中国矿业大学 06~07 学年第一学期

《工程数学 A》试卷（A）卷

考试时间：100 分钟　考试方式：闭卷

学院______________班级______________姓名____________序号______

题 号	一	二	三	总分
得 分				
阅卷人				

一、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 设 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$,则 $f(z)$(　　).

(A) 在复平面上处处不可导　**(B)** 仅在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上可导

(C) 在复平面上处处解析　**(D)** 仅在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上解析

2. 积分 $\oint_{|z|=1}\bar{z}e^{z^2}\mathrm{d}z=$ (　　).

(A) 0　**(B)** $2\pi i$　**(C)** $-2\pi i$　**(D)** πi

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}$ 的收敛区域为（　　）

(A) $|z+1|>e$　**(B)** $|z+1|<\frac{1}{e}$

(C) $0<|z+1|<1$　**(D)** $|z+1|>1$

4. 点 $z=i$ 是函数 $f(z)=\frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$ 的 (　　).

(A) 本性奇点　**(B)** 可去奇点　**(C)** 一级极点　**(D)** 二级极点

6. 已知$\mathcal{L}\ [t^2]=\dfrac{2}{s^3}$,则$\mathcal{L}\ [(t-1)^2]=$ (　　).

(A) $\dfrac{2}{s^3}e^{-s}$　　　　(B) $\dfrac{2}{s^3}e^{s}$

(C) $\dfrac{1+(s-1)^2}{s^3}$　　　　(D) $\dfrac{2}{(s-1)^3}$

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. $\mathrm{Im}[(1+i)^3+(1-i)^3]=$__________.

2. $1^{\sqrt{2}}=$________________________.

3. $\mathrm{Res}[\dfrac{\cos z}{1-e^z},0]=$________________.

4. 设 $f(t)=\cos 2t\cdot e^{-3t}\cdot u(t)$,则$\mathcal{F}\ [f(t)]=$________________________.

~~5. 数量场 $u=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ 过点 $M(1,1,2)$ 的等值面方程为~~__________________.

~~6. 数量场 $u=3x^2+5y^2-2z$ 在点 $M(1,1,3)$ 处的梯度为~~________________.

三、计算题（共 58 分）

~~1. （8 分）求矢量场 $\vec{A}=xy^2\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+zy^2\,\vec{k}$ 在点 $M(1,2,1)$ 的矢量线方程.~~

2. （8 分）设函数 $f(z)=2(x-1)y+iv(x,y)$ 是解析函数，且 $f(2)=-i$，求 $f(z)$.

3. （8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内 展开成洛朗级数.

4. （8 分）求积分 $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$.

6. （8 分）求方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$ 满足初始条件

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1$$

的解.

中国矿业大学 06~07 学年第一学期

《工程数学 A》试卷（A）卷参考答案

考试时间：100 分钟　考试方式：闭卷

一、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. (B).

2. (B).

3. (D).

4. (D).

5. (C).

6. (C).

7. (B).

8. (B).

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. $\underline{0}$.

2. $\underline{\cos 2\sqrt{2}k\pi + i\sin 2\sqrt{2}k\pi}$.

3. $\underline{-1}$.

4. $\underline{\dfrac{3+j\omega}{(3+j\omega)^2+4}}$.

5. $\underline{x^2+y^2=z}$.

6. $\underline{6x\vec{i}+10y\vec{j}-2\vec{k}}$.

三、计算题（共 58 分）

1. （8 分）求矢量场 $\vec{A} = xy^2\ \vec{i} + x^2 y\ \vec{j} + zy^2\ \vec{k}$ 在点 $M(1,2,1)$ 的矢量线方程.

解：矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{dz}{zy^2}$$

由 $\dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dy}{x^2 y}$ 得， $x^2 - y^2 = c_1$，

由 $\dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dz}{zy^2}$ 得， $x = c_2 z$，

于是所求矢量线方程为 $\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ x = c_2 z \end{cases}$

代入点 $M(1,2,1)$，得 $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x = z \end{cases}$

2. （8 分）设函数 $f(z) = 2(x-1)y + iv(x,y)$ 是解析函数，且 $f(2) = -i$，求 $f(z)$.

解：因为 $u(x,y) = 2(x-1)y$，所以

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - i2(x-1) = -2iz + 2i$$

$$f(z) = \int f'(z)dz = \int (-2iz + 2i)dz = -iz^2 + 2iz + C$$

又 $f(2) = -i$，故 $C = -i$，所以

$$f(z) = -iz^2 + 2iz - i$$

3. （8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域$1<\left|\ z\ \right|<2$内 展开成洛朗级数.

解： $$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^n$$

4. （8 分）求积分 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$.

解：被积函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点$\pm1,\pm i$ 都在圆周$|z|=3$内，所以

$$\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

$$=2\pi i\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\}=0$$

6. （8 分）求方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$ 满足初始条件

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1$$

的解.

解：设L $[y(t)]=Y(s)$，方程两边取 Laplace 变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2[sY(s)-y(0)]-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

即 $$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

取 Laplace 逆变换，得

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$=\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},-1]+\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},1]+\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},-3]$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

中国矿业大学 07~08 学年第一学期

《工程数学 A》试卷（A）卷

考试时间：100 分钟　考试方式：闭卷

学院__信电学院____班级____________姓名__________序号______

题 号	一	二	三	总分
得 分				
阅卷人				

注： L $[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,(n\in \boldsymbol{N})$，L $[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}\,(k\in \boldsymbol{R})$，L $[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}\,(k\in \boldsymbol{R})$.

一、填空题（每题 4 分，共 24 分）

1. 设 $z=\dfrac{-3+i}{2+i}$，则其共轭复数的辐角主值，即 $\arg \bar{z}=$__________.

2. 函数 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$ 在______________可导.

3. $\mathrm{Res}[\dfrac{1}{z^4-1},\infty]=$_____________.

4. 设 $f_1(t)=t^2u(t),\ f_2(t)=t^3u(t)$, 则 $f_1(t)*f_2(t)=$__________________.

5. ~~数量场 $u=3x^2y-y^2$ 过点 $M(2,3)$ 处沿 $\vec{l}=(1,4)$ 的方向导数为~~_______.

6. ~~矢量场 $\vec{A}=xz^2\vec{i}+yx^2\vec{j}+zy^2\vec{k}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的散度为~~___________.

二、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 在复数域内，下列数中为纯虚数的是（　　）.

   (A) i^i 的主值　**(B)** $\ln i$　**(C)** $\cos i$　**(D)** e^i

2. 积分 $\oint_{|z|=1}\bar{z}\mathrm{d}z=$（　　）.

   (A) 0　**(B)** $-2\pi i$　**(C)** $2\pi i$　**(D)** πi

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in^2} z^n$ 的收敛半径为（　　）.

   (A) 0　**(B)** ∞　**(C)** 2　**(D)** 1

4. $\text{Res}[\frac{z(z^2+1)}{(z+i)^3},-i]=$ (　　　).

(A) $3i$　**(B)** 2　**(C)** 0　**(D)** $2i$

~~5. 矢量场 $\vec{A}=2xyz^3\vec{i}+x^2z^3\vec{j}+3x^2yz^2\vec{k}$，则 $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,1)}\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=$ (~~　　　).

(A) 0　**(B)** -8　**(C)** 12　**(D)** 24

6. 已知 $\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$,则 $\mathcal{L}[t\cdot u(t-2)]=$ (　　　).

(A) $\int_s^{\infty}\frac{e^{-2s}}{s}ds$　　**(B)** $\frac{e^{2s}}{s^2}$

(C) $-\frac{2s+1}{s^2}e^{2s}$　　**(D)** $\frac{2s+1}{s^2}e^{-2s}$

三、计算题（共 52 分）

~~1. （8 分）求矢量场 $\vec{A}=x^2\vec{i}+(x+z)y\vec{j}+z^2\vec{k}$ 过点 $M(2,1,1)$ 的矢量线方程.~~

2. （8 分）已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为解析函数 $f(z)$ 的实部,求 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$.

3. （8 分）将函数 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内 展开成洛朗级数.

4. （8 分）求积分 $\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$,其中 $C:|z-(1+i)|=\sqrt{2}$.

5. （6 分）已知 $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t\,dt$，求 $\mathcal{L}[f(t)]$.

6. （8 分）求常系数二阶线性微分方程 $y''(t)-2y'(t)+y(t)=2e^{-t}$ 满足条件 $y(0)=0,y'(0)=0$ 的解.

7. （6 分）利用留数计算实积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

《工程数学 A》试卷（A）卷 参考答案

一、填空题（每题 4 分，共 24 分）

1. $\frac{3}{4}\pi$.
2. $y=\frac{1}{2}$.
3. 0
4. $\frac{1}{60}t^6$.
5. $\frac{60}{\sqrt{17}}$.
6. 3.

二、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. **B**
2. **C**.
3. **D**.
4. **A**.
5. **C**.
6. **B**.
7. **A**.
8. **D**.

三、计算题（共 52 分）

1. （8 分）求矢量场 $\vec{A}=x^2\,\vec{i}+(x+z)y\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ 在点 $M(2,1,1)$ 的矢量线方程.

解：矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{z^2}$$

由 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{z^2}$ 得， $\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=c_1$，

由 $\frac{dx-dz}{x^2-z^2}=\frac{dy}{x+z}$ 得， $\ln(x-z)=y+c_2$，

于是所求矢量线方程为 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=c_1 \\ \ln(x-z)=y+c_2 \end{cases}$

代入点 $M(2,1,1)$，得 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{2} \\ \ln(x-z)=y-1 \end{cases}$

2. （8 分）已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为解析函数 $f(z)$ 的实部,求 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$.

解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2$.

因为 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$,

所以 $v=\int -6xy\,\mathrm{d}\,y=-3xy^2+\varphi(x)$

上式对 x 求导,得

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+\varphi'(x)$.

又 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2$,

故 $\varphi'(x)=3x^2$,$\varphi(x)=x^3+C$.

所以 $f(z)$ 的虚部为

$v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$.

3. （8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内 展开成洛朗级数.

解: $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\dfrac{2}{z^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z^2}}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^n-2\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^{2n}$$

4. （8 分）求积分 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$,其中 $C:\left|z-(1+i)\right|=\sqrt{2}$.

解 ： $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ 在积分线内有两个奇点: $z=1$ 是二级极点, $z=i$ 是一二级极点.所以

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=1}=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\Bigg|_{z=i}=-\frac{1}{4}$$

那么

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}\pi i\,.$$

5. （6 分）已知 $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t dt$ ，求L $[f(t)]$.

解： $\mathcal{L}[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$,

$$\mathcal{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t e^{-3t}\sin 2t dt]=\frac{1}{s}\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

所以 $\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[t\int_0^t e^{-3t}\sin 2t dt]$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[-\frac{2}{s[(s+3)^2+4]}\right]=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

6. （8 分）求常系数二阶线性微分方程 $y''(t)-2y'(t)+y(t)=2e^{-t}$ 满足条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的解.

解：令 $L[y(t)]=Y(s)$，方程两边取拉氏变换得，

$$s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=2\frac{1}{s+1}$$

得 $$Y(s)=\frac{2}{(s-1)^2(s+1)}$$

所以 $$y(t)=L^{-1}[Y(s)]$$

$$=te^t-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}$$

7. （6 分）利用留数计算实积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

$$=\pi i\left(\operatorname{Re}s[\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)},i]+\operatorname{Re}s[\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)},2i]\right)$$

$$=\pi i\left(-\frac{i}{6}+\frac{i}{12}\right)$$

$$=\frac{\pi}{12}$$

中国矿业大学 08-09 学年第一学期

《工程数学》试卷（A）卷

考试时间：**100** 分钟　考试方式：闭卷

学院____________班级________________姓名________　学号_________________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

一、填空题（每空 4 分，共 32 分）

1) $f(t)=\sin\omega_0(t-t_0)$ 的傅氏变换为____________________.

2) 函数 $f(z)=xy^2+ix^2y$ 在 $z=0$ 处的导数为_____________.

3) ~~$\lim\limits_{t\to1}(t^2\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+e^t\vec{k})=$~~__________________________.

4) ~~矢量场 $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 从下向上通过有向曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$~~ $(0<z<2)$ 的通量为 ________.

5) 函数 $f(t)=\sin(2t-6)$ 的拉氏变换的象函数为___________________.

6) ~~矢量场 $\vec{A}=x^3\vec{i}-2x^2y\vec{j}+2yz^4\vec{k}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处旋度为~~________.

7) 设 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$______________.

8) 函数 $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$ 的拉氏变换为___________.

9) C 是直线 OA，O 为原点，A 为 $2+i$，则 $\int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z=$________.

10) 复数 $\dfrac{1}{3-2i}$ 的辐角主值为__________.

~~二、（10 分）求矢量场 $\vec{A} = xz\vec{i} + yz\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$ 通过点 $M(2,-1,1)$ 的矢量线方程~~.

三、（10 分）用拉氏变换的方法求微分方程

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-t}$$

满足条件 $y(0) = y'(0) = 1$ 的解.

四、（10 分）计算积分 $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{z^4(z^{10}-2)}$ （积分曲线为正向）.

~~五、（10 分）证明矢量场 $\vec{A} = 2xyz^2\vec{i} + (x^2z^2 + \cos y)\vec{j} + 2x^2yz\vec{k}$ 为保守场~~，

~~并求积分 $\int_A^B \vec{A}\cdot d\vec{l}$，其中 $A(1,0,2), B(2,1,1)$~~.

六、（10 分）将函数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$ 分别在圆环域 $0 < |z+1| < 1$ 展开成洛朗级数.

中国矿业大学 08-09 学年第一学期

《工程数学》试卷（A）卷参考答案

一、填空题

1) $\underline{j\pi e^{-j\omega t_0}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]}$

2) $\underline{0}$.

3) $\underline{\vec{i}+\sin 1\,\vec{j}+e\vec{k}}$.

4) $\underline{0}$.

5) $\underline{\dfrac{2\cos 6-s\sin 6}{s^2+4}}$.

6) $\underline{2\vec{i}+8\vec{k}}$.

7) $\underline{\dfrac{1}{6}}$.

8) $\underline{\dfrac{4(s+3)}{s[(s+3)^2+2^2]^2}}$.

9) $\underline{2+i}$.

10) $\underline{\arctan\dfrac{2}{3}}$.

二、（10 分）求矢量场 $\vec{A}=xz\vec{i}+yz\vec{j}-(x^2+y^2)\vec{k}$ 通过点 $M(2,-1,1)$ 的矢量线方程.

解：矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}.$$

由 $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}$ 得，　　$x=c_1y$.

又由合比定理有 $$\frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)z}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)},$$

即 $$xdx+ydy=-zdz,$$

解之得 $$x^2+y^2+z^2=c_2$$

于是矢量线方程为 $$\begin{cases} x=c_1 y, \\ x^2+y^2+z^2=c_2 \end{cases},$$

代入点 $M(2,-1,1)$，得 $$\begin{cases} x=-2y, \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}.$$

三、（10 分）用拉氏变换的方法求微分方程

$$y''+4y'+3y=e^{-t}$$

满足条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的解.

解：设 $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$，方程两边取拉氏变换，得

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+4[Y(s)-y(0)]+3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

代入 $y(0)=y'(0)=1$,整理得

$$Y(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}.$$

所以 $$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$=\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},-3]+\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},-1]$$

$$=\lim_{s\to-3}\left\{(s+3)\frac{s^2+6s+6}{(s+3)(s+1)^2}e^{st}\right\}+\lim_{s\to-1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left\{(s+1)^2\frac{s^2+6s+6}{(s+3)(s+1)^2}e^{st}\right\}$$

$$=-\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{7}{4}e^{-t}.$$

四、（10 分）计算积分 $\oint\limits_{|z|=3}\frac{dz}{z^4\left(z^{10}-2\right)}$ （积分曲线为正向）.

解：$\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^4(z^{10}-2)} = -2\pi i \,\mathrm{Res}[f(z),\infty]$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}[\frac{1}{z(1-2z^{10})},0]$$

$$= 2\pi i\,.$$

五、（10 分）证明矢量场 $\vec{A} = 2xyz^2\vec{i} + (x^2z^2 + \cos y)\vec{j} + 2x^2yz\vec{k}$ 为保守场，

并求积分 $\int_A^B \vec{A}\cdot d\vec{l}$ ，其中 $A(1,0,2), B(2,1,1)$.

解：$\because \quad D\vec{A} = \begin{pmatrix} 2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz \\ 2xz^2 & -\sin y & 2x^2z \\ 4xyz & 2x^2z & 2x^2y \end{pmatrix}$

$\therefore \quad rot\vec{A} = [2x^2z - 2x^2z]\vec{i} + [4xyz - 4xyz]\vec{j} + [2xz^2 - 2xz^2]\vec{k} = \vec{0}$.

也就是说矢量场 $\vec{A}$ 为保守场.

场内积分与路径无关：

$$\int_A^B \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 0dx + \int_0^1 (2^2\cdot 2^2 + \cos y)dy + \int_2^1 2\cdot 2^2\cdot 1\cdot zdz$$

$$= 16 + \sin 1 - 12 = 4 + \sin 1\,.$$

六、（10 分）将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ 分别在圆环域 $0 < |z+1| < 1$ 展开成洛朗级数.

解：$\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^n$

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-1}$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z+1)}=\frac{1}{z+1}\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-2}\ .$$

中国矿业大学

《工程数学》试卷（A）卷(48 学时)

考试时间：**100 分钟**　考试方式：闭卷

学院____________班级________________姓名___________　学号__________

题 号	一	二					总分
		1	2	3	4	5	
得 分							
阅卷人							

一、填空题（**每题 5 分，共 50 分**）

1、$-1+i$ 的辐角主值为________________。

2、在复平面上 $\sin z$ 是否有界____________。（填“是”或“否”）

3、函数 $f(t)=u(t)e^{-\beta t},(\beta>0)$ 的傅氏变换为________________。

4、函数 $f(z)=\dfrac{\sin z-z}{z^4}$ 在极点 $z=0$ 处的留数为_______________。

5 、积分 $\oint_C \dfrac{z^2}{(z-2)^3}dz$ 的值为_____________。(其中 C 为 $|z|=3$，正向曲线)

6 、设 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$，则其拉氏逆变换为_______________。

7、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^3}$ 的收敛半径为______________。

8、$\int_C z^2\,\mathrm{d}z$ =____________。（其中 C 是 $z=0$ 到 $z=3+4\mathrm{i}$ 的直线段）

9、若 $f(z)=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，则 $f'(z)=$______________。

~~10、矢量场 $\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ 在点 $M(1,1,1)$ 的散度为~~_________。

二．计算题（共 50 分）

1、（10 分））求函数 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换。

2、（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-2)}$ 在无穷远点处的留数

~~3、（10 分）证明矢量场 $\vec{A}=2xyz\vec{i}+x^2z\vec{j}+x^2y\vec{k}$ 为保守场，并计算曲线积分 $\int_L \vec{A}d\vec{l}$，其中起点为 $A(1,0,2)$，终点为 $B(2,1,-1)$~~。

。

4、（10 分）利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y''+2y'-3y=e^{-t} \quad ,y(0)=0 \quad ,y'(0)=1$$

5、（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ 在点 $z_0=0$ 处的泰勒展开式，并指出它的收敛半径。

《工程数学》试卷（A）卷(48 学时)　　答案

一、填空题（共 50 分）

1. $\underline{\dfrac{3\pi}{4}}$　　2. $\underline{\text{否}}$　　3. $\underline{\dfrac{1}{\beta+jw}}$　　4. -$\underline{\dfrac{1}{6}}$　　5. $\underline{2\pi i}$

6. $\underline{t-\sin t}$　　7. $\underline{1}$　　8. $\underline{\dfrac{1}{3}(3+4i)^3}$　　9. $\underline{2(x+iy)}$　　10. $\underline{6}$

二．计算题（共 50 分）

1、（10 分））求函数 $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换。

解:

$$
\begin{aligned}
f(t)=\sin t*\sin t&=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau\\
&=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)
\end{aligned}
$$

2、(10 分) 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-2)}$ 在无穷远点处的留数

解：$\operatorname{Re}s[f,\infty]=$ （2分）$-\operatorname{Re}s\left[f\left(\dfrac{1}{z}\right)\dfrac{1}{z^2},0\right]$

（1 分）$=-\operatorname{Re}s\left[\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{z}+i\right)^{10}\left(\dfrac{1}{z}-2\right)}\dfrac{1}{z^2},0\right]=-\operatorname{Re}s\left[\dfrac{z^9}{(1+zi)^{10}(1-2z)},0\right]=0$（2 分）

3、（10 分）证明矢量场 $\vec{A}=2xyz\vec{i}+x^2z\vec{j}+x^2y\vec{k}$ 为保守场，并计算曲线积分 $\int_L \vec{A}d\vec{l}$，其中起点为 $A(1,0,2)$，终点为 $B(2,1,-1)$。

解：因为

$$
\begin{aligned}
rot\vec{A}(t)&=\{x^2-x^2,2xy-(2xy),2xz-(2xz)\}\\
&=\vec{0}
\end{aligned}
$$

所以为保守场。

$$\int_L \vec{A}d\vec{l}=\int_1^2 0dx+\int_0^1 8dy+\int_2^{-1}4dz$$
$$=-4$$

4、（10 分）利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y''+2y'-3y=e^{-t}\quad ,y(0)=0\quad ,y'(0)=1\text{。}$$

解：

设 $L(y(t))=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

即 $s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\dfrac{1}{s+1}$，

$Y(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$，利用反演公式得

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

5、（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ 在点 $z_0=0$ 处的泰勒展开式，并指出它的收敛半径。

解：$f(z)=\dfrac{z}{(z-3)(z+1)}=\dfrac{z}{4}(\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z+1})=-\dfrac{z}{4}[\dfrac{1}{1-(-z)}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}]$

$$\frac{1}{1-(-z)}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-z)^n+\cdots\qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=1+\frac{z}{3}+(\frac{z}{3})^2+\cdots+(\frac{z}{3})^n+\cdots\qquad |\frac{z}{3}|<1,\quad |z|<3$$

所以 $f(z)=-\dfrac{z}{4}\{1-z+z^2-z^3+\cdots+(-z)^n+\cdots+\dfrac{1}{3}[1+\dfrac{z}{3}+(\dfrac{z}{3})^2+\cdots+(\dfrac{z}{3})^n+\cdots]\}$

$$=-\frac{z}{4}\{\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^n\}=\frac{1}{4}[\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^{n+1}]\text{，}\quad |z|<1$$

$f(z)=\dfrac{1}{4}[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-z)^{n+1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z}{3})^{n+1}]$ 的收敛半径 R=1。

中国矿业大学

《工程数学》试卷（A）卷(64 学时)

考试时间：**100 分钟**　考试方式：闭卷

学院____________班级________________姓名___________　学号__________

题　号	一	二					总分
		1	2	3	4	5	
得　分							
阅卷人							

一、填空题（**每题 5 分，共 50 分**）

1、$-1-i$ 的辐角主值为_______。

2、解析函数的导函数是否还解析？________。（填“是”或“否”）

3、若 $z_1=iz_2$，则向量 $\overrightarrow{oz_1}$ 与 $\overrightarrow{oz_2}$ 的夹角为_____________。

4、函数 $f(z)=|z|^2$ 在点 $(0,0)$ 处的导数为______。

5、函数 $f(z)=\dfrac{\sin z-z}{z^4}$ 在极点 $z=0$ 处的留数为_______________。

6、$\oint_{|z|=4}\left(\dfrac{1}{(z+1)^2}+\dfrac{2}{z-3}\right)dz=$____________。（积分沿正向圆周进行）

7、设 $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$，则其拉氏逆变换为_______________。

8、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos in)z^n$ 的收敛半径为________。

9、、函数 $f(t)=u(t)e^{-\beta t},(\beta>0)$ 的傅氏变换为________________。

10、$\int_C z^2\,dz$ =____________。（其中 C 是 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的直线段）

二、计算题（每题 10 分，共 50 分）

1、（(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n}$ 的收敛半径与和函数。

~~2、（10 分）证明矢量场 $\vec{A}=2xyz^{2}\vec{i}+\left(x^{2}z^{2}+\cos y\right)\vec{j}+2x^{2}yz\vec{k}$ 是保守场，并计~~算曲线

~~积分 $\int_{L}\vec{A}d\vec{l}$，其中起点为 $A(1,0,2)$，终点为 $B(2,1,1)$~~。

3、((10 分）利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-t} \quad , y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1 \text{。}$$

4、(10 分）求函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-2)}$ 在无穷远点处的留数

5、（10 分）把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $0<\left|z-1\right|<1$ 内展开成洛朗级数。

《工程数学》试卷（A）卷(64 学时)　　答案

一、填空题（共 50 分）

1. $\underline{-\dfrac{3\pi}{4}}$　　2. $\underline{\text{是}}$　　3. $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$　　4. $\underline{0}$　　5. $\underline{-\dfrac{1}{6}}$

6. $\underline{4\pi i}$　　7. $\underline{-\dfrac{1}{2}t\sin t}$　　8. $\underline{e^{-1}}$　　9. $\underline{\dfrac{1}{\beta+jw}}$　　10. $\underline{\dfrac{1}{3}(1+i)^3}$

二．计算题（共 50 分）

1、((10 分) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^n$的收敛半径与和函数。

解：收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^n=z\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

令 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^n=zf'(z)=z[\frac{z}{1+z}]'=\frac{z}{(1+z)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

2、(10 分) 证明矢量场$\vec{A}=2xyz^2\,\vec{i}+\left(x^2z^2+\cos y\right)\vec{j}+2x^2yz\vec{k}$是保守场，并计算曲线积分$\int_L\vec{A}d\vec{l}$，其中起点为$A(1,0,2)$，终点为$B(2,1,1)$。

解：由$\vec{A}$的雅可比矩阵

$$D\,\vec{A}=\begin{pmatrix}2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz\\ 2xz^2 & -\sin y & 2x^2z\\ 4xyz & 2x^2z & 2x^2y\end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

得

$$\text{rot}\,\vec{A}=(2zx^2-2zx^2)\vec{i}+(4xyz-4xyz)\vec{j}+(2xz^2-2xz^2)\vec{k}=0 \quad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

故$\vec{A}$为有势场,那么存在函数u使得$\vec{A}=\text{grad}\,u$,

取 $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$,

$$u = \int_0^x 0dx + \int_0^y \cos ydy + \int_0^z 2x^2 yzdz = \sin y + x^2 yz^2$$ ………………4 分

$$\int_L \vec{A} d\vec{l} = 4 + \sin 1$$ ………………2 分

3、（10 分）利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-t} \quad , y(0) = 0 \quad , y'(0) = 1 。$$

设 $L(y(t)) = Y(s)$, 对方程两边取拉氏变换，得

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) - 3Y(s) = \frac{1}{s+1}$$ ………………4 分

即 $s^2 Y(s) - 1 + 2sY(s) - 3Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$，………………2 分

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$，利用反演公式得

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{8}e^{t} - \frac{1}{8}e^{-3t}$$ ………………4 分

4、(10 分) 求函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-2)}$ 在无穷远点处的留数

解：$\mathrm{Re}\,s[f,\infty] =$ （3分）$-\mathrm{Re}\,s\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0 \right]$

（2 分）$= -\mathrm{Re}\,s\left[\dfrac{1}{\left(\frac{1}{z}+i\right)^{10}\left(\frac{1}{z}-2\right)}\dfrac{1}{z^2}, 0 \right] = -\mathrm{Re}\,s\left[\dfrac{z^9}{(1+zi)^{10}(1-2z)}, 0 \right] = 0$（5 分）

5、（10 分）把函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $0 < |z-1| < 1$ 内展开成洛朗级数。

解：

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1}$$ ……………………5 分

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$ ……………………………………5 分

中国矿业大学 2014~2015 学年第一学期

《工程数学 A》试卷（A）卷（48 学时）

考试时间：**100 分钟**　考试方式：**闭卷**

学院______________班级______________姓名____________学号__________

题 号	一	二	三	总分
得 分				
阅卷人				

一、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$，则 $f(z)$ (D)．

(A) 在复平面上处处不可导　(B) 仅在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上解析

(C) 在复平面上处处解析　(D) 仅在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上可导

2. 下列复数中为正实数的是（ B ）

(A) $\ln i,$　(B) i^i

(C) $\int_0^i z\cos z dz$　(D) $(1+i)^4$

3. 复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$, (其中 $0<\varphi<\pi$) 的辐角主值为（ A ）

(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$　(B) $\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}$

(C) $\pi-\varphi$　(D) $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{4}$

4. 若 $z_1=iz_2$，则向量 $\overrightarrow{oz_1}$ 与 $\overrightarrow{oz_2}$ 的关系是 （ C ）

A)同向　B)反向　C)垂直　D)以上都不对

5. 函数$\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$的拉氏逆变换是（ A ）.

(A) $\dfrac{1}{2}t\sin t$　　(B) $-\dfrac{1}{2}t\sin t$

(C) $t\sin t$　　(D) $\dfrac{1}{2}\sin t$

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. $z=0$为函数$f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2(e^z-1)}$的____1____阶极点.

2. $\text{Res}[\dfrac{\cos z}{1-e^z},0]=$ ______-1________.

3. 写出级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$的敛散性____条件收敛或收敛________.

4. 已知$|z|=1$,且在第一象限，则$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，使得$|z^2+i|=2$成立.

5. 写出函数$u(t)$的傅氏变换______$\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$________________.

三、计算题（共 60 分）

1. （10 分）求函数$f(t)=\int_0^t te^{-2t}\sin 3t\,\mathrm{d}t$的拉氏变换.

解：　$\mathcal{L}[\sin 3t]=\dfrac{3}{s^2+9}$,……………………2 分

$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t]=\dfrac{3}{(s+2)^2+9}$， ……………………….2 分

所以 $\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[\int_0^t te^{-2t}\sin 3tdt]$

$=\dfrac{1}{s}(-)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\dfrac{3}{[(s+2)^2+9]}\right]$…………………..2 分

$=\dfrac{6(s+2)}{s[(s+2)^2+9]^2}$ ……………………..4 分

2.（10 分）将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $1<|z-1|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

解：$f(z)=\dfrac{-1}{z-1}+\dfrac{2}{z-2}$ ………………2 分

$=\dfrac{-1}{z-1}+\dfrac{2}{z-1-1}$ ………………2 分

$=\dfrac{-1}{z-1}+\dfrac{1}{z-1}\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{z-1}}$ ………………3 分

$=\dfrac{-1}{z-1}+2\sum_{n=1}^{+\infty}(\dfrac{1}{z-1})^n$ ………………3 分

~~3.（10 分）已知数量场 $u=xy$，求场中与直线 $x+3y-6=0$ 相切的等值线方程.~~

解：设切点为 (x_0,y_0)，则过该点的等值线为 $xy=x_0y_0$， …………3 分

其切线斜率为$-\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{3}$，…………3 分

所以$x_0=3y_0$，代入方程$x+3y-6=0$，得…………2 分

$x_0=3, y_0=1$，所求等值线为$xy=3$…………2 分

4.（10 分）用积分变换的方法求方程 $y''+3y'+2y=e^{-t}$ 满足初始条件 $y(0)=0,\quad y'(0)=0$ 的解.

解：

设$L(y(t))=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3sY(s)-3y(0)+2Y(s)=\dfrac{1}{s+1}$ ………………（2 分）

即 $s^2Y(s)+3sY(s)+2Y(s)=\dfrac{1}{s+1}$，……………………（2 分）

$Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(s+2)}$，利用反演公式得

$y(t)=te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}$

………………………….(6 分,答案三项每个 2 分)

~~5.（10 分）证明向量场 $\vec{A}=(x^2-2yz)\vec{i}+(y^2-2xz)\vec{j}+(z^2-2xy)\vec{k}$ 为保守场，~~
并计算曲线积分$\int_L \vec{A}d\vec{l}$，其中积分曲线L的起点为$A(3,-1,1)$，终点为$B(2,1,-1)$.

解：由$\vec{A}$的雅可比矩阵

$$D\vec{A}=\begin{pmatrix}2x & -2z & -2y\\ -2z & 2y & -2x\\ -2y & -2x & 2z\end{pmatrix}$$ ……………………………………………3 分

得

$\mathrm{rot}\,\vec{A}=(-2x+2x)\vec{i}+(-2y+2y)\vec{j}+(-2z+2z)\vec{k}=\vec{0}$ ……………2 分

故 $\vec{A}$ 为有势场,那么存在函数 u 使得 $\vec{A}=\mathrm{grad}\,u$,

取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$,

$$u=\int_0^x x^2dx+\int_0^y y^2dy+\int_0^z (z^2-2xy)dz$$

$=\dfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz$ ……………………3 分

$\int_L \vec{A}d\vec{l}=-\dfrac{25}{3}$ ………………………………2 分

6.（10 分）求积分 $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{1}{(z-2)(z^3-1)^2}dz$（积分曲线为正向圆周）.

解：$\mathrm{Re}\,s[f,\infty]=$……（2分）$-\mathrm{Re}\,s\left[f\left(\dfrac{1}{z}\right)\dfrac{1}{z^2},0\right]$

$$=-\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{z}-2\right)\left(\frac{1}{z^3}-1\right)^2}\frac{1}{z^2},0\right]=-\mathrm{Re}\,s\left[\frac{z^5}{(1-2z)(1-z^3)^2},0\right]=0$$ ……（3 分）

所以 $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{1}{(z-2)(z^3-1)^2}dz$ ………………..（3 分）

$=-2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f,\infty]+\mathrm{Re}\,s[f,2]\}$

$=-\dfrac{2\pi i}{49}$ ………………..（2 分）

中国矿业大学

《工程数学》试卷（A）卷(48 学时)

考试时间：**100 分钟**　考试方式：**闭卷**

学院____________班级________________姓名___________　学号__________

<table>
<tr><td rowspan="2">题 号</td><td rowspan="2">一</td><td colspan="6">二</td><td rowspan="2">总分</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>得 分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>阅卷人</td><td colspan="8"></td></tr>
</table>

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1、$\dfrac{1}{-1+i}$ 的辐角主值为_____$-\dfrac{3\pi}{4}$。

2、函数 $f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$ 在点 $z=i$ 处的导数为 2 。

3、函数 $f(t)=u(t)e^{-\beta t}$，$(\beta>0)$ 的傅氏变换为 $\dfrac{1}{\beta+jw}$ 。

4、设 $f(t)=\int_0^t t\sin t\, e^t dt$，则其拉氏变换为 $\dfrac{2(s-1)}{s[(s-1)^2+1]^2}$ 。

5 、积分 $\oint_C \dfrac{z}{(z-2)^3}dz$ 的值为 0 。(其中 C 为 $|z|=3$，正向曲线)

6 、函数 $f(z)=\dfrac{z^2-1}{\sin z}$ 在极点 $z=0$ 处的留数为 -1 。

7、判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(in)}{2^n}$ 的敛散性 发散 。

8、点 $z=i$ 是函数 $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$ 的 2 阶极点。

~~9、矢量场 $\vec{A}=x^2y\vec{i}+xy^2\vec{j}+yz^2\vec{k}$ 在点 $M(1,1,1)$ 的散度为____6____~~。

二．计算题（共 60 分）

1、（10 分）求向量场 $\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+(x+y)z\vec{k}$ 通过点 $M(1,2,1)$ 的向量线方程。

解：矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{(x+y)z}.$$

由 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$ 得， $$-\frac{1}{x}=-\frac{1}{y}+c_1.$$

又由合比定理有 $$\frac{dx-dy}{x^2-y^2}=\frac{dz}{(x+y)z},$$

即 $$\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dz}{z},$$

解之得 $$z=c_2(x-y)$$

于是矢量线方程为 $$\begin{cases}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{y}+c_1\\ z=c_2(x-y)\end{cases},$$

代入点 $M(1,2,1)$，得 $$\begin{cases}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{y}-\frac{1}{2}.\\ z=y-x\end{cases}$$

2、（10 分）求函数 $f(z)=\frac{1}{z(2-z)^2}$ 在圆环域 $0<|z|<2$ 内的洛朗展开式。

解：$\frac{1}{(2-z)^2}=(\frac{1}{2-z})'=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})'=\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^n)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n+1}}z^{n-1}$，从而

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n+1}}z^{n-2}$$

~~3、（10 分）证明矢量场 $\vec{A}=(2x\cos y-y^2\sin x+z^2)\vec{i}+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\vec{j}+2xz\vec{k}$ 是~~保守场，并计算曲线积分 $\int_L \vec{A}d\vec{l}$，其中起点为 $A(1,0,2)$，终点为 $B(2,2,1)$。

解：因为

$$\begin{aligned} rot\vec{A}(t)&=\{0-0,2z-2z,-2y\sin x-2x\sin y-(-2x\sin y-2y\sin x)\}\\ &=\vec{0}\end{aligned}$$

所以为保守场。

且解：

$$u=x^2\cos y+y^2\cos x+xz^2$$

$$\int_L \vec{A}d\vec{l}=8\cos 2-3$$

4、（10 分）求函数 $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换。

解:

$$\begin{aligned} f(t)&=\sin t*\sin t=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau\\ &=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau\\ &=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\end{aligned}$$

。

5、（10 分）利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y''+2y'-3y=e^{-t}\quad ,y(0)=1\quad ,y'(0)=1$$

解：

设 $L(y(t))=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

即 $s^2Y(s)-s-1+2sY(s)-2-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$，

$Y(s)=\frac{1+(s+1)(s+3)}{(s+1)(s-1)(s+3)}$，利用反演公式得

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{9}{8}e^{t}+\frac{1}{8}e^{-3t}$$

6、（10 分）求积分 $\oint_C \frac{z^6}{(z^2+1)(z^2+2)^2(z-2)}dz$，其中 $C:|z|=\frac{3}{2}$，正向圆周。

解：$\mathrm{Res}[f,\infty]=$……（2分）$-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$

$$=-\mathrm{Res}\left[\frac{\frac{1}{z^6}}{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)\left(\frac{1}{z^2}+2\right)^2\left(\frac{1}{z}-2\right)}\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1+z^2)(1+2z^2)^2(1-2z)},0\right]=-1$$ ……（3 分）

所以 $\oint_C \frac{z^6}{(z^2+1)(z^2+2)^2(z-2)}dz$ ………………..（3 分）

$$=-2\pi i\{\mathrm{Res}[f,\infty]+\mathrm{Res}[f,2]\}$$

$$=-\frac{58\pi i}{45}$$ ………………..（2 分）

中国矿业大学 2016～2017 学年第一学期

《 工程数学 A 》试卷（A）卷

考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭卷

学院__________班级__________姓名__________学号__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1、函数 $f(z)=(3x^2+2y)-i(2x+3y)$ 在 $z=-\frac{1}{2}$ 处的导数为____$-3-2i$____.

~~2、已知 $\vec{A}(t)=t^2\vec{i}+3t\vec{j}+2\vec{k}$，则 $\lim\limits_{t\to 1}\vec{A}(t)=$____$\{1,3,2\}$____.~~

3、函数 $f(t)=\sin(w_0 t)$ 的傅氏变换为____$\pi[\delta(w+w_0)-\delta(w-w_0)]$____.

4、函数 $t\int_0^t e^{-2t}\sin t\,dt$ 的拉氏变换为____$\dfrac{3s^2+8s+5}{s^2[(s+2)^2+1]^2}$____.

5、积分 $\oint\limits_{|z|=8}\dfrac{\sin z}{e^z-1}dz=$____0____.（积分曲线为正向）

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1、点 $z=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $\dfrac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^4}$ 的（C　）.

A. 一阶极点　　B. 二阶极点　　C．三阶极点　　D. 四阶极点

2、复数 $\sin\varphi+i(1-\cos\varphi)$ （其中 $0<\varphi<\pi$）的辐角主值为（ B　）.

A. $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$　　　B. $\frac{\varphi}{2}$

C. $\pi-\varphi$　　　D. $\pi-\frac{\varphi}{2}$

3、设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),1]=$（　D　）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

4、判别级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 的敛散性（A　）.

A. 条件收敛　　B.绝对收敛　　C.发散　　D.无法确定

5、下面选项是正实数的为(　C).

A. $\sqrt[3]{8}$　　B. $-i^i$　　C. $\int_0^1 \sin^2 z dz$　　D. $i\cos i$

三、(10 分) 用留数计算实积分 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

解：令 $z=e^{i\theta}$, 则 $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta,$ ···························2 分

$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$ ···························2 分

原式 $=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz$ ··············2 分

$=\frac{2}{i}2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{z^2+4z+1},-2+\sqrt{3}]$ ················2 分

$=\frac{2}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ·················2 分

~~四、(10 分) 求数量场 $u=3x^2z^2-y^3+z$ 在点 M (1，1，1) 处沿方向 $l=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ 的方~~向导数.

解：　$\vec{l}_0=\frac{1}{3}\{2,1,2\}$ ··································2 分

$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ ··················3 分

$=(6xz^2)\cos\alpha+(-3y^2)\cos\beta+(6x^2z+1)\cos\gamma$ ···3 分

$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M=6\times\frac{2}{3}+(-3)\times\frac{1}{3}+7\times\frac{2}{3}=\frac{23}{3}$ ···2 分

五、（10 分）已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+2x$, 求其共轭调和函数$v(x,y)$

及解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

解： $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y)=2y,$ ……………………………2 分

又 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2.$ ……………………………2 分

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C,$$

$$=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(2x+2)\mathrm{d}y+C$$

$=2xy+2y+C$ （C是任意实数）……………………………4 分

六、（10 分）利用拉氏变换的方法求下面微分方程的解：

$$y''+y'-6y=e^{-t},\ y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

解：

设$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$，方程两边取拉氏变换，得

$s^2Y(s)-1+sY(s)-6Y(s)=\frac{1}{s+1}$ ………………………………………4 分

即

$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s+3)}$ …………………………………………………2 分

所以 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\sum_k[Y(s)e^{st},s_k]$

$=-\frac{1}{10}e^{-3t}-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{4}{15}e^{2t}$ ………………………………………………4 分

七、（10 分）求函数 $\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$ 的拉氏逆变换.

解:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (e^{-t}\sin t)*(e^{-t}\sin t)\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分} \\
&= \int_0^t e^{-\tau}\sin\tau e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分} \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分} \\
&= \frac{1}{2}e^{-t}(\sin t - t\cos t)\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{分}
\end{aligned}
$$

八、（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-z-2}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内的洛朗展开式.

解： $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+1)}=\dfrac{z}{3}(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z+1})$ …………2 分

$=-\dfrac{z}{3}[\dfrac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}]$ ………2 分

$\dfrac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}+\cdots+(-)^{n+1}\dfrac{1}{z^n}+\cdots$ ………… 2 分

$\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\dfrac{z}{2}+(\dfrac{z}{2})^2+\cdots+(\dfrac{z}{2})^n+\cdots$ ………… 2 分

所以 $f(z)=-\dfrac{z}{3}\{\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}+\cdots+(-)^{n+1}\dfrac{1}{z^n}+\cdots+\cdots+\dfrac{1}{2}[1+\dfrac{z}{2}+(\dfrac{z}{2})^2+\cdots+(\dfrac{z}{2})^n+\cdots]\}$
…………2 分

中国矿业大学 18~19 学年第一学期

《工程数学》试卷（A）卷

考试时间：100 分钟　考试方式：闭卷

学院______________班级______________姓名____________序号____________

题 号	一	二	三	总分
得 分				
阅卷人				

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-\frac{1}{2}y^2)$ 在 $z=i$ 在处的导数为___$\underline{-1+2i}$_____.

2. $\text{Res}[\sin\frac{z}{z+1},-1]=$___$\underline{-\cos}$________.

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos in)z^n$ 的收敛半径为___$\underline{e^{-1}}$_____.

4. 函数 $f(t)=u(t)$ 的傅氏变换为______$\underline{\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)}$______________.

5. 积分 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}=$ $\underline{-\frac{\pi i}{2}}$.（其中 $C:|z-(1+i)|=\sqrt{2}$）（积分曲线为正向）

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$,(其中 $4\pi<\varphi<5\pi$) 的辐角主值为（　B　）.

(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$　　　　(B) $\frac{5\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

(C) $4\pi-\varphi$ (D) $\frac{7\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

2. 点 $z=i$ 是函数 $\frac{z-i}{(e^{\pi z}+1)^3}$ 的（ B ）.

（A） 一阶极点 （B） 二阶极点 （C）三阶极点 （D） 四阶极点

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ 的和函数为 (A).

(A) $\frac{z}{(1-z)^2}$ (B) $\frac{1}{(1-z)^2}$ (C) $\frac{z}{(1+z)^2}$ (D) $\frac{1}{(1+z)^2}$

4. $\mathrm{Res}[\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3},0]=$ (D).

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) -1

5. 已知 $\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$,则 $\mathscr{L}[t\cdot u(t-2)]=$ (D).

(A) $\int_s^{\infty}\frac{e^{-2s}}{s}ds$ (B) $\frac{e^{2s}}{s^2}$

(C) $-\frac{2s+1}{s^2}e^{2s}$ (D) $\frac{2s+1}{s^2}e^{-2s}$

三、计算题（共 60 分）

1. （10 分）利用留数计算实积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$.

解：

记 $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$， …………（2 分）

原式=$\pi i\left[\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+\mathrm{Re}\,s[f(z),2i]\right]$…………（3 分）

$=\pi i\left[\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}+\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]$…………（3 分）

$=\pi i\left[\frac{1}{6i}-\frac{1}{12i}\right]=\frac{\pi}{12}$…………（2 分）

2.（10 分）求函数$\frac{1}{(s^2+1)^2}$的拉氏逆变换.

解:

$$f(t)=\sin t*\sin t=\int_0^t\sin\tau\sin(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau\cdots \qquad \cdots 6\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t) \qquad \cdots 4\text{ 分}$$

3. （10 分）已知$u(x,y)=y^3-3x^2y+x$为解析函数$f(z)$的实部,求$f(z)$的虚部$v(x,y)$.

解： $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2-3x^2),$…………………………2 分

又 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy+1.$…………………………2 分

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C,$$

$$=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(-6xy+1)\mathrm{d}y+C$$

$$=x^3-3xy^2+y+C$$ （C是任意实数）…………………………4 分

故得解析函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=iz^3+z+iC$ …………………………2 分

4.（10 分）已知 $f(t)=t\int_0^t e^{-t}\sin 2tdt$，求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

解：

$$L(f(t))=-\frac{d}{ds}\frac{1}{s}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$ ……6 分

$$=\frac{6s^2+8s+10}{s^2\{(s+1)^2+4\}^2}$$

……4 分

5.（10 分）把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2(z-1)}$ 在圆环域 $0<|z-1|<2$ 内展开成关于 $z-1$ 的洛朗级数.

解：$\dfrac{1}{(z+1)^2}=-(\dfrac{1}{z+1})'=-(\dfrac{1}{z-1+2})'=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{z-1}{2}+1}\right)'$ ………4 分

$$=-\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{z-1}{2})^n)'=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$$ ……4 分

从而

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-2}$$ ……2 分

6.（10 分） 利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t} \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = 2 .$$

解： 设 $L(y(t)) = Y(s)$, 对方程两边取拉氏变换，得

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = \frac{2}{s+1} \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

即 $s^2Y(s) - s - 2 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = \dfrac{2}{s+1}$，

$$s^2Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s+1} + s - 1 \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$Y(s) = \dfrac{2}{(s+1)(s-1)(s-2)} + \dfrac{1}{s-2}$， 利用反演公式得

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - e^{t} + \frac{5}{3}e^{2t} \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$