

OR 과제 - 3

20192208 김형훈

2025-04-06

4.6-2

수식을 다시 재구성해보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize } Z - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + M\bar{x}_5 + M\bar{x}_6 = 0 \\
 &\text{Subject to } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300 \\
 &\quad 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300 \\
 &\text{and} \\
 &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4 \\
 &\quad \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

a

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-----|
| | 1 | -4 | -2 | -3 | -5 | M | M | 0 |
| \bar{x}_5 | 0 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 300 |
| \bar{x}_6 | 0 | 8 | 1 | 1 | 5 | 0 | 1 | 300 |

basic 변수가 0이 되도록 다시 계산해준다.

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|-----|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|-------------|---------|
| | 1 | $-4 - 10M$ | $-2 - 4M$ | $-3 - 5M$ | $-5 - 7M$ | 0 | 0 | $-600M$ |
| \bar{x}_5 | 0 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 300 |
| \bar{x}_6 | 0 | 8 | 1 | 1 | 5 | 0 | 1 | 300 |

- 초기 BFS: (0, 0, 0, 0, 300, 300)
- 초기 진입 변수: x_1
- 초기 퇴출 변수: \bar{x}_6

b

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|-----|-------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------|------------------------------|-----------------|
| | 1 | 0 | $-\frac{3}{2} - \frac{11}{4}M$ | $-\frac{5}{2} - \frac{15}{4}M$ | $-\frac{5}{2} - \frac{3}{4}M$ | 0 | $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}M$ | $150 - 225M$ |
| \bar{x}_5 | 0 | 0 | $\frac{11}{4}$ | $\frac{15}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{900}{4}$ |
| x_1 | 0 | 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{300}{8}$ |

- 진입 변수: x_3

- 퇴출 변수: \bar{x}_5

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------|-----|-------|-----------------|-------|---------------|-------------------|-------------------|-----|
| | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | -2 | $\frac{2}{3} + M$ | $\frac{1}{3} + M$ | 300 |
| x_3 | 0 | 0 | $\frac{11}{15}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{15}$ | $-\frac{1}{15}$ | 60 |
| x_1 | 0 | 1 | $\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{2}{15}$ | 30 |

- 진입 변수: x_4

- 퇴출 변수: x_1

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------|-----|----------------|-----------------|-------|-------|-------------------|-------------------|-----|
| | 1 | $\frac{10}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | 0 | 0 | $\frac{5}{9} + M$ | $\frac{7}{9} + M$ | 400 |
| x_3 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{13}{18}$ | 1 | 0 | $\frac{5}{18}$ | $-\frac{1}{9}$ | 50 |
| x_4 | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{18}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{18}$ | $\frac{2}{9}$ | 50 |

종료.

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = 50$
- $x_4 = 50$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $Z = 400$

C

$$\text{Minimize } Z - \bar{x}_5 - \bar{x}_6 = 0$$

$$\text{Subject to } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300$$

$$8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} && -Z + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 = 0 \\
&\text{Subject to} && 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \bar{x}_5 = 300 \\
&&& 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + \bar{x}_6 = 300 \\
&&& \text{and} \\
&&& x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4 \\
&&& \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
\end{aligned}$$

표로 작성하면

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-----|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| \bar{x}_5 | 0 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 300 |
| \bar{x}_6 | 0 | 8 | 1 | 1 | 5 | 0 | 1 | 300 |

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|------|
| | 1 | -10 | -4 | -5 | -7 | 0 | 0 | -600 |
| \bar{x}_5 | 0 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 300 |
| \bar{x}_6 | 0 | 8 | 1 | 1 | 5 | 0 | 1 | 300 |

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수: x_1
- 퇴출변수: \bar{x}_6

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|------|-------|-----------------|-----------------|----------------|-------------|----------------|----------------|
| | 1 | 0 | $-\frac{11}{4}$ | $-\frac{15}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ | -225 |
| \bar{x}_5 | 0 | 0 | $\frac{11}{4}$ | $\frac{15}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{4}$ | 225 |
| x_1 | 0 | 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{75}{2}$ |

- 진입변수: x_3
- 퇴출변수: \bar{x}_5

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------|------|-------|-----------------|-------|---------------|-----------------|-----------------|-----|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x_3 | 0 | 0 | $\frac{11}{15}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{15}$ | $-\frac{1}{15}$ | 60 |
| x_1 | 0 | 1 | $\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{2}{15}$ | 30 |

Phase 1 종료.

이제 필요없는 인공변수를 제거하고, 기존의 obj를 가져와서 다시 표를 만들어보자.

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS |
|-------|-----|-------|-----------------|-------|---------------|-----|
| | 1 | -4 | -2 | -3 | -5 | 0 |
| x_3 | 0 | 0 | $\frac{11}{15}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | 60 |
| x_1 | 0 | 1 | $\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | 30 |

basic 변수를 0으로 만들어주자.

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS |
|-------|-----|-------|-----------------|-------|---------------|-----|
| | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | -2 | 300 |
| x_3 | 0 | 0 | $\frac{11}{15}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | 60 |
| x_1 | 0 | 1 | $\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | 30 |

- 초기 BFS(x_1, x_2, x_3, x_4): (30, 0, 60, 0)
- 초기 진입변수: x_4
- 초기 퇴출변수: x_1

4.6-3

a

$$\text{Maximize } -Z = -2x_1 - 3x_2 - x_3 - M\bar{x}_5 - M\bar{x}_7$$

$$\text{Subject to } x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6$$

$$\bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0$$

b

먼저 basic 변수를 0으로 만들어주자.

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | x_6 | \bar{x}_7 | RHS |
|-------------|------|----------|----------|----------|-------|-------------|-------|-------------|--------|
| | 1 | $2 - 4M$ | $3 - 6M$ | $1 - 2M$ | M | 0 | M | 0 | $-14M$ |
| \bar{x}_5 | 0 | 1 | 4 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| \bar{x}_7 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 6 |

- 진입변수: x_2
- 퇴출변수: \bar{x}_5

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | x_6 | \bar{x}_7 | RHS |
|-------------|------|------------------------------|-------|-------------------|------------------------------|------------------------------|-------|-------------|-----------|
| | 1 | $\frac{5}{4} - \frac{5}{2}M$ | 0 | $M - \frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}M$ | $\frac{3}{2}M - \frac{3}{4}$ | M | 0 | $-2M - 6$ |
| x_2 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 2 |
| \bar{x}_7 | 0 | $\frac{5}{2}$ | 0 | -1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | 1 | 2 |

- 진입변수: x_1
- 퇴출변수: \bar{x}_7

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | x_6 | \bar{x}_7 | RHS |
|-------|------|-------|-------|----------------|-----------------|-------------------|----------------|-------------------|---------------|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $M - \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $M - \frac{1}{2}$ | -7 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{5}$ |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

종료.

- $x_1 = \frac{4}{5}$
- $x_2 = \frac{9}{5}$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 0$
- $\bar{x}_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $\bar{x}_7 = 0$
- $-Z = -7$

최적해는 7

C

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & Z - \bar{x}_5 - \bar{x}_7 = 0 \\ \text{Subject to } & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ & \text{and} \\ & x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6 \\ & \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & -Z + \bar{x}_5 + \bar{x}_7 = 0 \\ \text{Subject to } & x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_6 + \bar{x}_7 = 6 \\ & \text{and} \\ & x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 6 \\ & \bar{x}_5 \geq 0, \bar{x}_7 \geq 0 \end{aligned}$$

표로 작성하면

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | x_6 | \bar{x}_7 | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-----|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| \bar{x}_5 | 0 | 1 | 4 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| \bar{x}_7 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 6 |

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | x_6 | \bar{x}_7 | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-----|
| | 1 | -4 | -6 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -14 |
| \bar{x}_5 | 0 | 1 | 4 | 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| \bar{x}_7 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 6 |

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수: x_2
- 퇴출변수: \bar{x}_5

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | x_6 | \bar{x}_7 | RHS |
|-------------|------|----------------|-------|---------------|----------------|----------------|-------|-------------|-----|
| | 1 | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | -2 |
| x_2 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 2 |
| \bar{x}_7 | 0 | $\frac{5}{2}$ | 0 | -1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | 1 | 2 |

- 진입변수: x_1
- 퇴출변수: \bar{x}_7

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | \bar{x}_5 | x_6 | \bar{x}_7 | RHS |
|-------|------|-------|-------|----------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|---------------|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{5}$ |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

Phase 1 종료.

이제 필요없는 인공변수를 제거하고, 기존의 obj를 가져와서 다시 표를 만들어보자.

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_6 | RHS |
|-------|------|-------|-------|----------------|-----------------|----------------|---------------|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{5}$ |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

basic 변수를 0으로 만들어주자.

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_6 | RHS |
|-------|------|-------|-------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -7 |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | 1 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{9}{5}$ |
| x_1 | 0 | 1 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

종료.

- $x_1 = \frac{4}{5}$
- $x_2 = \frac{9}{5}$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = 0$
- $x_6 = 0$
- $-Z = -7$

최적해는 7

d

- b BFS 진행 순서

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$
2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
3. $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

- c BFS 진행 순서

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$
2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
3. $(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

두 방법의 BF 해 진행 과정과 최종 해는 동일하다.

인공 변수를 사용한 인공 문제에만 가능한 해는 인공 변수 \bar{x}_5 와 \bar{x}_7 이 양수인 경우입니다. 초기 BF 해인 $(0, 0, 0, 0, 8, 0, 6)$ 가 여기에 해당합니다. 이 해는 인공 변수($\bar{x}_5 = 8, \bar{x}_7 = 6$)가 양수이므로 원래 문제에서는 가능해가 아닙니다.

최종 BFS인 $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$ 는 인공 변수 \bar{x}_5 와 \bar{x}_7 가 모두 0이므로 실제 문제에서도 가능해다. 이것이 바로 Phase 1과 Big-M 방법의 목적이며, 인공 변수들이 모두 0이 되는 실행 가능한 해를 찾고, 그 다음에 원래 목적함수에 대해 최적화를 진행하는 것이다.

따라서

- 인공 변수를 사용한 인공 문제에만 가능한 해 = 인공 변수가 0이 아닌 해 = $(0, 0, 0, 0, 8, 0, 6), (0, 2, 0, 0, 0, 0, 2)$
- 실제 문제에도 가능한 해 = 인공 변수가 0인 해 = $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0, 0, 0, 0)$

4.6-8

a

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } Z - \bar{x}_4 - \bar{x}_6 = 0 \\
 &\text{Subject to } 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \bar{x}_4 = 420 \\
 &\quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 280 \\
 &\text{and} \\
 &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 &\quad \bar{x}_4 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Minimize를 Maximize로 바꿔주자.

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize } -Z + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = 0 \\
 &\text{Subject to } 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + \bar{x}_4 = 420 \\
 &\quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 + \bar{x}_6 = 280 \\
 &\text{and} \\
 &\quad x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 &\quad \bar{x}_4 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

표로 작성하면

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | \bar{x}_4 | x_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|-----|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| \bar{x}_4 | 0 | 5 | 2 | 7 | 1 | 0 | 0 | 420 |
| \bar{x}_6 | 0 | 3 | 2 | 5 | 0 | -1 | 1 | 280 |

basic 변수를 0이 되도록 다시 계산하면

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | \bar{x}_4 | x_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------------|------|
| | 1 | -8 | -4 | -12 | 0 | 1 | 0 | -700 |
| \bar{x}_4 | 0 | 5 | 2 | 7 | 1 | 0 | 0 | 420 |
| \bar{x}_6 | 0 | 3 | 2 | 5 | 0 | -1 | 1 | 280 |

자 이제 표를 완성해보자.

- 진입변수: x_3

- 퇴출변수: \bar{x}_6

| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | \bar{x}_4 | x_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------------|------|----------------|----------------|-------|-------------|----------------|----------------|-----|
| | 1 | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | 0 | 0 | $-\frac{7}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | -28 |
| \bar{x}_4 | 0 | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | 0 | 1 | $\frac{7}{5}$ | $-\frac{7}{5}$ | 28 |
| x_3 | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 56 |

- 진입변수: x_5
- 퇴출변수: \bar{x}_4

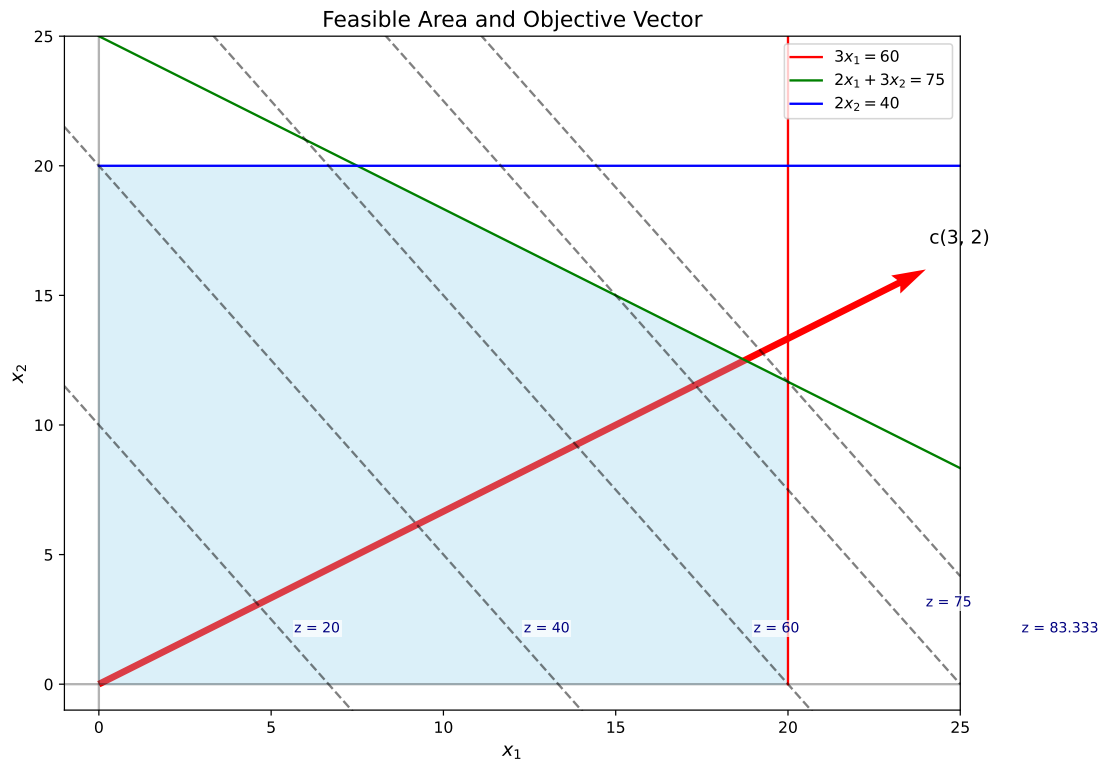
| | $-Z$ | x_1 | x_2 | x_3 | \bar{x}_4 | x_5 | \bar{x}_6 | RHS |
|-------|------|---------------|----------------|-------|---------------|-------|-------------|-----|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x_5 | 0 | $\frac{4}{7}$ | $-\frac{4}{7}$ | 0 | $\frac{5}{7}$ | 1 | -1 | 20 |
| x_3 | 0 | $\frac{5}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | 1 | $\frac{1}{7}$ | 0 | 0 | 60 |

종료.

초기 BFS $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (0, 0, 60, 20)$

4.7-3

a



최적해는 $\frac{35}{3}$

b

- 자원 1: 60
- 자원 2: 75
- 자원 3: $\frac{70}{3}$

c

15

4.7-4

표준형으로 변환하면

$$\text{Maximize } Z - x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0$$

$$\text{Subject to } 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_5 = 2$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 3$$

and

$$x_j \geq 0, \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

a

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | RHS |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | 1 | -1 | 7 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_4 | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| x_5 | 0 | 4 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| x_6 | 0 | -3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

- 진입변수: x_3
- 퇴출변수: x_6

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | RHS |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| | 1 | -10 | 13 | 0 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| x_4 | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| x_5 | 0 | 4 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| x_3 | 0 | -3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

- 진입변수: x_1
- 퇴출변수: x_5

| | Z | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | RHS |
|-------|-----|-------|----------------|-------|-------|---------------|-------|----------------|
| | 1 | 0 | $\frac{11}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{5}{2}$ | 3 | 14 |
| x_4 | 0 | 0 | $\frac{9}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{15}{2}$ |
| x_1 | 0 | 1 | $-\frac{3}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| x_3 | 0 | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 1 | 0 | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{9}{2}$ |

종료.

- $x_1 = \frac{1}{2}$
- $x_2 = 0$
- $x_3 = \frac{9}{2}$
- $x_4 = \frac{15}{2}$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $Z = 14$

b

- 자원 1 = $-\frac{7}{2}$
- 자원 2 = 2
- 자원 3 = 3

5.1-6

a

1. $-3x_1 + 2x_2 = 30, 2x_1 + x_2 = 50$

- 꼭짓점: (10, 30)
- 가능해

2. $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_1 + x_2 = 30$

- 꼭짓점: (6, 24)
- $2x_1 + x_2 \geq 50$ 제약 불만족

3. $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 15)
- $2x_1 + x_2 \geq 50$ 제약 불만족

4. $-3x_1 + 2x_2 = 30, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (-10, 0)
- $x_1 \geq 0$ 제약 불만족

5. $2x_1 + x_2 = 50, x_1 + x_2 = 30$

- 꼭짓점: (20, 10)
- 가능해

6. $2x_1 + x_2 = 50, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 50)
- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$ 제약 불만족

7. $2x_1 + x_2 = 50, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (25, 0)
- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$ 제약 불만족

8. $x_1 + x_2 = 30, x_1 = 0$

- 꼭짓점: (0, 30)
- $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$ 제약 불만족

9. $x_1 + x_2 = 30, x_2 = 0$

- 꼭짓점: (30, 0)
- 가능해

10. $x_1 = 0, x_2 = 0$

- 꼭짓점: $(0, 0)$
- $2x_1 + x_2 \geq 50$ 제약 불만족

b

1. $(10, 30, 0, 0, 10)$

2. $(20, 10, 80, 0, 0)$

3. $(30, 0, 60, 10, 0)$

5.1-20

a

$(2, 4, 3, 2, 0, 0, 0)$ 에서 비기저변수는 (x_5, x_6, x_7) 이고, 기저변수는 (x_1, x_2, x_3, x_4) 이다.

α 만큼 움직일 때, 비기저변수의 변화량은 $(2, 0, 0)$ 로, x_5 만 증가한다. 고로 진입기저에 포함됨을 알 수 있다.

b

- $x_1 = 2 + 2\alpha \geq 0$ (항상 양수)
- $x_2 = 4 - 2\alpha \geq 0 \rightarrow 4 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 2$
- $x_3 = 3 + \alpha \geq 0$ (항상 양수)
- $x_4 = 2 - 2\alpha \geq 0 \rightarrow 2 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1$

하지만 α 는 $0 \leq \alpha \leq 1$ 로 제한된다. 따라서 $\alpha = 1$ 일 때

- $x_1 = 4$
- $x_1 = 2$
- $x_1 = 4$
- $x_1 = 0$

x_4 가 0으로 떨어지므로, 탈락 기저 변수는 x_4

c

α 가 1일 때 새로운 BFS는 $(4, 2, 4, 0, 2, 0, 0)$ 이다.

5.2-1

a

최적해는 $C_B B^{-1}b$

$$C_B = [6, 8, 9], B^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 180 \\ 270 \\ 180 \end{bmatrix}$$

답은 990

b

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

최적해에서 BFS는 (30, 0, 50, 0, 50)

이때 세 자원의 잠재 가격은

- resource 1: 180
- resource 2: 270
- resource 3: 180

5.2-2

iteration 1

- basic: x_6, x_7

Reduced cost: $C_b B^{-1} N - C_n$,

$$C_b = [0, 0] \rightarrow \text{Rc} = -C_n = [-5, -8, -7, -4, -6]$$

- enter: x_2

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{*2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

min ratio test: $[\frac{20}{3}, 6]$

- exit: x_7

iteration 2

- basic: x_6, x_2

$$C_b = [0, 8], B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, C_n = [5 \quad 7 \quad 4 \quad 6 \quad 0]$$

- Reduced cost:

$$[0 \quad 8] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} - [5 \quad 7 \quad 4 \quad 6 \quad 0] = \left[-\frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{8}{5}\right]$$

- enter: x_4

$$A_{*4} B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, b B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

min ratio test: $[\frac{5}{2}, 15]$

- exit: x_6

iteration 3

- basic: x_4, x_2

$$C_b = [4, 8], B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_n = [5 \ 7 \ 6 \ 0 \ 0]$$

- Reduced cost:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [5 \ 7 \ 6 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

종료.

$$bB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 5 \end{bmatrix}, C_b B^{-1} b = 50$$

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 5$
- $x_3 = 0$
- $x_4 = \frac{5}{2}$
- $x_5 = 0$
- $x_6 = 0$
- $x_7 = 0$
- $Z = 50$