第二节　频率与概率

一、频率及其性质

二、概率公理化定义

三、概率的性质

研究随机现象，人们不仅关心试验中会出现哪些事件，更想知道事件出现的可能性大小，也就是事件的概率.

概率是随机事件发生可能性大小的度量

事件发生的可能性越大，概率就越大！

了解事件发生可能性即概率的大小，对人们生活有重要意义

例如，了解发生意外人身事故的可能性大小，确定保险金额.

了解来商场购物的顾客人数的各种可能性大小，合理配置服务人员.

了解每年最大洪水超警戒线可能性大小，合理确定堤坝高度.

一个事件在某次试验中的出现具有偶然性，但在大量重复试验中随机事件的出现呈现一定的数量规律，频率这一概念近似反映了这个数量规律。

一、频率

1.定义　设 E, Ω, A为E中某一事件，在相同条件进行n次独立重复试验，事件A发生的次数记为n_A

比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 称为A的频率。(frequency)

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

2. 性质： (1) $0\le f_n(A)\le 1$ (非负性)

(2) $f_n(\Omega)=1$ (规范性)

(3) 若 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

(有限可加性)

抛掷钱币试验记录

试验者	抛币次数n	“正面向上” 次数	频率 $f_n(A)$
德.摩根	2084	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

问题：频率有什么规律？

当n较小时，频率呈偶然性，波动性很大；

随着n的增加，频率会稳定在某一个常数附近，称这个常数为频率的稳定值，这个稳定值就是概率。

定义：在不变的一组条件下进行大量的重复试验，随机事件A出现的频率 $\dfrac{n_A}{n}$ 会稳定地在某个固定的数值 p的附近摆动，我们称这个稳定值p为随机事件A的概率，记为

$P(A)=p$.　(概率的统计定义)

实际中，当概率不易求出时，人们常通过作大量试验，用事件出现的频率去近似概率.

这种确定概率的方法称为**频率方法**.

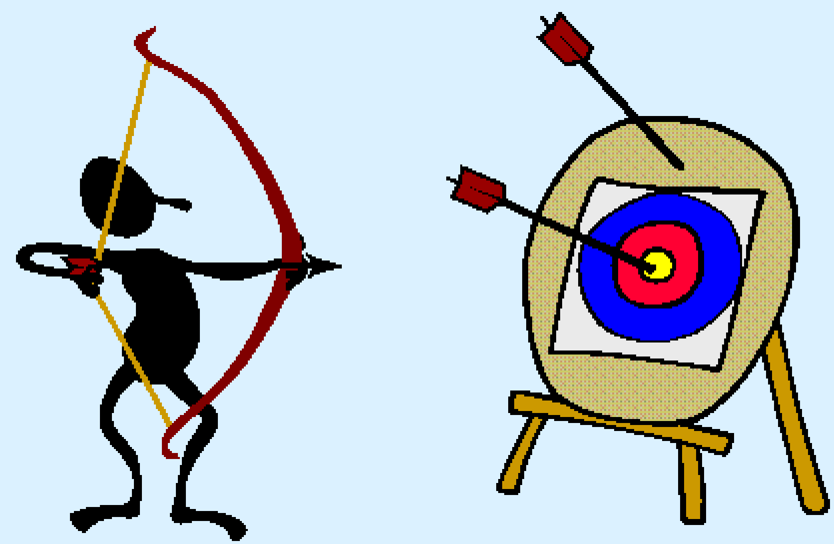
理论依据我们将在第五章介绍.

例如，若我们希望知道某射手中靶的概率，应对这个射手在同样条件下大量射击情况进行观察记录.

若他射击 n 发，中靶 m 发，

当 n 很大时，可用频率 m/n

作为他中靶概率的估计.



概率的主观定义:

在某一条件下，一个事件的概率是人们根据已有的知识和经验对该事件发生的可能性所给出的个人信念，这种信念用区间[0,1]中的一个数来表示，可能性大的对应较大的数。

为了准确理解与深入研究随机现象，我们不能满足于从直觉出发形成的概率定义，必须把概率建立在坚实的数学基础上。

安德雷·柯尔莫哥洛夫（1903年4月25日-1987年10月20日），苏联数学家，主要在概率论、算法信息论和拓扑学贡献，最为人所道的是对概率论公理化所作出的贡献。

在**1933**年，柯尔莫哥洛夫完成了划时代巨著《概率论基础》，建立了测度论基础上的严格概率论公理化体系，使得概率论成为了和微积分一样的严格化数学体系。

二、概率的公理化定义

1、定义：设随机试验E的样本空间为Ω，对于E 中的每一个事件A 赋予一个实数 $P(A)$，称为事件A 的概率，如果集合函数$P(.)$满足以下三个公理:

（1）非负性 $P(A) \geq 0$;

（2）规范性 $P(\Omega) = 1$;

（3）可列可加性

若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2、概率的性质

性质1 $P(\varnothing)=0$

性质2（有限可加性）

若$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质3 如果 $\boldsymbol{A \subset B}$, 则 $\boldsymbol{P(B-A) = P(B) - P(A)}$,

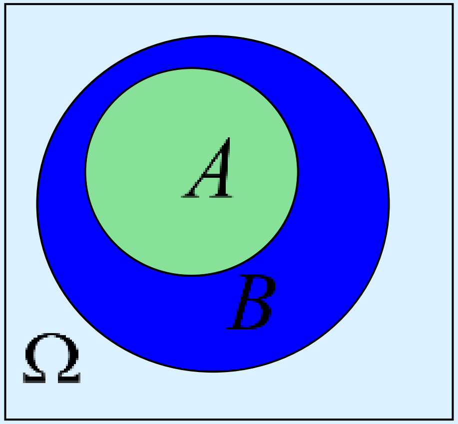
$$\boldsymbol{P(A) \le P(B)}$$

证明 $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B-A)$

且 A 和 $B-A$ 互不相容

$$\therefore P(B) = P(A \cup (B-A))$$

$$= P(A) + P(B-A)$$



推论 一般的, $\boldsymbol{P(B-A) = P(B-AB) = P(B\bar{A})}$

$$\boldsymbol{= P(B) - P(AB)}$$

性质4 $\forall A \subset \Omega,\ 0 \le P(A) \le P(\Omega) = 1$

性质5 $\forall A \subset \Omega,\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$1 = P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A)$$

性质6 $\forall A, B \subset \Omega,$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推广： $\forall A, B, C \subset \Omega,$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

例1 在某食堂窗口，提供三种早点：A鸡蛋，B面包，C包子，选 A, B，C 的学生分别占45%，45%，50%，同时选A和B的占20%，同时选A，C的占25%，同时选B，C的占10%，三种都选的占5%，试求下列事件的概率：

(1) 只选A的

(2) 只选A，B的

(3) 只选一种早点的

(4) 只选两种早点的

(5) 至少选一种早点的

(6) 不选任何早点的

(1) $P\left(A\bar{B}\bar{C}\right) = P\left(A\overline{B \cup C}\right)$

$= P(A) - P(A(B \cup C))$

$= 45\% - 40\% = 5\%$

$$P(A(B \cup C)) = P(AB \cup AC)$$

$$= P(AB) + P(AC) - P(ABAC)$$

$$= 20\% + 25\% - 5\%$$

$$= 40\%$$

(2) $P\left(AB\overline{C}\right)=P\left(AB\right)-P(ABC)=20\%-5\%=15\%$

(3) $=P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)$

(4) $=P\left(AB\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}BC\right)+P\left(A\overline{B}C\right)$

(5)
$$P\left(A\cup B\cup C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)$$
$$-P\left(AB\right)-P\left(BC\right)-P\left(AC\right)$$
$$+P\left(ABC\right)$$

(6) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$

单选题 1分

设置

设 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(AB)$ 且 $P(A) = a$，则

A $P(B) = 2a$

B $P(B) = a$

C $P(B) = 1 - a$

D $P(B) = 1 - 2a$

提交

第三节　等可能概型

一、等可能概型的定义

二、概率计算公式

一、等可能概型的定义

定义 设Ω是随机试验 E 的样本空间，如果Ω 满足以下两个条件：

（1）有限性：试验的样本空间中的元素只有有限个；

（2）等可能性：每个基本事件的发生的可能性相同；

则称随机试验E为等可能概型或古典概型。

——具有这两特点的随机试验是概率论早期的主要研究对象，故称为古典概率模型。

二、计算公式

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\},$$

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$$

$$\therefore 1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})$$

$$=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=nP(\{\omega_i\})$$

$$\therefore P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

■若事件A包含k个基本事件，即

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的样本点个数}}{\Omega\text{包含的样本点个数}}$$

例1 投两枚骰子，求点数之和为奇数的概率。

解 设A表示“点数之和为奇数”

法一， $\Omega=\{11,12,13,\cdots,16,21,\cdots,61,\cdots,66\}$， $n=36$

$A=\{12,21,\cdots,56,65\}$ $n_A=18$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

法二， 所有可能结果(奇,奇)，(奇,偶)，(偶,奇)，(偶,偶)

A={(奇,偶)，(偶,奇)}

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

本例说明：样本空间可以不同，但必须保证等可能。

三、几何概型

等可能概型中的样本点总数由有限个推广到无穷多个，就可得到几何概型。

例2 某十字路口自动交通信号的红、绿灯，其周期为60秒，其中由南至北方向红灯为 15 秒，求随机到达（由南至北）该路口的一辆汽车恰遇红灯的概率。

直观可得 $$P=\frac{15}{60}=0.25$$

例3 一片面积为S 的树林中有一块面积为 S_0 的空地。一架飞机随机地往树林内空投一只包裹。求这包裹落在空地上的概率。

$$P=\frac{S_0}{S}$$

自主学习：

古典概型及概率的计算
(学习通章节第1.7、1.8讲)

第四节　条件概率

一、　条件概率

二、　乘法公式

三、　全概率公式

四、　贝叶斯公式

一、条件概率

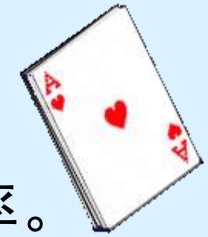
1. 条件概率的定义

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息(条件)下求事件的概率.

例如：在事件A发生的条件下求事件B发生的概率，将此概率记作 $P(B|A)$.

引例 取一副牌,随机的抽取一张，问:

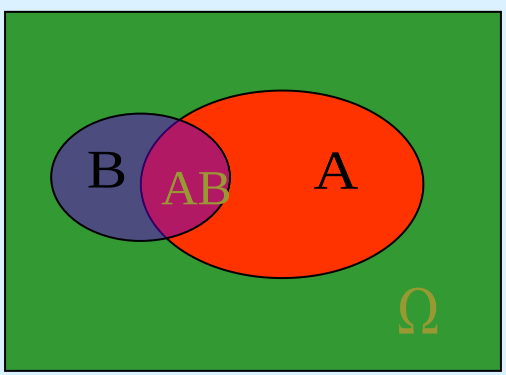
若已知抽中的是红桃,问抽中的是k的概率。



解 A——抽中的是红桃， B——抽中的是k

缩减样本空间

$$P(B\mid A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{1}{13}=\frac{1/54}{13/54}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

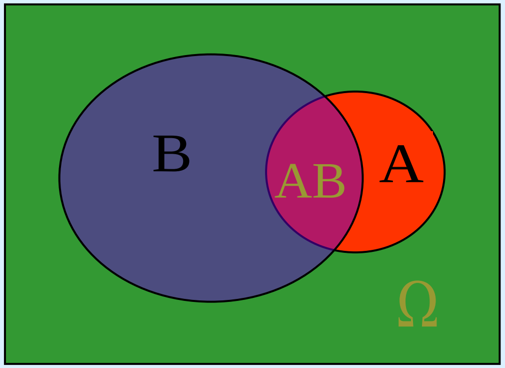


若事件A已发生,故A可视为新的样本空间；为使B也发生，试验结果必须是既在B中又在A中的样本点，即此结果必属于AB。

2、定义 设 A，B为两事件，且$P(A)>0$, 则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生条件下事件B发生的条件概率。



特别注意

$\boldsymbol{P(B|A)}$与 $\boldsymbol{P(AB)}$的区别,

不可将其等同

问题：$P(\cdot\mid A)$ 是不是概率？概率性质对它而言是否成立？

3、条件概率 $P(\cdot\mid A)$是概率，即若$P(A)>0$，则

(1) $P(B\mid A)\geq 0;$ 非负性

(2) $P(\Omega\mid A)=1;$ 规范性

(3) 设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件 $(B_iB_j=\varnothing, i\neq j)$

则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i\mid A)$ 可列可加性

性质：条件概率满足概率的6条基本性质。

如：$P(\bar{B}\mid A)=1-P(B\mid A)$

4、条件概率的计算

1) 用定义计算:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\qquad P(B)>0$$

2) 从加入条件后改变的情况考虑(缩减样本空间的方法).

单选题 0.5分

设置

例1 掷两颗均匀骰子,已知第一颗掷出6点,问“掷出点数之和不小于10”的概率是多少?

A 1/6

B 5/36

C 1/2

D 1/3

提交

例2 某人有一笔资金，他购买基金、股票的概率分别为0.50、0.40，两项投资都买的概率为0.30，
(1)已知他已购买基金，求他再购买股票的概率；
(2)已知他已购买股票，求他再购买基金的概率。

解 设A=“购买基金”， B =“购买股票”

已知 $P(A)=0.50, P(B)=0.40, P(AB)=0.30$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.30}{0.50}=0.60$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.30}{0.40}=0.75$$

二、 乘法公式

由条件概率的定义：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}, P(B)>0$

若已知$P(B)$, $P(A|B)$时, 可以反求$P(AB)$.

即　　若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$　　(1)

同理　　若$P(A)>0$,则$P(AB)=P(A)P(B|A)$　　(2)

(1)和(2)式都称为乘法公式，利用它们可计算两个事件同时发生的概率.

二、推广

(1) 设A、B、C为三个事件，且$P(AB)>0$,则

$$P\left(ABC\right)=P\left(C\mid AB\right)P(AB)$$
$$=P\left(C\mid AB\right)P(B\mid A)P(A)$$

(2)设 $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\cdots,\boldsymbol{A_n}$ 为n个事件，且 $P\left(A_1A_2\ldots A_{n-1}\right)>0$

$$P\left(A_1A_2\ldots A_n\right)=P\left(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n\text{-}1}\right)P\left(A_{n-1}\mid A_1A_2\ldots A_{n\text{-}2}\right)\cdots$$
$$P(A_3\mid A_2A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

抽签问题的公平性

3个人要通过抽签的方式来决定谁吃香蕉。

	香蕉	

下面用概率论的知识来计算一下，每个人抽到“香蕉”的概率到底有多大?

用A_i表示“第 i 个人抽到香蕉” $i=1,2,3.$

则 $\overline{A_i}$ 表示“第 i个人未抽到香蕉”，

显然，$P(A_1)=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A_1})=\frac{2}{3}$，

也就是说，第1个人抽到“香蕉”的概率是 $\frac{1}{3}$。

由于 $A_2 = \overline{A}_1 A_2$

因为若第2个人抽到了“香蕉”，第1个人肯定没抽到。

由乘法公式

$$P(A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

同理，第3个人要抽到“香蕉”，必须第1、第2个人都没有抽到，因此

$$P(A_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$$

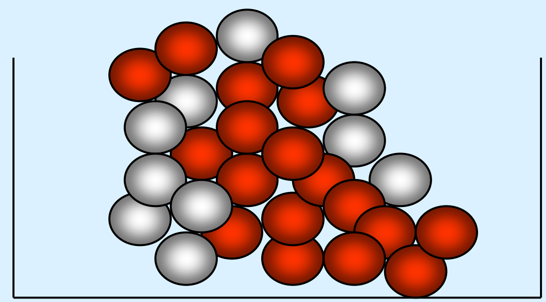
每个人抽到“香蕉”可能性是一样的。

抽签不必争先恐后。

单选题 1分

设置

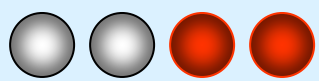
一个罐子中包含10个白球和15个红球．随机地抽取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进5个与所抽出的球具有相同颜色的球．这种手续进行四次，试求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率．



设 W_i={第i次取出是白球}, i=1,2,3,4

R_j={第j次取出是红球}，j=1,2,3,4

所求为 $P(W_1W_2R_3R_4)$



b个白球, r个红球

A $\frac{3}{140}$

B $\frac{3}{70}$

C $\frac{1}{20}$

D $\frac{1}{15}$

提交

例4 《儒林外史》中讲过一个范进中举的故事. 我们来计算一下范进晚年中举的概率究竟有多大?

假设范进每次乡试考中的概率为0.3,

以 A_i表示“范进第i次乡试未考中”，i=1,2,3,…..

则范进连考10次都是不中的概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_9A_{10})$$

$$=P(A_{10}\mid A_1A_2\cdots A_9)P(A_9\mid A_1A_2\cdots A_8)\cdots P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

$$=(1-0.3)^{10}\approx 0.0282$$

结论：范进晚年中举的概率高达97.18%.

启示：做事要坚持不懈，做人要持之以恒！

一个简单的算式

$$(1+0.01)^{365} = 37.7834$$

$$(1-0.01)^{365} = 0.0255$$

$$\Rightarrow \frac{(1+0.01)^{365}}{(1-0.01)^{365}} = \left(1+\frac{2}{99}\right)^{365} = 1480.6602$$

做任何事情最重要的是持之以恒！

第二讲的知识点总结

概率的统计定义：频率的稳定值

概率的三个公理:

（1）非负性 $P(A) \geq 0;$

（2）规范性 $P(\Omega) = 1;$

（3）可列可加性

若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的6条性质

性质1 $P(\varnothing)=0$

性质2（有限可加性）若$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质3 $P(B-A) = P(B-AB) = P(B\bar{A})$

$$= P(B) - P(AB)$$

性质4 $\forall A \subset \Omega,\ 0 \le P(A) \le 1.$

性质5 $\forall A \subset \Omega,\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

性质6 $\forall A, B \subset \Omega,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

等可能概型或古典概型：

(1)样本空间的有限性;

(2)样本点的等可能性

定义：事件A发生条件下事件B发生的条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法公式：

$$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$