

# OR 과제 - 3

20192208 김형훈

2025-04-06

## 4.6-2

수식을 다시 재구성해보면 아래와 같다.

$$\text{Maximize } Z - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + M\bar{x}_5 + M\bar{x}_6 = 0$$

$$\text{Subject to } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300$$

$$8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0$$

**a**

|             | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\bar{x}_5$ | $\bar{x}_6$ | RHS |
|-------------|---|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-----|
|             | 1 | -4    | -2    | -3    | -5    | M           | M           | 0   |
| $\bar{x}_5$ | 0 | 2     | 3     | 4     | 2     | 1           | 0           | 300 |
| $\bar{x}_6$ | 0 | 8     | 1     | 1     | 5     | 0           | 1           | 300 |

basic 변수가 0이 되도록 다시 계산해준다.

|             | Z | $x_1$      | $x_2$     | $x_3$     | $x_4$     | $\bar{x}_5$ | $\bar{x}_6$ | RHS     |
|-------------|---|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|-------------|---------|
|             | 1 | $-4 - 10M$ | $-2 - 4M$ | $-3 - 5M$ | $-5 - 7M$ | 0           | 0           | $-600M$ |
| $\bar{x}_5$ | 0 | 2          | 3         | 4         | 2         | 1           | 0           | 300     |
| $\bar{x}_6$ | 0 | 8          | 1         | 1         | 5         | 0           | 1           | 300     |

- 초기 BFS:  $(0, 0, 0, 0, 300, 300)$
- 초기 진입 변수:  $x_1$
- 초기 퇴출 변수:  $\bar{x}_6$

**b**

|             | Z | $x_1$ | $x_2$                          | $x_3$                          | $x_4$                         | $\bar{x}_5$ | $\bar{x}_6$                  | RHS             |
|-------------|---|-------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------|------------------------------|-----------------|
|             | 1 | 0     | $-\frac{3}{2} - \frac{11}{4}M$ | $-\frac{5}{2} - \frac{15}{4}M$ | $-\frac{5}{2} - \frac{3}{4}M$ | 0           | $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}M$ | $150 - 225M$    |
| $\bar{x}_5$ | 0 | 0     | $\frac{11}{4}$                 | $\frac{15}{4}$                 | $\frac{3}{4}$                 | 1           | $-\frac{1}{4}$               | $\frac{900}{4}$ |
| $x_1$       | 0 | 1     | $\frac{1}{8}$                  | $\frac{1}{8}$                  | $\frac{5}{8}$                 | 0           | $\frac{1}{8}$                | $\frac{300}{8}$ |

- 진입 변수:  $x_3$

- 퇴출 변수:  $\bar{x}_5$

|       | $Z$ | $x_1$ | $x_2$           | $x_3$ | $x_4$         | $\bar{x}_5$       | $\bar{x}_6$       | RHS |
|-------|-----|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|-------------------|-----|
|       | 1   | 0     | $\frac{1}{3}$   | 0     | -2            | $\frac{2}{3} + M$ | $\frac{1}{3} + M$ | 300 |
| $x_3$ | 0   | 0     | $\frac{11}{15}$ | 1     | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{15}$    | $-\frac{1}{15}$   | 60  |
| $x_1$ | 0   | 1     | $\frac{1}{30}$  | 0     | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{1}{30}$   | $\frac{2}{15}$    | 30  |

- 진입 변수:  $x_4$
- 퇴출 변수:  $x_1$

|       | $Z$ | $x_1$          | $x_2$           | $x_3$ | $x_4$ | $\bar{x}_5$       | $\bar{x}_6$       | RHS |
|-------|-----|----------------|-----------------|-------|-------|-------------------|-------------------|-----|
|       | 1   | $\frac{10}{3}$ | $\frac{4}{9}$   | 0     | 0     | $\frac{5}{9} + M$ | $\frac{7}{9} + M$ | 400 |
| $x_3$ | 0   | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{13}{18}$ | 1     | 0     | $\frac{5}{18}$    | $-\frac{1}{9}$    | 50  |
| $x_4$ | 0   | $\frac{5}{3}$  | $\frac{1}{18}$  | 0     | 1     | $-\frac{1}{18}$   | $\frac{2}{9}$     | 50  |

종료.

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = 50$
- $x_4 = 50$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $Z = 400$

C

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & Z - \bar{x}_5 - \bar{x}_6 = 0 \\ \text{Subject to } & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300 \\ & 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4 \\ \bar{x}_5 &\geq 0, \bar{x}_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & -Z + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 = 0 \\
\text{Subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300 \\
& 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
x_j &\geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4 \\
\bar{x}_5 &\geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
\end{aligned}$$

표로 작성하면

|             | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\bar{x}_5$ | $\bar{x}_6$ | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-----|
|             | 1    | 0     | 0     | 0     | 0     | 1           | 1           | 0   |
| $\bar{x}_5$ | 0    | 2     | 3     | 4     | 2     | 1           | 0           | 300 |
| $\bar{x}_6$ | 0    | 8     | 1     | 1     | 5     | 0           | 1           | 300 |

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

|             | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\bar{x}_5$ | $\bar{x}_6$ | RHS  |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|------|
|             | 1    | -10   | -4    | -5    | -7    | 0           | 0           | -600 |
| $\bar{x}_5$ | 0    | 2     | 3     | 4     | 2     | 1           | 0           | 300  |
| $\bar{x}_6$ | 0    | 8     | 1     | 1     | 5     | 0           | 1           | 300  |

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_6$

|             | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$           | $x_3$           | $x_4$          | $\bar{x}_5$ | $\bar{x}_6$    | RHS            |
|-------------|------|-------|-----------------|-----------------|----------------|-------------|----------------|----------------|
|             | 1    | 0     | $-\frac{11}{4}$ | $-\frac{15}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | 0           | $\frac{5}{4}$  | -225           |
| $\bar{x}_5$ | 0    | 0     | $\frac{11}{4}$  | $\frac{15}{4}$  | $\frac{3}{4}$  | 1           | $-\frac{1}{4}$ | 225            |
| $x_1$       | 0    | 1     | $\frac{1}{8}$   | $\frac{1}{8}$   | $\frac{5}{8}$  | 0           | $\frac{1}{8}$  | $\frac{75}{2}$ |

- 진입변수:  $x_3$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_5$

|       | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$           | $x_3$ | $x_4$         | $\bar{x}_5$     | $\bar{x}_6$     | RHS |
|-------|------|-------|-----------------|-------|---------------|-----------------|-----------------|-----|
|       | 1    | 0     | 0               | 0     | 0             | 1               | 1               | 0   |
| $x_3$ | 0    | 0     | $\frac{11}{15}$ | 1     | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{15}$  | $-\frac{1}{15}$ | 60  |
| $x_1$ | 0    | 1     | $\frac{1}{30}$  | 0     | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{2}{15}$  | 30  |

Phase 1 종료.

이제 필요없는 인공변수를 제거하고, 기존의 obj를 가져와서 다시 표를 만들어보자.

|       | $Z$ | $x_1$ | $x_2$           | $x_3$ | $x_4$         | RHS |
|-------|-----|-------|-----------------|-------|---------------|-----|
|       | 1   | -4    | -2              | -3    | -5            | 0   |
| $x_3$ | 0   | 0     | $\frac{11}{15}$ | 1     | $\frac{1}{5}$ | 60  |
| $x_1$ | 0   | 1     | $\frac{1}{30}$  | 0     | $\frac{3}{5}$ | 30  |

basic 변수를 0으로 만들어주자.

|       | $Z$ | $x_1$ | $x_2$           | $x_3$ | $x_4$         | RHS |
|-------|-----|-------|-----------------|-------|---------------|-----|
|       | 1   | 0     | $\frac{1}{3}$   | 0     | -2            | 300 |
| $x_3$ | 0   | 0     | $\frac{11}{15}$ | 1     | $\frac{1}{5}$ | 60  |
| $x_1$ | 0   | 1     | $\frac{1}{30}$  | 0     | $\frac{3}{5}$ | 30  |

- 초기 BFS( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ): (30, 0, 60, 0)
- 초기 진입변수:  $x_4$
- 초기 퇴출변수:  $x_1$

## 4.6-3

**a**

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & -Z = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - M\bar{x}_5 - M\bar{x}_7 \\ \text{Subject to } & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6 \\ \bar{x}_5 &\geq 0, \bar{x}_7 \geq 0 \end{aligned}$$

**b**

먼저 basic 변수를 0으로 만들어주자.

|             | $-Z$ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$ | $\bar{x}_5$ | $x_6$ | $\bar{x}_7$ | RHS    |
|-------------|------|----------|----------|----------|-------|-------------|-------|-------------|--------|
| $\bar{x}_5$ | 1    | $2 - 4M$ | $3 - 6M$ | $1 - 2M$ | $M$   | 0           | $M$   | 0           | $-14M$ |
| $\bar{x}_7$ | 0    | 1        | 4        | 2        | -1    | 1           | 0     | 0           | 8      |
|             | 0    | 3        | 2        | 0        | 0     | 0           | -1    | 1           | 6      |

- 진입변수:  $x_2$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_5$

|             | $-Z$ | $x_1$                        | $x_2$ | $x_3$             | $x_4$                        | $\bar{x}_5$                  | $x_6$ | $\bar{x}_7$ | RHS       |
|-------------|------|------------------------------|-------|-------------------|------------------------------|------------------------------|-------|-------------|-----------|
| $x_2$       | 1    | $\frac{5}{4} - \frac{5}{2}M$ | 0     | $M - \frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}M$ | $\frac{3}{2}M - \frac{3}{4}$ | $M$   | 0           | $-2M - 6$ |
| $\bar{x}_7$ | 0    | $\frac{1}{4}$                | 1     | $\frac{1}{2}$     | $-\frac{1}{4}$               | $\frac{1}{4}$                | 0     | 0           | 2         |
|             | 0    | $\frac{5}{2}$                | 0     | -1                | $\frac{1}{2}$                | $-\frac{1}{2}$               | -1    | 1           | 2         |

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_7$

|       | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$           | $\bar{x}_5$       | $x_6$          | $\bar{x}_7$       | RHS           |
|-------|------|-------|-------|----------------|-----------------|-------------------|----------------|-------------------|---------------|
| $x_2$ | 1    | 0     | 0     | 0              | $\frac{1}{2}$   | $M - \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | $M - \frac{1}{2}$ | -7            |
| $x_1$ | 0    | 0     | 1     | $\frac{3}{5}$  | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$    | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{10}$   | $\frac{9}{5}$ |
|       | 0    | 1     | 0     | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$   | $-\frac{1}{5}$    | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$     | $\frac{4}{5}$ |

종료.

- $x_1 = \frac{4}{5}$
- $x_2 = \frac{9}{5}$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 0$
- $\bar{x}_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $\bar{x}_7 = 0$
- $-Z = -7$

최적해는 7

C

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & Z - \bar{x}_5 - \bar{x}_7 = 0 \\ \text{Subject to } & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ & \text{and} \\ & x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6 \\ & \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & -Z + \bar{x}_5 + \bar{x}_7 = 0 \\ \text{Subject to } & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ & \text{and} \\ & x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6 \\ & \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0 \end{aligned}$$

표로 작성하면

|             | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\bar{x}_5$ | $x_6$ | $\bar{x}_7$ | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-----|
|             | 1    | 0     | 0     | 0     | 0     | 1           | 0     | 1           | 0   |
| $\bar{x}_5$ | 0    | 1     | 4     | 2     | -1    | 1           | 0     | 0           | 8   |
| $\bar{x}_7$ | 0    | 3     | 2     | 0     | 0     | 0           | -1    | 1           | 6   |

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

|             | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\bar{x}_5$ | $x_6$ | $\bar{x}_7$ | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-----|
|             | 1    | -4    | -6    | -2    | 1     | 0           | 1     | 0           | -14 |
| $\bar{x}_5$ | 0    | 1     | 4     | 2     | -1    | 1           | 0     | 0           | 8   |
| $\bar{x}_7$ | 0    | 3     | 2     | 0     | 0     | 0           | -1    | 1           | 6   |

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수:  $x_2$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_5$

|             | $-Z$ | $x_1$          | $x_2$ | $x_3$         | $x_4$          | $\bar{x}_5$    | $x_6$ | $\bar{x}_7$ | RHS |
|-------------|------|----------------|-------|---------------|----------------|----------------|-------|-------------|-----|
|             | 1    | $-\frac{5}{2}$ | 0     | 1             | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$  | 1     | 0           | -2  |
| $x_2$       | 0    | $\frac{1}{4}$  | 1     | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$  | 0     | 0           | 2   |
| $\bar{x}_7$ | 0    | $\frac{5}{2}$  | 0     | -1            | $\frac{1}{2}$  | $-\frac{1}{2}$ | -1    | 1           | 2   |

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_7$

|       | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$           | $\bar{x}_5$    | $x_6$          | $\bar{x}_7$     | RHS           |
|-------|------|-------|-------|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|---------------|
|       | 1    | 0     | 0     | 0              | 0               | 1              | 0              | 1               | 0             |
| $x_2$ | 0    | 0     | 1     | $\frac{3}{5}$  | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{5}$ |
| $x_1$ | 0    | 1     | 0     | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$   | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$   | $\frac{4}{5}$ |

Phase 1 종료.

이제 필요없는 인공변수를 제거하고, 기존의 obj를 가져와서 다시 표를 만들어보자.

|       | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$           | $x_6$          | RHS           |
|-------|------|-------|-------|----------------|-----------------|----------------|---------------|
|       | 1    | 2     | 3     | 1              | 0               | 0              | 0             |
| $x_2$ | 0    | 0     | 1     | $\frac{3}{5}$  | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{5}$ |
| $x_1$ | 0    | 1     | 0     | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$   | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

basic 변수를 0으로 만들어주자.

|       | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$         | $x_6$          | RHS           |
|-------|------|-------|-------|----------------|---------------|----------------|---------------|
|       | 1    | 0     | 0     | 0              | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | -7            |
| $x_2$ | 0    | 0     | 1     | 1              | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{5}$ |
| $x_1$ | 0    | 1     | 0     | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

종료.

- $x_1 = \frac{4}{5}$
- $x_2 = \frac{9}{5}$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 0$
- $x_6 = 0$
- $-Z = -7$

최적해는 7

## d

- b BFS 진행 순서

1.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$
2.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
3.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

- c BFS 진행 순서

1.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$
2.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
3.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0)$

두 방법의 BF 해 진행 과정과 최종 해는 동일하다.

인공 변수를 사용한 인공 문제에만 가능한 해는 인공 변수  $\bar{x}_5$ 와  $\bar{x}_7$ 이 양수인 경우입니다. 초기 BF 해인  $(0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$ 가 여기에 해당합니다. 이 해는 인공 변수  $(\bar{x}_5 = 8, \bar{x}_7 = 6)$ 가 양수이므로 원래 문제에서는 가능해가 아닙니다.

최종 BFS인  $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$ 은 인공 변수  $\bar{x}_5$ 와  $\bar{x}_7$ 가 모두 0이므로 실제 문제에서도 가능해다. 이것이 바로 Phase 1과 Big-M 방법의 목적이며, 인공 변수들이 모두 0이 되는 실행 가능한 해를 찾고, 그 다음에 원래 목적함수에 대해 최적화를 진행하는 것이다.

따라서

- 인공 변수를 사용한 인공 문제에만 가능한 해 = 인공 변수가 0이 아닌 해 =  $(0, 0, 0, 0, 8, 0, 6), (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
- 실제 문제에도 가능한 해 = 인공 변수가 0인 해 =  $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

## 4.6-8

a

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad Z - \bar{x}_4 - \bar{x}_6 = 0 \\
 & \text{Subject to} \quad 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \bar{x}_4 = 420 \\
 & \qquad \qquad \qquad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 280 \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{and} \\
 & \qquad \qquad \qquad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 & \qquad \qquad \qquad \bar{x}_4 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad -Z + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = 0 \\
 & \text{Subject to} \quad 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \bar{x}_4 = 420 \\
 & \qquad \qquad \qquad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 280 \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{and} \\
 & \qquad \qquad \qquad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 & \qquad \qquad \qquad \bar{x}_4 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

표로 작성하면

|             | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$ | $\bar{x}_6$ | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-----|
|             | 1    | 0     | 0     | 0     | 1           | 0     | 1           | 0   |
| $\bar{x}_4$ | 0    | 5     | 2     | 7     | 1           | 0     | 0           | 420 |
| $\bar{x}_6$ | 0    | 3     | 2     | 5     | 0           | -1    | 1           | 280 |

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

|             | $-Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$ | $\bar{x}_6$ | RHS  |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|------|
|             | 1    | -8    | -4    | -12   | 0           | 1     | 0           | -700 |
| $\bar{x}_4$ | 0    | 5     | 2     | 7     | 1           | 0     | 0           | 420  |
| $\bar{x}_6$ | 0    | 3     | 2     | 5     | 0           | -1    | 1           | 280  |

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수:  $x_3$

- 퇴출변수:  $\bar{x}_6$

|             | $-Z$ | $x_1$          | $x_2$          | $x_3$ | $\bar{x}_4$ | $x_5$          | $\bar{x}_6$    | RHS |
|-------------|------|----------------|----------------|-------|-------------|----------------|----------------|-----|
|             | 1    | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$  | 0     | 0           | $-\frac{7}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | -28 |
| $\bar{x}_4$ | 0    | $\frac{4}{5}$  | $-\frac{4}{5}$ | 0     | 1           | $\frac{7}{5}$  | $-\frac{7}{5}$ | 28  |
| $x_3$       | 0    | $\frac{3}{5}$  | $\frac{2}{5}$  | 1     | 0           | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$  | 56  |

- 진입변수:  $x_5$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_4$

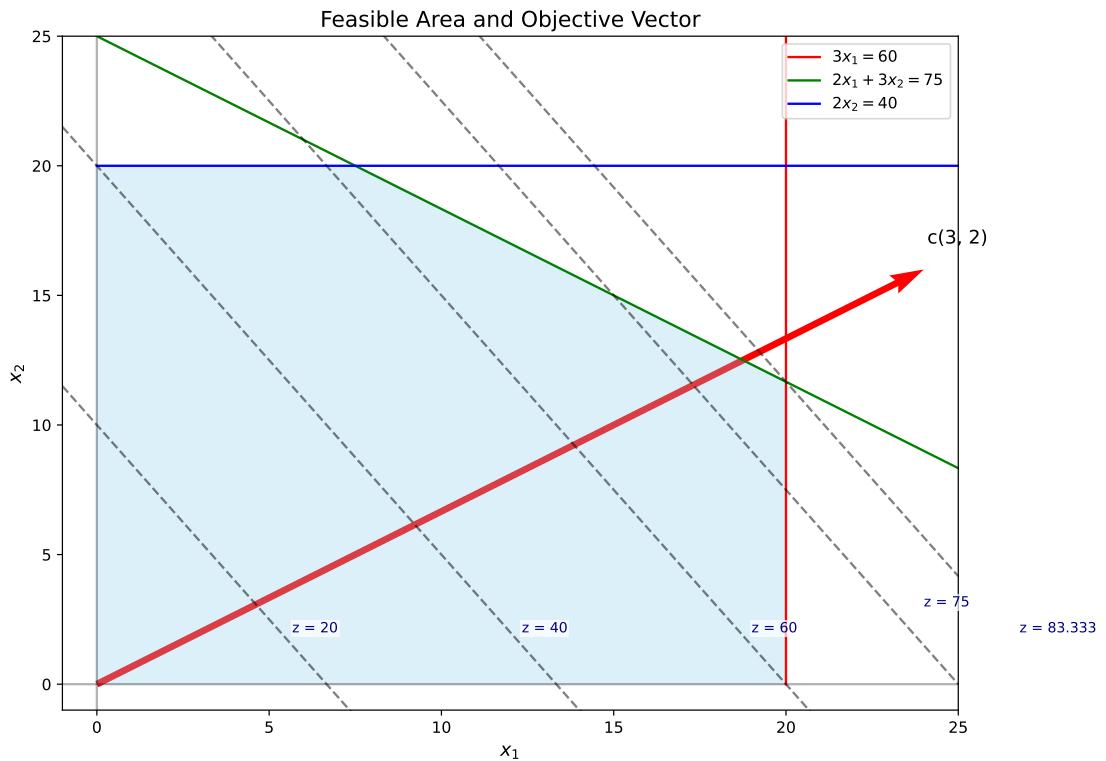
|       | $-Z$ | $x_1$         | $x_2$          | $x_3$ | $\bar{x}_4$   | $x_5$ | $\bar{x}_6$ | RHS |
|-------|------|---------------|----------------|-------|---------------|-------|-------------|-----|
|       | 1    | 0             | 0              | 0     | 1             | 0     | 1           | 0   |
| $x_5$ | 0    | $\frac{4}{7}$ | $-\frac{4}{7}$ | 0     | $\frac{5}{7}$ | 1     | -1          | 20  |
| $x_3$ | 0    | $\frac{5}{7}$ | $\frac{2}{7}$  | 1     | $\frac{1}{7}$ | 0     | 0           | 60  |

종료.

초기 BFS  $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (0, 0, 60, 20)$

## 4.7-3

a



최적해는  $\frac{35}{3}$

b

- 자원 1: 60
- 자원 2: 75
- 자원 3:  $\frac{70}{3}$

c

15

## 4.7-4

표준형으로 변환하면

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize} \quad & Z - x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\
 \text{Subject to} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\
 & 4x_1 - 3x_2 + x_5 = 2 \\
 & -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 3
 \end{aligned}$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

**a**

|       | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
|       | 1 | -1    | 7     | -3    | 0     | 0     | 0     | 0   |
| $x_4$ | 0 | 2     | 1     | -1    | 1     | 0     | 0     | 4   |
| $x_5$ | 0 | 4     | -3    | 0     | 0     | 1     | 0     | 2   |
| $x_6$ | 0 | -3    | 2     | 1     | 0     | 0     | 1     | 3   |

- 진입변수:  $x_3$
- 퇴출변수:  $x_6$

|       | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
|       | 1 | -10   | 13    | 0     | 0     | 0     | 3     | 9   |
| $x_4$ | 0 | 2     | 1     | -1    | 1     | 0     | 0     | 7   |
| $x_5$ | 0 | 4     | -3    | 0     | 0     | 1     | 0     | 2   |
| $x_3$ | 0 | -3    | 2     | 1     | 0     | 0     | 1     | 3   |

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $x_5$

|       | Z | $x_1$ | $x_2$          | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$         | $x_6$ | RHS            |
|-------|---|-------|----------------|-------|-------|---------------|-------|----------------|
|       | 1 | 0     | $\frac{11}{2}$ | 0     | 0     | $\frac{5}{2}$ | 3     | 14             |
| $x_4$ | 0 | 0     | $\frac{9}{4}$  | 0     | 1     | $\frac{1}{4}$ | 1     | $\frac{15}{2}$ |
| $x_1$ | 0 | 1     | $-\frac{3}{4}$ | 0     | 0     | $\frac{1}{4}$ | 0     | $\frac{1}{2}$  |
| $x_3$ | 0 | 0     | $-\frac{1}{4}$ | 1     | 0     | $\frac{3}{4}$ | 1     | $\frac{9}{2}$  |

종료.

- $x_1 = \frac{1}{2}$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = \frac{9}{2}$
- $x_4 = \frac{15}{2}$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $Z = 14$

**b**

- 자원 1 =  $-\frac{7}{2}$
- 자원 2 = 2
- 자원 3 = 3

## 5.1-6

a

1.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, 2x_1 + x_2 = 50$

- 꼭짓점: (10, 30)

- 가능해

2.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_1 + x_2 = 30$

- 꼭짓점: (6, 24)

- $2x_1 + x_2 \geq 50$  제약 불만족

3.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 15)

- $2x_1 + x_2 \geq 50$  제약 불만족

4.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (-10, 0)

- $x_1 \geq 0$  제약 불만족

5.  $2x_1 + x_2 = 50, x_1 + x_2 = 30$

- 꼭짓점: (20, 10)

- 가능해

6.  $2x_1 + x_2 = 50, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 50)

- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$  제약 불만족

7.  $2x_1 + x_2 = 50, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (25, 0)

- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$  제약 불만족

8.  $x_1 + x_2 = 30, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 30)

- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$  제약 불만족

9.  $x_1 + x_2 = 30, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (30, 0)

- 가능해

10.  $x_1 = 0, x_2 = 0$

- 꼭짓점:  $(0, 0)$
- $2x_1 + x_2 \geq 50$  제약 불만족

**b**

1.  $(10, 30, 0, 0, 10)$
2.  $(20, 10, 80, 0, 0)$
3.  $(30, 0, 60, 10, 0)$

## 5.1-20

**a**

$(2, 4, 3, 2, 0, 0, 0)$ 에서 비기저변수는  $(x_5, x_6, x_7)$ 이고, 기저변수는  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 이다.

$\alpha$ 만큼 움직일 때, 비기저변수의 변화량은  $(2, 0, 0)$ 로,  $x_5$ 만 증가한다. 고로 진입기저에 포함됨을 알 수 있다.

**b**

- $x_1 = 2 + 2\alpha \geq 0$  (항상 양수)
- $x_2 = 4 - 2\alpha \geq 0 \rightarrow 4 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 2$
- $x_3 = 3 + \alpha \geq 0$  (항상 양수)
- $x_4 = 2 - 2\alpha \geq 0 \rightarrow 2 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$

하지만  $\alpha$ 는  $0 \leq \alpha \leq 1$ 로 제한된다. 따라서  $\alpha = 1$ 일 때

- $x_1 = 4$
- $x_1 = 2$
- $x_1 = 4$
- $x_1 = 0$

$x_4$ 가 0으로 떨어지므로, 탈락 기저 변수는  $x_4$

**c**

$\alpha$ 가 1일 때 새로운 BFS는  $(4, 2, 4, 0, 2, 0, 0)$ 이다.

## 5.2-1

**a**

최적해는  $C_B B^{-1}b$

$$C_B = [6, 8, 9], B^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 180 \\ 270 \\ 180 \end{bmatrix}$$

답은 990

**b**

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

최적해에서 BFS는 (30, 0, 50, 0, 50)

이때 세 자원의 잠재 가격은

- resource 1: 180
- resource 2: 270
- resource 3: 180

## 5.2-2

### iteration 1

- basic:  $x_6, x_7$

Reduced cost:  $C_b B - N - C_n$ ,  
 $C_b = [0, 0] \rightarrow \text{Rc} = -C_n = [-5, -8, -7, -4, -6]$

- enter:  $x_2$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_* 2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

min ratio test:  $[\frac{20}{3}, 6]$

- exit:  $x_7$

### iteration 2

- basic:  $x_6, x_2$

$$C_b = [0, 8], B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, C_n = [5 \ 7 \ 4 \ 6 \ 0]$$

- Reduced cost:

$$[0 \ 8] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} - [5 \ 7 \ 4 \ 6 \ 0] = \left[ -\frac{1}{5} \ -\frac{3}{5} \ -\frac{4}{5} \ \frac{2}{5} \ \frac{8}{5} \right]$$

- enter:  $x_4$

$$A_* 4 B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, b B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

min ratio test:  $[\frac{5}{2}, 15]$

- exit:  $x_6$

## iteration 3

- basic:  $x_4, x_2$

$$C_b = [4, 8], B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Reduced cost:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

종료.

$$bB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 5 \end{bmatrix} C_b B^{-1} b = 50$$

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 5$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = \frac{5}{2}$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $x_7 = 0$
- $Z = 50$