최적.

dual simplex

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & W = 40y_1 + 20y_2 + 90y_3 \\ \text{Subject to} \quad & 3y_1 + y_2 + 5y_3 \ge 5 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 10 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & W = 40y_1 + 20y_2 + 90y_3 \\ \text{Subject to} \quad & -3y_1 - y_2 - 5y_3 \le -5 \\ & -y_1 - y_2 - 3y_3 \le -10 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & -W = -40y_1 - 20y_2 - 90y_3 \\ \text{Subject to} \quad & -3y_1 - y_2 - 5y_3 + y_4 = -5 \\ & -y_1 - y_2 - 3y_3 + y_5 = -10 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{aligned}$$

iteration 1

	$-W$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	RHS
	1	40	20	90	0	0	0
y_4	0	-3	-1	-5	1	0	-5
y_5	0	-1	-1	-3	0	1	-10

- bfs: (0, 0, 0, -5, -10)

iteration 2

	$-W$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	RHS
	1	20	0	30	0	20	-200
y_4	0	-2	0	-2	1	-1	5
y_2	0	1	1	3	0	-1	10

- bfs: (0, 10, 0, 5, 0)

upper bound

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & Z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ \text{Subject to} \quad & x_3 = 20 - 3x_1 + 9x_2 \\ & 0 \le x_1 \le \frac{40}{3}, 0 \le x_2 \le \frac{40}{9}, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

- x_2 enter

$$Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$
$$x_3 = 20 + 9x_2 \quad \dots \quad x_2 \le \frac{40}{9}$$

$$x_2 = \frac{40}{9} - y_2$$
$$x_3 = 60 - 3x_1 - 9y_2 \quad \dots \quad x_1 \le \frac{40}{3}$$
$$Z - 2x_1 + 3y_2 = \frac{40}{3}$$

- x_1 enter

$$x_1 = \frac{40}{3} - y_1$$
$$x_3 = 20 + 3y_1 - 9y_2$$
$$Z + 2y_1 + 3y_2 = 40$$

- bfs$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$: $(\frac{40}{3}, \frac{40}{9}, 20, 0, 0)$
- obj: = 40

수송 문제

1. 공급량과 수요량이 일치하지 않는 경우: dummy 수요를 만들고, cost를 0으로 설정.
2. 최소, 최대 수요량이 있는 경우: 가상 근원지

	Acre Foot당 비용(단위 10달러)				공급
	Berdoo	Los Devils	San Go	Hollyglass	
Colombo River	16	13	22	17	50
Sacron River	14	13	19	15	60 160
Calorie River	19	20	23	—	50
최소요구량	30 50	70 70	0 30	10 60	(백만 acre feet의 단위)

150

■ 표 8.12 Metro Water District를 위한 매개변수표

			분배되는 단위당 비용(천만 달러)					
			목적지					
			Berdoo (min.) 1	Berdoo (extra) 2	Los Devils 3	San Go 4	Hollyglass 5	공급
근원지	Colombo River	1	16	16	13	22	17	50
	Sacron River	2	14	14	13	19	15	60
	Calorie River	3	19	19	20	23	M	50
	Dummy	4(D)	M	0	M	0	0	50
수요			30	20	70	30	60	

초기 bfs를 만들기 위한 절차

			분배되는 단위당 비용(천만 달러)					
			목적지					
			Berdoo (min.) 1	Berdoo (extra) 2	Los Devils 3	San Go 4	Hollyglass 5	공급
근원지	Colombo River	1	16	16	13	22	17	50
	Sacron River	2	14	14	13	19	15	60
	Calorie River	3	19	19	20	23	M	50
	Dummy	4(D)	M	0	M	0	0	50
수요			30	20	70	30	60	

Figure 1: 문제 예시

1. 북모서리법으로 기저변수를 선택

■ 표 8.16 Metro Water District를 위한 최소 필요가 없는 매개변수표

		목적지						
		1	2	3	4	5	공급	u_i
근원지	1	16 (30)	16 (20)	13	22	17	50	
	2	14	14 (0)	13 (60)	19	15	60	
	3	19	19	20 (10)	23 (30)	M (10)	50	
	4(D)	M	0	M	0	0 (50)	50	
수요		30	20	70	30	60	Z = 2,470 + 10M	
	v_j							

최적화 검사 절차

1. 가장 많은 할당이 일어난 행의 변수 하나를 0으로 설정
2. 기저인 x_{ij}의 i, j에 대해 $c_{ij} = u_i + v_j$를 만족한다는 성질로 u_i와 v_j를 계산한다.
3. 비기저 변수들의 $c_{ij} - u_i - v_j$를 계산한다.
4. 모두 양수이면 최적.

반복

1. 진입기저변수를 결정하라: 가장 큰(절댓값으로) 음의 값 $C_{jj} - u_i - v_j$를 가지는 비기저변수 x_{ij}를 선택하라.
2. 탈락기저변수를 결정하라: 진입기저변수가 증가할 때 가능을 유지하기 위해 요구되는 연쇄반응을 식별하라. 기증셀들 중에서, 가장 작은 값을 가지는 기저변수를 선택하라.
3. 새 기저가능해를 결정하라: 탈락변수의 값을 각 수신셀의 할당에 더하라. 그 값을 각 기증 셀의 할당에서 빼어라.

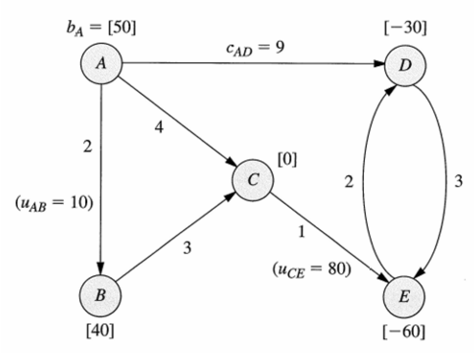
다익스트라 최소비용 문제로 전환

시작점 용량은 len(node) - 1, 나머지는 -1로 설정하고 용량은 무한

최대흐름문제 최소비용 문제로 전환

도착점에서 출발점 arc를 생성한 후, $max x_{fa}$, cost, outflow - inflow는 모두 0으로 설정.

7. 네트워크 심플렉스 해법



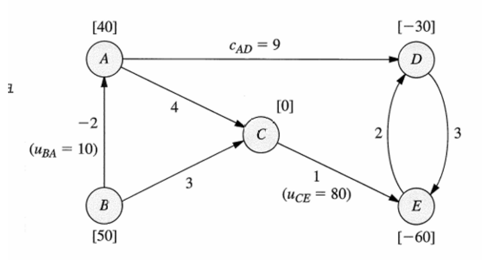
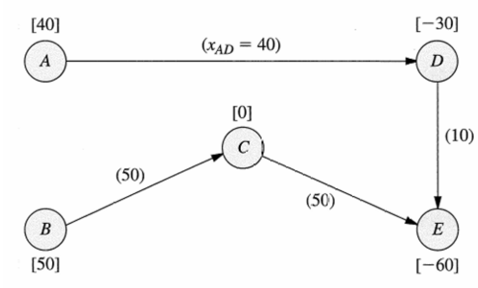
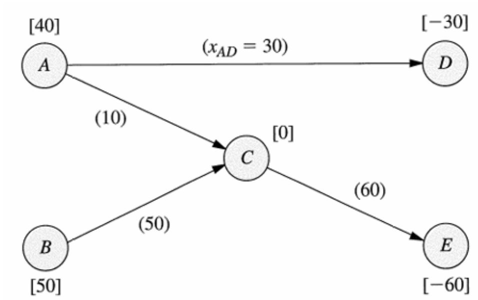


Figure 2: x_{AB}가 상한값에 도달했다고 가정





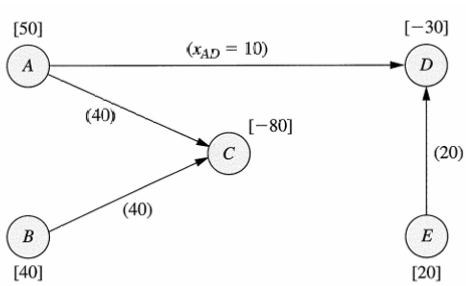


Figure 3: x_{CE}가 상한값에 도달해서 역방향됨

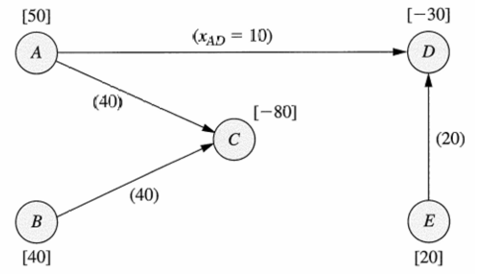


Figure 4: x_{BA}가 진입하고, x_{AB}가 퇴출