1.0 Quadriken mit deren Normalformen

Eine Quadrik hat folgende Gestallt:

$$\vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{\alpha}^T\vec{x} + \alpha = 0$$

Der erste Schritt bei der Normalformbestimmung ist es A symmetrisch zu machen. Dies geschieht durch:

$$\bar{A} = 1/2 \cdot (A + A^T)$$

Nun wird A diagonalisiert. Ist das erste Element auf der Diagonalen von A ungleich 0 so erreicht man die Diagonalisierung durch die affine Koordinatentransformation:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Wobei die a_{ij} die Elemente der Matrix A sind. Durch diese Transformation wird A in $\bar{A}$ übergeführt:

$$\bar{A} = T^T AT$$

Mit den übrigen Diagonalelementen wird entsprechend verfahren. Tritt jedoch in einer Zeile der Fall ein, daß das Diagonalelement Null ist aber der rest der Zeile nicht vollständig aus Nullen besteht, so kann durch die Transformation T:

$$T = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & -1 & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

die Lösung des Problems auf den oben beschriebenen Fall zurückgeführt werden. Wenn die Zeile völlig aus Nullen besteht giebt es in dieser Zeile nichts zu tun.

Die Matrix A ist nun vollständig diagonalisiert. Die Komponenten des Vektors $\vec{\alpha}^T$ können auch noch zum verschwinden gebracht werden, wenn zu dieser Komponente auf der Diagonalen der Matrix A eine entsprechende Komponente existiert. Sei das Diagonalelement α_{ii} und das Vektorelement heiße α_i. Die Vektorkomponente kann nun durch die folgende affine Koordinatentransformation zum verschwinden gebracht werden:

$$T = E\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\alpha_i/\alpha_{ii} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führt man diese Transformationen fort, so steht nun entweder auf der Diagonalen der Matrix ein Element, oder im Vektor. Nun indiziert man zur besseren Übersichtlichkeit die Basisvektoren um, so daß die Matrix diagonalisiert ist, und nach unten hinaus die Nullen enthält, d.h. die letzten Komponenten des Vektors sind evtl. besetzt.

Für den Fall, daß der Vektor jetzt nicht der Nullvekotr ist: Sei die erste Komponente des Vektors, die ungleich Null ist die $(r+1)$te Komponente. Durch die Transformation; Die Einheitsmatrix mit der $(r+1)$ten Zeile:

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & \text{Reihe}_{(\text{r+1})} & \phantom{-\alpha_{r+2}/\alpha_{r+1}} & & \phantom{-\alpha_n/\alpha_{r+1}} \end{array} \\ \text{Zeile}_{(\text{r+1})} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 2/\alpha_{r+1} & -\alpha_{r+2}/\alpha_{r+1} & \dots & -\alpha_n/\alpha_{r+1} \end{pmatrix} \end{array} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir nun drei verschiedene Normalformen:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & \alpha_{11}x_1^2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r^2 & = 0 \\ \text{II} & \alpha_{11}x_1^2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r^2 + 2x_{r+1} & = 0 \\ \text{III} & \alpha_{11}x_1^2 + \ldots + \alpha_{rr}x_r^2 + \alpha & = 0 \end{array}$$

Haben zwei Quadriken unterschiedliche Normalformen, so sind sie nicht affinäquivalent, d.h. sie können nicht durch eine affine Abbildung (Transformation) ineinander übergeführt werden.

2.0 Mittelpunkte von Quadriken

Die Gleichung der Quadrik lautet.

$$\vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{\alpha}^T\vec{x} + \alpha = 0$$

Um die Mittelpunkte der Quadrik zu finden ist lediglich das lineare Gleichungssystem:

$$A\vec{m} + \vec{\alpha} = \vec{o}$$

zu lösen. Die Lösungsmenge ist die Menge der Mittelpunkte.

Der Begriff Mittelpunkt einer Quadrik ist affininvariant, d.h. auch nach einer affinen Transformation bleibt der Bildpunkt des Mittelpunktes Mittelpunkt des Bildes der Quadrik.