MYE031 Ρομποτική
Κωνσταντινος Γκιουλης, AM:4654
Θεοφανης Γεωργακης, AM:4644
Χρηστος Νικολαος Μαγκλινης, AM:4720
E-mails: cs04654@uoi.gr
cs04644@uoi.gr
cs04720@uoi.gr

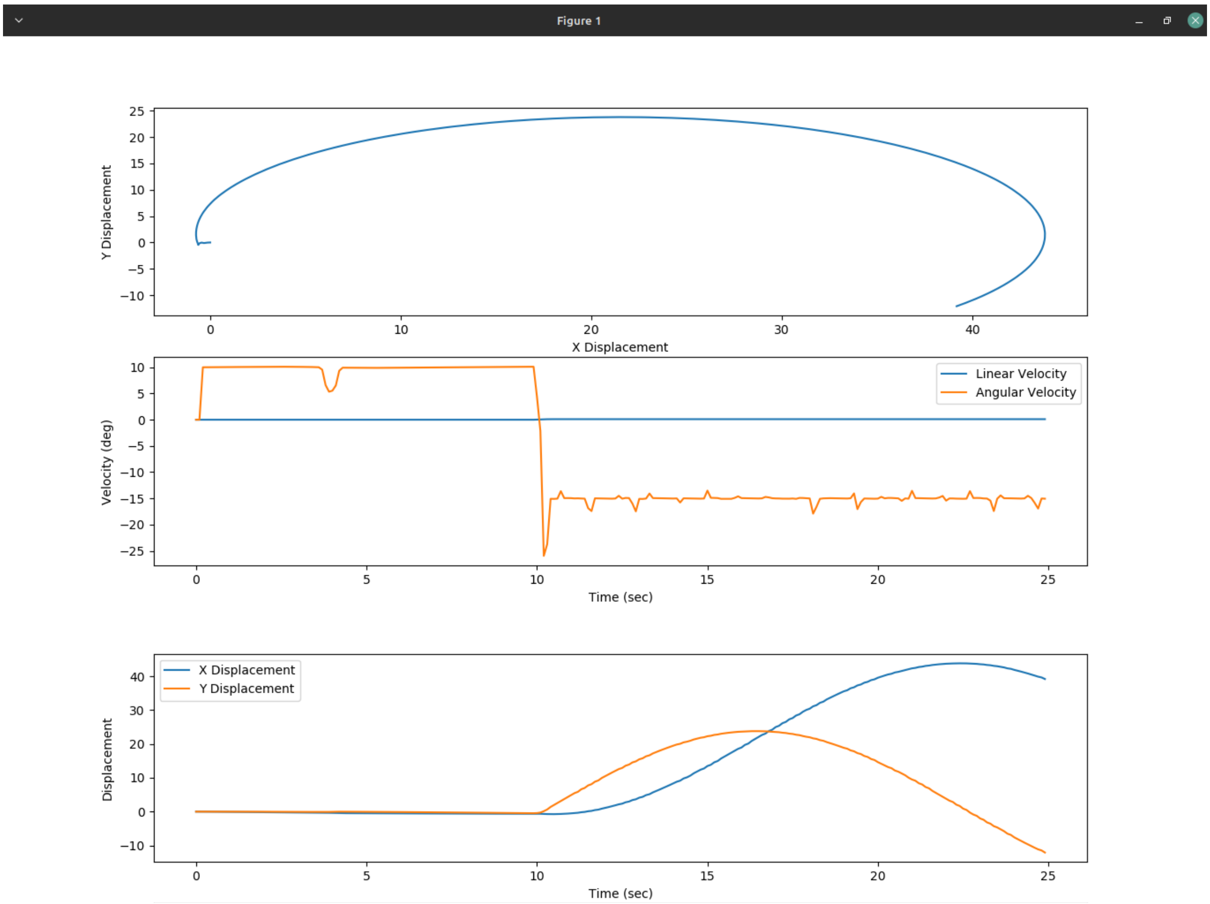
**Προβλήματα θέματος 1**

**Πρώτο πρόγραμμα**

Στο πρώτο πρόγραμμα ζητείται πρόγραμμα (node), το οποίο να κινεί το τροχοφόρο ρομπότ με αυθαίρετη επιθυμητή γραμμική, vd, και περιστροφική ταχύτητα, ωd, εκφρασμένες ως προς το σωματόδετο ΣΣ.

**Γραφική Παράσταση πρώτου προβλήματος**

Διαγράμματα με τις τροχιές των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων για τις τιμές του Πίνακα 1




Στη πρώτη γραφική παράσταση βλέπουμε τη μετατόπιση του turtlebot3 στο αξονα χ και ψ. Ουσιαστικά θα δούμε την γραμμικη κίνηση του ρομπότ. Στη δευτερη θα δουμε τις ταχυτητες οπου βλεπουμε τη γωνιακη ταχυτητα στις 10 μοιρες ανα δευτορολεπτο και την γραμμικη στο 0 για τα πρωτα 10 δευτερολεπτα, επειτα η γωνιακη ταχυτητα στις -15 μοιρες ανα δευτορολεπτο και την γραμμικη στο 0.2 για τα 15 δευτερολεπτα. Στη τριτη γραφικη παρασταση φαινεται πως στα πρωτα 10 δευτερολεπτα εχουμε μονο περιστροφικη οποτε δεν εχουμε αλλαγες στις συντεταγμενες χ,ψ, επειτα αλλαζουν συμφωνα με την κινηση.

**Δεύτερο πρόβλημα**

| Μέθοδος/Παράμετρος | Τιμή |
|---|---|
| Κυβικά πολυώνυμα | **4720** |
| Αρχική θέση και προσανατολισμός | $\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vartheta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ m \\ 0\ rad \end{bmatrix}$ |
| Τελική θέση και προσανατολισμός | $\mathbf{q}_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ \vartheta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5}\ m \\ \mathbf{2}\ m \\ \mathbf{1{,}573}\ rad \end{bmatrix}$ |
| Μέγιστη γραμμική ταχύτητα | $0.2\ m/s$ |
| Μέγιστη γωνιακή ταχύτητα | $40°/s$ |

α) Για την πρώτη περιστροφική κίνηση έχουμε :

Δύο σημεία (αρχικό και τελικό) $(x_0,y_0) = (x_1,y_1) = (0,0)$ και προσανατολισμός, $\theta_0$ δίνονται

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 = 0$$
$$\vartheta(t_1) = \vartheta_1$$

Ξέρουμε ότι η τελική θέση βρίσκεται στο σημείο $(x_1,y_1) = (5,2)$, άρα είναι εφ$\vartheta_1$=$(y_1\text{-}y_0)/(x_1\text{-}x_0) = 2/5$, άρα $\vartheta_1$= 21,80140949 ~= 21,8 μοίρες ή 0,38 rad

Για ολικό χρόνο περιστροφής έχουμε T1= $|d\vartheta|/\vartheta'_{max}$ = 21,8/40 s = 0,545 s, όπου $\vartheta'_{max}$ η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα.

Μηδενικές αρχικές και τελικές ταχύτητες

$$\vartheta'(0) = 0$$
$$\vartheta'(T1) = 0$$

Υποθέτουμε ότι το $\vartheta(t)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού:

$$\vartheta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$\vartheta'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$
$$\vartheta''(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

• Βρίσκουμε τους συντελεστές $a_i$:

για $t = 0 \Rightarrow a_0 = \vartheta_0,\ a_1 = 0$

για $t = t_1 \Rightarrow$ $\quad t_1^2 (a_2 + a_3 t_1) = \vartheta_1 - \vartheta_0$

$\qquad t_1 (2a_2 + 3a_3 t_1) = 0$

,2 εξισώσεις με 2 αγνώστους $(a_2, a_3)$

Πράξεις:

$\vartheta(t_1) = \vartheta_0 + a_2t^2f + a_3t^3f \Rightarrow \vartheta(t_1) = \vartheta_0 + t^2f\,(a_2 + a_3t_1) \Rightarrow t^2_1\,(a_2 + a_3t_1) = \vartheta_f - \vartheta_0$

• Αποτέλεσμα:

$a_0 = \vartheta_0$, $a_2 = (3/t_1^2)*(\vartheta_1 - \vartheta_0)$

$a_1 = 0$, $a_3 = (-2/t_1^3)*(\vartheta_1 - \vartheta_0)$

Οπότε έχουμε :

$\vartheta(t) = (3/t_1^2)*(\vartheta_1 - \vartheta_0)t^2 + (-2/t_1^3)*(\vartheta_1 - \vartheta_0)t^3 \Rightarrow \vartheta(t) = 218t^2 - 272{,}5t^3$

$\vartheta'(t) = (6/t_1^2)*(\vartheta_1 - \vartheta_0)*t - (6/t_1^3)*(\vartheta_1 - \vartheta_0)*t^2 \Rightarrow \vartheta'(t) = 436t - 817{,}5t^2$

$\vartheta''(t) = (6/t_1^2)*(\vartheta_1 - \vartheta_0) - (12/t_1^3)*(\vartheta_1 - \vartheta_0)*t \Rightarrow \vartheta''(t) = 436 - 1{,}635*t$

Με τις αντικαταστάσεις :

$t_1 = T1 - t_0 = 0{,}545 - 0 = 0{,}545$

$t_1^2 = 0{,}297025 \sim= 0{,}3$

$t_1^3 = 0{,}161878625 \sim= 0{,}16$

$\vartheta_1 = 21{,}8$

$\vartheta_0 = 0$

β) Για την δεύτερη γραμμική κίνηση έχουμε :
Δύο σημεία (αρχικό και τελικό) $(x_1,y_1) = (0,0)$, $(x_f,y_f) = (5,2)$ και προσανατολισμός $\vartheta_1 = 21{,}8^o$ δίνονται (με καινούργιο $t_0 = 0$ και τελικό T2) έχουμε ομοίως (για x και y κίνηση αντίστοιχα)

$x(0) = x_0 = 0$ , $y(0) = y_0 = 0$

$x(t_2) = x_f = 5$ , $y(t_2) = y_f = 5$

Για ολικό χρόνο γραμμικής κίνησης έχουμε : $t2 = |d_{distance}|/dV_{max}$, όπου $d_{distance} = sqr(5*5 + 2*2)$ m = 5.38 m και $dV_{max} = 0.2$ m/s, άρα έχουμε t2 = 5.38/0.2 s = 26.9s.

Παίρνοντας τις εξισώσεις από το (α) σκέλος και αντικαθιστώντας το $\vartheta(t)$ με x(t) και y(t) αντίστοιχα έχουμε :

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$
$$x'(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2$$
$$x''(t) = 2a_2 + 6a_3t$$

με :

$\alpha_0 = x_0 = 0$

$a_1 = 0$

$a_2 = (3/t_2^2)*(x_f - x_0)$

$a_3 = (-2/t_2^3)*(x_f - x_0)$

και

$$y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$
$$y'(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2$$
$$y''(t) = 2a_2 + 6a_3t$$

με :

$\alpha_0 = y_0 = 0$
$a_1 = 0$
$a_2 = (3/t_2^2)*(y_f - y_0)$
$a_3 = (-2/t_2^3)*(y_f - y_0)$

Οπότε έχουμε :
$x(t) = (3/t_2^2)*(x_f - x_0)t^2 + (-2/t_2^3)*(x_f - x_0)t^3 \Rightarrow x(t) = 0{,}0207t^2 - 0{,}0005t^3$
$x'(t) = (6/t_2^2)*(x_f - x_0)*t - (6/t_2^3)*(x_f - x_0)*t^2 \Rightarrow x'(t) = 0{,}0414t - 0{,}0015t^2$
$x''(t) = (6/t_2^2)*(x_f - x_0) - (12/t_2^3)*(x_f - x_0)*t \Rightarrow x''(t) = 0{,}0414 - 0{,}0031*t$

Με τις αντικαταστάσεις :
$t_2 = t_2 - t_0 = 26{,}9 - 0 = 26{,}9$
$t_2^2 = 723.61 \sim= 724$
$t_2^3 = 19.465{,}109 \sim= 19.465$
$x_f = 5$
$x_0 = 0$

και :

$y(t) = (3/t_2^2)*(y_f - y_0)t^2 + (-2/t_2^3)*(y_f - y_0)t^3 \Rightarrow y(t) = 0{,}0083t^2 - 0{,}0002t^3$
$y'(t) = (6/t_2^2)*(y_f - y_0)*t - (6/t_2^3)*(y_f - y_0)*t^2 \Rightarrow y'(t) = 0{,}0166t - 0{,}0006t^2$
$y''(t) = (6/t_2^2)*(y_f - y_0) - (12/t_2^3)*(y_f - y_0)*t \Rightarrow y''(t) = 0{,}0166 - 0.0012*t$

Με τις αντικαταστάσεις :
$t_2 = t_2 - t_0 = 26{,}9 - 0 = 26{,}9$
$t_2^2 = 723.61 \sim= 724$
$t_2^3 = 19.465{,}109 \sim= 19.465$
$y_f = 2$
$y_0 = 0$

γ) Για την δεύτερη περιστροφική κίνηση έχουμε :
Δύο σημεία (το νέο αρχικό και τελικό) $(x_0,y_0) = (x_f,y_f) = (5,2)$, νέος και προσανατολισμός, $\theta_0=\theta_1$
δίνονται

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 = \theta_1 = 21{,}8^o$$
$$\vartheta(t_f) = \vartheta_f = 90.126261^o \sim= 90^o$$

Για ολικό χρόνο περιστροφής έχουμε $t_f = |d\vartheta|/\vartheta'_{max} = (90 - 21{,}8)/40$ s = 1,705 s, όπου $\vartheta'_{max}$ η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα.

Μηδενικές αρχικές και τελικές ταχύτητες·

$$\vartheta'(0) = 0$$
$$\vartheta'(t_f) = 0$$

Υποθέτουμε ότι το $\vartheta(t)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού:

$$\vartheta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$\vartheta'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$
$$\vartheta''(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

• Βρίσκουμε τους συντελεστές $a_i$:

για $t = 0 \Rightarrow a_0 = \vartheta_1, a_1 = 0$

για $t = t_f \Rightarrow$ $t^2_f (a_2 + a_3 t_f) = \vartheta_f - \vartheta_1$
$t_f(2a_2 + 3a_3 t_f) = 0$
,2 εξισώσεις με 2 αγνώστους ($a_2$, $a_3$)

Πράξεις:
$\vartheta(t_f) = \vartheta_0 + a_2 t^2 f + a_3 t^3 f \Rightarrow \vartheta(t_f) = \vartheta_0 + t^2 f (a_2 + a_3 t_f) \Rightarrow t^2_f (a_2 + a_3 t_f) = \vartheta_f - \vartheta_1$

• Αποτέλεσμα:
$a_0 = \vartheta_1$, $a_2 = (3/t_f^2)*(\vartheta_f - \vartheta_1)$
$a_1 = 0$, $a_3 = (-2/t_f^3)*(\vartheta_f - \vartheta_1)$

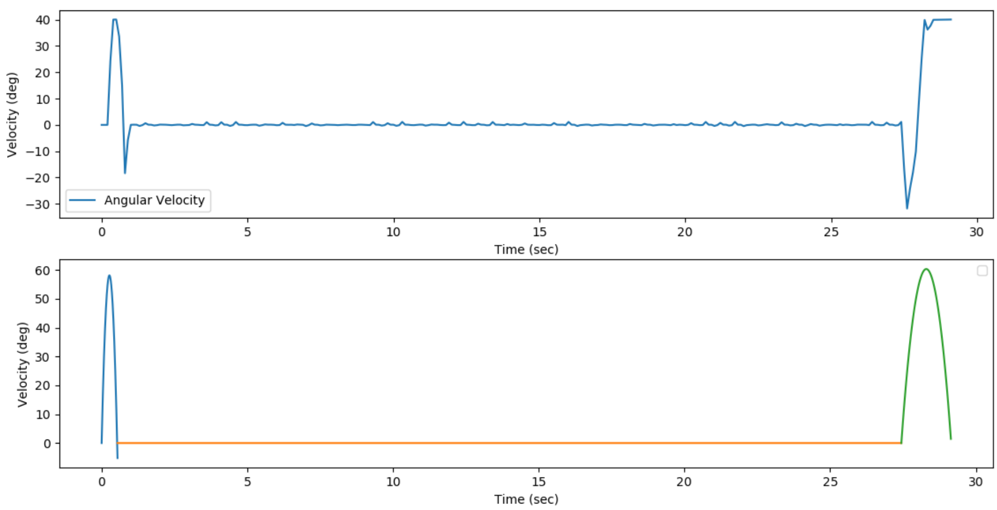
Οπότε έχουμε :
$\vartheta(t) = (3/t_f^2)*(\vartheta_f - \vartheta_1)t^2 + (-2/t_f^3)*(\vartheta_f - \vartheta_1)t^3 \Rightarrow \vartheta(t) = 70{,}5517t^2 - 27{,}5t^3$
$\vartheta'(t) = (6/t_f^2)*(\vartheta_f - \vartheta_1)*t - (6/t_f^3)*(\vartheta_f - \vartheta_1)*t^2 \Rightarrow \vartheta'(t) = 141{,}1034t - 82{,}5t^2$
$\vartheta''(t) = (6/t_f^2)*(\vartheta_f - \vartheta_1) - (12/t_f^3)*(\vartheta_f - \vartheta_1)*t \Rightarrow \vartheta''(t) = 141{,}1034 - 165*t$

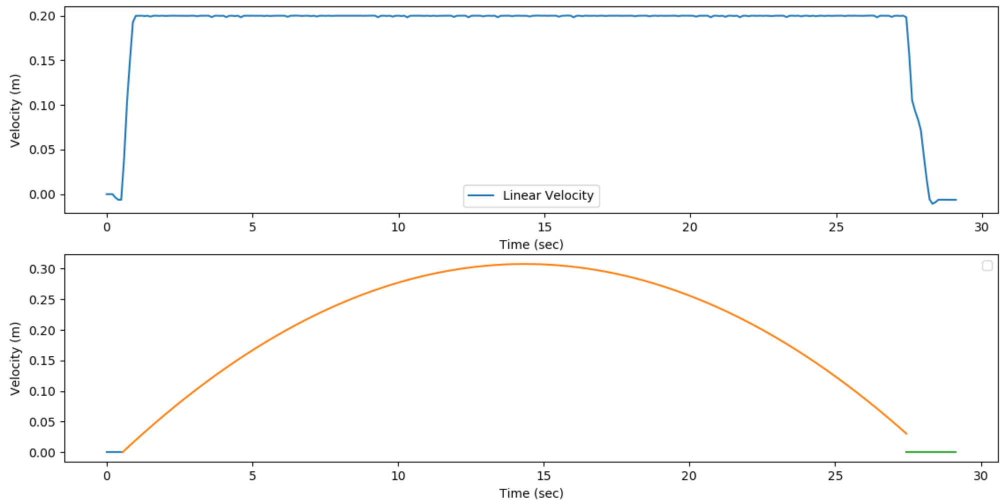
Με τις αντικαταστάσεις :
$t_f = t_f - t_0 = 1{,}705 - 0 \sim= 1{,}7$
$t_f^2 = 2{,}907025 \sim= 2{,}9$
$t_f^3 = 4{,}956477625 \sim= 4{,}96$
$\vartheta_f = 90$
$\vartheta_1 = 21{,}8$

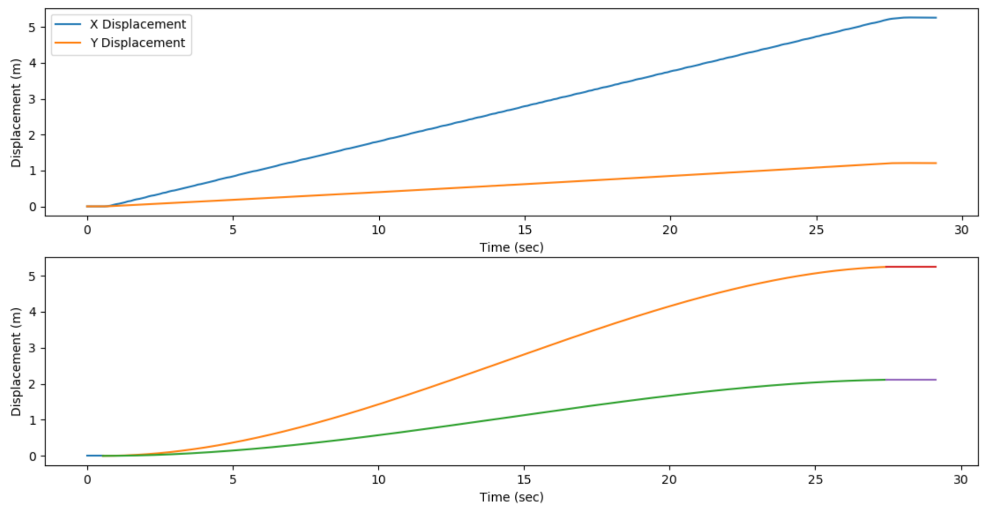
**Τριτο πρόβλημα**

**Γραφική Παράσταση δεύτερου προβλήματος**

Διαγράμματα με τις τροχιές των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων για τις τιμές του Πίνακα 2






Στις πρώτες 2 γραφικες παραστασεις βλέπουμε τη γωνιακη ταχυτητα του turtlebot3 σε σύγκριση με την γωνιακη ταχυτητα που εχει σχεδιαστει και βλεπουμε πως ειναι οι αναμενόμενες στις επομενες 2 βλεπουμε αντιστοιχα τις γραμμικες, οπου παρατηρουμε πως λογω καποιων απλοποιησεων που εγιναν στα μαθηματικα η γραμμικη που εχουμε σχεδιασει δεν ταιριαζει ακριβως ωστοσο αυτο δεν επηρεάζει τη συγκριση των γραμμικων ταχυτητων. Στις 2 τελευταιες βλεπουμε τις μετατοπισεις στον χ και ψ αξονα του turtlebot3 σε αντιπαραθεση με τις σχεδιασμενες. Τελος πρεπει να αναφερθει πως οι σχεδιασμενες γραφικες εχουν μεγαλυτερες τιμες ταχυτητων διοτι για να σχεδιαστούν χρησιμοποιηθηκαν οι εξισωσεις τροχιας των ταχυτητων και δεν λήφθηκε υπόψη το οριο που δοθηκε στην εκφωνηση των 0.2 m/s για μέγιστη γραμμική ταχύτητα και $40^{\circ}$/s για μέγιστη γωνιακή ταχύτητα.

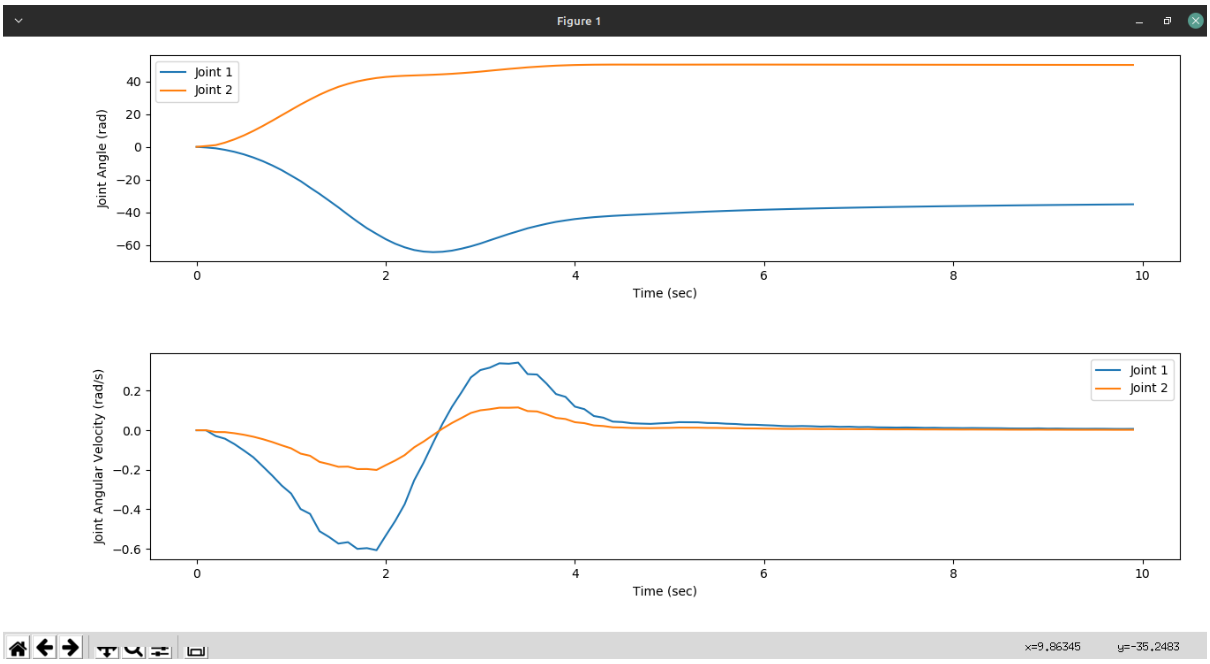
**Προβλήματα θέματος 2**

**Πρώτο πρόγραμμα**

Στο πρώτο πρόγραμμα ζητείται πρόγραμμα (node), το οποίο να κινεί το ρομποτικο βραχιονα με αυθαίρετες επιθυμητές γωνίες.

**Γραφική Παράσταση πρώτου προβλήματος**

Διαγράμματα με τις τροχιές των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων για τις τιμές του Πίνακα 1




Στη πρωτη γραφική παράσταση βλέπουμε την κίνηση των βραχιονων και παρατηρούμε πως καταλήγουν στις σωστές θέσεις με το joint 1 να καταληγει στις -35 μοιρες και το joint 2 στις 50 μοιρες. Στη δεύτερη γραφική παράσταση βλέπουμε τις ταχύτητες των αρθωσεων.

**Δεύτερο πρόβλημα**

| Μέθοδος/Παράμετρος | Τιμή |
|---|---|
| Κυβικά πολυώνυμα | Περιττός ΑΜ (ο μεγαλύτερος της ομάδας) |
| Γραμμικές συναρτήσεις με παραβολικά τμήματα | Άρτιος ΑΜ (ο μεγαλύτερος της ομάδας) |
| Αρχικές γωνίες των αρθρώσεων | $\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} q_{1,0} \\ q_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}$ |
| Τελικές γωνίες των αρθρώσεων | $\mathbf{q}_f = \begin{bmatrix} q_{1,f} \\ q_{2,f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathtt{round}\left(\frac{\text{AM}}{100}\right)^\circ \\ -\mathtt{round}\left(\frac{\text{AM}}{100}\right)^\circ \end{bmatrix}$ |
| Μέγιστη γωνιακή ταχύτητα άρθρωσης 1 | $\dot{q}_{1,max} = 10^\circ/s$ |
| Μέγιστη γωνιακή ταχύτητα άρθρωσης 2 | $\dot{q}_{2,max} = 8^\circ/s$ |

$q1_f = \mathrm{round}(4720/100) = 47^o$

$q2_f = -q1_f = -47^o$

Για τη χρήση της μεθόδου χρειαζόμαστε $\theta_0$,$\theta_f$ και θ''.
Έχουμε :
$\theta_0 = 0$
$\theta_{f1} = 47^o$
$\theta_{f2} = 47^o$
και $\theta'_{max1} = 10^o/s$ και $\theta'_{max2} = 8^o/s$.
$t_{f1} = |d\theta|/\theta'_{max1}\ s = (47\text{-}0)/10\ s = 4{,}7s$
$t_{f2} = |d\theta|/\theta'_{max2}\ s = (0\text{-}(-47))/8\ s = 5{,}875s$
άρα $t_f = 5{,}875s$.

Άρα πρέπει να βρούμε ένα $\theta''_{min}$ για την κάθε περίπτωση.

Για την πρώτη περίπτωση σύμφωνα με τις διαφάνειες έχουμε τον τύπο:
$\theta''_{min1} = + 4*d\theta/t_f^2 = 4*47^o/ (5{,}875s)^2 = 5{,}4468^o/s^2$.
με :
$d\theta = (\theta_{f1} - \theta_0) = 47^o - 0^o = 47^o$
$t_f = 5{,}875s$

οπότε το $t_{b1}$ με χρήση του τύπου από τις διαφάνειες και μίας τιμής $\theta''= 6^o/s^2>\theta'_{min1}$ έχουμε :
$t_b = t_f/2 - sqrt(\theta''_{min1}{}^2*t_f^2 - 4*\theta''_{min1}*d\theta)/2\theta''_{min1}$
$= 2{,}9375 - sqrt(1.242{,}5616 - 1.128)/12$
$= 2{,}9375 - 0.8919$
$= 2{,}0456$
με :
$t_f^2 = 34{,}5156$

Οπότε τελικά έχουμε :
$\theta_1(t) = 0 + ½*6*t^2 = 3*t^2$ , $0<= t <= t_b=2{,}0456$
$= 3*4{,}1845 + 3* 2{,}0456*(t - 2{,}0456) = 12{,}5535 + 12{,}2736*(t - 2{,}0456)$, $t_b=2{,}0456<= t<= t_f-t_b= 3{,}8294$
$= 47 - 3*(5{,}875-t)^2$, $t_f-t_b=3{,}8294<= t <= t_f=5{,}875s$
και
$\theta_1'(t) = 6*t$, $0<= t <= t_b=2{,}0456$
$= 12.2736$, $t_b=2{,}0456<= t<= t_f-t_b= 3{,}8294$
$= 35{,}25 - 6*t$ , $t_f-t_b=3{,}8294<= t <= t_f=5{,}875s$

Για την δεύτερη περίπτωση (με το δικό της σύστημα αξόνων, εφόσον θα κάνει στροφή μόνο $47^o$) σύμφωνα με τις διαφάνειες έχουμε τον τύπο:
$\theta''_{min2} = + 4*d\theta/t_f^2 = -4*47^o/ (5{,}875s)^2 = -5{,}4468^o/s^2$.

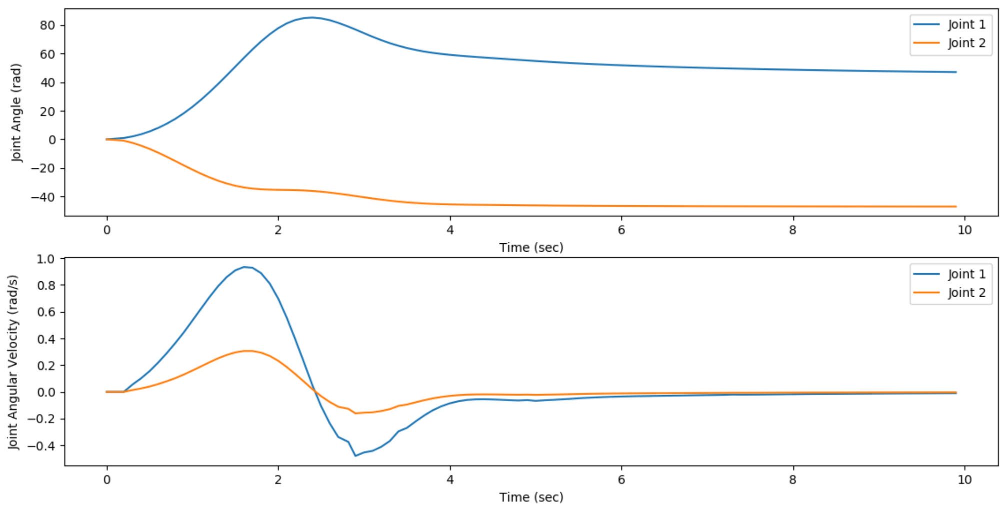
με :
$d\theta = (\theta_{f2} - \theta_0) = -47^o - 0^o = -47^o$
$t_f = 5{,}875s$

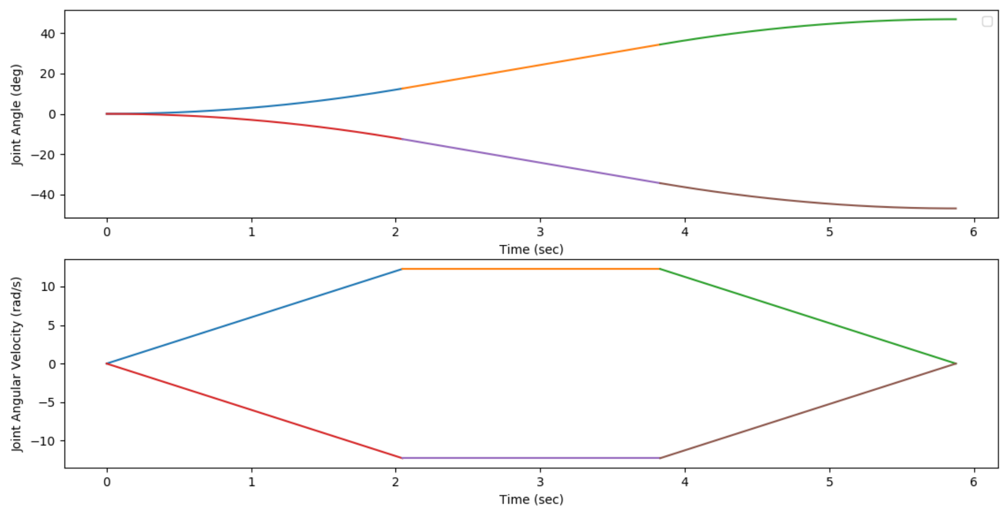
οπότε το $t_{b1}$ με χρήση του τύπου από τις διαφάνειες και μίας τιμής $|\theta''| = |-6^o/s^2| > |\theta'_{min1}|$ έχουμε ακριβώς την ίδια τιμή tb με την αρχική, άρα tb = 2,0456.

Οπότε τελικά έχουμε :
$\theta_2(t) = 0 + ½*(-6)*t^2 =- 3*t^2$ , $0<= t <= t_b$
$= -3*4{,}1845 +- 3* 2{,}0456*(t - 2{,}0456) = -12{,}5535 - 12{,}2736*(t - 2{,}0456)$, $t_b=2{,}0456<= t<= t_f-t_b= 3{,}8294$
$= - 47 + 3*(5{,}875-t)^2$, $t_f-t_b=3{,}8294<= t <= t_f=5{,}875s$
και
$\theta_2'(t) = -6*t$
$= -12{,}2736$, $t_b=2{,}0456<= t<= t_f-t_b= 3{,}8294$
$= -35{,}25 + 6*t$, $t_f-t_b=3{,}8294<= t <= t_f=5{,}875s$

**Τριτο πρόβλημα**

**Γραφική Παράσταση δεύτερου προβλήματος**



Στις παραπανω γραφικες παραστασεις εχουμε συγκρισεις μεταξυ των μετατοπισεων που σχεδιάστηκαν (1 και 3 γραφικη) και των γωνιακων ταχυτητων (2 και 4 γραφικη). Βλεπουμε πως και στις δυο τα αποτελεσματα συμπιπτουν με τα επιθυμητα, με τις μετατοπισεις να καταληγουν στο 47 και -47 μοιρες και στις δυο γραφικες και τις ταχυτητες να αυξανονται απο 0 εως 2 δευτερα και επειτα να πεφτουν μεχρι να μηδενιστουν