1 Билет

1. Стили программирования

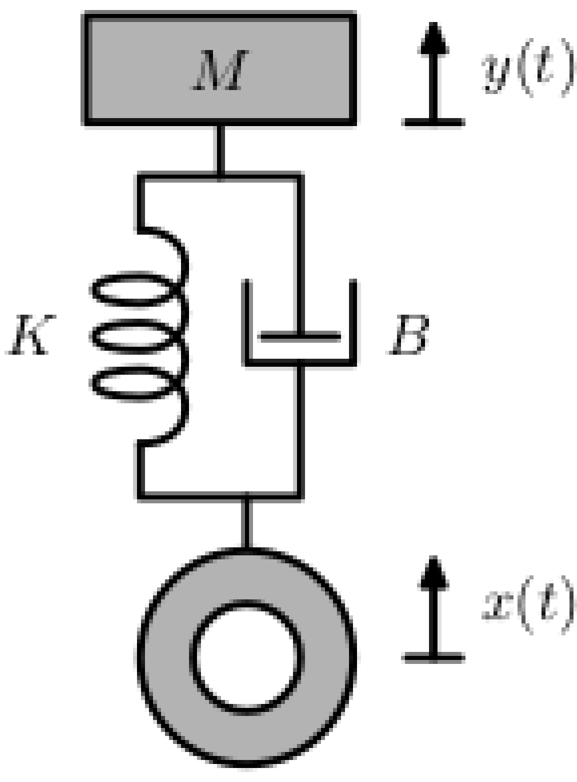
2. Для следующей системы найдите частоту ω_m, для которой величина усиления наибольшая.

$$\frac{1}{1+s+s^2}$$

2 Билет

1. Автоматы

2. Колеса прикреплены к автомобилю через систему подвески, предназначенную для минимизации вибраций салона, возникающих при движении по неровной местности. Система подвески состоит из пружины и амортизатора, которые сжимаются при проезде колеса по неровностям, поэтому резкое движение колеса не передается напрямую в салон. Пружина создает силу, удерживающую салон на нужном расстоянии от поверхности дороги, а амортизатор добавляет фрикционное демпфирование. В этой задаче вы определите, какое демпфирование желательно, проанализировав простую модель системы подвески автомобиля, показанную ниже.



Модель состоит из массы M, которая представляет массу автомобиля, которая соединена с колесом через пружину и амортизатор. Вертикальное смещение колеса от его положения равновесия принимается в качестве входных данных x(t). Вертикальное смещение массы из положения равновесия принимается за выходной сигнал y(t). Предполагается, что пружина подчиняется закону Гука, так что создаваемая ею сила равна константе, умноженной на величину сжатия пружины относительно ее равновесного сжатия. Предполагается, что амортизатор создает силу, которая является постоянной величиной, умноженной на скорость, с которой амортизатор сжимается. Обратите внимание, что, относя x(t) и y(t) к их положениям равновесия, силой гравитации можно пренебречь. Предположим, что M = 1 и K = 1.

Определите дифференциальное уравнение, связывающее входной сигнал x(t) и выходной сигнал y(t).

Определите и постройте импульсную характеристику системы, когда B = 0. На основе этого результата дайте физическое объяснение проблемы, которая возникла бы, если бы в системе не было амортизатора.

3 Билет

1. Сигналы и системы

2. Отклик на импульс CT системы имеет вид

$$h(t) = e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \phi) u(t)$$

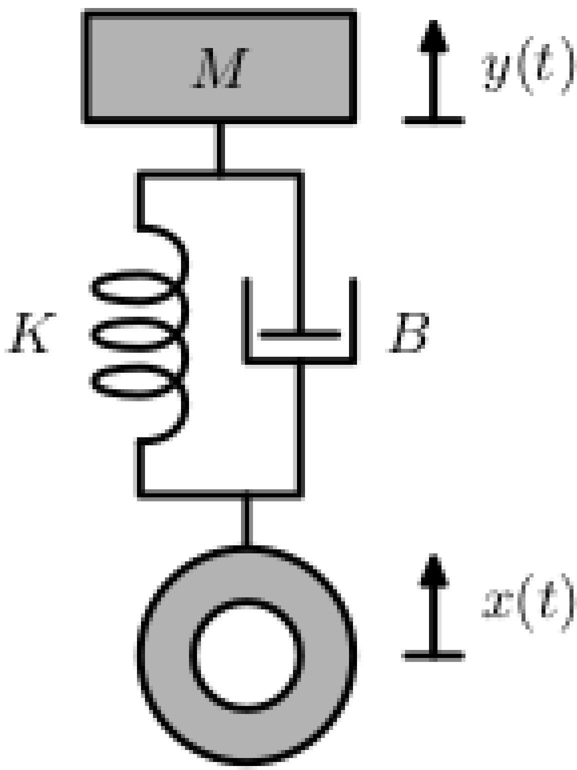
   где параметры σ, ω_d и ϕ связаны с параметрами характеристического полинома системы: $s^2 + Bs + C$.

   Определите выражения для σ и ω_d (не ϕ) через B и C.

4 Билет

1. Обратная связь, полюса и моды

2. Колеса прикреплены к автомобилю через систему подвески, предназначенную для минимизации вибраций салона, возникающих при движении по неровной местности. Система подвески состоит из пружины и амортизатора, которые сжимаются при проезде колеса по неровностям, поэтому резкое движение колеса не передается напрямую в салон. Пружина создает силу, удерживающую салон на нужном расстоянии от поверхности дороги, а амортизатор добавляет фрикционное демпфирование. В этой задаче вы определите, какое демпфирование желательно, проанализировав простую модель системы подвески автомобиля, показанную ниже.



Модель состоит из массы M, которая представляет массу автомобиля, которая соединена с колесом через пружину и амортизатор. Вертикальное смещение колеса от его положения равновесия принимается в качестве входных данных x(t). Вертикальное смещение массы из положения равновесия принимается за выходной сигнал y(t). Предполагается, что пружина подчиняется закону Гука, так что создаваемая ею сила равна константе, умноженной на величину сжатия пружины относительно ее равновесного сжатия. Предполагается, что амортизатор создает силу, которая является постоянной величиной, умноженной на скорость, с которой амортизатор сжимается. Обратите внимание, что, относя x(t) и y(t) к их положениям равновесия, силой гравитации можно пренебречь. Предположим, что M = 1 и K = 1.

Определите выражение для наименьшей положительной постоянной затухания B, при которой полюса системы имеют действительные значения. Нарисуйте импульсную характеристику системы для этого значения B. На основе этого результата дайте физическое объяснение тому, как амортизатор улучшает работу системы подвески.

5 Билет

1. Непрерывные системы
2. Расширьте метод линейной интерполяции на два измерения. Напишите программу, которая использует этот метод для увеличения следующего изображения с его текущих размеров (212 × 216) в три раза. Сравните результат линейной интерполяции с результатом повторения каждого значения пикселя 3×3 раза (см. приложение).

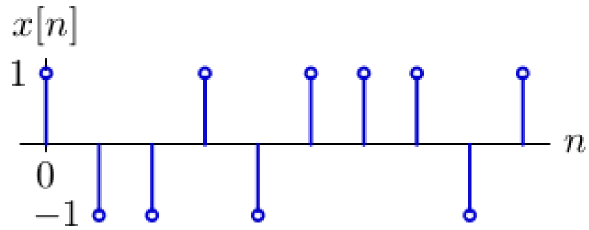
   Цифровая форма этого изображения доступна на

   https://vadimgb.github.io/psets/data/images/convolution/zebra.jpg

6 Билет

1. z-преобразования

2. Улыбка Рассмотрим последовательность единиц и -1, показанную ниже как x[n].



В этом $x[n]$ имеет единственное вхождение шаблона -1, -1, 1. Это происходит начиная с n = 1 и заканчивая n = 3. Один из методов автоматического обнаружения определённых шаблонов этого типа называется «согласованной фильтрацией». Пусть p[n] представляет интересующий шаблон, перевёрнутый вокруг n = 0. Тогда экземпляры шаблона можно найти, определив моменты времени, когда y[n] = (p * x)[n] максимизируется.

Определите согласованный фильтр p[n], который будет находить вхождения последовательности: -1, -1, 1.

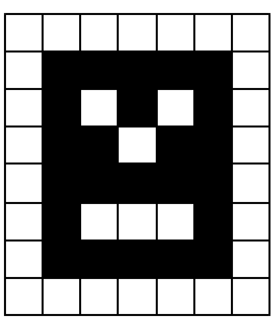
Спроектируйте $p[n]$ так, чтобы $(p*x)[n]$ имело максимумы в точках, центрированных на желаемом шаблоне, т. е. в точке $n = 2$ для приведённой выше последовательности.

Тот же подход можно использовать для поиска шаблонов на изображениях путём обобщения оператора свёртки на два измерения:

$$y[n, m] = (x * p)[n, m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[k, l]p[n - k, m - l].$$

Файл

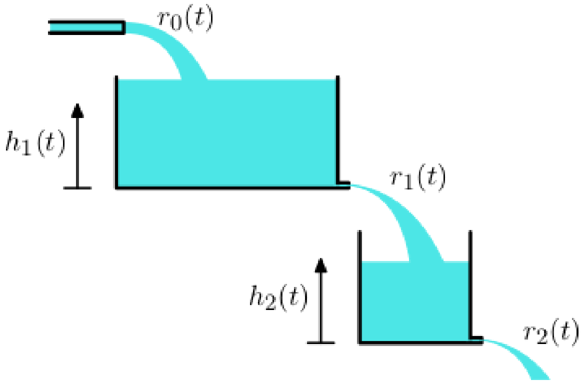
psets/data/images/convolution/findsmiley.jpg содержит случайный набор белых пикселей (код 255) и чёрных пикселей (0), а также один экземпляр следующего смайлика:



Найдите строку и столбец findsmiley, соответствующий носу смайлика. Примечание. Согласованная фильтрация будет работать лучше всего, если совпадение белых пикселей И совпадение чёрных пикселей положительно повлияют на ответ. По этой причине 255 и 0 могут быть не оптимальным выбором для значений, связанных с белыми и чёрными пикселями.

7 Билет

1. Преобразование Лапласа
2. На следующем рисунке показана каскадная система из двух резервуаров для воды. Вода течёт
   - в первый бак скорость $r_0(t)$,
   - из первого бака и во второй скорость $r_1(t)$,
   - скорость вытекания из второго $r_2(t)$.



Скорость потока из каждого резервуара пропорциональна высоте воды в этом резервуаре:

$$r_1(t) = k_1 h_1(t),$$
$$r_2(t) = k_2 h_2(t),$$

где k_1 и k_2 каждый 0.2 метра2/секунду. Оба резервуара имеют высоту 1 м. Площадь поперечного сечения резервуара 1 $A_1 = 4^2$, второго резервуара $A_2 = 2^2$. В момент времени t = 0 оба резервуара пусты.

Пусть $x(t) = r_0(t)$ представляет собой вход резервуарной системы, а $y(t) = r_2(t)$ представляет выход. Определите связь между входом и выходом. Выразите это соотношение в виде дифференциального уравнения вида

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ... = x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + ...$$

где $x(t) = 1$.

Используйте приближение Эйлера вперёд для создания дискретной аппроксимации дифференциального соотношения между $r_1(t)$ и $r_0(t)$ следующим образом. Пусть $r_0(t)$ и $r_1(t)$ аппроксимируются дискретными последовательностями $r_0[n] = r_0(nT)$ и $r_1[n] = r_1(nT)$, где T представляет собой размер шага. Затем аппроксимируем производную по непрерывному времени в момент времени nT первой разностью:

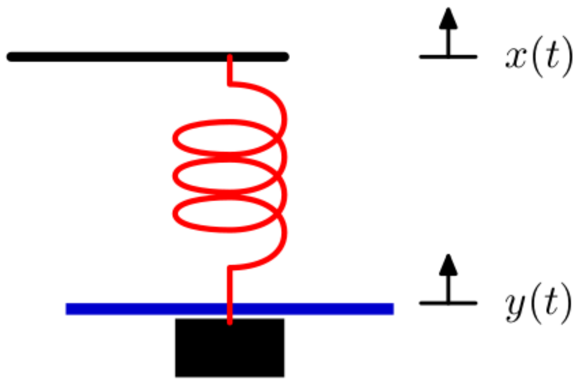
$$\left.\frac{dr_1(t)}{dt}\right|_{t=nT} \approx \frac{r_1[n+1] - r_1[n]}{T}$$

Решите это разностное уравнение для $r_1[n+1]$ через значения $r_1[k]$ и $r0[k]$, где k < n + 1, и введите результат ниже.

Используйте Python, чтобы решить эту рекурсию для особого случая, когда входное значение $r_0[n]$ поддерживается постоянным на уровне 0.13/, резервуар 1 изначально пуст и T = 1 секунда (см. пример кода в поле ниже). Постройте график вашего решения для 0 < t < 60. Также отобразите аналитический результат из части с на тех же осях. Определите максимальную разницу между аналитическими и численными результатами.

8 Билет

1. Дискретная аппроксимация непрерывных систем
2. На следующем рисунке показана система - масса на пружинке. Входные данные x(t) представляют положение верхнего конца пружины. Выходные данные y(t) представляют положение массы.



Масса M = 1 кг, жёсткость пружины K = 1 Н/м. Предположим, что пружина подчиняется закону Гука и что исходное положения определено так, что если входной сигнал x(t) равен нулю, то положение покоя y(t) также равно нулю.

Определите дифференциальное уравнение, связывающее входной сигнал x(t) и выходной сигнал y(t).

Вычислите отклик на вход ступенька.

Используйте приближение Эйлера для численной аппроксимации решения, для отклика на ступеньку.

9 Билет

1. Свёртка
2. Определите Z-преобразование (включая область сходимости) для каждого из следующих сигналов:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$$
$$X_1 =$$
$$ROC$$

10 Билет

1. Частотная характеристика
2. Определите Z-преобразование (включая область сходимости) для каждого из следующих сигналов:

$$x_2[n] = (1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

11 Билет

1. График Боде
2. Определите преобразования Лапласа (включая области сходимости) каждого из следующих сигналов:

$$x_1(t) = e^{-2(t-3)}u(t-3)$$

$$X_1 =$$

$$ROC:$$

12 Билет

1. Представление Фурье
2. Определите преобразования Лапласа (включая области сходимости) каждого из следующих сигналов:

$$x_2(t) = (1 - (1-t)e^{-3t})u(t)$$

$$X_2 =$$

$$ROC:$$

13 Билет

1. Ряды Фурье
2. Отклик на единичный импульс DT системы имеет вид

$$h[n] = r_0^n \cos(\Omega_0 n + \Phi)u[n]$$

   где параметры r_0, Ω_0, Φ связаны с параметрами характеристического полинома системы: $z^2 + Dz + E$.

   Определите выражение для r_0, Ω_0 (не Φ) в терминах D, E.