

# OR 과제 - 2

20192208 김형훈

2025-04-19

## 4.3-5

수식을 다시 재구성해보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad Z - 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \\
 & \text{Subject to} \quad x_4 = 150 - 3x_1 - x_2 - 5x_3 \\
 & \qquad x_5 = 120 - x_1 - 4x_2 - x_3 \\
 & \qquad x_6 = 105 - 2x_1 - 2x_3 \\
 & \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

reduce cost 중 가장 작은 값은  $x_3$ . 따라서  $x_3$ 를 pivot variable로 선택한다.

이후 min ratio test를 진행한다.

선택하지 않은  $x_1$ 과  $x_2$ 는 0을 대입하고 진행한다.

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 150 - 5x_3 \geq 0 & x_3 &\leq 30 \\
 x_5 &= 120 - x_3 \geq 0 & x_3 &\leq 120 \\
 x_6 &= 105 - 2x_3 \geq 0 & x_3 &\leq 52.5
 \end{aligned}$$

$$x_4 \text{ 채택. } x_3 = 30 - \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4.$$

다시 수식을 재구성하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 Z - 3x_2 + x_4 - 150 &= 0 \\
 x_3 &= 30 - \frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 \\
 x_5 &= 90 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{19}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\
 x_6 &= 45 - \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4
 \end{aligned}$$

reduce cost 중  $x_2$ 가 가장 작다. 따라서  $x_2$ 를 pivot variable로 선택한다.

다시 한번 min ratio test 진행.

$$\begin{aligned}
 x_3 &= 30 - \frac{1}{5}x_2 \geq 0 & x_2 &\leq 150 \\
 x_5 &= 90 - \frac{19}{5}x_2 \geq 0 & x_2 &\leq 23.68 \\
 x_6 &= 45 + \frac{2}{5}x_2 \geq 0 & x_2 &\leq 112.5
 \end{aligned}$$

$$x_5 \text{ 채택. } x_2 = \frac{450}{19} - \frac{2}{19}x_1 + \frac{1}{19}x_4 - \frac{5}{19}x_5.$$

다시 수식을 재구성 해보자.

$$\begin{aligned} Z &+ \frac{6}{19}x_1 + \frac{16}{19}x_4 + \frac{15}{19}x_5 - \frac{1500}{19} \\ x_2 &= \frac{450}{19} - \frac{2}{19}x_1 + \frac{1}{19}x_4 - \frac{5}{19}x_5 \\ x_3 &= \frac{480}{19} - \frac{11}{19}x_1 - \frac{4}{19}x_4 + \frac{1}{19}x_5 \\ x_6 &= \frac{630}{19} - \frac{16}{19}x_1 + \frac{8}{19}x_4 - \frac{2}{19}x_5 \end{aligned}$$

이제 reduced cost를 확인해보면, 모든 변수의 계수가 음수가 아니므로 최적해에 도달했다.

따라서 최적해는 아래와 같다.

- $x_1 = 0$
- $x_2 = \frac{450}{19}$
- $x_3 = \frac{480}{19}$
- $x_4 = 0$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = \frac{630}{19}$
- $Z = \frac{1500}{19}$

## 4.3-6

**a**

수식을 다시 재구성해보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & Z - 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ \text{Subject to } & x_4 = 20 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_5 = 30 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_1$ 은 기저 변수가 아니므로, 초기 enter 변수를 정할 때  $x_2$  혹은  $x_3$ 를 선택해서 iteration을 최소화한다.

**b**

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS
	1	-5	-3	-4	0	0	0
$x_4$	0	1	1	1	1	0	20
$x_5$	0	3	1	2	0	1	30

$x_1$ 이 제일 작지만, 기저변수가 아니므로,  $x_3$  선택.

$\min\{\frac{20}{1}, \frac{30}{2}\} = 15$ .  $x_5$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS
	1	1	-1	0	0	2	60
$x_4$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	5
$x_3$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	15

$x_2$  선택.

$\min\{10, 30\} = 10$ .  $x_4$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	RHS
	1	0	0	0	2	1	70
$x_2$	0	-1	1	0	2	-1	10
$x_3$	0	2	0	1	-1	1	10

종료.

## 4.3-7

**a**

수식을 다시 재구성해보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize} \quad & Z - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0 \\
 \text{Subject to} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 30 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 24 \\
 & 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_6 = 60 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

$x_2$ 는 기저 변수가 아니므로, 초기 enter 변수를 정할 때  $x_1$  혹은  $x_3$ 를 선택해서 iteration을 최소화한다.

**b**

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	-2	-4	-3	0	0	0	0
$x_4$	0	1	3	2	1	0	0	30
$x_5$	0	1	1	1	0	1	0	24
$x_6$	0	3	5	3	0	0	1	60

$x_2$ 가 제일 작지만, 기저변수가 아니므로,  $x_3$  선택.

$\min\{\frac{30}{2}, \frac{24}{1}, \frac{60}{3}\} = 15$ .  $x_4$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	45
$x_3$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	15
$x_5$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	9
$x_6$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{3}{2}$	0	1	15

$\min\{30, 18, 10\} = 10$ .  $x_6$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	50
$x_3$	0	0	$\frac{4}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	10
$x_5$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	0	1	$-\frac{1}{3}$	4
$x_1$	0	1	$\frac{1}{3}$	2	-1	0	$\frac{2}{3}$	10

종료.

## 4.4-6

a

수식을 다시 재구성해보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & Z - 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \\ \text{Subject to } & x_4 = 4 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_5 = 4 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ & x_6 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_7 = 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

reduce cost 중 가장 작은 값은  $x_3$ . 따라서  $x_3$ 를 pivot variable로 선택한다.

이후 min ratio test를 진행한다.

선택하지 않은  $x_1$ 과  $x_2$ 는 0을 대입하고 진행한다.

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - x_3 \geq 0 & x_3 &\leq 4 \\ x_5 &= 4 - x_3 \geq 0 & x_3 &\leq 4 \\ x_6 &= 4 - 2x_3 \geq 0 & x_3 &\leq 2 \\ x_7 &= 3 - x_3 \geq 0 & x_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

$$x_6 \text{ 채택. } x_3 = 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_6.$$

다시 수식을 재구성하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} Z - 2x_2 + 3x_6 - 12 &= 0 \\ x_3 &= 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_6 \\ x_4 &= 2 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 &= 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_7 &= 1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 \end{aligned}$$

역시 한 번에 끝나지 않았다. 다음 pivot variable은  $x_2$ . 부연설명 없이 계속 진행해보겠다.

- min ratio test

$$\begin{aligned}
 x_3 &= 2 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 & x_2 &\leq 4 \\
 x_4 &= 2 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 & x_2 &\leq 4 \\
 x_5 &= 2 - \frac{3}{2}x_2 \geq 0 & x_2 &\leq \frac{4}{3} \\
 x_7 &= 1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 & x_2 &\leq 3
 \end{aligned}$$

- $x_5$

$$\begin{aligned}
 Z - \frac{44}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{7}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_5 &= 0 \\
 x_2 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_6 - \frac{2}{3}x_5 \\
 x_3 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{6}x_6 + \frac{1}{3}x_5 \\
 x_4 &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_5 \\
 x_7 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_5
 \end{aligned}$$

종료.

- $x_1 = 0$
- $x_2 = \frac{4}{3}$
- $x_3 = \frac{4}{3}$
- $x_4 = \frac{4}{3}$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $x_7 = \frac{1}{3}$
- $Z = \frac{44}{3}$

**b**

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$\textcolor{red}{x}_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	RHS
	1	-3	-5	-6	0	0	0	0	0
$x_4$	0	2	1	1	1	0	0	0	4
$x_5$	0	1	2	1	0	1	0	0	4
$\textcolor{red}{x}_6$	0	1	1	$\textcolor{red}{2}$	0	0	1	0	4
$x_7$	0	1	1	1	0	0	0	1	3

$\min\{\frac{4}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{1}\} = 2$ .  $x_6$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	RHS
	1	0	-2	0	0	0	3	0	12
$x_4$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$x_5$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
$x_3$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
$x_7$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	1

$\min\{4, \frac{4}{3}, 4, 2\} = \frac{4}{3}$ .  $x_5$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	RHS
	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{44}{3}$
$x_4$	0	$\frac{4}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
$x_2$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
$x_3$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
$x_7$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

종료.

## C

gurobi를 이용해서 최적해를 구해보자.

```
from gurobipy import *
```

```
model = Model("ex4.4-6")
```

```
model.setParam('OutputFlag', 0)
```

```
Restricted license - for non-production use only - expires 2026-11-23
```

CPU랑 OS 정보가 출력되서 로그는 꺼웠습니다.

```
x1 = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="x1")
x2 = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="x2")
x3 = model.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="x3")

model.setObjective(3 * x1 + 5 * x2 + 6 * x3, GRB.MAXIMIZE)

model.addConstr(2 * x1 + x2 + x3 <= 4)
model.addConstr(x1 + 2 * x2 + x3 <= 4)
```

```
model.addConstr(x1 + x2 + 2 * x3 <= 4)
model.addConstr(x1 + x2 + x3 <= 3)

model.optimize()

for var in model.getVars():
    print(f"{var.varName}: {var.x}")
print("Obj: ", model.objVal)
```

```
x1: 0.0
x2: 1.333333333333335
x3: 1.333333333333333
Obj: 14.666666666666668
```

알맞게 나오는 모습.

## 4.4-8

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	1	-1	-2	0	0	0	0
$x_4$	0	1	2	-1	1	0	0	20
$x_5$	0	-2	4	2	0	1	0	60
$x_6$	0	2	3	1	0	0	1	50

$\min\{\frac{60}{2}, \frac{50}{1}\} = 30$ .  $x_5$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	-1	3	0	0	1	0	60
$x_4$	0	0	4	0	1	$\frac{1}{2}$	0	50
$x_3$	0	-1	2	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
$x_6$	0	3	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	20

$x_6$  선택.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	0	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{200}{3}$
$x_4$	0	0	4	0	1	$\frac{1}{2}$	0	50
$x_3$	0	0	$\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{110}{3}$
$x_1$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$

종료.  $Z$ 는 66.666666666667