课时一：整除的概念与性质

题 1：（1）√ （2）× （3）√

题 2 ：$24|h^2-1=(h+1)(h-1)$

n不能被 3 整除
则$n=3k+1$，$n=3k-1$

$(n+1)$、$n-1$ φ有一个为 3 的倍数

$3|(n+1)(n-1)$

n为奇数，$n+1$，$n-1$为 2 个相邻的偶数

则$8|(n+1)(n-1)$

$\therefore 24|(n+1)(n-1)=n^2-1$

$1515=2\times600+315$
$600=1\times315+285$
$315=1\times285+30$
$285=9\times30+15$
$30=2\times15$

$(1515,600)=15$

题 3：

$d|13a+21b$

$d|34a+55b$

$26a+42b$

$(13a+21b,34a+55b)$

$=(13a+21b,8a+13b)$

$=(8a+13b,5a+8b)$

$=(5a+8b,3a+5b)$

$=(3a+5b,2a+3b)$

$=(2a+3b,a+2b)$

$=(a+2b,-b)$

$=(-b,a)=1$

题 4：

$(a,b)=\dfrac{ab}{[a,b]}=4$

题 5：

$(532,336)=(336,136)=(196,140)$

$=(140,56)=(56,28)=28$

$[532,336]=6384$

题 6：

$5767=1\times4453+1314$
$4453=3\times1314+511$
$1314=2\times511+292$
$511=1\times292+219$
$292=1\times219+73$
$219=3\times73$
$73=292-1\times219$

$=292-1\times(511-1\times292)$

$=2\times292-1\times511$

$=2\times(1314-2\times511)-1\times511$

$=2\times1314-5\times511$

$=2\times1314-5\times(4453-3\times1314)$

$=17\times1314-5\times4453$

$=17\times(5767-1\times4453)-5\times4453$

$=17\times5767-22\times4453$
$x=17$，$y=-22$

题 7：

$$(4n+4,14n+7)=(14n+3,7n+1)=(7n+1,1)=1$$

题 8：

$M_n=2^n+1$为质数，n为质数

题 9：

$2\underline{|480}=2^5\times3\times5$

$2\underline{|240}$

$2\underline{|120}$

$2\underline{|60}$

$2\underline{|30}$

$3\underline{|15}$

5

$$T(480)=(5+1)(1+1)(1+1)=6\times2\times2=24$$

例 10： A

例 11： 2 和 29

例 12： √

例 13：反设 设质数有无限个

设为 $p_1, p_2 \cdots p_n$

令 $N=p_1p_2\cdots p_n+1$，则 N为合数

必有质因数 pi， $p_i|N$， $p_1|p_1\cdots p_n$， $pi\nmid 1$

例 14： $\left[\frac{2022}{3}\right]=674$

例 15： $\left[\frac{99}{17}\right]=5$

$\left[\frac{500}{17}\right]=29$

$29-5=24$

题 16：

设 $X=3+\alpha$，$Y=4+\beta$，$Z=2+\gamma$

$0\le\alpha$，β，$\gamma<1$

$-2<\alpha-2\beta+3\gamma<4$ -1,0,1,2,3,4

$[\alpha-2\beta+3\gamma]=-2$

-1,0,1,2,3

$-2<-2\beta\le0$，$0\le3\gamma<3$，$0<\alpha<1$

故 $-1,0,1,2,3,4$

$[X-2Y+3Z]=[3+\alpha-8-2\beta+6+3\gamma]$

$=[1+\alpha-2\beta+3\gamma]=1+[\alpha-2\beta+3\gamma]$

$-2<\alpha-2\beta+3\gamma<4$

$\therefore[\alpha-2\beta+3\gamma]=-2,-1,0,1,2,3$

$\therefore[X-2Y+3Z]=-1,0,1,2,3,4$

题 17：

$\left[\frac{2022}{7}\right]+\left[\frac{2022}{7^2}\right]=288+41+5=334$

题 18：

$\angle x=[x]+\{x\}$， $0\le\{x\}<\frac{1}{2}$

①$0\le\{x\}<\frac{1}{2}$时，$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x^{-}+[x]]=[x]=2[x]$

左边 $2x=2[x]+[x]=2[x]$

② $\frac{1}{2}\le[x]<1$时，左$=2[x]+1=$右

课时二：1、二元一次不定方程

题 1：　$8x+6y=14$

即$4x+3y=7$

$x=1$，$y=1$为特解

$\therefore$全部整数解为$\begin{cases}x=1-3t\\y=1+4t\end{cases}$，$t\in Z$

选 C

题 2：　$(a,b)|c$

题 3：　$17x+2y=3$

$x=1$，$y=-7$为特解

$\therefore$通解为$\begin{cases}x=1-2t\\y=-7+17t\end{cases}$，$t\in Z$

题 4：　$4x+5y=10$

$(4,5)=1|10$

$\therefore$方程有整数解

$x=0$，$y=2$为一个特解

则方程的通解为$\begin{cases}x=-5t\\y=2+4t\end{cases}$，$t\in Z$

课时二：2 多元一次不定方程

题 1：　$(a,b,c)|N$

题 2：　选 D

$(6,9,15)=3\nmid 2$

题 3：　　$15x_1+10x_2+6x_3=61$

设$15x_1+10x_2=5t$①

则$5t+6x_3=61$②

①等价于$3x_1+2x_2=t$

全部解为$\begin{cases}x_1=t-2u\\x_2=-t+3u\end{cases}$，$u\in Z$

②解全部解为$\begin{cases}t=5-6v\\x_3=6+5v\end{cases}$，$v\in Z$

消去t得$\begin{cases}x_1=5-6v-2u\\x_2=-5+6v+3u\\x_3=6+5v\end{cases}$，$u,v\in Z$

课时二：3 勾股数

题 1：　　（1）× 　反例：$x=6,\ y=8,\ z=1$

（2）√

题 2：　　求$x^2+y^2=65^2$的全部正整数

解：设$z=65=k\left(a^2+b^2\right)$

则$k|65$　$\therefore k=1,5,13$

若$k=1$，则$a^2+b^2=65=1^2+8^2=4^2+7^2$

$\therefore\begin{cases}x=2ab=2\times1\times8=16\\y=a^2-b^2=8^2-1^2=63\end{cases}$或$\begin{cases}x=63\\y=16\end{cases}$

$\begin{cases}x=2\times4\times7=56\\y=7^2-4^2=33\end{cases}$或$\begin{cases}x=33\\y=56\end{cases}$

若$k=5$，则$a^2+b^2=13=2^2+3^2$

$\therefore\begin{cases}x=k\cdot2ab=5\times2\times2\times3=60\\y=k\left(a^2-b^2\right)=5\times\left(3^2-2^2\right)=25\end{cases}$或$\begin{cases}x=25\\y=60\end{cases}$

$k=13$则$a^2+b^2=5=1^2+2^2$

$\therefore \begin{cases} x = k \cdot 2ab = 13 \times 2 \times 1 \times 2 = 52 \\ y = k\left(a^2 - b^2\right) = 13 \times \left(2^2 - 1^2\right) = 39 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 39 \\ y = 52 \end{cases}$

综上：全部正整数解为

$\begin{cases} x = 16 \\ y = 63 \end{cases}, \begin{cases} x = 63 \\ y = 16 \end{cases}, \begin{cases} x = 56 \\ y = 33 \end{cases}, \begin{cases} x = 33 \\ y = 56 \end{cases}, \begin{cases} x = 60 \\ y = 25 \end{cases}, \begin{cases} x = 25 \\ y = 60 \end{cases}, \begin{cases} x = 39 \\ y = 52 \end{cases}, \begin{cases} x = 52 \\ y = 39 \end{cases}$