

ADP 정리 노트

2025-10-07

확률과 통계

통계학

- 불확실한 상황 하에서 데이터에 근거하여 **과학적인 의사결정**을 도출하기 위한 이론과 방법의 체계
- 모집단으로부터 수집된 **데이터(sample)**를 기반으로 모집단의 **특성을 추론**하는 것을 목표로 한다.

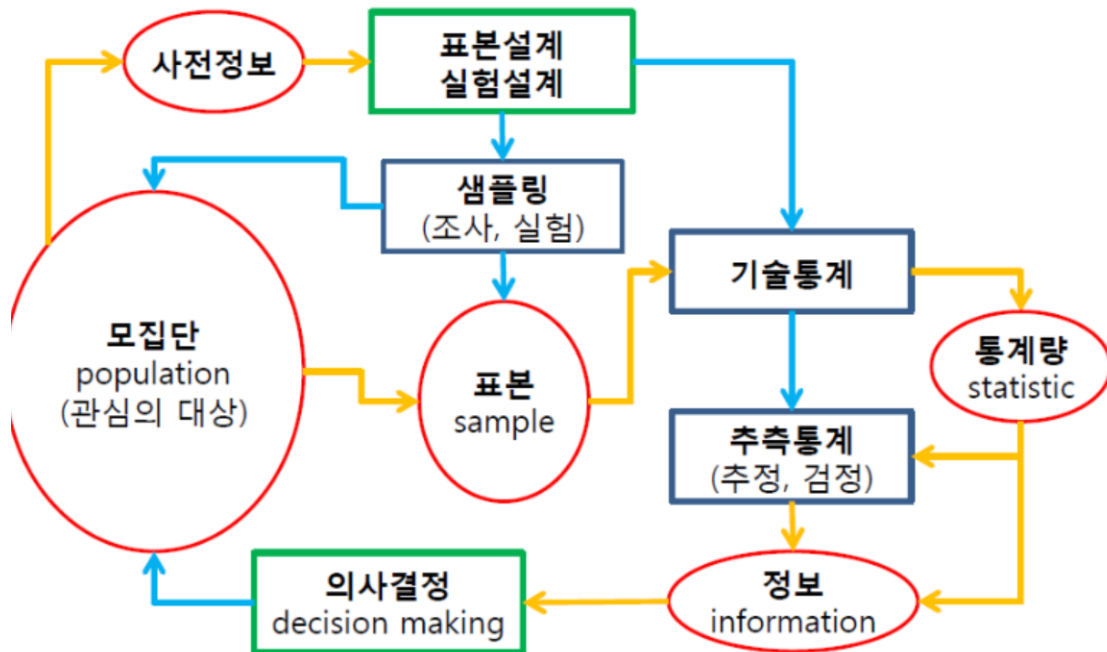


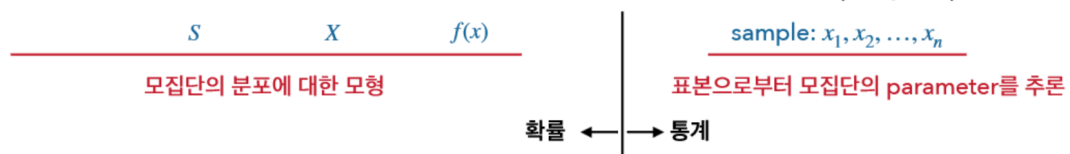
Figure 1: 통계적 의사결정 과정

확률

- 고전적 의미: 표본공간에서 특정 사건이 차지하는 비율
- 통계적 의미: 특정 사건이 발생하는 **상대도수의 극한**
 - 각 원소의 발생 가능성이 동일하지 않아도 무한한 반복을 통해 수렴하는 값을 구할 수 있다.

확률 분포 정의 단계

- 확률실험 → 표본공간 → 확률변수 → 확률분포 → **표본의 분포** → 통계적 추론 (추정, 검정)



- **Experiment(확률실험)**: 동일한 조건에서 독립적으로 반복할 수 있는 실험이나 관측
- **Sample space(표본공간)**: 모든 simple event의 집합
- **Event(사건)**: 실험에서 발생하는 결과 (부분 집합)
- **Simple event(단순사건)**: 원소가 하나인 사건
- **확률 변수**: 확률실험의 결과를 수치로 나타낸 변수

확률 분포

이산 확률 분포

이산 표본 공간, 연속 표본공간에서 정의 가능포

- **베르누이 시행**: 각 시행은 서로 독립적이고, 실패와 성공 두 가지 결과만 존재.
 - 단 모집단의 크기가 충분히 크고, 표본(시행)의 크기가 충분히 작다면 비복원 추출에서도 유효
 - 평균: p
 - 분산: $p(1-p)$
- **이항 분포**: n 번의 독립적인 베르누이 시행을 수행하여 성공 횟수를 측정
 - $X \sim B(n, p), f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
 - 평균: np
 - 분산: $np(1-p)$
 - n 이 매우 크고, p 가 매우 작을 때, **포아송 분포**로 근사할 수 있다. ($\lambda = np$)
- **음이항 분포**
 - 정의: n 번의 독립적인 베르누이 시행을 수행하여 k 번 성공하고, r 번 실패한 경우 ($n = k + r$)
 1. r 번의 실패가 나오기 전까지, 성공한 횟수 x
 - * $X \sim NB(r, p), f(x) = \binom{x+r-1}{x} p^x (1-p)^r$
 - * 평균: $\frac{rp}{1-p}$
 - * 분산: $\frac{rp}{(1-p)^2}$
 2. r 번의 실패가 나오기 전까지, 시행한 횟수 x
 - * 4번에서 성공을 실패로 바꿈
 3. k 번의 성공이 나오기 전까지, 실패한 횟수 x
 - * 1번에서 실패를 성공으로 바꿈
 4. k 번의 성공이 나오기 전까지, 시행한 횟수 x
 - * $f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$
 - * k 가 1일 때 기하분포와 동일
 5. n 번의 시행 횟수에서, k 번 성공 또는 r 번 실패한 경우: 이항분포
- **기하 분포**:
 - 정의:
 1. 성공 확률이 p 인 베르누이 시행에서 첫 성공까지의 시행 횟수
 - * $X \sim G(p), f(x) = (1-p)^{x-1} p, x = 1, 2, 3, \dots$

- ★ 평균: $\frac{1}{p}$
- ★ 분산: $\frac{1-p}{p^2}$

2. 성공 확률이 p인 베르누이 시행에서 첫 성공까지의 실패 횟수

- ★ $X \sim G(p), f(x) = (1-p)^x p, x = 0, 1, 2, \dots$
- ★ 평균: $\frac{1-p}{p}$
- ★ 분산: $\frac{1-p}{p^2}$

- 비기억 특성: $P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$

• 초기하 분포: 베르누이 시행이 아닌 시행에서 성공하는 횟수

- $X \sim H(n, N, k), f(x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

- 평균: $\frac{nK}{N}$
- 분산: $\frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$

• 포아송 분포: 임의의 시간동안 어떤 사건이 간헐적으로 발생할 때, 동일한 길이의 시간동안 실제 사건이 발생하는 횟수

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda), f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \lambda > 0$
- 평균: λ
- 분산: λ

연속 확률 분포

연속 표본 공간에서 정의 가능

• 균일 분포

- $f(x) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$
- 평균: $\frac{a+b}{2}$
- 분산: $\frac{(b-a)^2}{12}$

• 정규 분포

- $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- 선형 변환: $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

• t 분포

- 자유도가 커질수록 표준 정규분포에 근사함.
- $\frac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t(n), Z: \text{표준정규분포}, V: \text{자유도가 } n \text{인 카이제곱분포}$

• f 분포

- $F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}, X_1 \sim \chi^2(\nu_1), X_2 \sim \chi^2(\nu_2), X_1 \text{과 } X_2 \text{는 서로 독립}$

• 감마 분포

- α : 분포의 형태 결정, θ : 분포의 크기 결정
- 평균: $\alpha\theta$
- 분산: $\alpha\theta^2$

- 카이제곱 분포: $\alpha = \nu/2, \theta = 2$ 인 감마분포

- ★ $Z_i \sim N(0, 1)$ 일 때, $Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$

- * X_i 가 서로 독립이고, 자유도가 ν_i 인 카이제곱분포를 따른다면, $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n)$
- * 자유도가 커질수록 기댓값을 중심으로 모이고, 대칭에 가까워진다.
- **지수 분포:** $\alpha = 1, \theta = 1/\lambda$ 인 감마분포
 - * $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{\theta}), f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$
 - * θ : 평균 사건 발생 간격, λ : 단위 시간당 사건 발생 횟수
 - * 포아송 분포에서 사건 발생 간격의 분포
 - * $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \theta), \theta = 1/\lambda$
 - * 비기억 특성을 가진다: $p(X > s + t | X > s) = p(X > t) = e^{-\lambda t}$
 - * 독립적으로 동일한 지수분포를 따르는 확률변수 n 개의 합은 $\alpha = n, \theta = \frac{1}{\lambda}$ 인 감마분포를 따른다.

다변량 분포

- **다항 분포:** n 번의 독립적인 **베르누이 시행**을 수행하여 k 개의 범주로 분류
 - $X \sim M(n, p_1, p_2, \dots, p_k), f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$
 - 평균: $[np_1, np_2, \dots, np_k]$
 - 분산: $[np_1(1 - p_1), np_2(1 - p_2), \dots, np_k(1 - p_k)]$
 - 공분산: $-np_i p_j (i \neq j)$
 - 독립인 변수의 갯수는 $k-1$ 개 (k 개의 사건)

샘플링

분포의 동질성 검정

- 연속형
 - 이표본 검정: 콜모고로프-스미르노프 검정 사용
 - 일표본 검정:
 - * 정규분포, 지수분포: 앤더슨-달링 검정 사용
 - * 그 외: 몬테카를로 방법 사용
- 이산형
 - 이표본: 카이제곱 독립성 검정
 - 일표본: 카이제곱 동질성 검정

표본의 분포

- 샘플링에 따라 통계량이 다른 값을 가질 수 있다. 따라서 통계량의 분포를 이용한 통계적 추론이 가능하다.
- 통계량: 표본의 특성을 나타내는 값

- 추정량: 아래의 조건을 만족하는 통계량
 - 불편성: 추정량의 기대값이 추정하려는 모수와 같아야 한다.
 - 효율성: 분산이 작아야 한다. 표본의 갯수가 많아질수록 분산이 작아져야 한다.

표본 평균의 분포

- 모집단의 분포와 관계없이, 모집단의 평균이 μ 이고, 분산이 σ^2 이면, \bar{X} 의 평균은 μ 이고, 분산은 σ^2/n 인 정규분포를 따른다.
 - 단 모집단의 분포에 따라 표본의 크기가 충분히 커야함. (중심극한정리¹)
- 만약 모집단의 분산을 모를 경우, σ 를 s 로 대체하여, t분포를 따르는 표본 평균의 분포를 구할 수 있다.
 - 단 이때는 **모집단이 정규분포를 따라야 한다.**

표본 분산의 분포

- 정규 모집단으로 부터 나온 표본의 분산 S 에 대하여, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 은 자유도가 $n-1$ 인 카이제곱 분포를 따른다.
 - 모집단이 정규분포를 따르지 않을 경우, 비모수적인 방법을 사용해야 한다.
- 두 정규 모집단으로부터 계산되는 표본분산의 비율은 f-분포를 따른다.

추정

- 통계적 추론: 모집단에서 추출된 표본의 통계량으로부터 모수를 추론하는 것
 - 추정
 - * 점추정
 - * 구간추정
 - 가설 검정

점 추정

- 불편성
 - $E(\hat{\theta}) = \theta$
 - $\text{bias} = E(\hat{\theta}) - \theta$
 - * 보통 sample size가 커질수록 bias는 0에 수렴
 - \bar{X}, X_n 은 μ 의 불편추정량이다.
- 최소분산
 - $\text{Var}(\bar{X})$ 가 $\text{Var}(X_n)$ 보다 분산이 작아서 더 좋은 추정량

¹ 모집단의 분포와 상관 없이, 표본의 평균은 정규분포에 수렴한다는 정리. 이항분포의 경우, $P(X=c) \sim P(c - 0.5 < X < c + 0.5)$ 로 근사 가능하다는 라플라스의 정리를 일반화한 것

$$- MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + bias^2$$

★ 큰 오차에 더 큰 페널티를 주기 위해 제곱

	모수 θ	표본크기	추정량 $\hat{\theta}$	기대값 $E(\hat{\theta})$	표준오차 $\sigma_{\hat{\theta}}$
모평균	μ	n	\bar{X}	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
모비율	p	n	$\hat{p} = X/n$	p	$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
모평균차이	$\mu_1 - \mu_2$	n_1, n_2	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$\mu_1 - \mu_2$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
모비율차이	$p_1 - p_2$	n_1, n_2	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$p_1 - p_2$	$\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

Figure 2: 대표적인 불편추정량

- **전부 중심극한의정리를 적용**할 수 있다. (비율은 0과 1의 평균이므로)
- 모평균, 모비율의 차이는 서로 독립이라는 가정이 필요하다.

구간 추정

- α : 유의수준
 - $1 - \alpha$: 신뢰수준²
 - $(\theta_L, \theta_U) = (1 - \alpha) \times 100\%$ 신뢰구간
1. (θ_L, θ_U) 이 충분이 높은 가능성으로 미지의 모수 θ 를 포함해야 한다
 2. 구간이 충분히 좁아야 한다
 - 표준 정규분포에서 0을 중심으로 대칭일 때 길이가 짧다.
 - 고로 신뢰구간이 대칭임

표본의 크기 결정

특정 오차 아래로 하는 표본의 수 구하는 법

- 그냥 표본오차가 목표 오차보다 작게 하는 값을 구하면 됨.
- 모비율을 모를 때는 일단 **0.5로 보수적으로 놓고 계산**

모분산 추정

- 카이제곱 분포는 가장 짧은 신뢰구간을 구하기 쉽지 않음
 - 그냥 쉽게 구하기 위해 $(x_{\alpha/2}^2, x_{1-\alpha/2}^2)$ 를 사용

² 샘플링을 무한히 반복했을 때, 이들의 신뢰 구간 중 95%의 구간이 실제 모수를 포함한다. 즉, 구간이 확률 변수이다.

- 모분산의 신뢰구간: $\left(\frac{(n-1)s^2}{x_{(1-\alpha)/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2}^2(n-1)} \right)$
- 표본의 수가 적을수록, 카이제곱 분포의 신뢰구간은 더 길어진다.

분산분석

표본	개수	비모수 검정		모수 검정	
		서열척도	명목척도	등분산성 o	등분산성 x
단일 표본	1개	부호검정, 부호순위검정	적합성 검정, Run 검정	일표본 t-검정	
대응 표본	2개	부호검정, 부호순위검정	McNemar 검정	대응표본 t-검정	
	K개	Friedman 검정	Cochran Q 검정	반복측정 분산분석	
독립 표본	2개	순위합 검정, 만위트니U 검정	독립성 검정, 동질성 검정	독립표본 t-검정	Welch's t-검정
	K개	Kruskal-Wallis 검정		일원배치 분산분석	Welch's ANOVA

상관분석

상관계수

- 두 변수 간의 선형적 관계의 강도와 방향을 나타내는 척도

질적 변수

- 스피어만 상관계수: 서열척도 vs 서열척도. 확률분포에 대한 가정 필요 없음.
- 켄달의 타우: 서열척도 vs 서열척도.
 - 둘 중 하나가 연속형이어도 스피어만, 켄달의 타우 중 하나를 사용.
 - 샘플이 적거나, 이상치, 동점이 많은 경우 켄달의 타우를 주로 사용.
 - 두 변수의 크기는 같아야함.
- 크래머 v: 명목척도 vs 명목척도.
 - 적어도 하나의 변수가 3개 이상의 level을 가지면 사용
 - 범위는 0~1. 0.2 이하면 서로 연관성이 약하고, 0.6 이상이면 서로 연관성이 높음.

양적 변수

- 피어슨 상관계수: 연속형 vs 연속형
 - 두 변수 간의 선형적 관계를 측정
 - -1 ~ 1 사이의 값
 - 0: 독립, 1: 완전한 양의 상관관계, -1: 완전한 음의 상관관계
 - 이상치에 민감

군집분석

““