

## OR 과제 - 3

20192208 김형훈

2025-04-06

## 4.6-2

수식을 다시 재구성해보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize } Z - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + M\bar{x}_5 + M\bar{x}_6 = 0 \\
 &\text{Subject to } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300 \\
 &\quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300 \\
 &\text{and} \\
 &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4 \\
 &\quad \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

**a**

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	-4	-2	-3	-5	$M$	$M$	0
$\bar{x}_5$	0	2	3	4	2	1	0	300
$\bar{x}_6$	0	8	1	1	5	0	1	300

basic 변수가 0이 되도록 다시 계산해준다.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	$-4 - 10M$	$-2 - 4M$	$-3 - 5M$	$-5 - 7M$	0	0	$-600M$
$\bar{x}_5$	0	2	3	4	2	1	0	300
$\bar{x}_6$	0	8	1	1	5	0	1	300

- 초기 BFS: (0, 0, 0, 0, 300, 300)
- 초기 진입 변수:  $x_1$
- 초기 퇴출 변수:  $\bar{x}_6$

**b**

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	0	$-\frac{3}{2} - \frac{11}{4}M$	$-\frac{5}{2} - \frac{15}{4}M$	$-\frac{5}{2} - \frac{3}{4}M$	0	$\frac{1}{2} + \frac{5}{4}M$	$150 - 225M$
$\bar{x}_5$	0	0	$\frac{11}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{900}{4}$
$x_1$	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{300}{8}$

- 진입 변수:  $x_3$

- 퇴출 변수:  $\bar{x}_5$

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	0	$\frac{1}{3}$	0	-2	$\frac{2}{3} + M$	$\frac{1}{3} + M$	300
$x_3$	0	0	$\frac{11}{15}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	60
$x_1$	0	1	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	30

- 진입 변수:  $x_4$
- 퇴출 변수:  $x_1$

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	$\frac{10}{3}$	$\frac{4}{9}$	0	0	$\frac{5}{9} + M$	$\frac{7}{9} + M$	400
$x_3$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{13}{18}$	1	0	$\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{9}$	50
$x_4$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{18}$	0	1	$-\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	50

종료.

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = 50$
- $x_4 = 50$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $Z = 400$

**C**

$$\text{Minimize } Z - \bar{x}_5 - \bar{x}_6 = 0$$

$$\text{Subject to } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300$$

$$8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} && -Z + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 = 0 \\
&\text{Subject to} && 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300 \\
&&& 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300 \\
&&& \text{and} \\
&&& x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4 \\
&&& \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
\end{aligned}$$

표로 작성하면

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	0	0	0	0	1	1	0
$\bar{x}_5$	0	2	3	4	2	1	0	300
$\bar{x}_6$	0	8	1	1	5	0	1	300

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	-10	-4	-5	-7	0	0	-600
$\bar{x}_5$	0	2	3	4	2	1	0	300
$\bar{x}_6$	0	8	1	1	5	0	1	300

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_6$

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	0	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	-225
$\bar{x}_5$	0	0	$\frac{11}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	225
$x_1$	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{75}{2}$

- 진입변수:  $x_3$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_5$

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	0	0	0	0	1	1	0
$x_3$	0	0	$\frac{11}{15}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	60
$x_1$	0	1	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	30

Phase 1 종료.

이제 필요없는 인공변수를 제거하고, 기존의 obj를 가져와서 다시 표를 만들어보자.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	RHS
	1	-4	-2	-3	-5	0
$x_3$	0	0	$\frac{11}{15}$	1	$\frac{1}{5}$	60
$x_1$	0	1	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{3}{5}$	30

basic 변수를 0으로 만들어주자.

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	RHS
	1	0	$\frac{1}{3}$	0	-2	300
$x_3$	0	0	$\frac{11}{15}$	1	$\frac{1}{5}$	60
$x_1$	0	1	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{3}{5}$	30

- 초기 BFS( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ): (30, 0, 60, 0)
- 초기 진입변수:  $x_4$
- 초기 퇴출변수:  $x_1$

## 4.6-3

**a**

$$\text{Maximize } -Z = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - M\bar{x}_5 - M\bar{x}_7$$

$$\text{Subject to } x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6$$

$$\bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0$$

**b**

먼저 basic 변수를 0으로 만들어주자.

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$x_6$	$\bar{x}_7$	RHS
	1	$2 - 4M$	$3 - 6M$	$1 - 2M$	$M$	0	$M$	0	$-14M$
$\bar{x}_5$	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

- 진입변수:  $x_2$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_5$

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$x_6$	$\bar{x}_7$	RHS
	1	$\frac{5}{4} - \frac{5}{2}M$	0	$M - \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2}M$	$\frac{3}{2}M - \frac{3}{4}$	$M$	0	$-2M - 6$
$x_2$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	2
$\bar{x}_7$	0	$\frac{5}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	2

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_7$

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$x_6$	$\bar{x}_7$	RHS
	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$M - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$M - \frac{1}{2}$	-7
$x_2$	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
$x_1$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

종료.

- $x_1 = \frac{4}{5}$
- $x_2 = \frac{9}{5}$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 0$
- $\bar{x}_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $\bar{x}_7 = 0$
- $-Z = -7$

최적해는 7

**C**

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } Z - \bar{x}_5 - \bar{x}_7 = 0 \\ &\text{Subject to } x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ &\quad 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ &\quad \text{and} \\ &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6 \\ &\quad \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } -Z + \bar{x}_5 + \bar{x}_7 = 0 \\ &\text{Subject to } x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ &\quad 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ &\quad \text{and} \\ &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6 \\ &\quad \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0 \end{aligned}$$

표로 작성하면

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$x_6$	$\bar{x}_7$	RHS
	1	0	0	0	0	1	0	1	0
$\bar{x}_5$	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$x_6$	$\bar{x}_7$	RHS
	1	-4	-6	-2	1	0	1	0	-14
$\bar{x}_5$	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수:  $x_2$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_5$

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$x_6$	$\bar{x}_7$	RHS
	1	$-\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	-2
$x_2$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	2
$\bar{x}_7$	0	$\frac{5}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	2

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_7$

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\bar{x}_5$	$x_6$	$\bar{x}_7$	RHS
	1	0	0	0	0	1	0	1	0
$x_2$	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
$x_1$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

Phase 1 종료.

이제 필요없는 인공변수를 제거하고, 기존의 obj를 가져와서 다시 표를 만들어보자.

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	RHS
	1	2	3	1	0	0	0
$x_2$	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
$x_1$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

basic 변수를 0으로 만들어주자.

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	RHS
	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-7
$x_2$	0	0	1	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
$x_1$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

종료.

- $x_1 = \frac{4}{5}$
- $x_2 = \frac{9}{5}$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 0$
- $x_6 = 0$
- $-Z = -7$

최적해는 7

## d

- b BFS 진행 순서

1.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$
2.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
3.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

- c BFS 진행 순서

1.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$
2.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
3.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

두 방법의 BF 해 진행 과정과 최종 해는 동일하다.

인공 변수를 사용한 인공 문제에만 가능한 해는 인공 변수  $\bar{x}_5$ 와  $\bar{x}_7$ 이 양수인 경우입니다. 초기 BF 해인  $(0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$ 가 여기에 해당합니다. 이 해는 인공 변수( $\bar{x}_5 = 8, \bar{x}_7 = 6$ )가 양수이므로 원래 문제에서는 가능해가 아닙니다.

최종 BFS인  $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$ 는 인공 변수  $\bar{x}_5$ 와  $\bar{x}_7$ 가 모두 0이므로 실제 문제에서도 가능해다. 이것이 바로 Phase 1과 Big-M 방법의 목적이며, 인공 변수들이 모두 0이 되는 실행 가능한 해를 찾고, 그 다음에 원래 목적함수에 대해 최적화를 진행하는 것이다.

따라서

- 인공 변수를 사용한 인공 문제에만 가능한 해 = 인공 변수가 0이 아닌 해 =  $(0, 0, 0, 0, 8, 0, 6), (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
- 실제 문제에도 가능한 해 = 인공 변수가 0인 해 =  $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

## 4.6-8

a

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } Z - \bar{x}_4 - \bar{x}_6 = 0 \\
 &\text{Subject to } 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \bar{x}_4 = 420 \\
 &\quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 280 \\
 &\text{and} \\
 &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 &\quad \bar{x}_4 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize } -Z + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = 0 \\
 &\text{Subject to } 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \bar{x}_4 = 420 \\
 &\quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 280 \\
 &\text{and} \\
 &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 &\quad \bar{x}_4 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

표로 작성하면

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}_4$	$x_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	0	0	0	1	0	1	0
$\bar{x}_4$	0	5	2	7	1	0	0	420
$\bar{x}_6$	0	3	2	5	0	-1	1	280

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}_4$	$x_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	-8	-4	-12	0	1	0	-700
$\bar{x}_4$	0	5	2	7	1	0	0	420
$\bar{x}_6$	0	3	2	5	0	-1	1	280

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수:  $x_3$

- 퇴출변수:  $\bar{x}_6$

	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}_4$	$x_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{12}{5}$	-28
$\bar{x}_4$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{7}{5}$	28
$x_3$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	56

- 진입변수:  $x_5$
- 퇴출변수:  $\bar{x}_4$

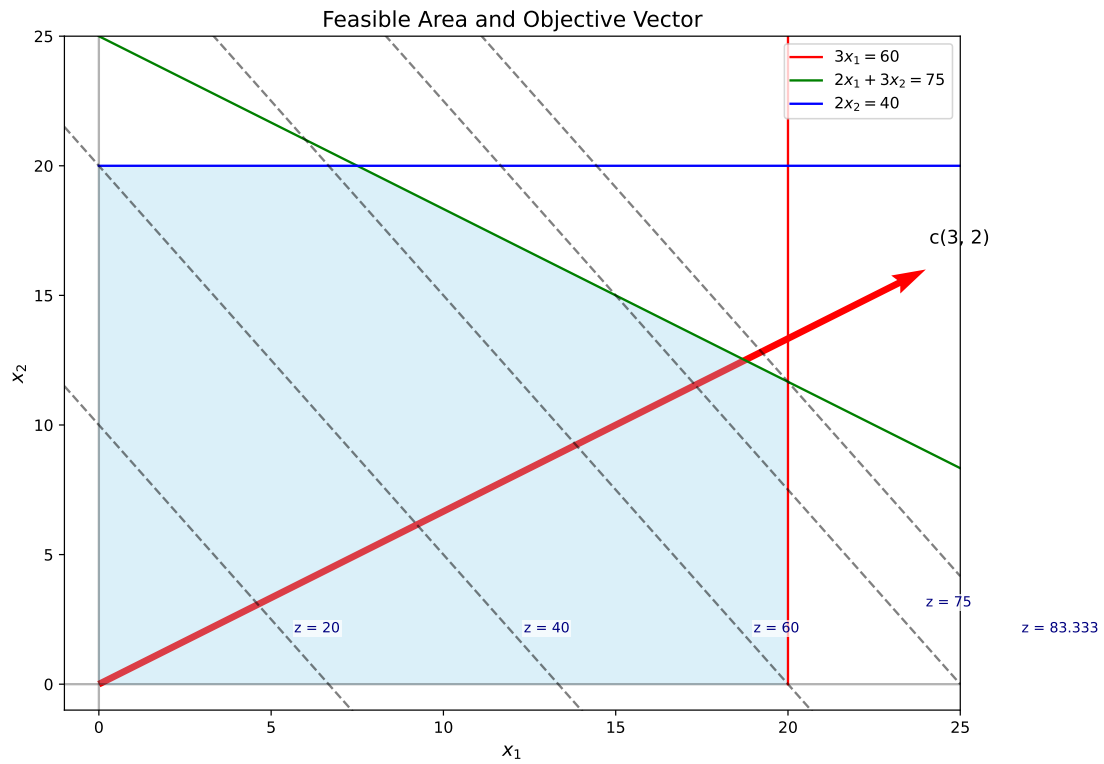
	$-Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}_4$	$x_5$	$\bar{x}_6$	RHS
	1	0	0	0	1	0	1	0
$x_5$	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	1	-1	20
$x_3$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0	0	60

종료.

초기 BFS  $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (0, 0, 60, 20)$

## 4.7-3

**a**



최적해는  $\frac{35}{3}$

**b**

- 자원 1: 60
- 자원 2: 75
- 자원 3:  $\frac{70}{3}$

**c**

15

## 4.7-4

표준형으로 변환하면

$$\text{Maximize } Z - x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0$$

$$\text{Subject to } 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_5 = 2$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 3$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

**a**

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	-1	7	-3	0	0	0	0
$x_4$	0	2	1	-1	1	0	0	4
$x_5$	0	4	-3	0	0	1	0	2
$x_6$	0	-3	2	1	0	0	1	3

- 진입변수:  $x_3$
- 퇴출변수:  $x_6$

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	-10	13	0	0	0	3	9
$x_4$	0	2	1	-1	1	0	0	7
$x_5$	0	4	-3	0	0	1	0	2
$x_3$	0	-3	2	1	0	0	1	3

- 진입변수:  $x_1$
- 퇴출변수:  $x_5$

	$Z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	RHS
	1	0	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	3	14
$x_4$	0	0	$\frac{9}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{15}{2}$
$x_1$	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
$x_3$	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{9}{2}$

종료.

- $x_1 = \frac{1}{2}$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = \frac{9}{2}$
- $x_4 = \frac{15}{2}$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $Z = 14$

**b**

- 자원 1 =  $-\frac{7}{2}$
- 자원 2 = 2
- 자원 3 = 3

## 5.1-6

a

1.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, 2x_1 + x_2 = 50$

- 꼭짓점: (10, 30)
- 가능해

2.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_1 + x_2 = 30$

- 꼭짓점: (6, 24)
- $2x_1 + x_2 \geq 50$  제약 불만족

3.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 15)
- $2x_1 + x_2 \geq 50$  제약 불만족

4.  $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (-10, 0)
- $x_1 \geq 0$  제약 불만족

5.  $2x_1 + x_2 = 50, x_1 + x_2 = 30$

- 꼭짓점: (20, 10)
- 가능해

6.  $2x_1 + x_2 = 50, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 50)
- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$  제약 불만족

7.  $2x_1 + x_2 = 50, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (25, 0)
- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$  제약 불만족

8.  $x_1 + x_2 = 30, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 30)
- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$  제약 불만족

9.  $x_1 + x_2 = 30, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (30, 0)
- 가능해

10.  $x_1 = 0, x_2 = 0$

- 꼭짓점:  $(0, 0)$
- $2x_1 + x_2 \geq 50$  제약 불만족

**b**

1.  $(10, 30, 0, 0, 10)$

2.  $(20, 10, 80, 0, 0)$

3.  $(30, 0, 60, 10, 0)$

## 5.1-20

**a**

$(2, 4, 3, 2, 0, 0, 0)$ 에서 비기저변수는  $(x_5, x_6, x_7)$ 이고, 기저변수는  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 이다.

$\alpha$ 만큼 움직일 때, 비기저변수의 변화량은  $(2, 0, 0)$ 로,  $x_5$ 만 증가한다. 고로 진입기저에 포함됨을 알 수 있다.

**b**

- $x_1 = 2 + 2\alpha \geq 0$  (항상 양수)
- $x_2 = 4 - 2\alpha \geq 0 \rightarrow 4 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 2$
- $x_3 = 3 + \alpha \geq 0$  (항상 양수)
- $x_4 = 2 - 2\alpha \geq 0 \rightarrow 2 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$

하지만  $\alpha$ 는  $0 \leq \alpha \leq 1$ 로 제한된다. 따라서  $\alpha = 1$ 일 때

- $x_1 = 4$
- $x_1 = 2$
- $x_1 = 4$
- $x_1 = 0$

$x_4$ 가 0으로 떨어지므로, 탈락 기저 변수는  $x_4$

**c**

$\alpha$ 가 1일 때 새로운 BFS는  $(4, 2, 4, 0, 2, 0, 0)$ 이다.

## 5.2-1

**a**

최적해는  $C_B B^{-1}b$

$$C_B = [6, 8, 9], B^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 180 \\ 270 \\ 180 \end{bmatrix}$$

답은 990

**b**

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

최적해에서 BFS는 (30, 0, 50, 0, 50)

이때 세 자원의 잠재 가격은

- resource 1: 180
- resource 2: 270
- resource 3: 180

## 5.2-2

### iteration 1

- basic:  $x_6, x_7$

Reduced cost:  $C_b B^{-1} N - C_n$ ,

$$C_b = [0, 0] \rightarrow \text{Rc} = -C_n = [-5, -8, -7, -4, -6]$$

- enter:  $x_2$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{*2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

min ratio test:  $[\frac{20}{3}, 6]$

- exit:  $x_7$

### iteration 2

- basic:  $x_6, x_2$

$$C_b = [0, 8], B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, C_n = [5 \quad 7 \quad 4 \quad 6 \quad 0]$$

- Reduced cost:

$$[0 \quad 8] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} - [5 \quad 7 \quad 4 \quad 6 \quad 0] = \left[-\frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{8}{5}\right]$$

- enter:  $x_4$

$$A_{*4} B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, b B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

min ratio test:  $[\frac{5}{2}, 15]$

- exit:  $x_6$

### iteration 3

- basic:  $x_4, x_2$

$$C_b = [4, 8], B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_n = [5 \ 7 \ 6 \ 0 \ 0]$$

- Reduced cost:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [5 \ 7 \ 6 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

종료.

$$bB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 5 \end{bmatrix}, C_b B^{-1} b = 50$$

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 5$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = \frac{5}{2}$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $x_7 = 0$
- $Z = 50$