《概率论与数理统计》试卷 1

注：可能用到的数据

$\Phi(1.65)=0.95$， $\Phi(1.96)=0.975$， $\Phi(0.89)=0.81$ $\Phi(3.0)=0.9987$， $t_{0.025}(35)=2.0301$

一、填空与单项选择题（每题 4 分，共 40 分）

1．设 $P(A)=1/4$， $P(A|B)=1/2$， $P(B|A)=1/3$ 则 $P(A\cup B)=$_________

2．已知离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0.2, & -2\le x<-1\\ 0.6, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ 则 X 的分布律为___________

3．设一大批电子元件的正品率为 0.8，每次任取一件进行测试，只要测得一个正品就停止测试工作， X 表示测试次数，则 X 的分布律为______________________________

4．设 X 服从 $N(2,\sigma^2)$， $Y=\begin{cases}1, & X\le 2,\\ 0, & X>2.\end{cases}$， 则 $E(Y)=$______

5．设 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，都服从（0-1）分布，且：$P\{X_i=0\}=P\{X_i=1\}=\dfrac{1}{2},\quad i=1,2,3,4$，

则行列式 $Y=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}$ 的数学期望为 $E(Y)=$ ___________

6．设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立且均服从参数为 $\lambda=2$ 的指数分布，则 $n\to\infty$ 时 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于（　　　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）0

7．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $Y=3X+2$ 的概率密度为（　　）

（A）$3f(x)+2$；　（B）$3f(\dfrac{x-2}{3})$；　（C）$\dfrac{1}{3}f(x)+2$；　（D）$\dfrac{1}{3}f(\dfrac{x-2}{3})$。

8．设 X 和 Y 相互独立，且都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，则（　　）

（A）$P\{X+Y>1\}=\dfrac{1}{4}$；（B）$P\{X+Y<1\}=\dfrac{1}{2}$；（C）$P\{X=Y\}=\dfrac{1}{2}$；（D）$X=Y$。

9. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(n\geq 2)$ 为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则$D(S^2)=$（　　）

（A）$\dfrac{\sigma^4}{n}$；（B）$\dfrac{2\sigma^2}{n}$；（C）$\dfrac{\sigma^4}{n-1}$；（D）$\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$.

10. 设总体X和Y相互独立，分别服从正态分布$N(\mu_1,3^2)$和$N(\mu_2,3^2)$，设$X_1,\cdots,X_9$和$Y_1,\cdots,Y_9$分别是来自X和Y的相互独立的样本，在显著性水平$\alpha=0.05$的条件下，假设检验问题$H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$的拒绝域为（　　）

（A）$\left|\sum_{i=1}^{9}(X_i-Y_i)\right|\geq 24.95$　　（B）$\left|\sum_{i=1}^{9}(X_i-Y_i)\right|\geq 21.00$

（C）$\sum_{i=1}^{9}(X_i-Y_i)\geq 24.95$　　（D）$\sum_{i=1}^{9}(X_i-Y_i)\geq 21.00$

二、（10 分）今有三个盒子，第一个盒子内有 1 只红球和 2 只黄球；第二个盒子内有 2 只蓝球和 2 只白球；第三个盒子内有 3 只蓝球和 1 只白球，现从第一个盒子中任取一球，若第一次取到红球，则在第二个盒子中任取两球；若第一次取到黄球，则在第三个盒子中任取两球。求第二次取到的两球都是蓝球的概率。

三、（10 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其它\end{cases}$（1）（6 分）分别求$X$与$Y$的边缘概率密度$f_X(x)$及$f_Y(y)$；（2）（4 分）判断$X$与$Y$是否相互独立，并说明理由。

四、（10 分）设(X,Y)服从二维正态分布，且$X\sim N(1,9)$，$Y\sim N(0,16)$，$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{4}$。设$Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，（1）（6 分）求$\rho_{XZ}$；（2）（4 分）问$X$和$Z$是否相互独立？为什么？

五、（10 分）在一零售商店中，其结帐柜台替各顾客服务的时间（以分钟计）是相互独立相同分布的随机变量，其均值为1.5，方差为1，求对 100 位顾客的总服务时间不多于 120 分钟的概率。

六、（10 分）设总体 X 服从区间 $\left[0,\theta\right]$ 上的均匀分布，$\theta>0$ 未知，X_1,X_2,X_3 是 X 的样本。

（1）（3 分）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；（2）（3 分）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；

（3）（2 分）判断 $\hat{\theta}_1$ 是否为 θ 的无偏估计量；（4）（2 分）判断 $\hat{\theta}_2$ 是否为 θ 的无偏估计量。

七、（10 分）设大学生每季度网购消费金额（单位：元）服从正态分布，今随机地抽查 36 位大学生，算得样本均值 $\bar{x}=66.5$，样本标准差 $s=15$。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的条件下，是否可以认为大学生的季度平均网购消费金额为 70 元？

《概率论与数理统计》试卷 2

注：可能用到的数据

$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.025}=1.96$，$\Phi\left(1.25\right)=0.8944$，$t_{0.05}\left(14\right)=1.7613$

$t_{0.05}\left(16\right)=1.7459$，$t_{0.025}\left(14\right)=2.1448$，$t_{0.025}\left(16\right)=2.1199$

一、 填空与单项选择题（每题 4 分，共 40 分）

1. 设事件 A,B,C 两两独立，且 $ABC=\varnothing,\ P(A)=P(B)=P(C)$，已知事件 A,B,C 中至少有一个发生的概率为 $\dfrac{9}{16}$，则 $P(A)=$ ____________

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-x^2+x}$，则 $A=$ __________

3. 设离散型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a, & -1\le x<1\\ \dfrac{2}{3}-a, & 1\le x<2\\ a+b, & x\ge 2\end{cases}$ 且 $P\left\{X=2\right\}=\dfrac{1}{2}$，则 $a=$ __，$b=$ __

4. 分别从两个总体 $X\sim N\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$Y\sim N\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 中抽取两个相互独立的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，则 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-Y_i\right|$ 依概率收敛于 _______________

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都在 $(0,1)$ 区间上服从均匀分布，则 $Z=X+Y$ 的概率密度为_

6. 设$F_1(x)$和$F_2(x)$是随机变量的分布函数，$f_1(x)$和$f_2(x)$是相应的概率密度，则可作为某个随机变量的分布函数的是（　　　　）

（A）$F_1(x)+F_2(x)$；　（B）$F_1(x)F_2(x)$；　（C）$f_1(x)+f_2(x)$；　（D）$f_1(x)f_2(x)$.

7. 设X与Y相互独立，且X服从参数为$\lambda=1$的指数分布，Y的分布律为 $P\{Y=i\}=\dfrac{i+1}{6}\quad(i=0,1,2)$，则$P\{X+Y\le 1\}=$（　　　　）

（A）$\dfrac{1}{2e}$；　（B）$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$；　（C）$\dfrac{1}{6e}$；　（D）$\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$.

8. 设总体$X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$为X的样本，则$V=\dfrac{\left(X_1-X_2-\cdots-X_n\right)^2}{\left(X_{n+1}+X_{n+2}+\cdots+X_{2n}\right)^2}\sim$（　　　　）

（A）$t(n)$；　（B）$F(n,\ 2n)$；　（C）$F(n,\ n)$；　（D）$F(1,\ 1)$.

9. 设X服从$[0,\theta]$上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的样本，$\hat{\theta}=\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论正确的是（　　　）。

（A）$\hat{\theta}$不是统计量；　（B）$\hat{\theta}$不是θ的矩估计量；

（C）$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量；　（D）$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计量。

10. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ与σ^2均为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的样本，则σ^2的置信水平为95%的置信区间为(　　　　)

（A）$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{0.975}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{0.025}(n-1)}\right)$；　（B）$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{0.025}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{0.975}(n-1)}\right)$；

（C）$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{t_{0.025}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{t_{0.975}(n-1)}\right)$；　（D）$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)$.

二、(10 分)　袋中装有2只正品硬币，3只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽），在袋中任取一只，将它投掷1次，发现出现国徽，问这只硬币是次品的概率为多少？

三、(10 分)　设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24x(1-x-y), & x>0,\ y>0,\ x+y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）试判断 X 和 Y 是否相互独立；（2）求 $E(X)$ 与 $D(X)$.

四、（10 分）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{n+m}(n>m)$ 独立同分布，且方差有限，设 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$T=\sum_{i=1}^{n}X_{m+i}$，试求 S 与 T 的相关系数.

五、（10 分）某微信群有 100 个成员，任意一时刻每个成员进入该群的概率为 20%，且各个成员是否进入是相互独立的。试计算在任意一时刻有多于 25 个成员同时进入该群的概率。

六、（10 分）设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数。X 的一组样本观察值为

1，2，1，3， 2， 3， 1， 1， 2， 2， 3， 2， 1， 2， 3， 3

试分别求参数 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

七、**（10 分）**甲、已两个工厂生产的灯泡的寿命分别为 X、Y（单位：h），已知 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$。现在从甲乙两个厂生产的灯泡中分别各自独立地抽取 8 个样品测量其寿命，算得样本均值分别为 $\bar{x}=910,\ \bar{y}=880$，样本方差分别为 $s_1^2=800,\ s_2^2=1000$，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为甲厂灯泡的平均寿命比乙厂的大？

《概率论与数理统计》试卷 3

注：可能用到的数据

$\Phi(2.33)=0.9901$，$\Phi(1.65)=0.9505$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$，$\chi^2_{0.025}(4)=11.143$

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\cap\bar{B})$，且 $P(A)=0.3$，则 $P(B)=$__________.

2. 设总体 X 服从参数为 p（$0<p<1$，p 已知）的 $(0-1)$ 分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 为其样本均值，则 $P\left\{\bar{X}=\frac{k}{n}\right\}=$____________.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E\left(X_i\right)=\mu$，$D\left(X_i\right)=\sigma^2$ $(i=1,2,\cdots)$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于____________.

4. 设总体 X 与 Y 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\bar{X},\bar{Y}$ 分别是来自总体 X,Y 且容量均为 n 的样本的样本均值，则当 n 固定时，概率 $P\left\{\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|>\sigma\right\}$ 的值随 σ 的增大而____________.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim N(1,1)$，则 $P\left\{XY-Y<0\right\}=$__________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 A,B 为任意两个随机事件，则下列不等式一定成立的为（　　　　）

（A）$P(AB)\le P(A)P(B)$　　（B）$P(AB)\ge P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\le \frac{P(A)+P(B)}{2}$　　（D）$P(AB)\ge \frac{P(A)+P(B)}{2}$

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数 $p=\frac{1}{2}$ 的 $(0-1)$ 分布，Y 服从参数 $p=\frac{1}{3}$ 的 $(0-1)$ 分布，则方程 $t^2+2Xt+Y=0$ 中 t 有唯一实根的概率为（　　　　）

（A）1/3　　（B）1/2　　（C）1/6　　（D）2/3

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10},X$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，令 $Y^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i^2$，则下列结论正确的为（　　　　）

(A) $X^2\sim\chi^2(1)$　　(B) $Y^2\sim\chi^2(10)$　　(C) $\frac{X}{Y}\sim t(10)$　　(D) $\frac{X^2}{Y^2}\sim F(10,1)$

4. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（σ^2 已知），则在给定样本容量 n 的及置信度 $1-\alpha$ 的情况下，未知参数 μ 的置信区间长度随着样本均值 $\bar{X}$ 的增加而（　　　　）

(A) 条件不足，不能判断　　(B) 增加　　(C) 减少　　(D) 不变

5. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度， $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若使

$f(x)=\begin{cases} a\,f_1(x), & x\le 0 \\ b\,f_2(x), & x>0 \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足（　　　　　　）

（A） $2a+3b=4$　　　（B） $3a+2b=4$　　　（C） $a+b=1$　　　（D） $a+b=2$

三、（10 分）今有 3 个罐子，它们的标号是1, 2, 3，每个罐子中都装有 a 只红球和 b 只白球。先从 1 号罐子中任取一只球放入 2 号罐子，再从 2 号罐子中任取一只球放入 3 号罐子，然后从 3 号罐子中任取一球，问取到红球的概率为多少？

四、（10 分）设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布， $P\{X_i=0\}=0.7$ ， $P\{X_i=1\}=0.3$， $(i=1,2,3,4)$ 求随机变量 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的分布律.

五、（10 分）设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

（1）判断 X 与 Y 是否相互独立；（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

六、（10 分）某供电站供应本地区 10000 户居民用电，已知每户每天用电量（单位：度）服从区间 $[0,\ 12]$ 上的均匀分布. 试用中心极限定理计算，该供电站每天至少要向居民供应多少度电才能以99%的概率保证本地区居民的正常用电.

七、（10 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本，则(1) 求 θ 的矩估计量；　(2) 求 θ 的最大似然估计量.

八、（10 分）标准差 σ 是衡量机床加工精度的重要特征. 在生产条件稳定的情况下，一自动机床所加工零件的尺寸服从正态分布，假设设计要求 σ 不超过 0.5 mm. 为了控制生产过程，定时对产品进行抽验：每次抽验 5 件，测定其尺寸的标准差为 S ，试给出 S 的取值区间，使得当 S 落在该区间时，就可以根据显著性检验判定机床的精度降低了.（显著性水平为 $\alpha=0.05$ ）

《概率论与数理统计》试卷 4

可能用到的数据：

$\Phi(1.96)=0.975$， $F_{0.05}(7,8)=3.50$， $F_{0.05}(8,7)=3.73$，$t_{0.05}(15)=1.7531$

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$， $P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB|\bar{C})=$__________.

2、设 $X\sim b(8,1/4)$， $Y\sim\pi(2)$，且 $Cov(X,Y)=\dfrac{1}{4}$，则 $D(X-2Y)=$______________.

3、设 $x_1,x_2,...,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______________.

4、计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-4x+4)e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx=$____________.

5、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\dfrac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $E(X)=$______________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 ξ,η,ζ 都服从区间 $[-1,\ 1]$ 上的均匀分布，且它们之间的相关系数均为 ρ，令 $X=\xi+\eta$，$Y=\eta+\zeta$，则 X 与 Y 不相关的充分必要条件为（　　　　　　）

（A）ξ,η,ζ 相互独立；　（B）ξ,η,ζ 两两不相关；　（C）$\rho=\dfrac{1}{3}$；　（D）$\rho=-\dfrac{1}{3}$.

2、设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$，则（　　　　　　）

（A）p 随着 μ 的增加而增加；　（B）p 随着 σ 的增加而增加；

（C）p 随着 μ 的增加而减少；　（D）p 随着 σ 的增加而减少.

3、对单个正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ (σ^2 已知)的 μ 进行检验，如果已知在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的条件下接受了 H_0，其中 $H_0:\mu\le\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$. 那么当显著性水平为 $\alpha=0.01$ 时，下面结论中正确的是（　　　　　）

（A）必接受 H_0；　（B） 必拒绝 H_0，接受 H_1；

（C）可能接受也可能拒绝 H_0；　（D） 拒绝 H_0，可能接受也可能拒绝 H_1.

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ \left(n\ge 2\right)$ 来自总体 $N\left(\mu,1\right)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中**不正确**的是（　　　　　）

（A）$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布；　　（B）$2\sum\limits_{i=1}^{n}(X_n-X_i)^2$ 服从 χ^2 分布；

（C）$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布；　　（D）$n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

5、设 X,Y 相互独立，且都服从 $\lambda=2$ 的泊松分布，则有（　　　　　）

（A）$P\left\{X+Y=2\middle|Y=1\right\}=\dfrac{1}{2}$；　　（B）$P\left\{Y=1\middle|X+Y=2\right\}=\dfrac{1}{2}$；

（C）$P\left\{\max(X,Y)=1\middle|Y=1\right\}=\dfrac{1}{2}$；　　（D）$P\left\{Y=1\middle|\max(X,Y)=1\right\}=\dfrac{1}{2}$.

三、**（10 分）**一同学丢了钥匙，丢在宿舍里、教室里、校园路上的概率分别为 0.5、0.3 和 0.2，而丢在上述三处地方被找到的概率分别为 0.8、0.3 和 0.1，求在找到钥匙时，钥匙丢在教室里的概率.

四、（10 分）设 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，$Y_k=\begin{cases}0, & X\le k\\ 1, & X>k\end{cases}$ $k=1,2$ 试求 $\left(Y_1,Y_2\right)$ 的分布律.

五、（10 分）一工人修理一台机器需两个阶段，第一阶段所需时间（小时）服从均值为 0.2 的指数分布，第二阶段服从均值为 0.3 的指数分布，且与第一阶段独立. 现有 50 台机器需要修理，利用中心极限定理试求该工人在 30 小时内完成修理工作的概率.

六、（10 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 θ 为未知参数且大于零，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，试求 1）θ 的矩估计量；2）θ 的最大似然估计量.

七、（10 分）设某种产品来自甲、乙两个厂家，为考查产品性能的差异，现从甲乙两厂产品中分别抽取相互独立的 8 件和 9 件产品，测其性能指标 *X*，得到两组数据，运算得

$\overline{x}_1=0.190,\quad s_1^2=0.006,\quad \overline{x}_2=0.238,\quad s_2^2=0.008$ 假设测定结果服从正态分布

$X_i\sim N\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)\left(i=1,2\right)$，则在检验水平为 $\alpha=0.10$ 条件下，能否认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

八、（**10 分**）设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\left\{X=0\right\}=P\left\{X=2\right\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，试求（1）$P\left\{Y\le EY\right\}$；（2）$Z=X+Y$ 的概率密度.

《概率论与数理统计》试卷 5

可能用到的数据： $t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(16)=2.1199$，$t_{0.025}(63)=1.96$，$t_{0.05}(63)=1.645$

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 A,B 是随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(\bar{A}B)=0.2$，$P(B)=0.4$，则 $P(A-B)=$____________.

2、已知 (X,Y) 的分布律为：

X \ Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	*a*
1	*b*	0.1	0.2

且 $P\left\{X^2+Y^2=1\right\}=0.5$，则 $P\left\{X^2Y^2=1\right\}=$______________.

3、设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X=E(X^2)\right\}=$______________.

4、设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\frac{1}{2})$，如果 $P\left\{X+Y\le 1\right\}=\frac{1}{2}$，则 μ 的值为________________.

5、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，且 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，$\overline{X},S^2$ 分别表示样本均值和样本方差，则当 $c=$____________时，统计量 $\overline{X}^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{\lambda-x}, & x>\lambda\\ 0, & x\le\lambda\end{cases}$ $(\lambda>0)$，则概率 $P\left\{\lambda<X<\lambda+a\right\}$ $(a>0)$ 的值（　　　　　）

（A）与λ无关，随a的增大而增大；　　（B）与λ无关，随a的增大而减小；

（C）与a无关，随λ的增大而增大；　　（D）与a无关，随λ的增大而减小.

2、设随机变量X的分布函数为$F(x)$，构造函数$F_1(x)=F(ax)$（a为常数），$F_2(x)=F^2(x)$，$F_3(x)=1-F(-x)$，$F_4(x)=F(x+a)$，则可以确定是分布函数的为（　　　　）

（A）$F_1(x),F_2(x)$；　（B）$F_2(x),F_3(x)$；　（C）$F_3(x),F_4(x)$；　（D）$F_2(x),F_4(x)$.

3、将长度为1m的木棒随机地截成两段，则两段长度X和Y的相关系数ρ为（　　　　）

（A）1；　　（B）-1；　　（C）1/2；　　（D）-1/2.

4、设X_n表示将一枚硬币抛掷n次后出现“正面”的次数，则（　　　　）

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$；　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-2n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$；

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$；　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-2n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$.

5、设随机变量$X\sim t(n)\ \ (n>1)$，$Y=\frac{1}{X^2}$，则随机变量Y服从的分布为（　　　　）

（A）$\chi^2(n)$；　　（B）$\chi^2(n-1)$；　　（C）$F(n,1)$；　　（D）$F(1,n)$.

三、（10分）有三个一模一样的盒子，一号盒子中有15颗水果糖和5颗巧克力糖，二号盒子中有11颗水果糖和29颗巧克力糖，三号盒子中有25颗水果糖和15颗巧克力糖，现从中随机选择一个盒子，再从中摸出一颗糖，发现是水果糖，试求这颗糖来自一号盒子的概率.

四、（10分）某电商销售某种家用电器采用新的经销模式：按电器使用年限的长短来确定销售价格。

设使用寿命为X服从正态分布$N(2,\sigma^2)$（单位：年），规定：电器销售定价$Y=\begin{cases}1000, & X\le 1\\ 2000, & 1<X\le 3\\ 3000, & X>3\end{cases}$

试求该商店销售一台电器所得销售收入Y的数学期望.

五、（10分）已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}k(1-x)y, & 0<x<1,0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$

（1）求常数k；（2）分别求X和Y的边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$.

六、（**10 分**）设总体 X 的概率密度为 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 λ 为未知参数且大于零，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，试求 λ 的最大似然估计量.

七、（**10 分**）某高校教务部对线性代数考试成绩进行评估，已知线性代数成绩 X 服从正态分布 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，现从中抽取 64 个学生的成绩，算得样本均值为 66.5 分，样本标准差为 15 分. 试求：（1）总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

（2）在显著性水平为 0.05 的条件下，检验假设 $H_0:\mu=70$，$H_1:\mu\neq 70$.

八、（**10 分**）设 $P(A)=p,\ P(B)=1-\varepsilon$，试证明 $\dfrac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}\le P\left(A|B\right)\le\dfrac{p}{1-\varepsilon}$.

试卷 1 答案

一、1. 1/3

解 $P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$；$P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\,|\,B)}=\dfrac{1/12}{1/2}=\dfrac{1}{6}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

2. $X\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0.2 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix}$

解 由离散型随机变量分布函数的性质可知，X 的可能取值为 $-2,-1,1$

$$P\{X=-2\}=F(-2)-F(-2-0)=0.2-0=0.2$$

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.6-0.2=0.4$$

$$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-0.6=0.4$$

3. $P\{X=k\}=(0.2)^{k-1}0.8,k=1,2,3,\ldots$

4. 1/2

解 因 $X \sim N(2,\sigma^2)$，所以 $P\{X \le 2\} = P\{X > 2\} = \frac{1}{2}$；

Y 是 0-1 分布的随机变量，故 $E(Y) = 0 \cdot P\{Y=0\} + 1 \cdot P\{Y=1\} = P\{Y=1\} = P\{X \le 2\} = \frac{1}{2}$

5. 0

解 $Y = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} = X_1X_4 - X_2X_3$ ，因 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布，所以 X_1X_4 与 X_2X_3 分布也相同，所以 $E(Y) = E(X_1X_4 - X_2X_3) = 0$

6. C

解 X_i 服从参数为 $\lambda = 2$ 的指数分布，所以 $E(X_i) = \frac{1}{2}, D(X_i) = \frac{1}{4}$

由于 ${X_1}^2, \ldots, {X_n}^2, \ldots$ 独立同分布，根据辛钦大数定律可知，

Y_n 依概率收敛于 $E({X_i}^2) = D(X_i) + [E(X_i)]^2 = \frac{1}{2}$

7. D

解 $Y = g(X) = 3X + 2$ 严格单调递增，根据公式法，由 X 的概率密度 $f(x)$ 能得到 Y 的概率密度 $f_Y(y) = f(h(y))|h'(y)|$，其中 $h(y) = \frac{y-2}{3}$，即 $f_Y(y) = \frac{1}{3} f(\frac{y-2}{3})$

8. B

解 因 X 和 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1, 0 < x, y < 1 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$

A: $P\{X + Y > 1\} = \iint_{x+y>1} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}$，

B: $P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y<1} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}$

C：因 X 和 Y 是连续型随机变量，所以 $P\{X=Y\}=0$

D: 虽然 X 和 Y 的分布相同，但是不能说明他们是两个相同的随机变量

9. D

解 正态总体下统计量的分布定理可知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以

$$D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)\,,\quad D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

10. A

解 这属于双正态总体方差已知的假设检验问题，所以拒绝域是

$$\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\overline{X}-\overline{Y}|\geq z_{\alpha/2}=1.96 \text{ 所以 } \left|\sum_{i=1}^{9}(X_i-Y_i)\right|\geq 24.95$$

二、解　设 B_1 表示“从第一盒子中取一球为红球”， B_2 表示“从第一盒子中取一球为黄球”， A 表示“第二次取的两球为蓝球”， 易知 B_1,B_2 是样本空间的一个划分，且

$$P(B_1)=\frac{1}{3}\,,\quad P(B_2)=\frac{2}{3}\,,\quad P(A\,|\,B_1)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}\,,\; P(A\,|\,B_2)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}\,.$$

由全概率公式得 $P(A)=P(A\,|\,B_1)P(B_1)+P(A\,|\,B_2)P(B_2)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{18}$.

三、解　(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

当 $x>0$ 时， $f_X\left(x\right)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$；当 $x\leq 0$ 时， $f_X\left(x\right)=0$；所以 $f_X\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

同理可得 $f_Y(y)=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 由于 $f(x,y)\neq f_X\left(x\right)f_Y(y)$，故不相互独立。

四、解　（1）$D(Z)=\dfrac{1}{9}D(X)+\dfrac{1}{4}D(Y)+2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}Cov(X,Y)$

$$=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} \quad =\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{4})\times 3\times 4=4$$

$$Cov(X,Z)=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y) \;=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} \quad =\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{4})\times 12=\frac{3}{2}$$

$\rho_{XZ}=Cov(X,Z)/\sqrt{D(X)D(Y)}=\dfrac{3}{4}$。（2）因为 $\rho_{XZ}\neq 0$，所以不相互独立，且相关。

五、解 设对第 i 个顾客的服务时间为 X_i， 则 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立相同分布，且

$E(X_i)=1.5$， $D(X_i)=1$， $i=1,2,\cdots,100$. 于是由独立同分布的中心极限定理， 得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 120\right\}$

$$=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100\times 1.5}{\sqrt{100\times 1}}\le\frac{120-100\times 1.5}{\sqrt{100\times 1}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{120-100\times 1.5}{\sqrt{100\times 1}}\right)=\Phi(-3)=1-\Phi(3)=0.0013.$$

六、解 因为总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$ 所以 $E(X)=\dfrac{1}{2}\theta$，令 $\dfrac{1}{2}\theta=\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i$

解得参数矩估计量分别为 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}$，

似然函数 $L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^3}$， $x_{(3)}\le\theta$, 得最大似然估计量：$\hat{\theta}_2=x_{(3)}=\max\{x_i\}$，

$E(\hat{\theta}_1)=E(2\overline{X})=2\dfrac{1}{n}nE(X)=\theta$ 是无偏估计

$f_{\max}(y;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta}\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^2, & 0\le y<\theta,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$ $E(\hat{\theta}_2)=\dfrac{3}{\theta^3}\int_0^{\theta}y^3dy=\dfrac{3}{4}\theta$ 不是无偏估计

七、解 设大学生每季度网购消费金额为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$H_0: \mu=\mu_0=70, H_1: \mu\neq\mu_0$　检验统计量 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，拒绝域 $|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

算得 $|t|=\left|\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}\right|=1.4<t_{0.025}(35)=2.0301$ 可以认为大学生季度平均网购消费金额为 70 元。

试卷 2 答案

一、 1.　1/4

解 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\dfrac{9}{16}$

根据所给条件得 $3P(A)-3[P(A)]^2=\dfrac{9}{16}$

解得 $P(A)=\dfrac{1}{4} or \dfrac{3}{4}$ ，

因 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$, 所以 $P(A)=\dfrac{1}{4}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$

解 由密度函数的归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2+x}dx=1$

$\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2+x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}dx=Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx=1$，令 $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$，则

$Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}dx=\dfrac{Ae^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，根据标准正态分布密度函数的归一性 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$，

得 $\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2+x}dx=\dfrac{Ae^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\dfrac{Ae^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi}=1$ 解得 $A=\dfrac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}$

3. $\boldsymbol{a}=1/6$；$b=5/6$

解 利用 $F(+\infty)=1$，得 $a+b=1$

利用$P\{X=2\}=1/2$，得 $F(2)-F(2-0)=(a+b)-(2/3-a)=1/2$

解得 $a=1/6, \quad b=5/6$

4. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

解 根据大数定律可知 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-Y_i|$依概率收敛于$E(|X_i-Y_i|)=E(|X-Y|)$

接下来计算 $E(|X-Y|)$

因 $X\sim N(0,\dfrac{1}{2}),Y\sim N(0,\dfrac{1}{2})$，且独立，利用正态分布可加性，得 $X-Y\sim N(0,1)$

令 $Z=X-Y$, 则 Z 的概率密度 $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

5. $f(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ 2-z, & 1<z<2, \\ 0, & others. \end{cases}$

解 X 和Y 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} 1,0<x<1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$

由卷积公式得Z 的概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$， $f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases} 1,0<x,z-x<1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$

当 $z\le 0 or z\ge 2$时 $f_Z(z)=0$

当$0<z<1$时， $f_Z(z)=\int_0^z dx=z$

当$1<z<2$时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^1 dx=2-z$

6. B

解 只有选项B的函数满足分布函数的三个性质

7. D

解 由题意知Y的可能取值是0,1,2

$$\begin{aligned}
&P\{X+Y\le 1\}\\
&=P\{X+Y\le 1,Y=0\}+P\{X+Y\le 1,Y=1\}+P\{X+Y\le 1,Y=2\}\\
&=P\{X\le 1,Y=0\}+P\{X\le 0,Y=1\}+P\{X\le -1,Y=2\}\\
&=P\{X\le 1,Y=0\}=P\{X\le 1\}P\{Y=0\}=\int_0^1 e^{-x}dx\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1-e^{-1})
\end{aligned}$$

8. D

解 利用正态分布可加性，可得

$$X_1-X_2-\cdots-X_n\sim N(0,n\sigma^2),\qquad X_{n+1}+X_{n+2}+\cdots+X_{2n}\sim N(0,n\sigma^2)$$

而且他们相互独立，根据 F 分布的定义可得

$$\frac{\left(\frac{X_1-X_2-\cdots-X_n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)^2\Big/1}{\left(\frac{X_{n+1}+X_{n+2}+\cdots+X_{2n}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)^2\Big/1}\sim F(1,1)\text{，即 }\frac{(X_1-X_2-\cdots-X_n)^2}{(X_{n+1}+X_{n+2}+\cdots+X_{2n})^2}\sim F(1,1)$$

9. C

解 θ的矩估计量为 $2\bar{X}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；$\theta$的最大似然估计量为 $\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$

$E(\hat{\theta})=E\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\theta$

10. B

二、**解** 记B={取到次品}，$\bar{B}$={取到正品}，A={任取一枚硬币投掷1次出现国徽}

则$P(B)=\dfrac{3}{5},P(\bar{B})=\dfrac{2}{5}$，$P(A|B)=1$，$P(A|\bar{B})=\dfrac{1}{2}$

由全概率公式可得 $P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})=1\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5}$

由贝叶斯公式可得 $P(B|A)=\dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\dfrac{1\times\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$

三、解 （1）X的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{1-x} 24x(1-x-y)dy=4(1-x)^3, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-y} 24x(1-x-y)dx=4(1-y)^3, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}48x(1-x)^2(1-y)^3, & x>0,y>0,\\ 0, & others.\end{cases} \Rightarrow f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$$

故X与Y不相互独立。

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 24x^2(1-x-y)dy=\frac{2}{5}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} 24x^3(1-x-y)dy=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{6}{25}$$

三、 解：$D(S)=D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=n\sigma^2$， $D(T)=D\left(\sum_{i=1}^{n} X_{m+i}\right)=n\sigma^2$

由于$X_1,X_2,\cdots X_{n+m}$相互独立，有$Cov(X_i,X_j)=0, i\ne j.$

$$\begin{aligned}Cov(S,T)&=Cov(X_1+X_2+\cdots+X_n,\ X_{m+1}+X_{m+2}+\cdots+X_{m+n})\\ &=Cov(X_{m+1},\ X_{m+1})+Cov(X_{m+2},\ X_{m+2})+\cdots Cov(X_n,\ X_n)\\ &=D(X_{m+1})+D(X_{m+2})+\cdots+D(X_n)=(n-m)\sigma^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_{ST}=\frac{Cov(S,T)}{\sqrt{D(S)D(T)}}=\frac{(n-m)\sigma^2}{\sqrt{n\sigma^2}\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{n-m}{n}$$

五、解 以 X 表示任意一时刻同时进入群的人数，则 $X\sim b(100,0.2)$，由德莫佛—拉普拉斯中心极限定理得 $P\{X>25\}=P\left\{\frac{X-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}>\frac{25-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right\}$

$$=1-P\left\{\frac{X-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\le 1.25\right\} \approx 1-\Phi(1.25) =1-0.8944=0.1056$$

六、解 （1）求 θ 的矩估计值 $\begin{aligned}E(X)&=1\times\theta^2+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2\\ &=[\theta+3(1-\theta)][\theta+(1-\theta)]=3-2\theta\end{aligned}$

样本容量 $n=16$，算得样本均值 $\bar{x}=2$。令 $E(X)=\bar{x}$，得 $3-2\theta=2$，得到 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}$。

（2）求 θ 的最大似然估计值，似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{16}P\{X_i=x_i\}=64\theta^{16}(1-\theta)^{16}$

$\ln L(\theta)=\ln 64+16\ln\theta+16\ln(1-\theta)$ 令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\frac{16}{\theta}-\frac{16}{1-\theta}=0$，$\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{2}$。

七、解　检验假设　$H_0:\mu_1\le\mu_2$，$H_1:\mu_1>\mu_2$　选取检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，该假设检验

问题的拒绝域为 $t\ge t_\alpha\left(n_1+n_2-2\right)$　这里 $\bar{x}=910,\ \bar{y}=880$，$s_1^2=800,\ s_2^2=1000$，$n_1=n_2=8$，

$t_\alpha\left(n_1+n_2-2\right)=t_{0.05}\left(14\right)=1.7613$，$s_w^2=\frac{\left(n_1-1\right)s_1^2+\left(n_2-1\right)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{7\times800+7\times1000}{8+8-2}=900$

算得检验统计量的观察值为　$t=\frac{910-880}{\sqrt{900}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}}=2>1.7613$

故可以认为甲厂灯泡的平均寿命比乙厂的大。

试卷 3 答案

一、1. 0.7

解　$P(AB)=P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

所以　$P(B)=1-P(A)=0.7$

2. $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

解　因 X_i 是 0-1 分布，且相互独立，所以 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,p)$　即　$n\bar{X}\sim b(n,p)$

$P\{n\bar{X}=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$

3. $\sigma^2+\mu^2$

解　根据大数定律可知　$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2$

4. 不变

解 因 $\overline{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n), \overline{Y} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$，且相互独立，

所以 $\overline{X}-\overline{Y} \sim N(0,2\sigma^2/n)$，$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

$$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\} = P\{\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{2\sigma^2/n}} > \frac{\sigma}{\sqrt{2\sigma^2/n}}\} = P\{\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{2\sigma^2/n}} > \sqrt{\frac{n}{2}}\} = 2-2\Phi(\sqrt{\frac{n}{2}})$$

该值与σ无关

5. $\dfrac{1}{2}$

解　因 $X \sim N(1,2)$，所以 $P\{X>1\}=P\{X<1\}=1/2$

$$P\{XY-Y<0\}=P\{Y(X-1)<0\}=P\{Y<0, X-1>0\}+P\{Y>0, X-1<0\}$$
$$=P\{Y<0\}P\{X>1\}+P\{Y>0\}P\{X<1\}=\frac{1}{2}[P\{Y<0\}+P\{Y>0\}]=\frac{1}{2}$$

二、1. C

解 因$P(AB) \le P(A), P(AB) \le P(B)$ 所以$P(AB) \le [P(A)+P(B)]/2$

因 $P(AB)=P(A)P(B|A)$而 $P(B|A)$与$P(B)$的大小不确定，所以选项 A、B 未必成立

2. B

解 方程有唯一实根的概率为

$$P\{4X^2-4Y=0\}=P\{X^2=Y\}=P\{X=0=Y\}+P\{X=1=Y\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}=(1/2)\cdot(2/3)+(1/2)\cdot(1/3)=1/2$$

3. C

解 由$X_i \sim N(0,\sigma^2)$得 $X_i/\sigma \sim N(0,1)$，$X^2/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$，$\sum_{i=1}^{10} X_i^2/\sigma^2 \sim \chi^2(10)$

所以 $10Y^2/\sigma^2 \sim \chi^2(10)$

因X,Y相互独立，所以 $\dfrac{X/\sigma}{\sqrt{(10Y^2/\sigma^2)/10}} \sim t(10)$ 即 $\dfrac{X}{Y} \sim t(10)$

$\dfrac{(X^2/\sigma^2)/1}{(10Y^2/\sigma^2)/10} \sim F(1,10)$，即$\dfrac{X^2}{Y^2} \sim F(1,10)$

4. D

解 置信区间为 $(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2})$，区间长度为 $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$，这与$\overline{X}$没有关系

5. A

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} af_1(x)dx + \int_{0}^{+\infty} bf_2(x)dx = a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx + b\int_0^3 \frac{1}{4}dx = \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} = 1$

三、解 设 B_i 表示从第 i 个罐子放入第 $i+1$ 个罐子是红球，

A_i 表示从第 i 个罐子中任取一个球为红球，$i=1,2,3$ 则 $P(B_1)=\frac{a}{a+b}$，$P(A_1)=\frac{a}{a+b}$

$$P(A_2)=P(B_1)P(A_2 \mid B_1)+P(\overline{B_1})P(A_2 \mid \overline{B_1}) = \frac{a}{a+b}\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b+1} = \frac{a}{a+b}$$

依次类推 $P(A_3) = \frac{a}{a+b}$.

四、解： $X = X_1X_4 - X_2X_3$，X 可能的取值为 $-1,0,1$

$$P(X_1X_4=0)=P(X_1=0,X_4=0)+P(X_1=0,X_4=1)+P(X_1=1,X_4=0)$$
$$=0.7\times0.7+0.7\times0.3+0.3\times0.7=0.91$$

$$P(X_1X_4=1)=P(X_1=1,X_4=1)=0.3\times0.3=0.09$$

由对称性，$P(X_2X_3=0)=0.91$，$P(X_2X_3=1)=0.09$

由 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立 $\Rightarrow$ X_1X_4 与 X_2X_3 相互独立

$$P(X=-1)=P(X_1X_4=0,X_2X_3=1)=0.91\times0.09=0.0819$$

$$P(X=1)=P(X_1X_4=1,X_2X_3=0)=0.0819$$

$$P(X=0)=1-2\times0.0819=0.8362$$

故 $$X \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.0819 & 0.8362 & 0.0819 \end{bmatrix}$$

五、解：(1) 关于 X 的边缘概率密度为

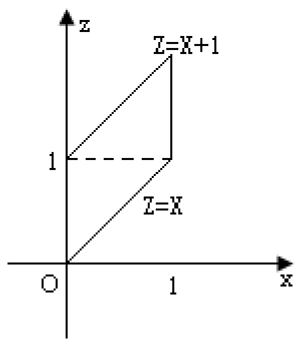
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^1 (2-x-y)dy, & 0<x<1, \\ 0, & x\le 0, x\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}-x, & 0<x<1, \\ 0, & x\le 0, x\ge 1 \end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dx=\dfrac{3}{2}-y, & 0<y<1,\\ 0, & y\le 0, y\ge 1\end{cases}$

由于 $f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以 X、Y不独立.

（2） $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx$， $f(x,\ z-x)=2-x-(z-x)=2-z.$

被积函数 $f(x,\ z-x)$ 只有在 $0<x<1,\ 0<z-x<1$ 即 $0<x<z<x+1<2$ 时不为 0，分两个区间分别计算如下



当 $0<z<1$ 时，如右图的下三角形区域 $f_Z(z)=\int_0^z(2-z)dx=z(2-z).$

当 $1\le z<2$ 时，如右图的上三角形区域 $f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-z)dx=(2-z)^2$

于是 Z 的概率密度为： $f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z),0<z<1;\\(2-z)^2,1\le z<2;\\0, \quad \text{其它}.\end{cases}$

六、解 设 X_i 为第 i 户居民每天的用电量， $X_1,X_2,\cdots,X_{10000}$ 独立同分布，则 $X_i\sim U[0,12]$，

$E(X_i)=6$， $D(X_i)=12$， $i=1,2,\cdots,10000$.

假设供电站每天要向居民供电量为 N, 居民每天用电量为 $Y=\sum_{i=1}^{10000}X_i$，则由题意

$P(Y\le N)\ge 0.99$ 由独立同分布的中心极限定理，所求概率为

$$P(Y\le N)=P\left(\frac{Y-10000\times 6}{100\sqrt{12}}\le\frac{N-10000\times 6}{100\sqrt{12}}\right)\approx\Phi\left(\frac{N-10000\times 6}{100\sqrt{12}}\right)$$

即 $\Phi\left(\dfrac{N-10000\times 6}{100\sqrt{12}}\right)\ge 0.99$， $\dfrac{N-10000\times 6}{100\sqrt{12}}=2.33$. 故 $N=60807.6$（度）

七、解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x;\theta)\,dx=\int_\theta^1 x\cdot\dfrac{1}{1-\theta}dx=\dfrac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\theta=2\overline{X}-1$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的矩估计量；

(2) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$，当 $\theta\le x_i\le 1$ 时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=(\frac{1}{1-\theta})^n$，

则 $\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$. 从而 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}$，关于 θ 单调增加，所以 $\theta=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.

八、解：所加工零件的尺寸 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$H_0:\sigma\le\sigma_0, H_1:\sigma>\sigma_0 \quad (\sigma_0=0.5)$

检验统计量：$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，故拒绝域为 $\chi^2>\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(4)=9.488$

即 拒绝域 $V=\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>9.488\right\}=\left\{\frac{4S^2}{0.5^2}>9.488\right\}=\{S>0.77\}$ 当 $\{S>0.77\}$ 时，认为机床精度降低.

试卷 4 答案

一、1. 0.75

解 A,C 不相容，所以 $P(AC)=0$；$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=P(AB)=\frac{1}{2}$

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{1/2}{1-1/3}=\frac{3}{4}$$

2. 8.5

解 根据重要分布的方差公式可知 $D(X)=8\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$，$D(Y)=2$

$$\begin{aligned}D(X-2Y)&=D(X)+D(2Y)-2\operatorname{cov}(X,2Y)=D(X)+4D(Y)-4\operatorname{cov}(X,Y)\\&=\frac{3}{2}+8-4\cdot\frac{1}{4}=8.5\end{aligned}$$

3. $(8.2,10.8)$

解 置信区间为 $(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2})$

$\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}=10.8-\bar{x}=1.3$，所以置信下限为 $\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}=9.5-1.3=8.2$

故置信区间为 $(8.2,10.8)$

4. 1

解　设随机变量$T \sim N(0,1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-4x+4)e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx \xrightarrow{令x-2=t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

该积分为$E(T^2)$，而$E(T^2)=D(T)+E^2(T)=1$

5. 2.

解 设$\varphi(x)$为标准正态分布的密度函数，则$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$，$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=0$

X 的概率密度 $f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.5\varphi(\frac{x-4}{2})\frac{1}{2}=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x[0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})]dx=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+0.25\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \xrightarrow{\frac{x-4}{2}=t} = \int_{-\infty}^{+\infty}2(2t+4)\varphi(t)dt=8\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=8$$

$E(X)=0.25\cdot 8=2$

二、1. D

X,Y 不相关的充要条件是 $\rho_{XY}=0$，即$\mathrm{cov}(X,Y)=0$

$$0=\mathrm{cov}(\xi+\eta,\eta+\varsigma)=\mathrm{cov}(\xi,\eta)+\mathrm{cov}(\xi,\varsigma)+\mathrm{cov}(\eta,\eta)+\mathrm{cov}(\eta,\varsigma)$$

$$=3\mathrm{cov}(\xi,\eta)+\mathrm{cov}(\eta,\eta)=3\rho\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}+D(\eta)=(3\rho+1)D(\eta)$$

而$D(\eta)=\frac{4}{12}\neq 0$，所以 $3\rho+1=0$

2. B

解 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$p=P\{X\le \mu+\sigma^2\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\sigma\}=\Phi(\sigma)$，与$\mu$无关，随着$\sigma$的增加而增加

3. A

解 在显著性水平$\alpha=0.05$的条件下接受H_0，说明统计量的观察值 $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le z_{0.05}$

又因 $z_{0.05}\le z_{0.01}$，所以$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le z_{0.01}$，所以在显著性水平$\alpha=0.01$的条件下也接受$H_0$

4. B

解　因 $X_i \sim N(\mu,1)$　且相互独立，所以 $\frac{X_i-\mu}{1}=X_i-\mu \sim N(0,1)$，　$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$，$X_n-X_i \sim N(0,2), i=1,2,...,n-1$

A: 因 $X_i-\mu \sim N(0,1)$，且相互独立，所以 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

B: 因 $X_n-X_i \sim N(0,2), i=1,2,...,n-1$，$\frac{X_n-X_i}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{X_n-X_i}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$

所以 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_n-X_i)^2 \sim \chi^2(n-1)$

C: $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=(n-1)S^2=\frac{(n-1)S^2}{1^2} \sim \chi^2(n-1)$

D: 因 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$，所以 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/n}} \sim N(0,1)$，$\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/n}}\right)^2=n(\overline{X}-\mu)^2 \sim \chi^2(1)$

5. B

解　$P\{X=k\}=\frac{2^k}{k!}e^{-2}$，$X,Y$ 都是泊松分布，且相互独立，所以 $X+Y \sim \pi(4)$

A: $P\{X+Y=2|Y=1\}=\frac{P\{X+Y=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{P\{X=1\}P\{Y=1\}}{P\{Y=1\}}=P\{X=1\}=2e^{-2}$

B: $P\{Y=1|X+Y=2\}=\frac{P\{X+Y=2,Y=1\}}{P\{X+Y=2\}}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X+Y=2\}}=\frac{P\{X=1\}P\{Y=1\}}{P\{X+Y=2\}}=\frac{2e^{-2}\cdot 2e^{-2}}{\frac{4^2}{2!}e^{-4}}=\frac{1}{2}$

C: $P\{\max(X,Y)=1|Y=1\}=\frac{P\{\max(X,Y)=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{P\{X\le 1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=P\{X\le 1\}=3e^{-2}$

D: $P\{Y=1|\max(X,Y)=1\}=\frac{P\{Y=1,\max(X,Y)=1\}}{P\{\max(X,Y)=1\}}$

$$=\frac{P\{X\le 1\}P\{Y=1\}}{P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}}=\frac{3e^{-2}\cdot 2e^{-2}}{2e^{-2}\cdot 2e^{-2}+2e^{-2}\cdot e^{-2}+e^{-2}\cdot 2e^{-2}}=\frac{3}{4}$$

三、解：令 A 表示找到钥匙，　B_1 B_2 B_3 分别表示钥匙丢在宿舍里、教室里、校园路上.

由全概率公式，$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.5\times 0.8+0.3\times 0.3+0.2\times 0.1=0.51$

由 Bayes 公式， $P(B_2|A)=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.3\times 0.3}{0.51}=\dfrac{9}{51}$.

四、(Y_1，Y_2)的分布律为

Y_2 \ Y_1	0	1
0	1-e^{-1}	e^{-1}-e^{-2}
1	0	e^{-2}

五、解　设修理第i台机器，第一阶段耗时X_i，第一阶段耗时Y_i，共耗时$Z_i=X_i+Y_i$，已知

$E(Z_i)=0.2+0.3=0.5,\ D(Z_i)=0.2^2+0.3^2=0.13$，则所求概率为

$$P(\sum_{i=1}^{50}Z_i\le 30)\approx\Phi(\frac{30-25}{\sqrt{6.5}})=\Phi(1.96)=0.975$$

六、解：（1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d(-\frac{\theta}{x})=\theta$

令$EX=\overline{X}$，则$\overline{X}=\theta$，即$\hat{\theta}=\overline{X}$，其中$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

（2）对于总体X的样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}}$　（$x_i>0$），$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}(2\ln\theta-\ln x_i^3-\frac{\theta}{x_i})$，

令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{\theta}-\frac{1}{x_i})=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$，得$\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$

七、**解**　检验假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，　$H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$

拒绝域为　$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$　或　$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

由条件知　$n_1=8,\quad n_2=9,\quad F=S_1^2/S_2^2=0.006/0.008=0.75,\quad \alpha=1-0.9=0.1$

查表得 $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(7,8)=3.50$，

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.95}(7,8)=\frac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\frac{1}{3.73}$$

显然 $F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F=0.75<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ 接受原假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，故可认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，即认为两总体方差相等，也就是两厂生产的产品的指标 X 的方差无显著性差异.

八、**解**（1）由数字特征的计算公式可知：$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$，

则 $P\{Y\le EY\}=P\left\{Y\le\frac{2}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}}f(y)dy=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}$.

（2）先求 Z 的分布函数，由分布函数的定义可知：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$.由于 X 为离散型随机变量，则由全概率公式可知

$$\begin{aligned}F_z(z)=P\{X+Y\le z\}&=P\{X=0\}P\{X+Y\le z|X=0\}+P\{X=2\}P\{X+Y\le z|X=2\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-2)\end{aligned}$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-2)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ z-2, & 2<z<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试卷 5 答案

一、1、0.4；

解 $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)\Rightarrow P(AB)=0.2\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4$

2、0.3；

解 根据分布律的归一性，可得 $a+b=0.4$

$P\{X^2+Y^2=1\}=P\{X^2=1,Y^2=0\}+P\{X^2=0,Y^2=1\}=0.1+0.1+a=a+0.2=0.5$

所以 $a=0.3,b=0.1$

$P\{X^2Y^2=1\}=P\{X^2=Y^2=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.2+b=0.3$

3、$\frac{1}{2e}$；

解 $P\{X=k\}=\frac{1}{k!}e^{-1}$，$E(X)=D(X)=1\Rightarrow E(X^2)=D(X)+E^2(X)=2$

$P\{X=2\}=\frac{1}{2}e^{-1}$

4、$\frac{1}{2}$；

解 $X\sim N(\mu,\frac{1}{2}),Y\sim N(\mu,\frac{1}{2})$，且相互独立，所以 $X+Y\sim N(2\mu,1)$

$$P\{X+Y\le 1\}=P\left\{\frac{X+Y-2\mu}{\sqrt{1}}\le\frac{1-2\mu}{\sqrt{1}}=1-2\mu\right\}=\Phi(1-2\mu)=\frac{1}{2}$$

所以 $1-2\mu=0$

5、$\frac{1}{n}$

解 $E(\overline{X})=\mu,D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},E(S^2)=\sigma^2\Rightarrow E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+E^2(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$

$$E(\overline{X}^2-cS^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2=\mu^2\Rightarrow c=\frac{1}{n}$$

二、1、A；

解 $P\{\lambda<X<\lambda+a\}=\int_{\lambda}^{\lambda+a}f(x)dx=\int_{\lambda}^{\lambda+a}e^{\lambda-x}dx=1-e^{-a}$

2、D；

解 $F_2(x),F_4(x)$ 满足分布函数的三个性质，

而对于 $F_1(x)$，当 $a>0$ 时是分布函数，当 $a\le 0$ 时，不是分布函数

对于 $F_3(x)$，因 $F(x)$ 是分布函数，必然右连续，未必左连续，所以 $F(-x)$ 一定左连续，

未必右连续，所以 $F_3(x)$ 未必右连续

3、B；

解 显然 $X+Y=1$， $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\mathrm{cov}(X,1-X)}{\sqrt{D(X)D(1-X)}}=\frac{-\mathrm{cov}(X,X)}{D(X)}=-1$

4、C；

解 $X_n\sim b(n,\frac{1}{2})$，根据德摩弗拉普拉斯中心极限定理可知，当 n 充分大时，X_n 近似 $\sim N(\frac{n}{2},\frac{n}{4})$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\frac{X_n - n/2}{\sqrt{n/4}} \le x\} = \Phi(x)$

5、C

解 因 $X \sim t(n)$，令 $X = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中$U \sim N(0,1), V \sim \chi^2(n)$

$$Y = \frac{1}{X^2} = \frac{V/n}{U} = \frac{V/n}{U/1} \sim F(n,1)$$

三、解：令 A 表示取到水果糖， $B_1\ B_2\ B_3$ 分别表示取一号盒子、二号盒子和三号盒子.

由已知条件，$P(B_1) = \frac{1}{3}$，$P(B_2) = \frac{1}{3}$，$P(B_3) = \frac{1}{3}$，

$$P(A|B_1) = \frac{3}{4}，P(A|B_2) = \frac{11}{40}，P(A|B_3) = \frac{5}{8}$$

由全概率公式，$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\times\frac{11}{40} + \frac{1}{3}\times\frac{5}{8} = \frac{11}{20}$

由 Bayes 公式， $P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{\frac{11}{20}} = \frac{5}{11}$.

四、解 $p_1 = P(X \le 1) = \Phi\left(\frac{1-2}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$

$$p_2 = P(1 < X \le 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1$$

$p_3 = P(X > 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ 则Y 的分布律为$\begin{pmatrix} 1000 & 2000 & 3000 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

$$E(Y) = 1000p_1 + 2000p_2 + 3000p_3 = 2000$$

五、解 （1）k 满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$，即 $\int_0^1 dx \int_0^x k(1-x)ydy = 1$ 解得 $k = 24$；

（2） X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 24(1-x)ydy, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 24(1-x)ydx, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

六、解: 对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x;\lambda)=\prod_{i=1}^n \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i}=\lambda^{2n}\prod_{i=1}^n x_i\cdot e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\quad（x_i>0）,$$

$$\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^n\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^n x_i\ ,$$

令 $\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-n\overline{x}$，得 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

七、解:（1）置信区间 $\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-\mathbf{1}),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-\mathbf{1})\right)$，代入计算，得 $(62.825,70.175)$

(2) $H_0:\mu=70,H_1:\mu\neq70$ 检验统计量：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

故拒绝域为：$|t|=\dfrac{|\overline{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha/2}(n-1)=1.96$ 计算得 $t=-1.867$，故接受 $H_{\mathbf{0}}$.

八、证明： $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，一方面 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\leq\dfrac{P(A)}{P(B)}=\dfrac{p}{1-\varepsilon}$

另一方面 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)}\geq\dfrac{P(A)+P(B)-1}{P(B)}=\dfrac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}$