第二讲的知识点总结

概率的统计定义：频率的稳定值

概率的三个公理:

（1）非负性 $P(A)\geq 0;$

（2）规范性 $P(\Omega)=1;$

（3）可列可加性

若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的6条性质

性质1 $P(\varnothing)=0$

性质2（有限可加性）若$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质3 $P(B-A) = P(B-AB) = P(B\bar{A})$

$$= P(B) - P(AB)$$

性质4 $\forall A \subset \Omega,\ 0 \le P(A) \le 1.$

性质5 $\forall A \subset \Omega,\ P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

性质6 $\forall A, B \subset \Omega,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

等可能概型或古典概型:

(1)样本空间的有限性;

(2)样本点的等可能性

定义：事件A发生条件下事件B发生的条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法公式:

$$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

第四节　条件概率

一、　条件概率

二、　乘法公式

三、　全概率公式

四、　贝叶斯公式

例如：在医疗诊断中， 糖尿病、高血压、高度近视都可能引起眼睛玻璃体积血而出现眼睛视而不见，

那么某个就诊者经检查，出现玻璃体积血的概率有多大？

若他检查出现了玻璃体积血，那么他患哪种疾病的可能性更大呢？

问题：复杂事件概率如何求解？

引例　　已知“结果”如何找“原因”？

雨伞掉了，落在图书馆中的概率为0.2，这种情况下找回的概率为0.8；落在教室里的概率为0.3，这种情况下找回的概率为0.6；落在超市中的概率为0.5，这种情况下找回的概率为0.4，求

(1) 找回雨伞的概率；

(2) 如果雨伞找回，问在图书馆找到的概率.

解　设事件A表示“找回雨伞”，

B_1, B_2, B_3分别表示雨伞落在图书馆、教室和超市,

A的发生必然伴随着有且仅有一个B_i与之同时发生。

$$A = \underline{AB_1} \cup \underline{AB_2} \cup \underline{AB_3}$$ 两两互不相容

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega, \quad B_1, B_2, B_3$$ 两两互不相容

(1) 找回雨伞的概率:

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3)$$

$$= P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= 0.2 \times 0.8 + 0.3 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 = 0.54\ ;$$

(2) 如果雨伞找回，问在图书馆找到的概率:

$$P(B_1|A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.16}{0.54} \approx 0.296.$$

注：求解的关键

找到引起(或影响)A 发生的所有可能事件 B_1, B_2, B_3.

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$, $\quad B_1, B_2, B_3$ 两两互不相容

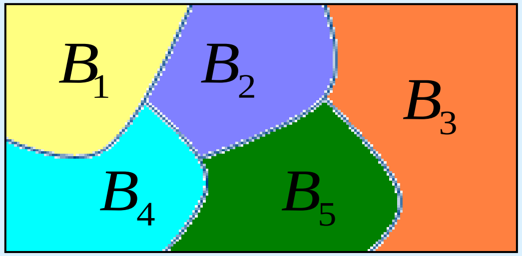
$A = \underline{AB_1} \cup \underline{AB_2} \cup \underline{AB_3}$ 思想：复杂事件化为简单事件和.

1、样本空间的划分

定义 设Ω为试验E 的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件，若

(1) $B_iB_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n;$

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega,$



Ω

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω的一个划分.

2、全概率公式

定理 1 设随机试验E的样本空间为Ω, A为E 的事件,

$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为Ω的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,

则有

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n).$$

证明：$\because A = A\Omega = A\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)$

$AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ 两两互不相容，

由概率的有限可加性得

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i).$$

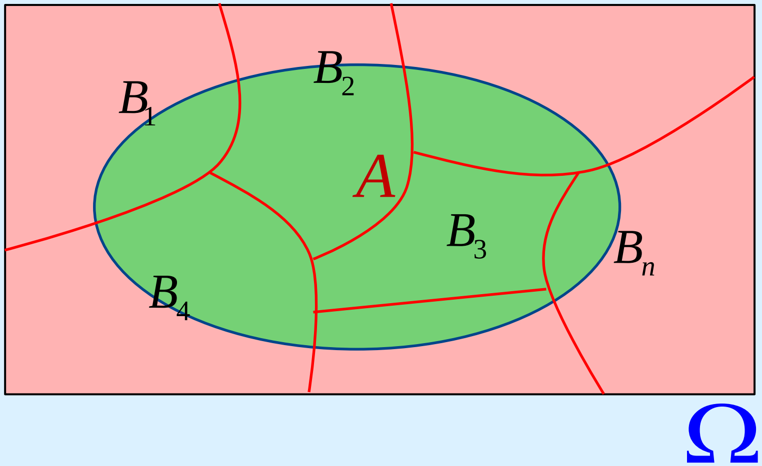
注：(1) 全概率公式最简单的形式

如果$0 < P(B) < 1$，有$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

(2) 若将条件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间的划分，改为

互不相容，且 $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$，则定理仍然成立。

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots$$
$$+P(B_n)P(A|B_n).$$



$A=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$

B_i 为“原因”或“条件”；

A 为“结果”.

从“原因”(影响因素、条件)的角度去找 B_i 往往比较容易.

全概率公式看成为：已知“原因”求“结果”.

3、贝叶斯公式

定理2 设随机试验E的样本空间为Ω，A为E的任意一个事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为Ω的一个划分，且$P(A)>0$，$P(B_i)>0 (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}, \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

贝叶斯公式看成为：已知“结果”求“原因”.

例2 玻璃杯成箱出售, 每箱20只, 假设各箱含0、1、2只次品的概率为0.8、0.1、0.1, 一顾客想买一箱, 在购买时, 售货员随意取一箱, 顾客随机在这箱子中查看4只, 若无次品则买下这一箱, 否则退回, 求

(1) 顾客买下该箱的概率; $P(A)$

(2) 顾客买下的这箱中确实没有次品的概率. $P(B_0 | A)$

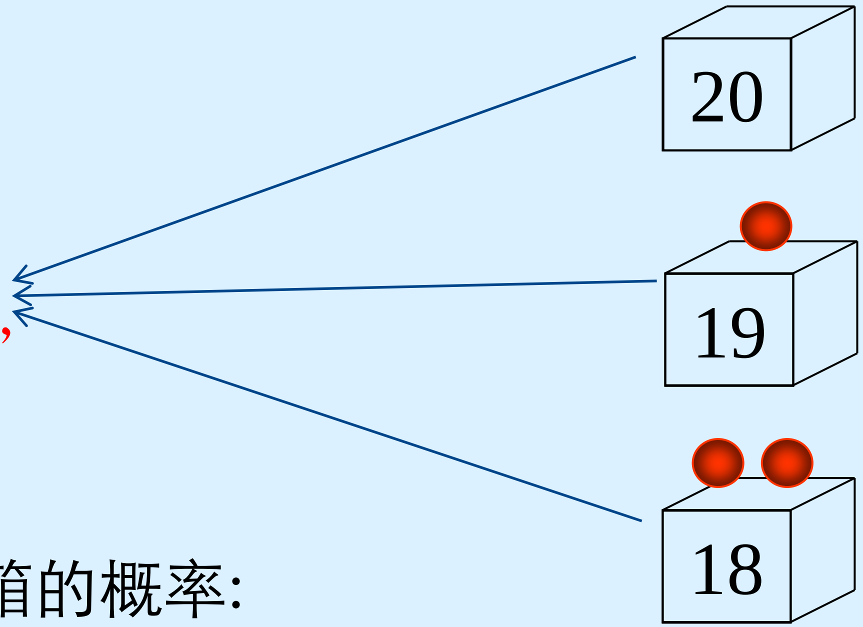
解 设事件A表示"顾客买下该箱",

$\Longleftrightarrow$ "查看的4只没有次品",

事件B_i表示"售货员取到的该箱中有i只次品"(i=0,1,2),

A

“查看的4只没有次品”



全是正品 $P(B_0)=0.8$

1个次品 $P(B_1)=0.1$

2个次品 $P(B_2)=0.1$

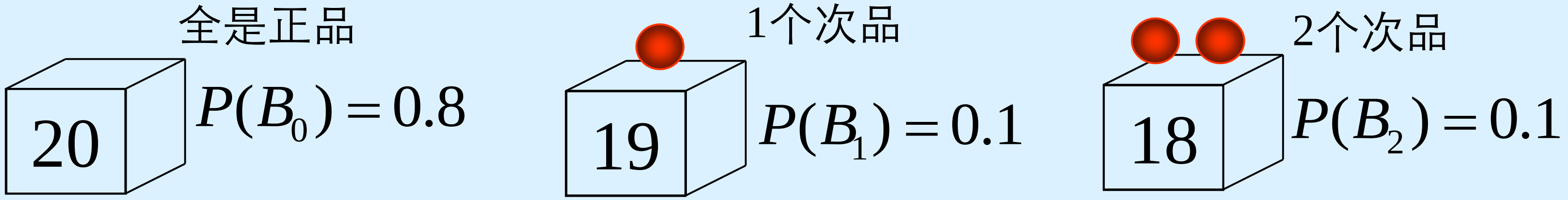
(1) 顾客买下该箱的概率:

$$P(A) = P(AB_0 \cup AB_1 \cup AB_2)$$

$$= P(AB_0)+P(AB_1)+P(AB_2)$$

$$= P(A|B_0)P(B_0)+P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)$$

$$= 1\times 0.8+\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}\times 0.1+\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}\times 0.1 \approx 0.943\ ;$$



(2) 顾客买下的这箱中确实没有次品的概率:

$$P(B_0|A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)}$$

$$\approx\frac{0.8}{0.943}\approx 0.848.$$

填空题 2分

设置

某商店销售一批收音机，共10台，其中3台是次品，现已售两台，出售第三台是正品的概率为[填空1]（填小数）？出售第三台是正品的条件下，剩下7台中有2台次品的概率为 [填空2] （填小数）？

作答

例3 根据以往的临床纪录，癌症患者某项试验呈阳性的概率为0.99，而正常人该试验成阴性的概率为0.999，已知常人患癌症的概率为0.0004，现对自然人群进行普查，

(1) 求被试验的人试验呈阳性的概率； $P(A)$

(2) 若试验呈阳性，求他患癌症的概率有多大？ $P(B|A)$

解 设事件A表示“试验呈阳性”，

事件B表示“被试验者患有癌症”.

由题已知 $P(A|B)=0.99,\ P(\bar{A}|\bar{B})=0.999,$

$P(B)=0.0004.$

A 表示“某人试验呈阳性”，B 表示“被试验者患有癌症”．

$$P(A|B)=0.99,\quad P(\bar{A}|\bar{B})=0.999, \longrightarrow P(A|\bar{B})=0.001,$$

$$P(B)=0.0004, \longrightarrow P(\bar{B})=0.9996.$$

(1) $$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

$$=0.99\times0.0004+0.001\times0.9996$$

$$=0.0013956$$

(2) $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$=\frac{0.99\times0.0004}{0.0013956}\approx0.284.$$

思考:

1、 检出阳性是否一定患有癌症? **不必过早下结论患有癌症.**

试验结果为阳性,此人确患癌症的概率为:

$$P(B \mid A) \approx 0.284 .$$

2、这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义?

$P(B) = 0.0004$ → 先验概率

$P(B \mid A) \approx 0.284$ → 后验概率

$$\frac{P(B \mid A)}{P(B)} \approx \frac{0.284}{0.0004} = 710$$

贝叶斯法则：应用所观察到的现象对有关概率分布(先验概率)进行修正的标准方法.

进一步降低错检率是提高精度的关键，而实际中由于技术和操作等原因，降低错检率非常困难，所以经常采用复查的方法减少错误率。

对首次查得阳性的人再进行复查，此时

$P(B|A) \approx 0.284 \longrightarrow \boxed{P(B)}$

则再检查查出阳性时患癌症的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\boxed{P(B)}}{P(A|B)\boxed{P(B)} + P(A|\bar{B})\boxed{P(\bar{B})}}$$

$$= \frac{0.99 \times 0.284}{0.99 \times 0.284 + 0.001 \times 0.716}$$

$$\approx 0.997$$

$P(B) = 0.0004$

$\Downarrow$

$P(B|A) \approx 0.284$

$\Downarrow$

$P(B|A) \approx 0.997$

贝叶斯公式

★ **提供了一种方法： 贝叶斯方法**

利用新的信息对先验概率进行修正

★ **体现了一种精神： 理性批判**

用客观的新信息更新我们最初关于某个事物的信念后，

就会得到一个新的改进了的信念。 ——贝叶斯

★ **开创了一个学派： 贝叶斯学派**

已发展成为一种关于统计推断的系统理论和方法
贝叶斯学派与经典频率学派一起推动了数理统计学的发展

新冠病毒核酸检测

疫情防控常态化

应检尽检、愿检尽检

政务公开 > 回应关切

热点回应：核酸检测结果为阳性 是否可以诊断为确诊病例？

日期：2020-06-17 08:52 来源：北京日报 字号：大 中 小 分享：

优质 核酸阳性就是感染了新冠病毒？会不会有多人被冤枉了？

浏览 2839 · 讨论 7

sina新浪看点 健康看点>正文

核酸检测结果阳性，却不是确诊病例！最新调查发现……

新冠病毒核酸检测

国家卫生健康委临床检验中心研究员
李金明答央广记者问：

“…… 核酸检测…其阳性结果可以作为病毒感染诊断的“金标准”。当然，核酸检测也有局限性，假阳性，……，对阳性样本做复检，可以有效避免造成假阳性。……”

思考题:

《伊索寓言.孩子与狼》讲的是：一个小孩每天在山上放羊, 山上常有狼出没.

第一天, 他在山上喊"狼来了, 狼来了"，山下的闻声便去打狼, 可到了山上发现狼没有来;

第二天, 他又在山上喊"狼来了, 狼来了"，山下的闻声又去打狼,可到了山上发现狼又没有来;

第三天, 狼真的来了, 可是无论小孩怎么喊叫, 也没有人来救他. 因为人们不再相信他了.

如何应用概率方法解释上述现象.

提示：利用贝叶斯公式分析寓言中村民的心理活动.

分析：利用贝叶斯公式分析寓言中村名的心理活动.

设B表示“小孩可信”，

设村民以往对这个小孩的印象比较好， $P(B)=0.8$

用A表示“小孩说谎”，

假设可信的孩子说谎的概率为0.1， $P(A|B)=0.1$

假设不可信的孩子说谎的概率为0.5， $P(A|\bar{B})=0.5$

第一天村民发现小孩说谎了，村名对他可信度：

$$P(B|A)=?\quad \frac{P(AB)}{P(A)}$$

一、两事件的独立性

1、两事件独立的定义：

若两事件A，B满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B相互独立，简称A，B独立.

2、事件独立性的性质

性质1 若$P(A)>0\left(P(B)>0\right)$，事件$A$与$B$相互独立

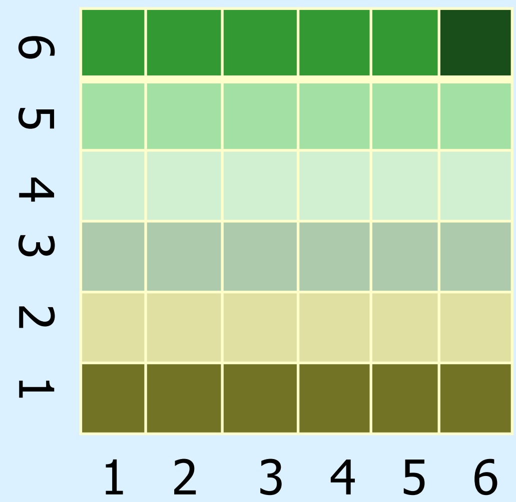
$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)\left(\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)\right)$$

这就是说,已知事件A发生,并不影响事件B发生的概率，这时称事件A、B独立。

将一颗均匀骰子连掷两次,

设 A={第一次掷出6点},
B={第二次掷出6点},

显然 $P(B)=P(B|A)=1/6$,



性质2 必然事件、不可能事件与任何事件都相互独立.

性质3 若事件A, B相互独立，则 $\overline{A}, B$ 相互独立；$A, \overline{B}$ 相互独立；$\overline{A}, \overline{B}$ 相互独立。

证明：不妨证A, $\overline{B}$ 独立，只要说明 $\boxed{P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})}$ 成立即可。

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B})$$

A与B相互独立

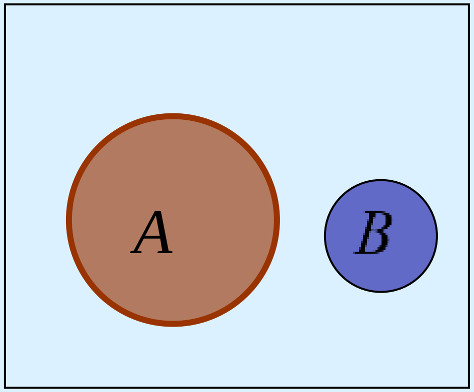
讨论：

当$P(A)>0$且$P(B)>0$

独立和互不相容（互斥），不同时成立

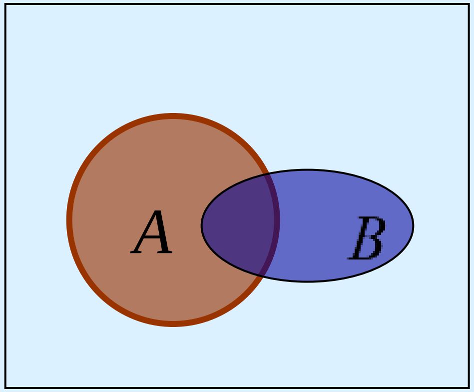
（1）若A与B互斥，它们独立？

一定不独立



（2）若A与B独立，它们也互不相容？

一定不互斥



思考：

三个事件相互独立如何定义？

例1 有四张卡片，其中三张分别写上1，2，3，第四张写上1234，随机抽取一张卡片，A={抽到1}，B={抽到2}，C={抽到3}，考虑事件A,B,C的独立性。

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C).$$

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C).$$

二、多个事件的独立性

1、定义：设A、B、C三个事件满足

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases}$$

称A、B、C三个事件两两相互独立。

注意: 当A、B、C三个事件两两相互独立时,

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

不一定成立。

2、**定义**：设A、B、C三个事件满足

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

四个等式同时成立, 则称事件A、B、C相互独立.

相互独立 $\longrightarrow$ 两两独立

$\xleftarrow{?}$

推广：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，对于任意的k，均有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

则称**事件** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**.

定理 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是n个事件

(1)若$A_1, A_2, \ldots, A_n$相互独立，则其中任意k个事件

$A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}$ $(2 \le k \le n)$ 也相互独立。

(2)若$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，则其中任意k个事件的对立事件与其它的事件组成的n个事件也相互独立。

注：在实际应用中, 往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.

如：两人射击目标，“甲命中”与“乙命中”相互独立；
有放回抽取产品时，每次抽得的产品为次品也相互独立。

三、独立性的概念在计算概率中的应用

用概率来解释：三个臭皮匠胜过诸葛亮

例：已知甲乙丙三个人组成团队1去解决一个问题，他们解决问题的概率分别为0.4、0.5、0.5；团队2一人组成，他解决问题的概率为0.8，比较两个团队解决问题的概率大小。

解：设团队1中：$A_k=\{第\ k个人解决问题\}$，

$$B=\{团队2解决问题\},\ P(B)=0.8$$

$$\begin{aligned}P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\right)&=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\\&=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)\\&=0.85>0.8=P(B)\end{aligned}$$

启示：工作学习生活中注重团队协作。

问题：三个臭皮匠一定能胜过诸葛亮吗？

例：已知甲乙丙三个人组成团队1去解决一个问题，他们解决问题的概率分别为0.1、0.1、0.1；团队2一人组成，他解决问题的概率为0.99，讨论两个团队解决问题的概率大小。

解：设团队1中：$A_k=\{\text{第 }k\text{个人解决问题}\}$，

$$B=\{\text{团队2解决问题}\},\ P(B)=0.99$$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$

$$=1-0.9^3=0.291<0.99$$

$$1-0.9^n>0.99 \quad \Rightarrow n\geq 44$$

古语有云：千军易得，一将难求。

填空题 0.5分

设置

已知团队1中有若干名成员，每一解决的概率均为0.1；团队2一人组成，他解决问题的概率为0.99，问团队1中至少有 [填空1] 人，才能保证解决问题的概率超过团队2。

作答

例　甲、乙、丙三人向同一飞机射击，设甲、乙、丙的命中率分别为0.4、0.5、0.7，只一人击中飞机，飞机被击落的概率为0.2；两人同时击中，飞机被击落的概率为0.6；三人击中飞机，飞机被击落的概率为1，求

(1)　“飞机被击落”的概率

(2) 若飞机被击落，求它是两人同时击落的概率

解 (1) 设A表示“飞机被击落”

B_i表示“飞机被i个人同时击中”　$i=1,2,3$

用全概率公式　$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)$$

C_1, C_2, C_3 分别表示"甲、乙、丙命中"

$$P(B_1) = P\left(C_1\overline{C_2}\,\overline{C_3}\right) + P\left(\overline{C_1}C_2\overline{C_3}\right) + P\left(\overline{C_1}\,\overline{C_2}C_3\right)$$

$$= 0.4\times0.5\times0.3 + 0.6\times0.5\times0.3 + 0.6\times0.5\times0.7$$

$$= 0.36$$

$$P(B_2) = P\left(C_1C_2\overline{C_3}\right) + P\left(\overline{C_1}C_2C_3\right) + P\left(C_1\overline{C_2}C_3\right)$$

$$= 0.4\times0.5\times0.3 + 0.6\times0.5\times0.7 + 0.4\times0.5\times0.7$$

$$= 0.41$$

$$P(B_3) = P\left(C_1C_2C_3\right) = 0.14$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A\,|\,B_i)\,P(B_i) = 0.458$$

内容小结

(一) 全概率公式和贝叶斯公式:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i),\qquad P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}.$$

(二) 解题步骤:

(1) 写出“结果”事件A;

(2) 找到样本空间的划分,“原因”事件B_i **(i=1,2,…,n);**

(3) 求出$P(A|B_i)$ 和$P(B_i)(i=1,2,\cdots,n)$;

(4) 代入公式求解.

（三）事件A与B相互独立：A、B满足$P(AB)= P(A)P(B)$