

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。
以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

中国矿业大学 2023-2024 学年第二 学期课程考试试卷

考试科目	工科数学分析(4)			试卷类型	A 卷	
课程代码	M10860	考试时长	100	分钟	考试方式	闭卷
开课学院	数学学院	年级专业	2023 级人工智能专业			

	学院	班级		姓名		学号		
题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								
阅卷人								

考生承诺：

1. 未携带通信工具及其它各类带有拍照、摄像、接收、发送、储存等功能的设备（包括但不限于手机、智能手表、智能眼镜，平板电脑、无线耳机），或关机与其它禁止携带物品、资料等放置监考老师指定位置；
2. 已按要求清理干净整个座位（包括考生邻座）桌面和抽屉里的所有物品（无论是否属于考生本人）；
3. 已知晓并理解《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》等与考试相关规定，承诺在考试中自觉遵守以上规定，服从监考教师的安排，自觉遵守考试纪律，诚信考试，不违规、不作弊。如有违反，自愿按《中国矿业大学学生违纪处分管理规定》相关条款接受处理。

考生签名_____

一、简答题（共 6 题，每小题 7 分，满分 42 分）

1、考察函数（7 分）

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

函数在原点的可微性。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

2、（7分）设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

证明： $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ 。

3、（7分）设 $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ ，求 f 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 沿方向 $l: (2, -2, 1)$ 的方向导数。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

4、（7分）已知 $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$ ，求 u_x, v_x 。

5、（7分）计算 $\oint_L y dx + \sin x dy$ ，其中 L 为 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的闭曲线，依顺时针方向。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

6、（7 分）设 D 是由直线 $x = 0, y = 1$ 及 $y = x$ 围成的区域，试计算 $I = \iint_D x^2 e^{-y^2} d\sigma$ 的值。

二、（10 分）设 $w = f(x + y + z, xyz)$ ， f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ 。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

三、（9 分）计算 $I = \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ ，其中 L 为

- （1）（3 分）圆周 $x^2 + y^2 = \epsilon^2$ ($\epsilon > 0$)，方向为逆时针；
- （2）（6 分）任一包含原点的闭区域边界（原点不在边界上），方向为逆时针。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

四、（10 分）求 $f(x, y, z) = xyz$ 在条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}$ ($x, y, z, r > 0$) 下的极小值，并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{-1} \leq \sqrt[3]{abc}$$

其中 a, b, c 为任意实数。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

五、（10 分）计算 $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ ，其中 V 为柱面 $x^2+y^2=2x$ ($y>0$) 及平面 $z=0, z=a$ ($a>0$) 所围半圆柱体。

六、（10 分）计算 $\iint_S xyz dxdy$ ，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geq 0, y\geq 0$ 部分并取球面外侧。

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

七、（9分）设 $u = f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续，而 $x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2}$, 证明：

(1) (4分) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$;

(2) (5分) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 。