Рис. 1: Взаимодействие точечных зарядов

1 Закон Кулона

Единица измерения заряда – Кулон.

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{1}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{1\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2 \tag{3}$$

$$k = 8.98 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2 \approx 9.0 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2 \tag{4}$$

Упражнение 1

Найдите силу притяжения между протоном и электроном в атоме водорода рис. 1. Среднее расстояние между протоном и электроном $r = 0.53 \times 10^{-10} m$, заряд электрона $e = -1.6 \times 10^{-19} C$.

Ответ к упражнению 1

$$F = \frac{(9.0 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)(1.6 \times 10^{-19} C)(1.6 \times 10^{-19} C)}{(0.53 \times 10^{-10} m)^2} = 8.2 \cdot 10^{-8} N \tag{5}$$

2 Напряжённость электрического поля

Чтобы изучить поле, помещаем малые заряды в разные точки, делим силу на заряд получаем напряжённость поля в точке.

$$E = \frac{F}{q} = k\frac{Q}{r^2} \tag{6}$$

Упражнение 2

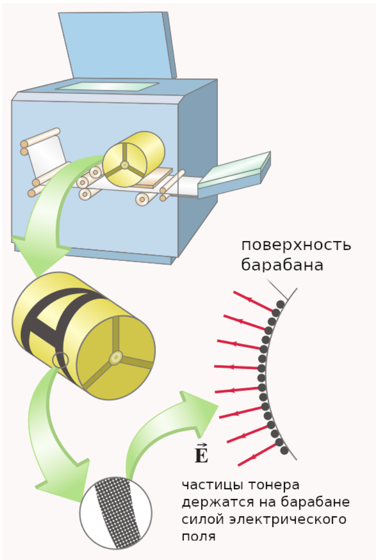

Рис. 2: Принтер

В лазерном принтере, положительные заряды помещаются на барабан, рис.2. Частицы тонера заряжаются отрицательно и высыпаются на барабан. Масса частицы тонера $9.0 \times 10^{-16} kg$ и несёт в среднем 20 дополнительных электронов, сообщающих заряд. Рассчитайте напряжённость поля на барабане, чтобы электрическая сила, действующая на частицу, в 2 раза превышала силу тяжести.

Ответ к упражнению 2

$$qE = 2mg \tag{7}$$

$q = 20e$, следовательно

$$E = 2mg/q = \frac{2(9.0 \times 10^{-16} kg)(9.8 m/s^2)}{20(1.6 \times 10^{-19} C)} = 5.5 \times 10^3 N/C \tag{8}$$

3 Непрерывное распределение заряда

Вклад в электрическое поле от элемента заряда dQ на расстоянии r

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \tag{9}$$

Тогда полное поле получаем суммированием по всем элементам

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} \tag{10}$$

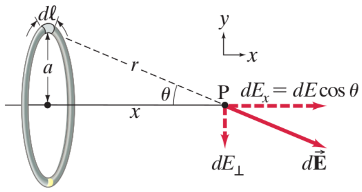

Рис. 3: Поле заряженного кольца

Упражнение 3

Кольцо радиуса a равномерно заряжено зарядом Q. Определите поле на оси кольца на расстоянии x от центра. См. рис.3.

Ответ к упражнению 3

Для решения задачи выразим dQ

$$dQ = \frac{Q}{2\pi a}dl = \frac{Q}{2\pi a}ad\phi = \frac{Qd\phi}{2\pi} \tag{11}$$

Перпендикулярные к оси компоненты будут компенсироваться, надо складывать только параллельные оси компоненты.

$$dE_x = \cos\theta dE = \frac{xdE}{\sqrt{x^2+a^2}} \tag{12}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2+a^2} \tag{13}$$

Получаем

$$dE_x = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0}\frac{Qxd\psi}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{14}$$

$$E = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{15}$$

Упражнение 4

На поверхности диска радиуса r равномерно распределён заряд плотности $\sigma\ C/m^2$. Вычислите поле в точке P на оси диска, на расстоянии z от центра диска. См. рис. 4.

Ответ к упражнению 4

Поле от кольца на ростоянии r, было найдено выше (15).

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{zdQ}{(z^2+r^2)^{3/2}} \tag{16}$$

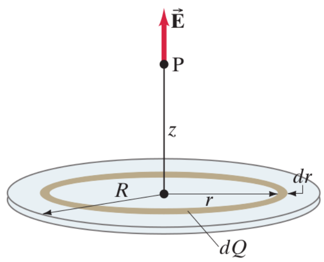

Рис. 4: Поле равномерно заряженного диска

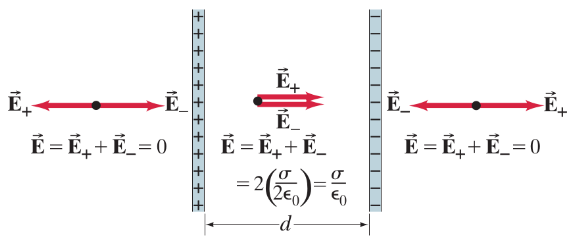

Рис. 5: Поле между заряженными пластинами

$$dQ = \sigma 2\pi r dr \tag{17}$$

$$dE = \frac{\sigma r z dr}{2\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \tag{18}$$

$$E = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \tag{19}$$

Если радиус диска большой, а расстояние z маленькое, то получаем

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{20}$$

Т.е. на малом расстоянии от большой заряженной пластины, в дали от краёв, поле однородное и имеет вид (20).

Упражнение 5

Две пластины, расположены на расстоянии d, много меньшем их размеров, плотность заряда на одной σ, плотность заряда другой $-\sigma$. Найдите поле между пластинами, рядом с центром. См. рис. 5.

Ответ к упражнению 5

Поле вблизи пластины, в дали от краёв можно считать однородным и равным $\sigma/2\epsilon_0$, см. решение задачи про поле диска. Между пластинами поля

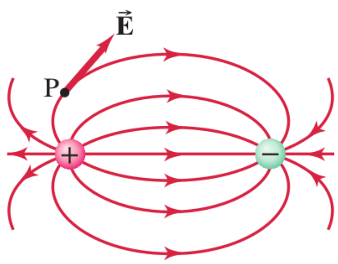

Рис. 6: Линии поля диполя

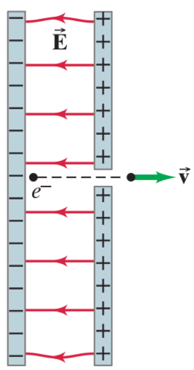

Рис. 7: Электрон ускоряется полем между пластинами

пластин будут усиливать друг друга, а с наружи ослаблять. Получаем, что поле между пластинами равно

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{21}$$

4 Линии поля

Вектора напряжённости образуют векторное поле. Линии поля проводятся так, что направление касательной к линии поля совпадает с направлением вектора поля в этой точке. Линии поля диполя показаны на рис. 6.

5 Движение заряженной частицы в электрическом поле

Упражнение 6

Электрон (масса $m = 9.1 \times 10^{-31} kg$) ускоряется однородным полем между двумя заряженными пластинами $\boldsymbol{E}$ ($E = 2.0 \times 10^4 N/C$). Расстояние между пластинами $d = 1.5 cm$. Электрон начинает движение от отрицательной пластины и проходит в отверстие на положительной, рассчитайте скорость вылетающего из отверстия электрона. См. рис. 7.

Ответ к упражнению 6

Величина ускорения электрона

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m} \tag{22}$$

$$a = \frac{(2.0 \times 10^4 N/C)(1.6 \times 10^{-19} C)}{9.1 \times 10^{-31} kg} = 3.5 \times 10^{15} m/s^2 \tag{23}$$

Используя второй закон Ньютона, получаем дифференциальные уравнения с начальными значениями

$$\begin{array}{lcl} \frac{dv(t)}{dt} & = & a \\ \frac{dx(t)}{dt} & = & v(t) \\ v(0) & = & 0 \\ x(0) & = & 0 \end{array} \tag{24}$$

Интегрируя первое уравнение, получаем

$$\begin{array}{lcl} \int \frac{dv(t)}{dt} dt & = & \int a \, dt \\ v(t) & = & at + C_1 \end{array} \tag{25}$$

Используя начальное условие на скорость, получаем

$$v(t) = at \tag{26}$$

Подставляя (26) во второе уравнение (24), получаем

$$\frac{dx(t)}{dt} = at \tag{27}$$

Интегрируя последнее и используя начальное значение координаты, получаем

$$\begin{array}{lcl} \int \frac{dx(t)}{dt} \, dt & = & \int at \, dt \\ x(t) & = & \frac{at^2}{2} + C_0 \\ x(0) & = & 0 \\ x(t) & = & \frac{at^2}{2} \end{array} \tag{28}$$

Получаем

$$\begin{array}{lcl} v(t) & = & at \\ x(t) & = & \frac{at^2}{2} \end{array} \tag{29}$$

Заменяя в последнем равенстве $x(t)$ на d, находим

$$d = \frac{at^2}{2} \tag{30}$$

Выражаем время и подставляем в формулу скорости

$$v = \sqrt{2da} = \sqrt{2(1.5 \times 10^{-2} m)(3.5 \times 10^{15} m/s^2)} = 1.0 \times 10^7 m/s \tag{31}$$

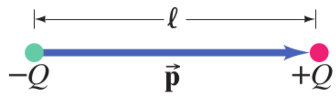

Рис. 8: Электрический диполь

6 Электрический диполь

Два одинаковой величины, противоположных точечных заряда Q и $-Q$, расположенные на расстоянии l друг от друга, называют электрическим диполем. Вектор, направленный от положительного к отрицательному заряду, с величиной lQ, называют дипольным моментом. См. рис. 8.