ΜΥΕ025: ΠΟΛΥΜΕΣΑ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΜΕΡΟΣ 1

Θα αναπτύξετε μία γρήγορη υλοποίηση του Διακριτού Μετασχηματισμού Συνημιτόνου (Discrete Cosine Transform, DCT) χρησιμοποιώντας το Matlab ή το Octave.

Ο μονοδιάστατος DCT, $F(u)$ μίας ακολουθίας $f(x)$, $x = 0, \ldots, N-1$ δίνεται από την εξίσωση

$$F(u) = w(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos[\frac{(2x+1)\pi u}{2N}], \tag{1}$$

όπου

$$w(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{αν } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \tag{2}$$

και $u = 0, \ldots, N-1$.

Είναι δυνατόν να υπολογιστεί ο $F(u)$, ο DCT της ακολουθίας $f(x)$ μέσω του $G(u)$, του DFT της ακολουθίας $g(x)$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq N-1 \\ f(2N-1-x), & N \leq x \leq 2N-1 \end{cases} \tag{3}$$

Ο DFT της $g(x)$ είναι

$$G(u) = \sum_{x=0}^{2N-1} g(x) W_{2N}^{xu}, \tag{4}$$

όπου $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ και $u = 0, \ldots, 2N-1$.

Οι $f(x)$ και $F(u)$ έχουν μήκος N ενώ οι $g(x)$ και $G(u)$ έχουν μήκος $2N$. Υπάρχει όμως ο Fast Fourier Transform (FFT), που είναι μία γρήγορη υλοποίηση του DFT. Άρα, υπολογίζοντας το $G(u)$ και σχετίζοντάς το με το $F(u)$, μπορούμε να μειώσουμε σημαντικά την υπολογιστική πολυπλοκότητα της υλοποίησης, σε σύγκριση με υλοποίηση χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DCT.

Πρέπει να κάνετε τα εξής:

1. Βρείτε αναλυτικά τη σχεση μεταξύ $G(u)$ και $F(u)$. Δώστε όλες τις λεπτομέρειες της μαθηματικής απόδειξης.
2. Γράψτε μία συνάρτηση `mydct.m` η οποία για μία ακολουθία εισόδου $f(x)$ υπολογίζει τη $g(x)$, μετα υπολογίζει το $G(u)$ με τη συνάρτηση `fft` του Matlab ή του Octave, και τέλος υπολογίζει το $F(u)$, τον DCT της $f(x)$ από το $G(u)$.

3. Γράψτε μία συνάρτηση `mydct2.m`, η οποία υπολογίζει τον διδιάστατο DCT ενός διδιάστατου πίνακα $f(x, y)$. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `mydct.m` σε συνδυασμό με row-column decomposition. Αυτό σημαίνει ότι ο διδιάστατος DCT υπολογίζεται σε δύο βήματα. Πρώτα, κάθε γραμμή του πίνακα $f(x, y)$ θεωρείται ως ένα μονοδιάστατο σήμα και λαμβάνεται ο μονοδιάστατος DCT καθε γραμμής. Ύστερα, κάθε στήλη του αποτελέσματος θεωρείται ως μονοδιάστατο σήμα και λαμβάνεται ο μονοδιάστατος DCT κάθε στήλης.

4. Δημιουργήστε έναν οποιοδήποτε πίνακα μεγέθους 8×8 και υπολογίστε τον DCT χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `mydct2.m` και την ενσωματωμένη συνάρτηση `dct2`. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Κατά την υλοποίηση, προσέξτε ότι στις παραπάνω εξισώσεις οι δείκτες ξεκινούν από το 0, ενώ στο Matlab και στο Octave ξεκινούν από το 1.

ΜΕΡΟΣ 2

Γράψτε πρόγραμμα Matlab ή Octave που:

1. Διαβάζει την εικόνα *Cameraman* χρησιμοποιώντας την εντολή: `f=imread('cameraman.tif');`.
2. Υπολογίζει την εντροπία της εικόνας χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `entropy`.
3. Χωρίζει την εικόνα σε μπλοκ διαστάσεων 8×8.
4. Παίρνει τον DCT για κάθε μπλοκ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `dct2`.
5. Κβαντίζει τους συντελεστές κάθε μπλοκ σύμφωνα με τη σχέση $\hat{F}(u, v) = round(F(u, v)/Q(u, v))$, όπου $Q(u, v)$ είναι στοιχεία ενός πίνακα κβάντισης Q.
6. Υπολογίζει την εντροπία της απόλυτης τιμής $|\hat{F}(u, v)|$ των κβαντισμένων συντελεστών ολόκληρης της εικόνας χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `entropy`.
7. Υπολογίζει το πλήθος των συντελεστών της εικόνας που μηδενίστηκαν μετά την κβάντιση.
8. Κάνει 'αντίστροφη κβάντιση' για τους συντελεστές σύμφωνα με τη σχέση $\tilde{F}(u, v) = \hat{F}(u, v) \cdot Q(u, v)$.
9. Παίρνει τον αντίστροφο DCT κάθε μπλοκ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `idct2`.
10. Μετατρέπει την εικόνα σε `uint8`. Προσέξτε τη μετατροπή αρνητικών τιμών και τιμών μεγαλύτερων του 255.

11. Υπολογίζει το PSNR της εικόνας και εμφανίζει και εκτυπώνει την εικόνα με τη συνάρτηση `imagesc`. Θα χρειαστεί επίσης να δώσετε την εντολή `colormap(gray)`.

Τρέξτε το πρόγραμμα για

$$Q = Q_1 = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

και για $Q = 3 \cdot Q_1$ και $Q = 6 \cdot Q_1$.

Η προθεσμία για την παράδοση της άσκησης είναι στις 7 Νοεμβρίου 2023. Θα παραδώσετε τρία αρχεία κώδικα και ένα αρχείο `pdf` που περιέχει τη μαθηματική απόδειξη, τις εικόνες και τα αποτελέσματα που ζητούνται. Η παράδοση θα γίνει με χρήση `turnin` και την εντολή: `turnin assignment1@mye025 mydct.m mydct2.m meros2.m results.pdf`. Ανεβάστε τα αρχεία μεμονωμένα όπως παραπάνω, μην τα συμπιέσετε με zip ή rar.

Ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να παραδώσει τον δικό του κώδικα. Θα χρησιμοποιηθεί εργαλείο εντοπισμού αντιγραφής στον κώδικα και υποβολές που παρουσιάζουν αδικαιολόγητες ομοιότητες μεταξύ τους θα μηδενίζονται. Επίσης, μην χρησιμοποιήσετε κώδικα που θα βρείτε στο Internet γιατί πιθανότατα και άλλοι φοιτητές θα έχουν βρει τον ίδιο κώδικα με αποτέλεσμα να ανιχνευτεί ομοιότητα και να μηδενιστείτε.