

# 第四章 关系规范化理论

4.1 问题的提出

4.2 函数依赖和范式

4.3 数据依赖的公理系统

4.4 关系模式的分解方法



## 填 空：

- (1) 若 $X \rightarrow Y$ ，则 ( ) 叫做决定因素。
- (2)  $X \rightarrow Y$ ， $Y \subseteq X$ ，则称 $X \rightarrow Y$ 是 ( ) 函数依赖。
- (3)  $X \rightarrow Y$ ，但  $Y \not\subseteq X$ ，则称 $X \rightarrow Y$ 是 ( ) 函数依赖。
- (4)  $X \leftrightarrow Y$  称为 ( )。
- (5)  $X \twoheadrightarrow Y$  称为 ( )。



## 填 空：

(6) 在 $R(U)$ 中，如果 $X \rightarrow Y$ ，并且对于 $X$ 的任何一个真子集 $X'$ ，都有 $X' \not\rightarrow Y$ ，则称 $Y$ 对 $X$  ( ) 函数依赖。  
记作( )。

(7) 在 $R(U)$ 中，如果 $X \rightarrow Y$ ，并且对于 $X$ 的一个真子集 $X'$ ，有 $X' \rightarrow Y$ ，则称 $Y$ 对 $X$  ( ) 函数依赖。  
记作( )。

(8) 在 $R(U)$ 中，如果 $X \rightarrow Y$ ，( $Y \not\rightarrow X$ )，  
 $Y \subsetneq X$ ， $Y \rightarrow Z$ ，则称 $Z$ 对 $X$  ( ) 函数依赖。



# 范式

关系的每一个分量是不可分的数据项，则 $R \in 1NF$ 。

若 $R \in 1NF$ ，且每一个非主属性完全函数依赖于候选码，则 $R \in 2NF$ 。

若 $R \in 2NF$ ，且每一个非主属性不传递依赖于候选码，则 $R \in 3NF$ 。

若每一个决定因素都包含候选码，则 $R \in BCNF$ 。



# 规范化步骤

## 关系模式规范化的基本步骤

1NF



消除非主属性对候选码的部分函数依赖

2NF



消除非主属性对候选码的传递函数依赖

3NF



消除主属性对候选码的部分和传递函数依赖

BCNF



# 问题

1. 逻辑蕴含的定义
2. Armstrong公理有哪些?
3.  $F^+$ ?  $X^+$ ?
4. 如何求属性集闭包?
5. 如何求码?



## 4.3 数据依赖的公理系统

- 逻辑蕴含
- Armstrong公理系统
- 属性集闭包
- 函数依赖集的等价和覆盖



# 一、逻辑蕴含

定义：对于 $R(U, F)$ ，如果 $X \rightarrow Y$ 不在 $F$ 中，但是对于其任何一个关系 $r$ ， $X \rightarrow Y$ 都成立，则称 $F$ 逻辑蕴含 $X \rightarrow Y$ 。

[或者说：  $X \rightarrow Y$ 可以由 $F$ 导出]

例：关系模式 $R(U, F)$

其中 $U(A, B, C, D, E, F, G)$

$F(A \rightarrow B, C \rightarrow D, AB \rightarrow E, F \rightarrow G)$

问： $F$ 是否逻辑蕴含 $A \rightarrow E$





## 二、Armstrong公理系统

自反律： 若 $Y \subseteq X \subseteq U$ ，则 $X \rightarrow Y$ 为F所蕴含。

增广律： 若 $X \rightarrow Y$ 为F所蕴含，且 $Z \subseteq U$ ，则 $XZ \rightarrow YZ$ 为F所蕴含。

传递律： 若 $X \rightarrow Y$ ， $Y \rightarrow Z$ 为F所蕴含，则 $X \rightarrow Z$ 为F所蕴含。

合并规则： 由 $X \rightarrow Y$ ， $X \rightarrow Z$ ，有 $X \rightarrow YZ$ 。

伪传递规则： 由 $X \rightarrow Y$ ， $WY \rightarrow Z$ ，有 $XW \rightarrow Z$

分解规则： 由 $X \rightarrow Y$  及  $Z \subseteq Y$ ，有 $X \rightarrow Z$ 。

自反律、增广律、传递律是最基本的Armstrong公理。



一套推理规则，是模式分解算法的理论基础

用途：

求给定关系模式的码

从一组函数依赖中求得蕴含的函数依赖



例：关系模式 $R(U, F)$

其中 $U(A, B, C, D, E, F, G)$

$F(A \rightarrow B, C \rightarrow D, AB \rightarrow E, F \rightarrow G)$

问：F是否逻辑蕴含 $A \rightarrow E$

**解：**

- $\therefore A \rightarrow B$  （已知）
- $\therefore A \rightarrow AB$  （增广率）
- $\therefore AB \rightarrow E$  （已知）
- $\therefore A \rightarrow E$  （传递率）



证明：对 $R(A, B, C, G, H, I)$ ，  
 $F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, CG \rightarrow H, CG \rightarrow I, B \rightarrow H\}$ ，  
存在： $A \rightarrow H, CG \rightarrow HI, AG \rightarrow I$

求证：

1. 由于 $A \rightarrow B, B \rightarrow H$ ，依传递律，可得 $A \rightarrow H$
2. 由于 $CG \rightarrow H, CG \rightarrow I$ ，依合并规则，可得  $CG \rightarrow HI$
3. 由于 $A \rightarrow C, CG \rightarrow I$ ，依伪传递律，可得 $AG \rightarrow I$ 。

也可另证为：由 $A \rightarrow C$ ，依增广律，得  
 $AG \rightarrow CG$ ，又 $CG \rightarrow I$ ，依传递律，得： $AG \rightarrow I$



## 练习：

设关系模式 $R(U, F)$ ，其中

$U = \{A, B, C, D, E, I\}$ ，

$F = \{A \rightarrow D, AB \rightarrow C, BI \rightarrow C, ED \rightarrow I, C \rightarrow E\}$ ，

试证明 $AC \rightarrow I$ 被 $F$ 所逻辑蕴含。



例：关系模式 $R(U, F)$

其中 $U(A, B, C, D)$

$F(A \rightarrow B, B \rightarrow C, B \rightarrow D)$

求蕴含于给定函数依赖的所有非平凡函数依赖。

解：

$A \rightarrow C, A \rightarrow D$

$AB \rightarrow C, AB \rightarrow D$

$AC \rightarrow B, AC \rightarrow D$

$AD \rightarrow B, AD \rightarrow C$

$BC \rightarrow D, BD \rightarrow C$

$ABC \rightarrow D, ABD \rightarrow C, \dots$  (还有很多)



# 三、属性集闭包

## 1、F的闭包

定义：在关系模式 $R(U, F)$ 中为 $F$ 及 $F$ 所逻辑蕴含的函数依赖的全体称为 $F$ 的闭包，记为 $F^+$ 。

$F^+ = \{X \rightarrow Y \mid F \text{ 以及能由 } F \text{ 根据 Armstrong 公理导出}\}$

所有被一个已知函数依赖集 $F$ 及 $F$ 逻辑蕴涵的那些函数依赖的集合称为 $F$ 的闭包 (Closure) 记为 $F^+$ 。



## 2、X关于函数依赖集F的闭包

定义： 设F为属性集U上的一组函数依赖， $X \subseteq U$ ， $X_F^+ = \{A | X \rightarrow A \text{ 能由 } F \text{ 根据 Armstrong 公理导出}\}$ ， $X_F^+$ 称为属性集X关于函数依赖集F的闭包





【例】 设关系模式  $R(A, B, C)$  的函数依赖集为  $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ ，分别求  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的闭包。

若  $X = A$ ,

$\because A \rightarrow B, B \rightarrow C$  (已知)

$\therefore A \rightarrow C$  (传递律)

$\because A \rightarrow A$  (自反律)

$\therefore X_F^+ = \{A, B, C\}$

若  $X = B$ ,

$\because B \rightarrow B$

$B \rightarrow C$

$\therefore X_F^+ = \{B, C\}$

若  $X = C$ ,

$\because C \rightarrow C$

$\therefore X_F^+ = \{C\}$



# 求属性集闭包的算法

算法：输入：X, F      输出： $X_F^+$

(1) 令  $X^{(0)}=X$ ,  $i=0$

(2) 求B,  $B=\{A | (\exists V)(\exists W)(V \rightarrow W \in F \wedge V \subseteq X^{(i)} \wedge A \in W)\}$

(3)  $X^{(i+1)}=B \cup X^{(i)}$

(4) 判断  $X^{(i+1)}=X^{(i)}$  吗？

(5) 若相等或  $X^{(i)}=U$  则  $X^{(i)}$  就是  $X_F^+$ , 算法终止。

(6) 若否, 则  $i=i+1$ , 返回第(2)步。



**例1:** 已知关系模式 $R(U, F)$ , 其中  
 $U=\{A, B, C, D, E\}$ ;  
 $F=\{AB\rightarrow C, B\rightarrow D, C\rightarrow E, EC\rightarrow B, AC\rightarrow B\}$   
求 $(AB)_F^+$ 。

解: 1:  $X^{(0)}=AB$  找出左部为A, B或AB的函数依赖

2: 计算 $X^{(1)} = X^{(0)} \cup C \cup D = ABCD$

3: 求 $X^{(2)} = X^{(1)} \cup E \cup B = ABCDE$

4: 由于 $X^{(2)}$  已经等于全部属性集合所以  
 $(AB)_F^+ = ABCDE$



例：已知关系模式 $R(U, F)$ ，其中

$U = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ ;

$F = \{A \rightarrow D, AB \rightarrow E, BH \rightarrow E, CD \rightarrow H, E \rightarrow C\}$

令 $X = AE$ ，求 $X^+$ 。

解： 1:  $X(0) = AE$  找出左部为A，E或AE的函数依赖

2:  $X(1) = X(0) \cup D \cup C = ACDE$

3:  $X(2) = X(1) \cup H = ACDEH$

4:  $X(3) = ACDEH$ 不变，即 $X(3) = X(2)$

所以  $X^+ = (AE)^+ = ACDEH$



对于属性闭包算法的终止条件，  
下列四种方法是等价的：

- 1、 $X^{(i+1)} = X^{(i)}$
- 2、当发现 $X^{(i)}$ 包含了全部属性时；
- 3、在F中的函数依赖的右部属性中，再也找不到 $X^{(i)}$ 中未出现过的属性。
- 4、在F中未用过的函数依赖的左部属性中已没有 $X^{(i)}$ 的子集。



# F逻辑蕴含的充要条件

**定理4.2:** 设F为属性集U上的一组函数依赖关系,  $X, Y \subseteq U$ ,  $X \rightarrow Y$ 能由F根据Armstrong公理导出的充分必要条件是 $Y \subseteq X_F^+$ 。



例：关系模式 $R(U, F)$ ，其中  $U(A, B, C, D)$

$F(A \rightarrow B, B \rightarrow C, B \rightarrow D)$

求： $A^+, B^+, C^+, D^+, AB^+, AC^+, AD^+, BC^+,$   
 $BD^+, CD^+, ABC^+, ABD^+, BCD^+, ABCD^+。$

解：  $A^+ = ABCD, B^+ = BCD, C^+ = C, D^+ = D$

$AB^+ = ABCD, AC^+ = ABCD, AD^+ = ABCD,$

$BC^+ = BCD, BD^+ = BCD, CD^+ = CD$

$ABC^+ = ABCD, ABD^+ = ABCD, BCD^+ = BCD$

$ABCD^+ = ABCD$



## 四、码值理论

对于给定的关系 $R(A_1, A_2, \dots, A_n)$  和函数依赖集 $F$ , 可将其属性分为4类:

- L类 仅出现在 $F$ 的函数依赖左部的属性
- R类 仅出现在 $F$ 的函数依赖右部的属性
- N类 在 $F$ 的函数依赖左右两边均未出现的属性
- LR类 在 $F$ 的函数依赖左右两边均出现的属性





## 四、码值理论

**定理1：** 对于给定的关系模式R及其函数依赖集F，若X ( $X \in R$ ) 是L类属性，则X一定是R的候选码的成员。

**定理2：** 对于给定的关系模式R及其函数依赖集F，若X ( $X \in R$ ) 是N类属性，则X一定是R的候选码的成员。



## 四、码值理论

**定理3：** 对于给定的关系模式R及其函数依赖集F，若X ( $X \in R$ ) 是R类属性，则X必不在任何候选码中。

**定理4：** 对于给定的关系模式R及其函数依赖集F，若X ( $X \in R$ ) 是LR类属性，则X可能是R的候选码的成员。



## 定理4.6

对于给定的关系模式 $R(U, F)$ ，若 $X(X \in R)$ 是 $R$ 的L类和N类属性组成的属性集，且 $X_F^+$ 包含 $R$ 的全部属性，则 $X$ 是 $R$ 的唯一候选码。



例：关系模式 $R(U, F)$   
其中 $U(A, B, C, D)$   
 $F(A \rightarrow B, B \rightarrow C, B \rightarrow D)$   
求 $R$ 的候选码。

只在左端出现的属性：A

只在右端出现的属性：CD

余下的属性：B

$R$ 的候选码可能是A, AB

由于 $A^+ = ABCD$ ,

所以 $R$ 的候选码是A

定理1：如果属性A只在F中各个函数依赖的左端出现，则A必是码中的属性。

定理2：如果属性A不在F中各个函数依赖中出现，则A必是码中的属性。

定理3：如果属性A只在F中各个函数依赖的右端出现，则A必不是码中的属性。



## 确定候选码的步骤是：

- 根据定理1、2确定码中必须有的属性（设为M）
- 根据定理3确定码中肯定没有的属性
- 确定余下的属性（设为W）
- 从属性集开始，令 $K=M$ ，如果 $K_F^+=U$ ，K就是候选码。否则从W选择属性加入到K中，直至 $K_F^+=U$ ，K就是候选码。

**注意可能有多个候选码**



例：设有关系模式 $R(A, B, C, D, E, P)$ ，  
R的函数依赖集为：  
 $F = \{A \rightarrow D, E \rightarrow D, D \rightarrow B, BC \rightarrow D, DC \rightarrow A\}$ ，  
求R的候选码。

只在左端出现的属性：C E

左右两端都没有出现的属性：P

左右两端出现的属性：A B D

R的候选码可能是CEP

由于 $(CEP)^+ = ABCDEP$ ，所以CEP是R的唯一候选码



# 求关系模式的候选码

$R(A, B, C, D)$ ,  $F=\{AB \rightarrow CD, C \rightarrow AB\}$

解： 仅在左端出现的：

仅在右端出现的： D

左右都出现的： A,B,C

候选码： A, B, C, AB, ~~AC, BC, ABC~~

$A^+ = A$

$B^+ = B$

$C^+ = ABCD$

$AB^+ = ABCD$

候选码： C, AB



# 求关系模式的候选码

$R(A, B, C, D)$  ,  $F=\{AB \rightarrow CD, C \rightarrow A, D \rightarrow B\}$

解: L:

R:

LR: A,B,C,D

候选码?     A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD

$A^+=A$       $B^+=B$       $C^+=CA$       $D^+=DB$

$AB^+=ABCD$       $AC^+=AC$       $AD^+=ABCD$

$BC^+=ABCD$       $BD^+=BD$       $CD^+=ABCD$

候选码是: AB, AD, BC, CD





## 课堂练习—学习通04-2:

1 已知关系模式 $R(U, F)$ ，其中

$U = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ ;

$F = \{A \rightarrow B, C \rightarrow G, E \rightarrow A, CE \rightarrow D\}$

求 $R$ 的候选码

(填空：按照字母顺序排列，中间用逗号分开)

$R$ 最高属于哪级范式

(填空：1NF或者2NF或者3NF或者BCNF)



## 课堂练习—学习通04-2:

2 已知关系模式 $R(U, F)$ ，其中

$U = \{A, B, C, D, E\}$ ;

$F = \{A \rightarrow BC, CD \rightarrow E, E \rightarrow A, B \rightarrow D\}$

求 $R$ 的侯选码

(填空：按照字母顺序排列，中间用逗号分开)

$R$ 最高属于哪级范式

(填空：1NF或者2NF或者3NF或者BCNF)

