大学语文下册速记

5eqn

2023 年 2 月 12 日

1 图

定义 1 任取 A 和 B 中的一个元素构成集合的全部可能性为无序积, 记为 $A\&B$. 其中无序对 $\{a,b\}$ 简写为 (a,b), 无序对 $\{a\}$ 简写为 (a,a).

定义 2 顶点数是图的阶.

定义 3 没有边的图是零图.

定义 4 1 阶零图 N_1 是平凡图.

定义 5 空图是没有顶点的图, 记为 $\varnothing$.

定义 6 每个顶点和边有指定代号的图是标定图.

定义 7 有向图的基图是把所有边变成无向得到的图, 注意双向边要看作两条边, 其基图含平行边.

定义 8 环是一个点连它自己.

定义 9 点的邻域是和点相邻的点, 记为 $N_G(v)$.

定义 10 闭邻域是不包括自己的邻域, 记为 $\overline{N}_G(v)$.

定义 11 点的关联集是和点相邻的边, 记为 $I_G(v)$.

定义 12 点的后继元集是从点出发走一步能到的点, 记为 $\Gamma_D^+(v)$.

定义 13 平行边是起点相同且终点相同的边.

定义 14 含平行边的图是多重图, 不含平行边并且没环的图是简单图.

定义 15 v 作为边的端点的次数是度数 $d_G(v)$. 作为边的始点的次数是出度 $d_D^+(v)$. 有向图的度数是出度和入度之和.

定义 16 最大度是所有点度数的最大值, 记为 $\Delta(G)$. 最小度则是最小值, 记为 $\delta(G)$. 最大出度记为 $\Delta^+(G)$.

定义 17 度数为 1 的顶点是悬挂顶点, 其关联边是悬挂边.

定义 18 每个顶点的度数组成数列是度数列, 由度数列可还原图则称度数列可图化, 类似地还有可简单图化, 出度列和入度列的概念.

定义 19 通过修改点的编号能让一个图变成另一个图, 那么这两个图同构, 记为 $G_1 \cong G_2$.

定义 20 竞赛图是基图为无向完全图的有向图.

定义 21 每个点的度数都是 k 的无向简单图是 k-正则图.

定义 22 图 G 去掉一些点 $V - V_1$ 会得到 V_1 导出的子图 $G[V_1]$, 去掉一些边 $E - E_1$ 会得到 E_1 导出的子图 $G[E_1]$.

定义 23 让图所有可能形成边的成边情况反转, 就得到了其补图, 记为 $\overline{G}$. 补图和自身同构的是自补图.

定义 24 e 的收缩即把 e 和关联的两个顶点共同视为一个顶点, 记为 $G \setminus e$.

定义 25 无向标定图中, 顶点和关联边的交替序列是通路, 记为 Γ. 边的数量是长度, 从始点开始, 终点结束. 如果始点和终点相同, 那么这个通路是回路. 如没有重复边, 那么 Γ 是简单通路, 否则是复杂通路. 在此基础上如果没有重复顶点, 那么 Γ 是初级通路或路径. 如果是回路, 那么 Γ 是初级回路或圈.

定义 26 如果 u 和 v 之间存在通路, 那么称它们是连通的, 记为 $u \sim v$.

定义 27 设 V_i 是联通关系的一个等价类, 那么 $G[V_i]$ 是 G 的一个连通分支, 其连通分支数为 $p(G)$.

定义 28 若 $u \sim v$, 那么 u 和 v 之间长度最短的通路为短程线, 短程线的长度是 u 和 v 之间的距离, 记为 $d(u,v)$. 若不连通, 那么 $d(u,v) = \infty$.

定义 29 点割集是极小的去掉后能让 $p(G)$ 降低的点集, 如果只有一个元素, 那么元素是割点. 同理定义边割集或割集和割边或桥.

定义 30 最小点割集阶数为点连通度或连通度 $\kappa(G)$. 只要 $\kappa(G) > k$, 那么 G 就是 k-连通图. 按照相似的方法可以定义边连通度 $\lambda(G)$, 以及 r 边-连通图.

定义 31 基图是连通图的有向图是弱连通图或连通图. 两个点至少一个方向连通则是单向连通图, 全部连通则是强连通图.

定义 32 极大路径是不能通过首尾加点来延长的路径.

定义 33 二部图或二分图或偶图中, 每条边一定从一个点集到另一个点集, 这两个点集是整个点集的一个划分. 简单二部图 G 中 V_1 中每个顶点和 V_2 中所有顶点相邻, 那么 G 是完全二部图.

1.1 图的表示

定义 34 可以根据每个顶点和每个边的关联次数做出关联矩阵 $M(G)$.

定义 35 可以根据每个顶点和其他顶点的关联次数做出邻接矩阵 $A(G)$.

1.2 图的运算

定义 36 环和 $G_1 \oplus G_2$ 是用边的对称差定义的.

1.3 欧拉图和哈密顿图

定义 37 走过所有边的通路是欧拉通路, 回路则是欧拉回路, 有欧拉回路的图是欧拉图, 有欧拉通路但没有欧拉回路的则是半欧拉图.

定义 38 把走过所有边换成走过所有顶点就能得到哈密顿通路等定义.

1.4 带权图

定义 39 每个边对应权 $W(e)$ 的图是带权图.

定义 40 路径上所有边权之和为长度 $W(P)$.

定义 41 *Dijkstra* 算法是通过动态规划求最短路的算法, 可以用来解决中国邮递员问题.

2 树

定义 42 图 G 中不在生成树 T 上的边是弦, 所有弦的导出子图是 T 的余树 $\overline{T}$.

定义 43 每个弦会对应一个回路, 被称作基本回路或基本圈. 所有基本圈组成基本回路系统, 其数量为圈秩 $\xi(G)$. 以每个元素为基, 就得到了广义回路空间.

定义 44 每个树枝会对应一个割集, 仿照上述定义得到基本割集, 基本割集系统, 割集秩 $\eta(G)$ 和广义割集空间.

定义 45 *Kruskal* 算法是通过贪心求最小生成树的算法.

定义 46 菊花有向树是根树, 有入度有出度的点是内点, 内点和树根都是分支点, v 的层数是根到 v 的路径长度, 最大长度就是树高.

定义 47 *Huffman* 算法是通过贪心求最优二叉树的算法.

3 平面图

定义 48 把平面图画出的无边相交的图是平面嵌入.

定义 49 面的边界的长度是面的次数, 记为 $\deg(R)$.

定义 50 平面图加任何一条边都不是平面图, 那么其为极大平面图. 仿照该定义可以得出极小非平面图的定义.

定义 51 把一条边 e 变成路径 e_1ve_2 是插入二度顶点 v. 逆向过程是消去二度顶点 v. 如果能通过 0 或更多次上述操作让两个图同构, 那么这两个图同胚.

定义 52 *Kuratowski* 定理一即, G 是平面图当且仅当 G 中不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图. 把 "与同胚" 改成 "可以收缩到", 就得到了定理二.

定义 53 点面调换得到对偶图. 和对偶图同构的图是自对偶图.

定义 54 轮子形状的阶数为 n 的图是 n 阶轮图, 记为 W_n.

4 支配覆盖独立

4.1 支配集

定义 55 从支配集这一顶点集出发, 走一步能覆盖所有顶点.

定义 56 极小支配集的任何真子集都不是支配集. 最小支配集是顶点数最少的支配集, 顶点个数为支配数 $\gamma_0(G)$.

4.2 独立集

定义 57 点独立集或独立集任何两个顶点不相邻.

定义 58 极大和最大仿照前面定义, 最大点独立集顶点数是点独立数 $\beta_0(G)$.

定义 59 边独立集或匹配中, 任何两条边不相邻.

定义 60 最大匹配的边数是边独立数或匹配数 $\beta_1(G)$.

定义 61 匹配中的边是匹配边, 其他边是非匹配边.

定义 62 和匹配边关联的点是饱和点, 其他点是非饱和点. 没有非饱和点的匹配是完美匹配.

定义 63 匹配边和非匹配边构成交错路径, 其中起点和重点都不饱和的交错路径是可增广的交错路径, 因为可以以此重新构造更接近完美的匹配.

定理 1 $\alpha_1 + \beta_1 = n$.

定义 64 二部图中存在匹配使得点数较少的一方全部饱和，则这个匹配是完备匹配.

定理 2 *Hall* 定理或相异性条件：存在完备匹配即任取 k, V_1 中任意 k 个顶点至少与 V_2 中 k 个顶点相邻.

定理 3 t 条件：如果存在 t 使得 V_1 每个顶点至少关联 t 条边，但 V_2 每个顶点至多关联 t 条边，那么存在 V_1 到 V_2 的完美匹配.

4.3 覆盖集

定义 65 从点覆盖集或点覆盖出发，走一步能覆盖所有边.

定义 66 最小点覆盖的顶点数是点覆盖数 $\alpha_0(G)$.

定理 4 $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n$.

定义 67 从边覆盖集或边覆盖出发，走一步就能覆盖所有点.

定义 68 最小边覆盖的顶点数是边覆盖数 $\alpha_1(G)$.

5 着色

定义 69 如果 G 是 k-可着色的，但不是 $k-1$-可着色的，那么 G 的色数 $\xi(G) = k$.

定理 5 $\xi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

定理 6 *Brooks* 定理：若 G 不是完全图，也不是奇圈，那么 $\xi(G) \leq \Delta(G)$.

定义 70 面色数 $\xi^*(G)$ 是对偶图的色数.

定义 71 边色数 $\xi'(G)$ 是将点着色规则应用到边上的结果.

定理 7 *Vizing* 定理：简单图的边色数只能是 Δ 或者 $\Delta + 1$.