线性代数速通讲义

矩阵的关系

等价关系

设矩阵$A, B \in F^{n\times n}$，存在可逆矩阵P, Q，使得$PAQ = B$，则称A和B等价

相似关系

设矩阵$A, B \in F^{n\times n}$，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$，则称A和B相似

相似的性质

1. $|A| = |B|$，$r(A) = r(B)$，$\lambda_A = \lambda_B$，$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$
2. $f(A)$和$f(B)$相似，A^{-1}, A^*, A^T和$B^{-1}. B^*, B^T$相似

对角化$P^{-1}AP = \Lambda$的相关问题

设矩阵$A \in F^{n\times n}$，则A对角化的步骤为

1. 利用$|\lambda E - A| = 0$求出特征值$\lambda_1, \dots, \lambda_n$
2. 求出特征值λ_i对应的基础解系，求出$\alpha_1, \dots, \alpha_n$
3. 利用$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (A\alpha_1, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \dots, \lambda_n\alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
   得出可逆矩阵P为$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$，对角阵$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

n阶方阵可对角化的充要条件

设$A \in F^{n\times n}$，则A可对角化等价于A有n个线性无关的特征向量

推论：非零特征值的个数等于矩阵的秩

n阶实对称矩阵的对角化

n阶实对称矩阵必然可以对角化，且存在正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

相合关系

设矩阵$A, B \in F^{n\times n}$，存在可逆矩阵C，使得$C^TAC = B$，则称A和B相合

注意：相似≠相合，既相似又相合，称为**正交相似**

相合变换求二次型标准型的相关问题

设二次型x^TAx的矩阵$A \in F^{n\times n}$，则二次型化标准型的步骤为

1. 利用$|\lambda E - A| = 0$求出特征值$\lambda_1, \dots, \lambda_n$
2. 求出特征值λ_i对应的基础解系，求出$\alpha_1, \dots, \alpha_n$，然后正交化、单位化求出$\gamma_1, \dots, \gamma_n$
3. 利用$A(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (A\gamma_1, \dots, A\gamma_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$，可以得到可逆矩阵为$P = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$，同时$P$也为正交矩阵，**此时**的对角阵$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$，有$A = P\Lambda P^{-1} = P\Lambda P^T$，所以二次型变为$f = x^TP\Lambda P^Tx$，令$y = P^{-1}x$即可得到标准型

注意：这里做变换$x = Py$的变换矩阵P为正交矩阵，能够保证对角阵的元素唯一且为特征值，如果$P^{-1} \neq P^T$，也可以完成对角化，只不过对角元素就不再是特征值

线性方程组解的结构

设系数矩阵$A \in F^{m\times n}$，讨论齐次方程和非齐次方程解的结构

齐次方程$Ax=0$

有非零解的等价命题

1. $r(A)<n$
2. A的列向量线性相关
3. $|A|=0$

推论 $m<n$时，齐次线性方程必然有非零解

证明：$r(A)<\min\{m,n\}=m<n$，所以有非零解

基础解系 基础解系的向量的个数为$n-r(A)$个

非齐次方程$Ax=b$

无解的等价命题

$r(A)\neq r(A,b)$

有唯一解的等价命题

$r(A)=r(A,b)=n$

有无穷多解的等价命题

$r(A)=r(A,b)<n$

求解方法

1. 对增广矩阵(A,b)做初等行变换变成行阶梯型
2. 求$Ax=0$的一个基础解系
3. 求$Ax=b$的一个特解
4. 写出通解(有的话)

方程组的同解

方程组$Ax=0$和$Bx=0$同解的等价命题

1. $r(A)=r(B)$且$Ax=0$的解全是$Bx=0$的解
2. $r(A)=r(B)=r(\begin{matrix}A\\B\end{matrix})$
3. 矩阵A和B的**行**向量组等价

说明：可以这样理解，$Px=0$的解空间是与P的行空间正交的向量所张成的空间

初等变换的应用

求逆矩阵A^{-1}

解法：$(A\ E)\rightarrow(E\ A^{-1})$

求矩阵的秩

解法：$A\rightarrow$行阶梯型，$r(A)=$非零行行数

求解线性方程

1. 齐次方程：$A\rightarrow$行阶梯型$\rightarrow$行最简
2. 非齐次方程：$(A\ b)\rightarrow$行阶梯型$\rightarrow$行最简

判断β能否被向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性表示

等价于方程组$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)x=\beta$的相关问题

解法：$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta)$ →行阶梯型→行最简型

求$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$的极大无关组，并将其他向量用极大无关组表示

等价于方程组$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)x=0$的相关问题

解法：$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ →行阶梯型→行最简型

求特征值与特征向量

解法：$\lambda_i E-A$ →行阶梯型→行最简型

期末真题大题类型总结(只需要掌握一个技巧：初等行变换！)

解矩阵方程(几乎必考)

要先把给你的关于矩阵X的式子$f(X)$化简$X=...$的形式，常用的性质：$A^*=|A|A^{-1}$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，分块矩阵的逆也考察过

口诀：主不变，副对调，左乘同行，右乘同列，再添负号

$$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\O&B^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&O\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix},\begin{bmatrix}C&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}O&A\\B&C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}$$

【例一】设矩阵$A=$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

矩阵B满足：$[A^*]^{-1}BA^{-1}=2AB+12E$，求矩阵$B$

【解析】$A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}$，原式等价于
$ABA^{-1}-2AB=12E\Rightarrow AB(A^{-1}-2E)=12E\Rightarrow B=12A^{-1}(A^{-1}-2E)$

要让$()^{-1}$尽可能少，用一步运算性质：$B=12[(A^{-1}-2E)A]^{-1}=12(E-2A)^{-1}$

$(E-2A)^{-1}=$

$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&-1&-5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&5/3&2/3\\0&-1/3&-1/3\end{bmatrix}$$

向量组(近几年不怎么考)

类型一 直接求

【例一】设$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2=(2,3,4,5)^T,\alpha_3=(3,4,5,6)^T,\alpha_4=(4,5,6,7)^T$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组，并把其余向量用该极大无关组表示

【解析】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ →行阶梯→行最简

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&3&6&9\end{bmatrix}(2,3,4\text{行成比例})\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可知$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2$，求表示最好先化行最简

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

易得$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2$

【tips】该操作的原理是行变换不改变列的相关关系

【例二】设矩阵$A=$

$$\begin{bmatrix}2&4&1&1\\1&2&-1&2\\-1&-2&-2&1\end{bmatrix}$$

（1）求矩阵A的列向量组的极大无关组，并把其他向量用该极大无关组表示

（2）求矩阵A的一个分解式$A=H_{3\times r}L_{r\times 4}$，要求$r(H)=r(L)=r(A)=2$

【解析】

（1）$A\to$行阶梯$\to$行最简

$$\begin{bmatrix}2&4&1&1\\1&2&-1&2\\-1&-2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1/2&1/2\\1&2&-1&2\\-1&-2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1/2&1/2\\0&0&-3/2&3/2\\0&0&-3/2&3/2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1/2&1/2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to$$
$$\begin{bmatrix}1&2&1/2&1/2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以极大无关组为α_1,α_3，线性表示为$\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_3$

【tips】选取每一行的主元作为无关组的成员计算会比较简单

（2）利用第（1）问得到的线性表示，可以得到$r(A)=2$，不难猜想$r=2$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=[\alpha_1,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

【tips】这里的$2\to 4$的映射可能不那么好理解，因为$n\neq m$，多算几遍应该就能体会（）

类型二 带参数

【例三】已知$\alpha_1=(1,0,1,2)^T,\alpha_2=(0,1,1,2)^T,\alpha_3=(-1,1,0,a-3)^T,\alpha_4=(1,2,a,7)^T,\alpha_5=(1,1,2,3)^T$的秩为3。

（1）求a的值

（2）求出一个极大无关组，并且把其余向量由该极大无关组表示出来

【解析】

（1）依旧是标准流程

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\1&1&0&a&2\\2&2&a-3&7&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&1&1&a-1&1\\0&2&a-1&7-2a&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&0&a-3&0\\0&0&a-3&7-2a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&a-3&7-2a&-1\\0&0&0&a-3&0\end{bmatrix}$$

注意，这里不能直接用主元再化行最简，**牢记：不可以用参数去消去实数！**，先求出a，因为$r(A)=3$，所以$a-3=0$，即$a=3$

（2）化行最简求极大无关组

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&1&0&3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以极大无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，线性表示$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_4$

线性方程组(几乎必考)

类型一 带参数讨论解的存在情况

方程组解的情况：

1. 无解：$r(A)<r(A,b)$
2. 唯一解：$r(A)=r(A,b)<n$
3. 无穷解：$r(A)=r(A,b)=n$

【例一】设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&1&-3\\2&-1&a\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\4\\b\end{bmatrix}$$

（1）求$|A|$

（2）当a,b为何值时，方程组$Ax=\beta$有唯一解，无解，无穷多解；无穷多解时求其通解

【解析】

（1）计算A的行列式，先把其中一行消成只有一个元素，计算会简单一些

$$|A|=\det\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&1&-3\\2&-1&a\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&-3\\0&-5&a\end{bmatrix}=3a-15=3(a-5)$$

（2）

①首先分析唯一解的情况，此时必有$|A|\neq 0$，即$a\neq 5$，又因为$3=r(A)\leq r(A,b)\leq 3$，所以$r(A)=r(A,b)=3$，有唯一解

②分析无解的情况，此时必有$r(A)<3$即$a=5$，对增广矩阵化行阶梯型

$$(A,b)=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\-1&1&-3&4\\2&-1&5&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&3&-3&5\\0&-5&5&b-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&3&-3&5\\0&-5&5&b+3\end{bmatrix}$$

再继续化下去容易出错，不如这样分析，当最后两行成比例时，一定有解，反正，$b+3$一定不会为0

$$\frac{3}{-5}=\frac{-3}{5}=\frac{5}{b+3}\Rightarrow b=-\frac{19}{3}$$

所以$b\neq -19/3$时，方程组无解

③分析无穷多解的情况，由②可知$a=5,b=-19/3$，下面求通解

先求齐次方程的基础解系：

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\text{基础解系}\xi=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

再求非齐次方程的特解

$$\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&3&-3&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&-1&5/3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-7/3\\0&1&-1&5/3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\text{特解}\xi^*=\begin{bmatrix}-7/3\\5/3\\0\end{bmatrix}$$

所以通解为$\xi^* + k\xi$

【tips】 历年真题(试题13)的答案应该是给错了，矩阵的元素抄错了

【tips】 注意区分：求极大无关组表示的时候，是用主元所在列表示其他列；求线性方程组的时候，是赋其他列元素的值求主元

类型二 同解与公共解

类型一 公共解问题

法1：求方程$Ax = c_1$和$Bx = c_2$的公共解，就是求方程组$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$的解

法2：已知两个齐次方程的基础解系$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$和$\beta_1, \ldots, \beta_t$，则公共解$\gamma$可以设为$\gamma = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = l_1\beta_1 + \cdots + l_t\beta_t$(基础解系的性质)，然后令$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s - l_1\beta_1 - \cdots - l_t\beta_t = 0$，构造出另一个矩阵方程，求出$k, l$，进而求出$\gamma$

【例一】设四元齐次线性方程组(I)为$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，又知道另一个四元齐次线性方程组$(\mathrm{II})$的基础解系是$\beta_1 = (0, 1, 1, 0)^T, \beta_2 = (-1, 2, 2, 1)^T$

（1）求方程组(I)的一个基础解系

（2）求方程组$(\mathrm{I})(\mathrm{II})$的公共解

【解析】

（1）求基础解系$A \to$行阶梯$\to$行最简

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{基础解系}\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（2）将两个方程的基础解系组成齐次方程的系数矩阵

$$(\xi_1, \xi_2, \beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该方程的基础解系为$\xi = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，于是$\gamma = k(\xi_1 + \xi_2) = k(\beta_2 - \beta_1) = k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

【例二】已知四元齐次线性方程组$(\mathrm{I})(\mathrm{II})$的基础解系分别为$(\mathrm{I})\alpha_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$和$(\mathrm{II})\beta_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \beta_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$，求方程组$(\mathrm{I})(\mathrm{II})$的非零公共解

【解析】同上题一样，将基础解系组成系数矩阵解齐次方程$(\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) =$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5+8 & 21 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & 5a+5 & -3a-3 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \end{bmatrix}$$

该方程一定有非零解，故$\det = 0$，所以$a = -1$，原方程系数矩阵变为

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&-4\\0&1&-1&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{通解}\xi=\begin{bmatrix}t+4u\\t+7u\\t\\u\end{bmatrix}(\text{令}x_3=t,x_4=u)$$

所以$\gamma=(t+4u)\alpha_1+(t+7u)\alpha=t\beta_1+u\beta_2$

【tips】关于β的正负，都是可以的，只是最后解γ的时候不一样，得到的答案是一样的

【tips】例二采用设k法解出方程通解，而不是先求基础解系，这样比较好表示γ

【例三】设四元齐次线性方程组

$$(\mathrm{I}):\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases},(\mathrm{II}):\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+ax_4=0\end{cases}$$

当a为何值时，这两个方程组有非零公共解，并求之

【解析】求解两个已知方程组的公共解，只需要联立方程组即可

$$\begin{bmatrix}I\\II\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&1&-1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&a+1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&a-1\end{bmatrix}$$

该方程要有非零公共解，则$a-1=0$即$a=1$，继续化行最简

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{基础解系}\xi=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$$

所以非零公共解为$k\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$

类型二 同解问题

真题没考过（证明题除外），但考研考察过，有机会再写吧

特征值与特征向量（几乎必考）

小题主要考察相似四同（上文有：矩阵关系——相似关系），大题则几乎全部结合二次型考察

正交变换化标准型

流程为二次型矩阵$A\to$解特征值$|\lambda E-A|=0\to$求λ对应的特征值$\xi\to$正交化，单位化特征值η

最后$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_i)$为标准型的矩阵，可逆矩阵$\eta_i$为变换矩阵

【例一】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

用正交变换将二次型f化为标准型，并写出正交变换矩阵

【解析】没有技巧，全是计算，二次型矩阵

$$\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$$

特征多项式$|\lambda E-A|=$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{bmatrix}=(\lambda-2)\det\begin{bmatrix}\lambda-2 & -2\\ -2 & \lambda-4\end{bmatrix}+(-2)\det\begin{bmatrix}0 & \lambda-2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-2)(\lambda-4)-4]-4(\lambda-2)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

①$\lambda=0$时，解方程$Ax=0$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{基础解系}\xi_1=(1,1,-1)^T$$

②$\lambda=2$时，解方程$(2E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to \text{基础解系}\xi_2=(1,-1,0)^T$$

③$\lambda=6$时，解方程$(6E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{基础解系}\xi_3=(1,1,2)^T$$

单位化$\eta_1=\xi_1/\sqrt{3},\eta_2=\xi_2/\sqrt{2},\eta_3=\xi_3/\sqrt{6}$，正交变换矩阵$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

标准型：$f=2y_1^2+6y_2^2+0y_3^2$

【tips】这种题计算极为繁琐，从解特征多项式到求特征向量，有时甚至还要施密特正交化，注意熟练度的训练

【例二】设$b>0$，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$$

对应矩阵的特征值之和为1，特征值之积为-12

（1）求参数a,b的值

（2）求此二次型矩阵对应的特征值

（3）方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$在几何上表示什么曲面

【解析】

（1）二次型对应的矩阵$A=$

$$\begin{bmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{bmatrix}$$

矩阵A的行列式$|A|=-4a-2b^2=\Pi\lambda_i=-12$

矩阵A的迹$\mathrm{tr}(A)=a=\sum\lambda_i=1$

解得

$$a=1,b=2(\text{负值舍去})$$

（2）特征方程$|\lambda E-A|=$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

所以A的特征值为$2,2,3$

（3）方程$2x^2+2y^2-3z^2=1$表示单页双曲面(高数内容，自行回顾)