微分方程笔记

5eqn

2023 年 2 月 18 日

1 可分离变量的微分方程

一阶微分方程通常可以分离变量变成

$$g\left(y\right)\mathrm{d}y=f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

例如对

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy,$$

可以变形为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$$

解得

$$\ln|y|=x^2+C_1.$$

2 齐次方程

对于齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

存在一种巧妙的换元方法把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 拆开, 即

$$y=ux.$$

换元后, 方程变形为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(u\right),$$

便可以按照可分离变量的微分方程求解.

同时, 可以通过对 x 和 y 线性偏移, 例如令 $u=x+1$, 来实现齐次化.

例如对

$$\left(2x+y-4\right)\mathrm{d}x+\left(x+y-1\right)\mathrm{d}y=0,$$

令

$$\begin{cases}x=X+h,\\y=Y+k,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases} h = 3, \\ k = -2, \end{cases}$$

因此原方程变为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} &= -\frac{2+\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}, \\
X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} &= -\frac{2+u}{1+u} - u, \\
-\frac{u+1}{u^2+2u+2}\mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}X}{X}, \\
2x^2+2xy+y^2-8x-2y &= C
\end{aligned}$$

3 一阶线性微分方程

3.1 原本线性

对于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\, y = Q(x),$$

$Q(x) = 0$ 的解 $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 告诉我们若将 C 视为函数, 则右侧部分能消掉 $P(x)\, y$ 项. 为了在通用的情况下也消除掉这一项, 不妨作换元

$$y = ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

那么首先 $Q(x) = 0$ 时 $u = C$, 并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - uP(x)\, e^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

代入原微分方程, 会发现 $uP(x)\, e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 真的被消掉了, 因此

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

最终

$$\begin{aligned}
u &= \int Q(x)\, e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C, \\
y &= Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\, e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

为了方便记忆, 可以考虑着重记忆 y 到 u 的换元方式 (这是为了消掉 $P(x)\, y$ 项), 以及换元后乘积求导只有 u' 项被保留的事实 (另一半用来消掉 $P(x)\, y$ 项), 就能较快推出最后的结果.

例如对

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}},$$

那么关键步骤为令

$$y = u(x+1)^2,$$

以及代入消除后

$$u' = \sqrt{x+1},$$

因此

$$y = (x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right).$$

3.2 伯努利方程

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)y^{n}\quad\left(n\neq0,1\right)$$

是伯努利方程, 若要转化成线性方程, 考虑将右侧形式统一化, 变为

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P\left(x\right)y^{1-n}=Q\left(x\right),$$

再令 $k=1-n$ 即可.

4 可降阶的高阶微分方程

4.1 单个高阶导

对于

$$y^{(n)}=f\left(x\right),$$

只要对右侧不断积分即可.

4.2 两项阶数相邻

对于

$$y''=f\left(x,y'\right),$$

按照正常的思路解出 y' 后再算 y 即可.

5 高阶线性微分方程

对于线性微分方程, 可以类比线性代数, 得到齐次方程通解具备线性, 非齐次方程的特解和齐次方程解空间基底均正交, 即设齐次方程解空间基底为 y_1,y_2, 非齐次方程特解为 y^*, 那么

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*.$$

在求出齐次方程解空间基底后, 依然可以采用常数变易法, 例如对

$$y''-2y'+y=0,$$

已知齐次方程解空间基底为 $y_1=e^x$, 那么令 $y=e^xu,y'=e^x\left(u'+u\right),y''=e^x\left(u''+2u'+u\right)$, 由于保证消掉 y 的低阶导, 我们得到

$$e^xu''=\frac{1}{x}e^x,$$

因此 $u=C_1+C_2x+x\ln|x|$.

6 常系数齐次线性微分方程

对于

$$y'' + py' + qy = 0,$$

不妨令 $y = e^{rx}$, 那么

$$\left(r^2 + pr + q\right) e^{rx} = 0,$$

即

$$r^2 + pr + q = 0.$$

对于能解出两个根的情况, 直接代入即可, 其中如果是复数要运用公式

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

变形得到最终答案.

对于重根, 使用常数变易法设 $y = e^{rx} u(x)$, 那么

$$\left(u'' + 2ru' + r^2 u\right) + p\left(u' + ru\right) + qu = 0,$$

由于重根, 化简得 $u'' = 0$, 而 u 不为常数, 则令 $u = x$ 即可. 注意这里采用 $u = x + 1$ 也可以, 而且可能更像 (但不是) 指数函数退化.

例如对于有阻尼振动, 我们有

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0$$

特征方程根为

$$-n \pm \sqrt{n^2 - k^2},$$

那么在小阻尼 $n < k$ 时, 令 $\omega = \sqrt{k^2 - n^2}$, 那么

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + nx_0}{\omega} \sin \omega t \right),$$

令

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad \frac{v_0 + nx_0}{\omega} = A \cos \varphi \, (0 \le \varphi \le 2\pi),$$

那么

$$x = Ae^{-nt} \sin(\omega t + \varphi),$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 + nx_0)^2}{\omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0 + nx_0}.$$

在临界阻尼 $n = k$ 时, 特征方程重根, 因此结果为

$$x = e^{-nt} \left(x_0 + (v_0 + nx_0) t\right).$$

在大阻尼 $n > k$ 时, 特征方程有两负根, 即

$$x = C_1 e^{-\left(n - \sqrt{n^2 - k^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(n + \sqrt{n^2 - k^2}\right)t}.$$

对于更多元的情况, 可能出现更多重根, 这时堆叠 x 的幂即可.

7 常系数非齐次线性微分方程

正如前面所提到, 采用常数变易法 (但是教材上变成了待定系数法) 即可.

8 欧拉方程

对于

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x),$$

想办法令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 即 $t = \ln x$ 即可.

注意到在此之后

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)\,y.$$

9 常系数线性微分方程组

通过消元变成前面学过的即可.