# 中国矿业大学 18~19 学年第一学期

## 《工程数学》试卷（A）卷

**考试时间：100 分钟　考试方式：闭卷**

学院____________班级____________姓名____________序号____________

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 总分 |
|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | |
| 阅卷人 | | | | |

一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-\frac{1}{2}y^2)$ 在 $z=i$ 在处的导数为___$\underline{-1+2i}$_____.

2. $\mathrm{Res}[\sin\frac{z}{z+1},-1]=$___$\underline{-\cos 1}$________.

4. 函数 $f(t)=u(t)$ 的傅氏变换为_____$\underline{\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)}$______________.

5. 积分 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}=$ $\underline{-\frac{\pi i}{2}}$.（其中 $C:|z-(1+i)|=\sqrt{2}$ ）（积分曲线为正向）

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$, ( 其中 $4\pi<\varphi<5\pi$ ) 的辐角主值为（ B）.

(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$　　(B) $\frac{5\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

(C) $4\pi-\varphi$　　(D) $\frac{7\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

2. 点 $z=i$ 是函数 $\dfrac{z-i}{(e^{\pi z}+1)^3}$ 的（ B）.

（A） 一阶极点　　（B） 二阶极点　　（C）三阶极点　　（D） 四阶极点

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ 的和函数为 （A）.

(A) $\dfrac{z}{(1-z)^2}$　　(B) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$　　(C) $\dfrac{z}{(1+z)^2}$　　(D) $\dfrac{1}{(1+z)^2}$

4. $\text{Res}[\dfrac{z\sin z}{(1-e^z)^3},0]=$ （D）.

(A) $1$　　(B) $2$　　(C) $0$　　(D) $-1$

5. 已知 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$,则 $\mathscr{L}[t\cdot u(t-2)]=$（D）.

(A) $\int_s^{\infty}\dfrac{e^{-2s}}{s}ds$　　(B) $\dfrac{e^{2s}}{s^2}$

(C) $-\dfrac{2s+1}{s^2}e^{2s}$　　(D) $\dfrac{2s+1}{s^2}e^{-2s}$

三、计算题（共 60 分）

2. （10 分）求函数 $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换.

解:

$$f(t)=\sin t*\sin t=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

$\cdots\cdots 4$ 分

3.（10 分）已知 $u(x,y)=y^3-3x^2y+x$ 为解析函数 $f(z)$ 的实部,求 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)$.

解： $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2-3x^2),$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$ 分

又 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy+1.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$ 分

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C,$$

$$=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(-6xy+1)\mathrm{d}y+C$$

$=x^3-3xy^2+y+C$ （$C$是任意实数）$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$ 分

故得解析函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=iz^3+z+iC$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$ 分

4. （10 分）已知 $f(t)=t\int_0^t e^{-t}\sin 2t dt$，求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

解：

$$L(f(t))=-\frac{d}{ds}\frac{1}{s}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$=\frac{6s^2+8s+10}{s^2\{(s+1)^2+4\}^2} \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

……4 分

5.（10 分）把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2(z-1)}$ 在圆环域 $0<|z-1|<2$ 内展开成关于 $z-1$ 的洛朗级数.

解：$\dfrac{1}{(z+1)^2}=-(\dfrac{1}{z+1})'=-(\dfrac{1}{z-1+2})'=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\dfrac{z-1}{2}+1}\right)'$，……4 分

$=-\dfrac{1}{2}(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\dfrac{z-1}{2})^n)'=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$ ……4 分

从而

$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-2}$ ……2 分

6.（10 分） 利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$y''-3y'+2y=2e^{-t}\quad ,y(0)=1\quad ,y'(0)=2$.

解： 设 $L(y(t))=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3sY(s)+3y(0)+2Y(s)=\dfrac{2}{s+1}$ ……4 分

即 $s^2Y(s)-s-2-3sY(s)+3+2Y(s)=\dfrac{2}{s+1}$,

$s^2Y(s)-3sY(s)+2Y(s)=\dfrac{2}{s+1}+s-1$ ……3 分

$Y(s)=\dfrac{2}{(s+1)(s-1)(s-2)}+\dfrac{1}{s-2}$，利用反演公式得

$y(t)=\dfrac{1}{3}e^{-t}-e^{t}+\dfrac{5}{3}e^{2t}$ ……3 分

# 中国矿业大学 2022-2023 学年第一 学期课程考试试卷

# （参考答案）

考试科目 工程数学 试卷类型 B卷

课程代码 M10815 考试时长 100 分钟 考试方式 闭卷

开课学院 数学学院 年级专业 电气、计算机、信控2021级

学院____________班级____________姓名__________学号____________

<table>
<tr><td rowspan="2">题 号</td><td rowspan="2">一</td><td rowspan="2">二</td><td colspan="6">三</td><td rowspan="2">总分</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>得 分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>阅卷人</td><td colspan="9"></td></tr>
</table>



## 一、填空题（共 5 题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、$(\frac{i}{i+1})^2$的辐角主值为__$\frac{\pi}{2}$______.

2、函数$f(z)=x^2-i\,y$在$z=-\frac{1}{2}+2i$处的导数为__-1____.

3、判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^2}+i(-1)^n\frac{1}{2^n}]$的敛散性__收敛____.（填“发散”或者“收

敛”）

4、函数 $f(t)=\cos(w_0 t)$ 的傅氏变换为____$\underline{\pi\left(\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)\right)}$______.

5、 $\mathrm{Res}[\frac{\sin z}{(1-\cos z)^2},0]=$___0______.

## 二、选择题（共 5 题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、复数 $\sin\varphi+i(1-\cos\varphi)$, ( 其中 $0<\varphi<\pi$ ) 的辐角主值为（ C ）.

（A） $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ （B） $\frac{5\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ （C） $\frac{\varphi}{2}$ （D） $\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}$

2、点 $z=1$ 是函数 $\frac{(z^2-1)^2(z-2)^2}{\sin^4(\pi z)}$ 的（ B ）.

（A） 一阶极点 （B） 二阶极点 （C）三阶极点 （D） 四阶极点

3、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ 的收敛半径为 （ A ）.

（A） 1 （B） 2 （C） $\frac{1}{2}$ （D） $+\infty$

4、 $z_1=-1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$， $z_2=-1+i$，则 $\arg(z_1 z_2)=$ （ B ）.

（A） $-\frac{7}{12}\pi$ （B） $-\frac{5}{12}\pi$ （C） $-\frac{5}{11}\pi$ （D） $-\frac{5}{9}\pi$

5、 $\mathscr{L}[t\cdot u(t-1)]=$（ D ）.

（A） $\frac{e^s}{s}$ （B） $\frac{e^{-s}}{s^2}$ （C） $\frac{2s+1}{s^2}e^s$ （D） $\frac{s+1}{s^2}e^{-s}$

## 三、计算题（共 6 题，每小题 10 分，满分 60 分）

1、已知$u(x,y)=y^3-3x^2y+4x$为解析函数$f(z)$的实部,求$f(z)$的虚部$v(x,y)$.

解：$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2-3x^2),$ ……………………………2 分

又 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy+4$ ……………………………2 分

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C,$$

$$=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(-6xy+4)\mathrm{d}y+C$$

$=x^3-3xy^2+4y+C$ （$C$是任意实数）……………………………4 分

故得解析函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=iz^3+4z+iC$ ……………………………2 分

2、已知$f(t)=t\int_0^t e^{-t}\cos 2t dt$，求$\mathscr{L}[f(t)]$.

解：

$$\mathscr{L}[f(t)]=-\frac{d}{ds}\frac{1}{s}\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$ ……6 分

$$=\frac{2s^3+5s^2+4s+5}{s^2\{(s+1)^2+4\}^2}$$

……4 分

3、把函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2(2-z)}$在圆环域$0<|z-2|<1$内展开成洛朗级数.

解：$\dfrac{1}{z^2}=-(\dfrac{1}{z})'=-(\dfrac{1}{z-2+2})'$，……4 分

$$=-\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{z-2}{2})^n)'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}(z-2)^{n-1}\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

从而

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}(z-2)^{n-2}\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

4、用留数的方法求定积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

解：令 $z=e^{i\theta}$, 则 $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$, 再利用 $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$,……3 分

从而

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z^2-1}{2iz}}\times\frac{1}{iz}dz=2\oint_{|z|=1}\frac{1}{4iz+z^2-1}dz\text{ ，}\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

可知被积函数的奇点只有 $(-2+\sqrt{3})i$ 在 $|z|=1$ 内,……3 分

所以

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2*2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{4iz+z^2+1},(-2+\sqrt{3})i]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\text{ .}\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

5、计算积分 $\oint_{|z|=4}\frac{z^6}{\left(z^2+1\right)^3(z-5)}\mathrm{d}z$ （积分曲线为正向）.

解：被积函数有 3 个奇点，i 和-i 在 $|z|<4$ 内，

从而

$$\oint_{|z|=4}\frac{z^6}{\left(z^2+1\right)^3(z-5)}\mathrm{d}z=-2\pi i\left\{\operatorname{Re}s[\frac{z^6}{\left(z^2+1\right)^3(z-5)},\infty]+\operatorname{Re}s[\frac{z^6}{\left(z^2+1\right)^3(z-5)},5]\right\}\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{z^{-6}}{\left(z^{-2}+1\right)^3(z^{-1}-5)}(\frac{1}{z})^2,0]-2\pi i\frac{5^6}{26^3}\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{z(1+z^2)^3(1-5z)},0]-2\pi i\frac{5^6}{26^3}\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$=2\pi i-2\pi i\frac{5^6}{26^3}=\frac{3902}{17576}\pi i.\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

6、利用拉氏变换求下面微分方程的解

$$y''+y'-2y=2e^{-t}\quad ,y(0)=0,y'(0)=1.$$

解： 设$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)-2Y(s)=\frac{2}{s+1}\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

即$s^2Y(s)-1+sY(s)-2Y(s)=\dfrac{2}{s+1}$，

$$s^2Y(s)+sY(s)-2Y(s)=\frac{s+3}{s+1}\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$Y(s)=\dfrac{s+3}{(s-1)(s+1)(s+2)}$，利用反演公式得

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{t}-e^{-t}\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

# 中国矿业大学 2022-2023 学年第二学期课程考试试卷

# （参考答案）

考试科目： 工程数学　　　　试卷类型： A

课程代码： M10815　　考试时长： 100 分钟　　考试方式： 闭

开课学院： 数学学院　　　　适用年级： 2021

学院__________ 班级________ 姓名__________ 学号_________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | | | | | | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 得分 | | | | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | | | | |



## 一、 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. $(\frac{2i}{i-1})^2$ 的辐角主值为___ $-\frac{\pi}{2}$ ______.

2. 函数 $f(z)=x^2+i\,y^2$ 在 $z=2+2i$ 处的导数为___ 4 ______.

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{1}{n^2}+i\frac{1}{2^n}]$ 的敛散性___ 收敛 ____.（填“发散”或者“收敛”）

4. 函数 $f(t)=u(t)e^{-\beta t}$ 的傅氏变换为____$\frac{1}{\beta+\mathrm{j}w}$____________.

5. $\mathrm{Res}[\frac{z^2-1}{z^2\sin z},0]=\frac{5}{6}$________.

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1. 复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$, ( 其中 $0<\varphi<\pi$ ) 的辐角主值为（ C ）.

(A) $4\pi-\varphi$ (B) $\frac{5\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ (D) $\frac{7\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

2. 点 $z=2$ 是函数 $\frac{(z^2-1)(z-2)^2}{\sin^4(\pi z)}$ 的（ B ）.

（A） 一阶极点 （B） 二阶极点 （C）三阶极点 （D） 四阶极点

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径为 ( A ).

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $+\infty$

4. $z_1=-1+i\sqrt{3}$，$z_2=-1+i$，则 $\arg(z_1z_2)=$ ( A ).

(A) $-\frac{7}{12}\pi$ (B) $-\frac{5}{12}\pi$ (C) $-\frac{5}{11}\pi$ (D) $-\frac{5}{9}\pi$

5. $\mathscr{L}[t\cdot u(t-2)]=$ ( D ).

(A) $\frac{e^{2s}}{s}$ (B) $\frac{e^{-2s}}{s^2}$

(C) $-\dfrac{2s+1}{s^2}e^{2s}$ (D) $\dfrac{2s+1}{s^2}e^{-2s}$

## 二、计算题（每题 10 分，共 60 分）

1. 已知$u(x,y)=y^3-3x^2y+2x$为解析函数$f(z)$的实部,求$f(z)$的虚部$v(x,y)$.

解： $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2-3x^2),$ ……………………………2 分

又 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy+2.$ ……………………………2 分

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C,$$

$$=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(-6xy+2)\mathrm{d}y+C$$

$=x^3-3xy^2+2y+C$ （$C$是任意实数）……………………………4 分

故得解析函数

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=iz^3+2z+iC$ ……………………………2 分

2. 已知$f(t)=t\int_0^t e^{-2t}\cos t dt$，求$\mathscr{L}[f(t)]$.

解：

$$\mathscr{L}[f(t)]=-\frac{d}{ds}\frac{1}{s}\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$ ……6 分

$$=\frac{2s^3+10s^2+16s+10}{s^2\{(s+2)^2+1\}^2}$$

……4 分

3. 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

解：$\dfrac{1}{z^2}=-(\dfrac{1}{z})'=-(\dfrac{1}{z-1+1})'$，……4 分

$$=-(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n)'=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n(z-1)^{n-1}$$ ……4 分

从而

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-2}$$ ……2 分

4. 用留数的方法求积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

解：令 $z=e^{i\theta}$, 则 $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$, 再利用 $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{z^2+1}{2z}$, ……3 分

从而

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\times\frac{1}{iz}dz=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{4z+z^2+1}dz$$ ，……2 分

可知被积函数的奇点只有 $-2+\sqrt{3}$ 在 $|z|=1$ 内,……3 分

所以

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{i}2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{4z+z^2+1},-2+\sqrt{3}]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$ . ……2 分

5. 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z^8}{\left(z^2+1\right)^4(z-2)}\mathrm{d}z$ (积分曲线为正向).

解：被积函数有 3 个奇点，i 和-i 在 $|z|<\dfrac{3}{2}$ 内，

从而

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^8}{\left(z^2+1\right)^4(z-2)}\mathrm{d}\,z=-2\pi i\left\{\operatorname{Re}s[\frac{z^8}{\left(z^2+1\right)^4(z-2)},\infty]+\operatorname{Re}s[\frac{z^8}{\left(z^2+1\right)^4(z-2)},2]\right\}\cdots\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$$=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{z^{-8}}{\left(z^{-2}+1\right)^4(z^{-1}-2)}(\frac{1}{z})^2,0]-2\pi i\frac{2^8}{5^4}\cdots\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$$=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{z(1+2z^2)^4(1-2z)},0]-2\pi i\frac{2^8}{5^4}\cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

$$=2\pi i-2\pi i\frac{2^8}{5^4}=\frac{738}{625}\pi i.\cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

6. 利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y''+2y'-3y=2e^{-t}\quad,y(0)=0,y'(0)=1.$$

解： 设$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)-3Y(s)=\frac{2}{s+1}\cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

即 $s^2Y(s)-1+2sY(s)-3Y(s)=\frac{2}{s+1}$,

$$s^2Y(s)+2sY(s)-3Y(s)=\frac{s+3}{s+1}\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$Y(s)=\dfrac{s+3}{(s-1)(s+1)(s+3)}$，利用反演公式得

$$y(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

# 中国矿业大学 2016～2017 学年第一学期

# 《 工程数学》试卷（A）卷

**考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭卷**

学院____________班级____________姓名__________学号____________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | | | | |

## 一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1、函数 $f(z)=(3x^2+2y)-i(2x+3y)$ 在 $z=-\frac{1}{2}$ 处的导数为____ $-3-2i$ ____.

3、函数 $f(t)=\sin(w_0t)$ 的傅氏变换为____ $\pi[\delta(w+w_0)-\delta(w-w_0)]$ ____.

4、函数 $t\int_0^t e^{-2t}\sin t\,dt$ 的拉氏变换为____ $\frac{3s^2+8s+5}{s^2[(s+2)^2+1]^2}$ ____.

5、积分 $\oint_{|z|=8}\frac{\sin z}{e^z-1}dz=$____ 0 ____.（积分曲线为正向）

## 二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1、点 $z=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^4}$ 的（C　）.

A. 一阶极点　　B. 二阶极点　　C .三阶极点　　D. 四阶极点

2、复数 $\sin\varphi+i(1-\cos\varphi)$ （其中 $0<\varphi<\pi$ ）的辐角主值为（ B　）.

A. $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$　　　　B. $\frac{\varphi}{2}$

C. $\pi-\varphi$　　　　D. $\pi-\frac{\varphi}{2}$

3、设 $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),1]=$（　D ）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

4、判别级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n}{\ln n}$的敛散性（A　）.

A．条件收敛　　B.绝对收敛　　C.发散　　D.无法确定

5、下面选项是正实数的为( C ).

A. $\sqrt[3]{8}$　　B. $-i^i$　　C. $\int_0^1 \sin^2 z dz$　　D. $i\cos i$

三、（10 分）用留数计算实积分$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

解：令$z=e^{i\theta}$,则$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$,··························2 分

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$ ···························2 分

原式=$\frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz$ ··············2 分

$=\frac{2}{i}2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z^2+4z+1},-2+\sqrt{3}]$ ·················2 分

$=\frac{2}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ················2 分

五、（10 分）已知调和函数$u(x,y)=x^2-y^2+2x$, 求其共轭调和函数$v(x,y)$

及解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

解：$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y)=2y$,···························2 分

又 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2$.······························2 分

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C,$$

$$=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y (2x+2)\mathrm{d}y+C$$

$=2xy+2y+C$ （$C$是任意实数）……………………………4 分

六、（10 分）利用拉氏变换的方法求下面微分方程的解：

$$y''+y'-6y=e^{-t},\ y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

解：

设$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$，方程两边取拉氏变换，得

$s^2Y(s)-1+sY(s)-6Y(s)=\dfrac{1}{s+1}$ ………………………………………4 分

即

$Y(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)(s+3)}$ ……………………………………………………2 分

所以 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\sum\limits_k[Y(s)e^{st},s_k]$

$=-\dfrac{1}{10}e^{-3t}-\dfrac{1}{6}e^{-t}+\dfrac{4}{15}e^{2t}$ ……………………………………………4 分

七、（10 分）求函数$\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$的拉氏逆变换.

解:

$f(t)=(e^{-t}\sin t)*(e^{-t}\sin t)$…………3分

$=\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau$…………2分

$=\dfrac{1}{2}e^{-t}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau$…………2分

$=\dfrac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t)$…………3分

八、（10 分）求函数$f(z)=\dfrac{z}{z^2-z-2}$在圆环域$1<|z|<2$内的洛朗展开式.

解：$f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+1)}=\dfrac{z}{3}(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z+1})$ …………2 分

$=-\dfrac{z}{3}[\dfrac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}]$ ………2 分

$\dfrac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}+\cdots+(-)^{n+1}\dfrac{1}{z^n}+\cdots$ ………… 2 分

$\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\dfrac{z}{2}+(\dfrac{z}{2})^2+\cdots+(\dfrac{z}{2})^n+\cdots$ ………… 2 分

所以 $f(z)=-\dfrac{z}{3}\{\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}+\cdots+(-)^{n+1}\dfrac{1}{z^n}+\cdots+\cdots+\dfrac{1}{2}[1+\dfrac{z}{2}+(\dfrac{z}{2})^2+\cdots+(\dfrac{z}{2})^n+\cdots]\}$
…………2 分

**诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。**

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：**1.**替他人考试或由他人替考；**2.**通讯工具作弊；**3.**团伙作弊。

# 中国矿业大学 2019～2020 学年第一学期

# 《工程数学》试卷（B）卷

**考试时间：<u>100 分钟</u>　　考试方式：<u>闭卷</u>**

学院____________ 班级____________ 姓名____________学号____________

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">一</td><td colspan="6">二</td><td rowspan="2">总分</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>阅卷人</td><td colspan="8"></td></tr>
</table>

## 一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. $(\frac{2i}{i-1})^4$的辐角主值为___$\pi$_______.

2. 函数 $f(z)=x^2y+i\,y^2$ 在 $z=0$ 处的导数为_________.

4. 函数 $f(t)=\cos 2t$ 的傅氏变换为________________________.

5. $\int_0^i z\sin z\,\mathrm{d}\,z$ **是否**为正实数______.（填“**是**”或者“**否**”）

6. 函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 处的留数为__________________.

7. 象函数 $\frac{1}{s^2-2s+2}$ 的拉氏逆变换为________________.

8. 点 $z=1$ 是函数 $\frac{(z^2-1)(z-2)^2}{\sin^3(\pi z)}$ 的_____________.（填奇点的“**类型**”和“**阶数**”）

10. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$ 的敛散性__________.（填“**发散**”或者“**收敛**”）

## 三、计算题（每题 10 分，共 60 分）

1. 用留数的方法求积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$.

2. 已知 $f(t)=t\int_0^t e^{-t}\cos 2t dt$，求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

3. 把函数 $f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$ 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

5. 计算积分 $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^4}{\left(z^2-1\right)^3(z-2)}\mathrm{d}\,z$（积分曲线为正向）.

6. 利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y''-3y'+2y=2e^{-t}\quad ,y(0)=0,y'(0)=1.$$

诚信关乎个人一生，公平竞争赢得尊重。

以下行为是严重作弊行为，学校将给予留校察看或开除学籍处分：1.替他人考试或由他人替考；2.通讯工具作弊；3.团伙作弊。

# 中国矿业大学 2021～2022 学年第一学期

# 《 工程数学 》试卷（A）卷

**考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭卷**

学院____________班级____________姓名__________序号__________

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 总分 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 得 分 | | | | |
| 阅卷人 | | | | |

## 一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．函数 $f(z)=x^2-i\,y^2$ 在 $z=-1+i$ 处的导数为___$-2$______.

2．$\left(\dfrac{i}{i-1}\right)^3$ 的辐角主值为__$-\dfrac{3\pi}{4}$_____.

3．积分 $\oint\limits_C \dfrac{\overline{z}\cos z dz}{z}$ =___0______.（其中 $C:|z|=1$）（积分曲线为正向）

4．象函数 $\dfrac{1}{s^2}e^{-s}$ 的拉氏逆变换为___ $u(t-1)(t-1)$ __________.

5．函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 处的留数为___ $f(z)=\dfrac{e^{-1}-e}{2}$ ______________.

## 二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$,（其中 $2\pi<\varphi<3\pi$）的辐角主值为（ B ）.

(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

(C) $2\pi-\frac{\varphi}{2}$ (D) $\frac{5\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

2. 点 $z=2$ 是函数 $\frac{(z^2-1)^2(z-2)}{\sin^3(\pi z)}$ 的( B).（填奇点的“类型”和“阶数”）

（A） 一阶极点 （B） 二阶极点 （C）三阶极点 （D） 四阶极点

3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 的敛散性 ( c ).

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 无法判别

4. $\mathrm{Res}[\frac{z\sin z}{1-e^z},0]=$ ( D ).

(A) $1$ (B) $-1$ (C) $2$ (D) $0$

5. 在复数域内，下列数中为实数的是（ B ）

(A) $(1-i)^2$ (B) $i\ln i$ (C) $e^{i+1}$ (D) $\int_0^i z\sin z\,\mathrm{d}z$ 点

## 三、计算题（共 60 分）

**1. (10 分) 已知** $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\cos 3t dt$，求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

解：

$$L(f(t)) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s}\frac{s+3}{(s+3)^2+9}$$
……6 分
$$= \frac{2s^3+15s^2+36s+54}{s^2\{(s+3)^2+9\}^2}$$

……4 分

2. （10 分）设函数 $f(z)=2(x-1)y+iv(x,y)$ 是解析函数，且 $f(2)=-i$，求 $f(z)$.

解：因为 $u(x,y)=2(x-1)y$，所以

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2y-i2(x-1)=-2iz+2i$$ ……4 分

$$f(z)=\int f'(z)dz=\int(-2iz+2i)dz=-iz^2+2iz+C$$ ……2 分

又 $f(2)=-i$，故 $C=-i$，所以……4 分

$$f(z)=-iz^2+2iz-i$$

3.求函数 $\dfrac{1+s}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换.

解: $(-)\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}\dfrac{1}{s^2+1}=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$，所以

$\dfrac{s}{(s^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}\mathrm{L[tsint]}$，……4 分

$$\frac{1}{(s^2+1)^2}=L[\sin t*\sin t],$$

$$\sin t * \sin t = \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(2\tau - t) - \cos t)d\tau \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

函数 $\frac{1+s}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换 $\frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

……2 分

4.（10 分）计算积分 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3}{(z-4)\left(z^3-2\right)}\mathrm{d}z$ （积分曲线为正向）.

解：被积函数有 4 个奇点，
从而

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3}{(z-4)\left(z^3-2\right)}\mathrm{d}z = -2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s\left[\frac{z^3}{(z-4)\left(z^3-2\right)},\infty\right] + \mathrm{Re}\,s\left[\frac{z^3}{(z-4)\left(z^3-2\right)},4\right]\right\}$$

………3 分

$$= 2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\frac{1}{z^3}}{(\frac{1}{z}-4)\left(\frac{1}{z^3}-2\right)}(\frac{1}{z})^2,0\right] - \frac{32}{31}\right\} \cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$= 2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s\left[\frac{1}{z(1-4z)(1-2z^3)},0\right] - \frac{32}{31}\right\} \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$= -\frac{2}{31}\pi i \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

5.（10 分）把函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $2 < |z+1| < +\infty$ 内展开成关于 $z+1$ 的洛

朗级数.

解：$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+1-2}=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}$ ……4 分

$\frac{1}{(z-1)^2}=-(\frac{1}{z-1})'=(\sum_{n=0}^{+\infty}2^n(z+1)^{-(n+1)})'$

……4 分

$=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^n(z+1)^{-n-2}$ …2 分

6.（10 分） 利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y''+y'-6y=e^{-t}\quad ,y(0)=0\quad ,y'(0)=1.$$

解： 设$L(y(t))=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)-6Y(s)=\frac{1}{s+1}$ ……4 分

即 $s^2Y(s)+sY(s)-6Y(s)=\frac{s+2}{s+1}$，……3 分

$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s+3)}$，利用反演公式得

$y(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{4}{15}e^{2t}-\frac{1}{10}e^{-3t}$ ……3 分

# 中国矿业大学 2021～2022 学年第一学期

# 《 工程数学 》试卷（B）卷

**考试时间：100 分钟　　　考试方式：闭卷**

学院____________班级____________姓名__________序号__________

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 总分 |
|---|---|---|---|---|
| 得　分 | | | | |
| 阅卷人 | | | | |

## 一、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1．函数 $f(z)=y^2-i\,x^2$ 在 $z=1+i$ 处的导数为___$-2i$______.

2．$\left(\dfrac{i-1}{i}\right)^3$ 的辐角主值为__$\dfrac{3\pi}{4}$_____.

3．积分 $\oint\limits_C \dfrac{\overline{z}\sin z\mathrm{d}z}{z}$ =___$2\pi i$______.（其中 $C:|z|=1$）（积分曲线为正向）

4．象函数 $\dfrac{1}{s^2}e^{-2s}$ 的拉氏逆变换为___$u(t-2)(t-2)$__________.

5．函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 处的留数为_______0_________.

## 二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．复数 $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$,（其中 $0<\varphi<\pi$）的辐角主值为（　A　）.

(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

(C) $2\pi-\frac{\varphi}{2}$ (D) $\frac{5\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$

2. 点 $z=i$ 是函数 $\dfrac{\sin^2 z}{(e^{\pi z}+1)^3}$ 的（ C ）.

（A） 一阶极点 （B） 二阶极点 （C）三阶极点 （D） 四阶极点

3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n\frac{1}{\ln n}+i\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性 ( c ).

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 无法判别

4. $\text{Res}[\frac{z^2\sin z}{(1-e^z)^3},0]=$ ( B ).

(A) $1$ (B) $-1$ (C) $2$ (D) $0$

5. 在复数域内，下列数中为实数的是（ D ）

(A) $(1+i)^2$ (B) $\ln i$ (C) $e^{i-1}$ (D) $\int_0^i z\cos z\,\mathrm{d}z$

## 三、计算题（共 60 分）

**1. (10 分)** 已知 $f(t)=\int_0^t te^{-4t}\cos 3t dt$，求 $\mathscr{L}[f(t)]$.

解：

$$L(f(t)) = -\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\frac{s+4}{(s+4)^2+9} \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$= \frac{s^2+8s+7}{s\{(s+4)^2+9\}^2}$$

$\cdots\cdots$4 分

**2.** （8 分）设函数 $f(z)=u(x,y)+i(y^2-x^2+2x)$ 是解析函数，且 $f(1)=i$，求 $f(z)$.

解：因为 $v(x,y)=y^2-x^2+2x$，所以

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2y-i2(x-1)=-2iz+2i \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$f(z)=\int f'(z)dz=\int(-2iz+2i)dz=-iz^2+2iz+C \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

又 $f(1)=i$，故 $C=0$，所以

$$f(z)=-iz^2+2iz \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

3. 求函数 $\dfrac{s^2+s}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换.

解：由于 $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)'=\dfrac{1}{2}L(t\sin t)$，$\cdots\cdots$3 分

从而

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2}=s\frac{s}{(s^2+1)^2}-0=L((\frac{1}{2}t\sin t)'),\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

**于是**

$\dfrac{s^2+s}{(s^2+1)^2}$ 的拉氏逆变换为 $(\frac{1}{2}t\sin t)'+\frac{1}{2}t\sin t=\frac{1}{2}(t\sin t+t\cos t+\sin t)$

……3 分

4.（10 分）计算积分 $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z^3}{(z-5)\left(z^3-3\right)}\mathrm{d}\,z$ （积分曲线为正向）.

解：被积函数有 4 个奇点，

从而

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{z^3}{(z-5)\left(z^3-3\right)}\mathrm{d}\,z=-2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s[\frac{z^3}{(z-5)\left(z^3-3\right)},\infty]+\mathrm{Re}\,s[\frac{z^3}{(z-5)\left(z^3-3\right)},5]\right\}$$

………3 分

$$=2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s[\frac{\frac{1}{z^3}}{(\frac{1}{z}-5)\left(\frac{1}{z^3}-3\right)}(\frac{1}{z})^2,0]-\frac{125}{122}\right\}\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$=2\pi i\left\{\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z(1-5z)(1-3z^3)},0]-\frac{125}{122}\right\}\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$=-\frac{3}{61}\pi i\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

5.（10 分）把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在圆环域 $1<|z+1|<+\infty$ 内展开成关于 $z+1$ 的洛朗级数.

解：$\frac{1}{z}=\frac{1}{z+1-1}=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}}$ ……4 分

$\frac{1}{z^2}=-(\frac{1}{z})'=-(\sum_{n=0}^{+\infty}(z+1)^{-(n+1)})'$

……4 分

$=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(z+1)^{-n-2}$ …2 分

6.（10 分） 利用拉氏变换求下面微分方程的解：

$$y''+2y'-8y=e^{-t}\quad ,y(0)=0\quad ,y'(0)=1.$$

解： 设 $L(y(t))=Y(s)$,对方程两边取拉氏变换，得

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)-8Y(s)=\frac{1}{s+1}$ ……4 分

即 $s^2Y(s)+2sY(s)-8Y(s)=\frac{s+2}{s+1}$， ……3 分

$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s+4)(s-2)}$，利用反演公式得

$y(t)=-\frac{1}{9}e^{-t}-\frac{1}{9}e^{-4t}+\frac{2}{9}e^{2t}$ ……3 分