中国矿业大大学2023-2024学年第二学期课程考试试卷评分标准

考试科目 工科数学分析(4)　　试卷类型 A/B卷
课程代码　　考试时长　　分钟　考试方式 开/闭卷
开课学院 选择一项。　年级专业

学院＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	总分
得　分						
阅卷人						

一、简答题（共 6 题，每小题 7 分，满分 42 分）

1、考察函数（7 分）

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

考察函数在原点的可微性。

解：因为$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$，同理，$f_y(0,0)=0$。

……………………………………………………………………………………（2分）

因为$\Delta z-dz=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,

………………………………………………………………………………（4分）

因为$\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，令$\Delta x=\Delta y$, 则$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\frac{1}{2}\neq 0$，所以$\Delta z-dz\neq o(\rho)$，故不可微。………………………………………………………………………（7分）

2、（7分）设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$。

证明：设$x=rcos\varphi$，$y=rsin\varphi$，$r\to 0$，由于

$|f(x,y)-0|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2|sin4\varphi|\leq\frac{1}{4}r^2$ ……………………………………（3分）

因此，对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=2\sqrt{\varepsilon}$，当$0<r=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$。………………………………………………………（7分）

3、（7分）设$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求f在点$P_0(1,1,1)$沿方向$l:(2,-2,1)$的方向导数。

解：易见f在点P_0可微，故$f_x(P_0)=1$，$f_y(P_0)=2$，$f_z(P_0)=3$。………………………………………………………………………………（3分）

l的方向余弦：

$cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}$, ……………………………………………（4分）

$cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=-\frac{2}{3}$, ……………………………………………（5分）

$cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{3}$, ……………………………………………（6分）

因此 $\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0}=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$。…………………………………（7 分）

4、（7 分）已知$\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\ y=e^u-u\cos v\end{cases}$，求$u_x,v_x$.

解：方程对于 x 求导，得：

$\begin{cases}1=e^u u_x+u_x\sin v+u\cos v\cdot v_x\\ 0=e^u u_x-u_x\cos v+u\sin v\cdot v_x\end{cases}$……………………………………………………(2 分)

即

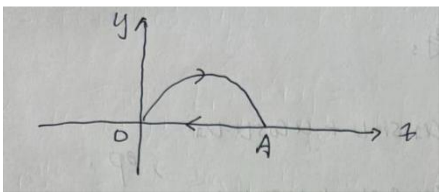
$\begin{cases}(e^u+\sin v)u_x+u\cos v\cdot v_x=1\\ (e^u-\cos v)\,u_x+u\sin v\cdot v_x=0\end{cases}$……………………………………………………(3 分)

$\Rightarrow u_x=\frac{\begin{vmatrix}1 & u\cos v\\ 0 & u\sin v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^u+\sin v & u\cos v\\ e^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$……………………………………………(5 分)

$v_x=\frac{\begin{vmatrix}e^u+\sin v & 1\\ e^u-\cos v & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^u+\sin v & u\cos v\\ e^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$……………………………………………(7 分)

5、（7 分）计算$\oint_L ydx+\sin x dy$, 其中 L 为$y=\sin x\ \ (0\le x\le\pi)$与 x 轴围成的闭曲线，依顺时针方向。

解：

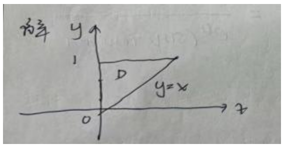


$\oint_L ydx+\sin xdy=\int_{\widehat{OA}}ydx+\sin xdy+\int_{\overline{A0}}ydx+\sin xdy$…………………(2 分)

$= \int_0^{\pi} (\sin x + \sin x \cos x) dx + \int_{\pi}^{0} (0 + \sin x \cdot 0)\, dx$…………………………（4 分）

$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{0} \sin x \cos x\, dx = 2$………………………………………（7 分）

6、（7 分）设 D 是由直线$x = 0, y = 1$及$y = x$围成的区域，试计算$I = \iint_D x^2\, e^{-y^2}\, d\sigma$的值。

解：

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y x^2\, e^{-y^2}\, dx$$

$= \frac{1}{3} \int_0^1 y^3\, e^{-y^2}\, dy$……………………………………………………………（2 分）

$= \frac{1}{6} \int_0^1 y^2\, e^{-y^2}\, dy^2$……………………………………………………………（3 分）

设$u = y^2$

$I = \frac{1}{6} \int_0^1 u\, e^{-u}\, du$……………………………………………………………（5 分）

$= -\frac{1}{6}[\int_0^1 u\, d\, e^{-u}] = (-\frac{1}{6})\, [ue^{-u}|_0^1 - \int_0^1 e^{-u}\, du] = \frac{1}{6}(1 - \frac{2}{e})$ ……………………（7 分）

二、（10 分）设$w = f(x + y + z, xyz)$，f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial w}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$。

解：令$u = x + y + z$和$v = xyz$，则$w = f(u, v)$。所以

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_u + yzf_v \text{ ………………………………………………（3 分）}$$

并且

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f_u+yzf_v)=\left(\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+yf_v+y$$

$$\ldots(5\text{ 分})$$

$$=(f_{uu}+xyf_{uv})+yf_v+yz\left(\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\ldots$$

$$=(f_{uu}+xyf_{uv})+yf_v+yz(f_{vu}+xyf_{vv})\ldots\ldots\ldots$$

$$=f_{uu}+y(x+z)f_{uv}+yf_v+xy^2zf_{vv}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

三、（9 分）计算$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$为

（1）（3 分）圆周$x^2+y^2=\epsilon^2\ (\epsilon>0)$，方向为逆时针；

（2）（6 分）任一包含原点的闭区域边界（原点不在边界上），方向为逆时针。

解：（1）L: $x^2+y^2=\epsilon^2$的参数方程为

$$\begin{cases}x=\epsilon\cos\theta\\ y=\epsilon\sin\theta\end{cases},0\le\theta$$

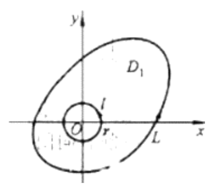
$$\le 2\pi,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{ 分})$$

从而

$$I=\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{2\pi}(\epsilon^2\cos^2\theta+\epsilon^2\sin^2\theta)d\theta\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

（2）因为被积函数在原点$O(0,0)$处并不连续。对于任一包含原点的区域（如右图所示），其边界为 L。取足够小的圆l: $x^2+y^2=r^2$，使得l属于被积区域，方向为逆时针。记l与L之间的区域为D_1，令



$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\qquad Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

注意到

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Longrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots（5\text{ 分}）$$

对区域D_1的第二型积分利用格林公式有

$$\oint_{L-l} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7\ 分)$$

其中$-l$表示曲线l沿顺时针。从而根据（1）的结果有

$$I = \oint_L Pdx + Qdy = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9\ 分)$$

四、（10 分）求$f(x, y, z) = xyz$在条件$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}$ $(x, y, z, r > 0)$下的极小值，并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{-1} \le \sqrt[3]{abc}$$

其中a, b, c为任意实数。

解：设拉格朗日函数为：

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{r}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\ 分)$$

求关于x, y, z, r的偏导数，并令他们为0，有

$$\begin{cases} L_x = yz - \dfrac{\lambda}{x^2} = 0, \\ L_y = xz - \dfrac{\lambda}{y^2} = 0, \\ L_z = xy - \dfrac{\lambda}{z^2} = 0, \\ L_\lambda = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{r} = 0. \end{cases} \Rightarrow x = y = z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（4\ 分）$$

代 入 (4), 则 有 $x = y = z = 3r$ ， 该 稳 定 点 就 是 原 问 题 的 极 小 值 点 ，

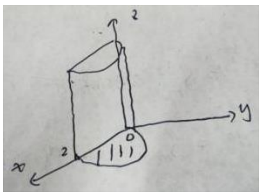
$$\therefore xyz \ge (3r)^3, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{r}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\ 分)$$

令 $x=a,y=b,z=c$ 则 $r=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^{-1}$，故有

$abc\geq[3(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})]^{-1\cdot 3}$ 或 $3(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})]^{-1}\leq\sqrt[3]{abc}$ …………………………（10 分）

五、（10 分）计算 $I=\iiint\limits_{V}z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，其中 V 为柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,z=a(a>0)$ 所围半圆柱体.

解：



采用柱坐标变换：

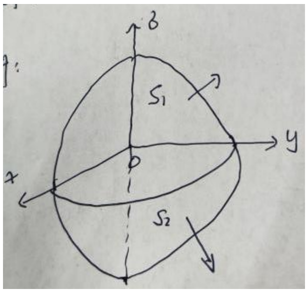
$V:0\leq r\leq 2\cos\theta,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq z\leq a$ ………………………………………（5 分）

$$\begin{aligned}\therefore I&=\iiint\limits_{V'}zr^2drd\theta dz\\&=\int_b^a dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}zr^2dr \text{………………(8分)}\\&=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta\\&=\frac{4}{3}a^2\cdot\frac{2}{3\cdot 1}=\frac{8}{9}a^2 \text{………………(10分)}\end{aligned}$$

六、（ 10 分）计算 $\iint\limits_{S}xyzdxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geq 0,y\geq 0$ 部分并

取球面外侧。

解：



曲面 S 在第一、五象限部分的方程

$S_1 : z_1 = \sqrt{1-x^2-y^2}$,

$S_2 : z_2 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, ... （4 分）

$$\therefore \iint_S xyzdxdy = \iint_{S_1} xyzdxdy + \iint_{S_2} xyzdxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_{xy}} (-xy\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$ ....(7分)

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-r^2}dr$$

$$= \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr = \frac{1}{2}\int_0^1 u\sqrt{1-u}du = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \frac{2}{15}$$ ....(10分)

七、（9 分）设$u = f(x,y)$的所有二阶偏导数连续，而$x = \frac{s-\sqrt{3}t}{2}, y = \frac{\sqrt{3}s+t}{2}$,证明：

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

证明：

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = f_x, \frac{\partial u}{\partial y} = f_y$,

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2}f_x + \frac{\sqrt{3}}{2}f_y$, ……………………………………………… （1 分）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}f_x+\frac{1}{2}f_y,$$ ……………………………………………(2 分）

$$\therefore\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}f_x+\frac{\sqrt{3}}{2}f_y\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_x+\frac{1}{2}f_y\right)^2$$

$$={f_x}^2+{f_y}^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$ ………………………………（4 分）

（2） $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f_{xx}+\frac{\sqrt{3}}{2}f_{xy}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}f_{xy}+\frac{\sqrt{3}}{2}f_{yy}\right)$$

$$=\frac{1}{4}f_{xx}+\frac{\sqrt{3}}{2}f_{xy}+\frac{3}{4}f_{yy}$$ ……………………………………………………（6 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_{xx}+\frac{1}{2}f_{xy}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_{xy}+\frac{1}{2}f_{yy}\right)$$

$$=\frac{3}{4}f_{xx}-\frac{\sqrt{3}}{2}f_{xy}+\frac{1}{4}f_{yy}$$ ……………………………………………………（8 分）

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f_{xx}+f_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ ……………………………………………（9 分）