

最小覆盖和分解3NF

给定：

关系模型 $R(U, F)$ ，其中属性集 $U = \{A, B, C, D, E, G\}$ ，函数依赖集 $F = \{BG \rightarrow C, BD \rightarrow E, DG \rightarrow C, DAG \rightarrow CB, AG \rightarrow B, B \rightarrow D\}$ 。

(1) 求 R 的最小覆盖 (F_m)

最小覆盖的求解步骤如下：

1. **分解右部**：将 F 中的所有函数依赖 (FD) 转换为右部只有一个属性的 FD。

- $DAG \rightarrow CB$ 分解为 $DAG \rightarrow C$ 和 $DAG \rightarrow B$ 。
- 所以 $F_1 = \{BG \rightarrow C, BD \rightarrow E, DG \rightarrow C, DAG \rightarrow C, DAG \rightarrow B, AG \rightarrow B, B \rightarrow D\}$

2. **消除左部冗余属性**：对 F_1 中的每一个 FD $X \rightarrow Y$ ，检查 X 中的每一个属性 A ，看 A 是否是冗余的。即判断 $(X - \{A\}) \rightarrow Y$ 是否能由 F_1 推导出来。

• $BG \rightarrow C$:

- B 是否冗余？即 $G \rightarrow C$ 是否成立？ G^+ (基于 F_1) = $\{G\}$ 。不成立。
- G 是否冗余？即 $B \rightarrow C$ 是否成立？ B^+ (基于 F_1) = $\{B, D \text{ (由 } B \rightarrow D), E \text{ (由 } BD \rightarrow E)\}$ 。不包含 C 。不成立。
- 所以 $BG \rightarrow C$ 保持不变。

• $BD \rightarrow E$:

- B 是否冗余？即 $D \rightarrow E$ 是否成立？ D^+ (基于 F_1) = $\{D\}$ 。不成立。
- D 是否冗余？即 $B \rightarrow E$ 是否成立？ B^+ (基于 F_1) = $\{B, D \text{ (由 } B \rightarrow D)\}$ 。因为有 $B \rightarrow D$ ，且原 F_1 中有 $BD \rightarrow E$ ，所以 $B \rightarrow E$ 成立 (B 能确定 D ， B 和 D 一起能确定 E ，所以 B 能确定 E)。因此 D 是冗余的。
- $BD \rightarrow E$ 变为 $B \rightarrow E$ 。

• $DG \rightarrow C$: 类似于 $BG \rightarrow C$ ， D 和 G 均不冗余。保持 $DG \rightarrow C$ 。

• $DAG \rightarrow C$:

- D 是否冗余？即 $AG \rightarrow C$ 是否成立？
 $(AG)^+$ (基于当前修改后的 F ，包含 $B \rightarrow E$): $\{A, G\} \rightarrow \{A, G, B \text{ (由 } AG \rightarrow B)\} \rightarrow \{A, G, B, D \text{ (由 } B \rightarrow D)\} \rightarrow \{A, G, B, D, E \text{ (由 } B \rightarrow E)\}$ 。
现在我们有 $(AG)^+$ 包含 B 和 G ，而 F_1 中有 $BG \rightarrow C$ ，所以 AG 能确定 C 。因此 D 是冗余的。
- $DAG \rightarrow C$ 变为 $AG \rightarrow C$ 。
- 在 $AG \rightarrow C$ 中： A 是否冗余 ($G \rightarrow C$)？ $G^+ = \{G\}$ 。否。 G 是否冗余 ($A \rightarrow C$)？ $A^+ = \{A\}$ 。否。

• $DAG \rightarrow B$:

- D 是否冗余？即 $AG \rightarrow B$ 是否成立？
 F_1 中本身就存在 $AG \rightarrow B$ 。所以 D 是冗余的。
- $DAG \rightarrow B$ 变为 $AG \rightarrow B$ 。
- 在 $AG \rightarrow B$ 中： A 和 G 均不冗余。

• $AG \rightarrow B$: 左部无法再化简。

• $B \rightarrow D$: 左部无法再化简。

经过此步骤，我们得到 $F2 = \{ BG \rightarrow C, B \rightarrow E, DG \rightarrow C, AG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D \}$ 。(注意：从 $DAG \rightarrow B$ 简化的 $AG \rightarrow B$ 与原有的 $AG \rightarrow B$ 是同一个，所以只保留一个)

3. **消除冗余的函数依赖**：对 $F2$ 中的每一个 $FD X \rightarrow Y$ ，检查它是否能被 $F2 - \{X \rightarrow Y\}$ 推导出来。

- **$BG \rightarrow C$** ：是否能由 $\{B \rightarrow E, DG \rightarrow C, AG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D\}$ 推导出？

$(BG)^+ = \{B, G\} \rightarrow \{B, G, D \text{ (由 } B \rightarrow D), E \text{ (由 } B \rightarrow E)\}$ 。因为 $(BG)^+$ 包含 D 和 G ，且有 $DG \rightarrow C$ ，所以 C 可以被推导出来。

因此 $BG \rightarrow C$ 是冗余的，删除。

$F3 = \{ B \rightarrow E, DG \rightarrow C, AG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D \}$

- **$B \rightarrow E$** ：是否能由 $\{DG \rightarrow C, AG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D\}$ 推导出？

$B^+ = \{B, D \text{ (由 } B \rightarrow D)\}$ 。不包含 E 。所以 $B \rightarrow E$ 不冗余。

- **$DG \rightarrow C$** ：是否能由 $\{B \rightarrow E, AG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D\}$ 推导出？

$(DG)^+ = \{D, G\}$ 。不包含 C 。所以 $DG \rightarrow C$ 不冗余。

- **$AG \rightarrow C$** ：是否能由 $\{B \rightarrow E, DG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D\}$ 推导出？

$(AG)^+ = \{A, G\} \rightarrow \{A, G, B \text{ (由 } AG \rightarrow B)\} \rightarrow \{A, G, B, D \text{ (由 } B \rightarrow D), E \text{ (由 } B \rightarrow E)\}$ 。因为 $(AG)^+$ 包含 D 和 G ，且有 $DG \rightarrow C$ ，所以 C 可以被推导出来。

因此 $AG \rightarrow C$ 是冗余的，删除。

$F4 = \{ B \rightarrow E, DG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D \}$

- **$AG \rightarrow B$** ：是否能由 $\{B \rightarrow E, DG \rightarrow C, B \rightarrow D\}$ 推导出？

$(AG)^+ = \{A, G\}$ 。不包含 B 。所以 $AG \rightarrow B$ 不冗余。

- **$B \rightarrow D$** ：是否能由 $\{B \rightarrow E, DG \rightarrow C, AG \rightarrow B\}$ 推导出？

$B^+ = \{B, E \text{ (由 } B \rightarrow E)\}$ 。不包含 D 。所以 $B \rightarrow D$ 不冗余。

因此，最小覆盖 F_m 为：

$F_m = \{ B \rightarrow E, DG \rightarrow C, AG \rightarrow B, B \rightarrow D \}$

也可以写成： $F_m = \{ B \rightarrow DE, DG \rightarrow C, AG \rightarrow B \}$

(2) 将 R 分解，使其满足 3NF 并且具有无损连接性和函数依赖保持性。

使用标准的3NF分解算法（综合法）：

1. **找出最小覆盖 F_m** （已在第一部分完成）：

$F_m = \{ B \rightarrow E, B \rightarrow D, DG \rightarrow C, AG \rightarrow B \}$

2. **为 F_m 中的每一个 $FD X \rightarrow Y$ 创建一个关系模式 $R(XY)$** 。如果多个FD有相同的左部，可以合并。

- $B \rightarrow E$ 和 $B \rightarrow D$ 可以合并，因为它们有相同的左部 B 。得到模式 $R1(B, D, E)$ 及其上的FDs $\{B \rightarrow D, B \rightarrow E\}$ 。

- $DG \rightarrow C$ 得到模式 $R2(D, G, C)$ 及其上的FD $\{DG \rightarrow C\}$ 。

- $AG \rightarrow B$ 得到模式 $R3(A, G, B)$ 及其上的FD $\{AG \rightarrow B\}$ 。

所以，初步分解的模式集为：

- $R1(B, D, E)$ (FDs: $B \rightarrow D, B \rightarrow E$)

- $R2(D, G, C)$ (FD: $DG \rightarrow C$)

- $R3(A, G, B)$ (FD: $AG \rightarrow B$)

3. **检查候选码**：判断上述分解是否包含了原关系 R 的某个候选码。如果没有任何一个分解后的关系模式包含 R 的候选码，则需要额外添加一个只包含 R 的某个候选码的关系模式，以保证无损连接性。

首先，求 $R(ABCDEFG)$ 关于 F_m 的候选码：

属性集 $U = \{A, B, C, D, E, G\}$ 。

$F_m = \{B \rightarrow DE, DG \rightarrow C, AG \rightarrow B\}$ 。

只在左部出现或从未出现的属性： A, G 。所以任何候选码必须包含 AG 。

计算 $(AG)^+$ ：

$(AG)^+ = \{A, G\}$

加入 $AG \rightarrow B$ ： $(AG)^+ = \{A, G, B\}$

加入 $B \rightarrow DE$ ： $(AG)^+ = \{A, G, B, D, E\}$

加入 $DG \rightarrow C$ (因为 $(AG)^+$ 中已有 D 和 G)： $(AG)^+ = \{A, G, B, D, E, C\}$

因为 $(AG)^+$ 包含了 R 的所有属性，所以 **AG 是 R 的一个候选码** (也是唯一的候选码)。

现在检查分解后的模式：

- $R_1(B, D, E)$ 不包含 AG 。
- $R_2(D, G, C)$ 不包含 AG (只包含 G)。
- $R_3(A, G, B)$ **包含 AG** 。

由于 $R_3(A, G, B)$ 包含了候选码 AG ，因此不需要额外添加候选码模式。该分解已经具有无损连接性。

4. **最终分解结果：**

该算法生成的分解自然保持函数依赖，并且每个关系模式都是 3NF。

- **$R_1(B, D, E)$**
 - FDs: $B \rightarrow D, B \rightarrow E$
 - 候选码: B
 - 对于 $B \rightarrow D$, B 是 R_1 的超码。对于 $B \rightarrow E$, B 是 R_1 的超码。满足 3NF (实际上也满足 BCNF)。
- **$R_2(D, G, C)$**
 - FD: $DG \rightarrow C$
 - 候选码: DG
 - 对于 $DG \rightarrow C$, DG 是 R_2 的超码。满足 3NF (实际上也满足 BCNF)。
- **$R_3(A, G, B)$**
 - FD: $AG \rightarrow B$
 - 候选码: AG
 - 对于 $AG \rightarrow B$, AG 是 R_3 的超码。满足 3NF (实际上也满足 BCNF)。

所以，满足 3NF、具有无损连接性且保持函数依赖的分解为：

- **$R_1(B, D, E)$** (候选码 B , 函数依赖 $B \rightarrow D, B \rightarrow E$)
- **$R_2(D, G, C)$** (候选码 DG , 函数依赖 $DG \rightarrow C$)
- **$R_3(A, G, B)$** (候选码 AG , 函数依赖 $AG \rightarrow B$)