3.1.12. c_1의 값이 아직 주어지지 않은 다음 문제를 고려하라.

Maximize $\quad Z = c_1x_1 + x_2$

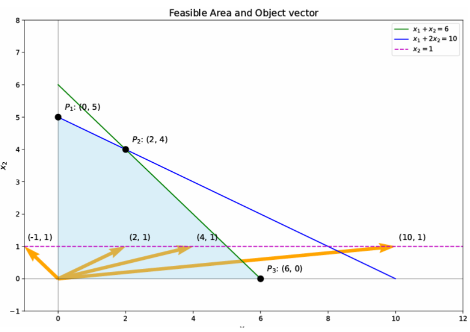
subject to

$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$

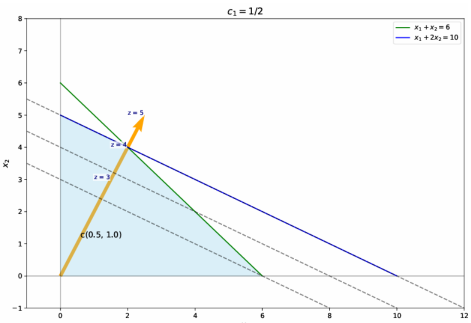
and

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

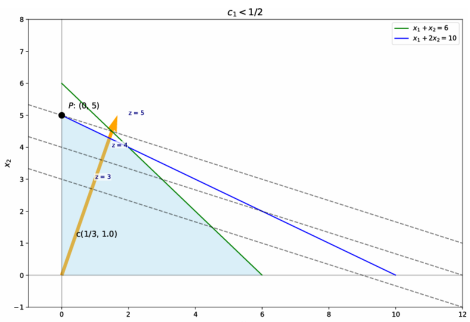
그래프를 사용하여 다양한 $c_1(-\infty < c_1 < \infty)$값에 대한 (x_1, x_2)의 최적해를 구하라.



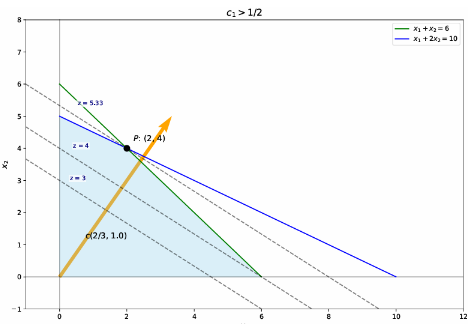
위의 그래프와 같이, c_1의 값에 따라 목적함수의 벡터의 방향이 달라지고, 벡터의 방향이 달라지면 최적해도 매번 달라질 수 있다. 이때 (x_1, x_2)의 최적해는 CPF의 edge와 수직이 되는 목적함수의 vector를 분기로 달라진다. 따라서 각각의 edge와 목적함수 벡터가 수직이 되게 하는 c_1의 값을 파악해야 한다. 점 (0, 5)에서 점 (2, 4)를 지나는 벡터는 (2 - 0, 4 - 5) = (2, -1)이다. 이와 수직한 방향 벡터는 (1, 2)이고, x_2가 1이 되도록 scaling하면 $(\frac{1}{2}, 1)$이 된다. 점 (2, 4)에서 점 (6, 0)을 지나는 벡터는 (6 - 2, 0 - 4) = (4, -4)이다. 이와 수직한 방향 벡터는 (1, 1)이다. 이제 c_1의 값이 $\frac{1}{2}$와 1을 지날 때, 각각 최적해가 어떻게 변하는지 그래프로 살펴보자.



위 그래프와 같이 c_1이 $\frac{1}{2}$일 때 최적해는 제약 함수와 정확히 일치하여, ∞개의 optimal solution을 가지게 된다.



만약 c_1이 $\frac{1}{2}$보다 작은 경우, 최적해는 (0, 5)가 된다.



반면 c_1이 $\frac{1}{2}$보다 큰 경우, 최적해는 (2, 4)가 된다.

위와 같이 c_1의 값을 (6, 0), (2, 4)의 edge에 대해서도 조정을 해보면 최종적으로 아래와 같은 수식을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} (0,5) & \text{if } c_1 < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{if } c_1 = \frac{1}{2} \\ (2,4) & \text{if } \frac{1}{2} < c_1 < 1 \\ \infty & \text{if } c_1 = 1 \\ (6,0) & \text{if } c_1 > 1 \end{cases}$$

4.6.3.* 다음 문제를 고려하라.

$\frac{2400}{2640} \quad \frac{10}{1320}$

Minimize $\quad Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3,$

subject to

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$

$\frac{31}{240} + \frac{1}{11} \cdot \frac{19}{240}$

and

$\frac{210}{8} - \frac{30}{11} \cdot \frac{19}{2408}$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

(a) 이 문제를 3.2절에서 공부한 선형계획의 표준형에 맞게 다시 모형 정립하라.

(b) 빅 M 방법을 이용하여, 단계적으로 심플렉스 방법을 사용하여 문제를 풀어라.

(c) 2-국면 방법을 이용하여, 단계적으로 심플렉스 방법을 사용하여 문제를 풀어라.

(d) 문제의 (b)에서 얻어진 BF 해의 순서와 (c)에서 얻어진 BF 해의 순서를 비교하라. 어떤 해들이 인공 변수를 사용한 인공 문제에만 가능해이고, 어떤 해들이 실제 문제에 가능해인가?

a

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & -Z = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - M\bar{x}_5 - M\bar{x}_7 \\ \text{Subject to} \quad & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ \text{and} \quad & \\ & x_j \ge 0, forj = 1,2,3,4,6 \\ & \bar{x}_5 \ge 0, \bar{x}_7 \ge 0 \end{aligned}$$

b

먼저 basic 변수를 0으로 만들어주자.

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RHS
	1	$2-4M$	$3-6M$	$1-2M$	M	0	M	0	$-14M$
$\bar{x}_5$	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

- 진입변수: x_2 - 퇴출변수: $\bar{x}_5$

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RHS
	1	$\frac{5}{4}-\frac{5}{2}M$	0	$M-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}M$	$\frac{3}{2}M-\frac{3}{4}$	M	0	$-2M-6$
x_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	2
$\bar{x}_7$	0	$\frac{5}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	2

- 진입변수: x_1 - 퇴출변수: $\bar{x}_7$

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RHS
	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	-7
x_2	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

종료.

- x_1 = $\frac{4}{5}$ - x_2 = $\frac{9}{5}$ - x_3 = 0 - x_4 = 0 - $\bar{x}_5$ = 0 - x_6 = 0 - $\bar{x}_7$ = 0 - $-Z$ = -7

최적해는 7

c

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & Z - \bar{x}_5 - \bar{x}_7 = 0 \\ \text{Subject to} \quad & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ \text{and} \quad & \\ & x_j \ge 0, forj = 1,2,3,4,6 \\ & \bar{x}_5 \ge 0, \bar{x}_7 \ge 0 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & -Z + \bar{x}_5 + \bar{x}_7 = 0 \\ \text{Subject to} \quad & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ \text{and} \quad & \\ & x_j \ge 0, forj = 1,2,3,4,6 \\ & \bar{x}_5 \ge 0, \bar{x}_7 \ge 0 \end{aligned}$$

표로 작성하면

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RHS
	1	0	0	0	0	1	0	1	0
$\bar{x}_5$	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RHS
	1	-4	-6	-2	1	0	1	0	-14
$\bar{x}_5$	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수: x_2 - 퇴출변수: $\bar{x}_5$

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RHS
	1	$-\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	-2
x_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	2
$\bar{x}_7$	0	$\frac{5}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	2

- 진입변수: x_1 - 퇴출변수: $\bar{x}_7$

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	RHS
	1	0	0	0	0	1	0	1	0
x_2	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

Phase 1 종료. 이제 필요없는 인공변수를 제거하고, 기존의 obj를 가져와서 다시 표를 만들어보자.

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	RHS
	1	2	3	1	0	0	0
x_2	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

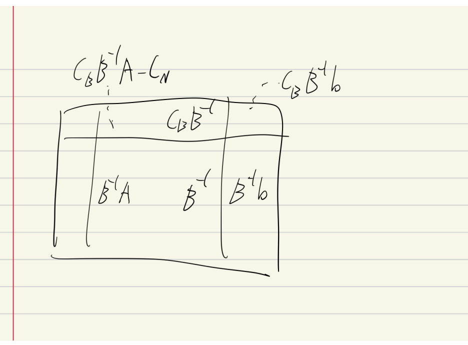
basic 변수를 0으로 만들어주자.

	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	RHS
	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-7
x_2	0	0	1	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

종료.

- $x_1 = \frac{4}{5}$ - $x_2 = \frac{9}{5}$ - $x_3 = 0$ - $x_4 = 0$ - $x_6 = 0$ - $-Z$ = -7

최적해는 7



2차원 역행렬: $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

라벨	원문제(혹은 쌍대문제)	쌍대문제(혹은 원문제)
	Maximize Z (or W)	Minimize W (or Z)
	Constraint i:	Variable y_i (or x_i):
상식	$\le$ form ⟷	$y_i \ge 0$
이상	$=$ form ⟷	Unconstrained
기괴	$\ge$ form ⟷	$y_i' \le 0$
	Variable x_j (or y_j):	Constraint j:
상식	$x_j \ge 0$ ⟷	$\ge$ form
이상	Unconstrained ⟷	$=$ form
기괴	$x_j' \le 0$ ⟷	$\le$ form

원문제

Minimize $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$,

subject to

(B) $0.3x_1 + 0.1x_2 \le 2.7$

(O) $0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$

(S) $0.6x_1 + 0.4x_2 \ge 6$

and

(S) $x_1 \ge 0$

(S) $x_2 \ge 0$

쌍대문제

Maximize $W = 2.7y_1' + 6y_2' + 6y_3$,

subject to

$y_1' \le 0$ (B)

y_2' 음수를 허용 (O)

$y_3 \ge 0$ (S)

and

$0.3y_1' + 0.5y_2' + 0.6y_3 \le 0.4$ (S)

$0.1y_1' + 0.5y_2' + 0.4y_3 \le 0.6$ (S)

	원변수	관련 쌍대변수
어떤 문제	(결정변수) x_j (여유변수) x_{n+i}	$z_j - c_j$ (잉여변수) $j = 1, 2, \dots, n$ y_i (결정변수) $i = 1, 2, \dots, m$
Wyndor 문제	결정변수: x_1, x_2 여유변수: x_3, x_4, x_5	$z_1 - c_1$ (잉여변수) $z_2 - c_2$ y_1, y_2, y_3 (결정변수)

$x_i \ge -1 \to x_j \ge 0, x_j = x_i + 1$

x_i is un restricted → $x_i = x_i^+ - x_i^-, x_i^+ \ge 0, x_i^- \ge 0$

제약식이 ≥ 일 때, 걍 -1 곱해도 되고, surplus 변수 + 인공 변수로 해도 됨

약쌍대: $cx \le yb$

I 5.2.2.* 심플렉스 방법의 행렬형을 단계별로 적용하여 다음 문제를 풀어라.

Maximize $Z = 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5$,

subject to

$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \le 20$
$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le 30$

and

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$

iteration 1

- basic: x_6, x_7

Reduced cost: $C_b B{-}1N - C_n, C_b = [0,0]$ → Rc = $-C_n$ = [-5, -8, -7, -4, -6]

- enter: x_2

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, A_*2 = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}20\\30\end{bmatrix}$$

min ratio test: $[\frac{20}{3}, 6]$

- exit: x_7

iteration 2

- basic: x_6, x_2

$$C_b = [0,8], B = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 5\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{5}\\0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 2 & 0\\3 & 4 & 2 & 4 & 1\end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix}5 & 7 & 4 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

- Reduced cost:

$$\begin{bmatrix}0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{5}\\0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 2 & 0\\3 & 4 & 2 & 4 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 7 & 4 & 6 & 0\end{bmatrix} = [-\frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5}$$

- enter: x_4

$$A_*4B^{-1} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{5}\\0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\end{bmatrix}, bB^{-1} = \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

min ratio test: $[\frac{5}{2}, 15]$

- exit: x_6

iteration 3

- basic: x_4, x_2

$$C_b = [4,8], B = \begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 1 & 0\\3 & 4 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix}5 & 7 & 6 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- Reduced cost:

$$\begin{bmatrix}4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 1 & 0\\3 & 4 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 7 & 6 & 0 & 0\end{bmatrix} = [0 \quad 0$$

종료.

$$bB^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\5\end{bmatrix} C_b B^{-1} b = 50$$

- x_1 = 0 - x_2 = 5 - x_3 = 0 - x_4 = $\frac{5}{2}$ - x_5 = 0 - x_6 = 0 - x_7 = 0 - Z = 50