

Lección 1-Introducción a los Polinomios y Suma y Resta de Polinomios

Dra. Noemí L. Ruiz Limardo

2009 ©

Objetivos de la Lección

Al finalizar esta lección los estudiantes:

- Identificarán, de una lista de expresiones algebraicas, aquellas que representan polinomios
- Evaluarán polinomios
- Clasificarán polinomios de acuerdo a la cantidad de términos que tenga
- Identificarán correctamente el grado de un polinomio
- Sumarán y restarán polinomios correctamente
- Resolverán problemas donde se aplique la suma y resta de polinomios

Introducción

- El lenguaje que utiliza el álgebra se fundamenta en expresiones algebraicas. Existe una clase importante de expresiones algebraicas llamada “**Polinomios**”. El estar familiarizado con polinomios y saber operar con ellos es de fundamental importancia en nuestro desarrollo matemático.
- Sus aplicaciones son múltiples en la economía, las ciencias sociales, las ciencias naturales, la ingeniería, la computación y la medicina, entre otras.

Introducción

Por ejemplo:

- En ingeniería se utilizan métodos numéricos de interpolación en los cuales se utilizan polinomios.
- En química se utilizan polinomios para el cálculo de mezclas, es decir, calcular el porcentaje de cada compuesto químico presente en la mezcla, así como sus variantes para modificar dicha mezcla.
- En la economía y las ciencias sociales se utilizan polinomios para representar el comportamiento de relaciones o funciones donde ocurren patrones.

Introducción

- En la medicina y las ciencias naturales se utilizan polinomios para representar y estudiar el comportamiento de organismos vivos y la naturaleza.
- En esta lección conoceremos lo que es un polinomio y nos familiarizaremos con el vocabulario y los conceptos básicos, incluyendo cómo se suman y restan polinomios.

Definiendo el concepto Polinomio

- Antes de dar una definición formal de lo que es un polinomio, presentaremos algunos casos de expresiones algebraicas.
- La tabla que aparece en la próxima pantalla ilustra ejemplos de expresiones algebraicas. Algunas de estas expresiones representan polinomios.
- Observa cada ejemplo para ver si puedes identificar las características que tiene que tener una expresión algebraica para que sea un polinomio.

Ejemplo	Expresión Algebraica	¿Es polinomio?
1	$7x^3$	Sí
2	$7x^{-3}$	No
3	$4x$	Sí
4	$\frac{4}{x}$	No
5	$2x^2 + 1$	Sí
6	$2x^{-2} + 1$	No
7	$\frac{2}{x^2} + 1$	No
8	$3x^2 - x + 1$	Sí
9	$3x^{\frac{1}{2}} - x + 1$	No
10	$\sqrt{x} - \frac{2}{3}x + 3$	No
11	$\sqrt{5} x^2 - \frac{2}{3}x + 3$	Sí

Guiando la reflexión

- Compara los ejemplos 1 y 2.

$$7x^3 \text{ y } 7x^{-3}$$

- ¿Qué podemos concluir respecto a las expresiones algebraicas que son polinomios?
- Un polinomio no puede tener exponentes negativos.
- ¿Podría tener exponente cero como en: $6x^0$?
- Sí, los exponentes pueden ser positivos o cero.

Guiando la reflexión

- Compara los ejemplos 3 y 4.

$$4x \quad \text{y} \quad \frac{4}{x}$$

- ¿Qué podemos concluir respecto a las expresiones algebraicas que son polinomios?
- Un polinomio no puede tener variables en el denominador.
- ¿Podría tener fracciones un polinomio?
- Sí, pero si la fracción tiene variables, las variables no pueden estar en el denominador.
- Otros ejemplos de polinomios podrían ser:

$$\frac{1}{3}x + 8 \quad \text{ó} \quad 4x - \frac{2x}{3}$$

Guiando la reflexión

- Compara los ejemplos 8 y 9.

$$3x^2 - x + 1 \quad \text{y} \quad 3x^{\frac{1}{2}} - x + 1$$

- ¿Qué podemos concluir respecto a las expresiones algebraicas que son polinomios?
- Un polinomio no puede tener exponentes fraccionarios.
- Los exponentes tienen que ser enteros.

Guiando la reflexión

- Compara los ejemplos 10 y 11.

$$\sqrt{x} - \frac{2}{3}x + 3 \quad \text{y} \quad \sqrt{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 3$$

- ¿Qué podemos concluir respecto a las expresiones algebraicas que son polinomios?
- Un polinomio no puede tener la variable dentro de un radical.
- ¿Podría un polinomio tener radicales?
- Sí, pero si tiene radicales, éstos no pueden contener variables.
- Otros ejemplos de polinomios podrían ser:

$$x^6 - 3x^4 + \sqrt{15} \quad \text{ó} \quad \sqrt{2}x$$

Guiando la reflexión

- ¿Podría un polinomio tener un exponente que sea una variable como en $6x^y - 8x + 3y$?
- No, este tipo de expresión no se considera polinomio.
- Veamos ahora la definición formal de polinomio.

Definición de Polinomio

Definición de Polinomio

- Un **polinomio** es una expresión algebraica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ y a_0 representan números reales y, $n, n-1, \dots$, son exponentes que representan números enteros no negativos (pueden ser enteros positivos o cero).
- La letra “x” representa la variable, aunque es posible utilizar otras letras diferentes (y, z, u,...) para representar la variable.
- También, un polinomio puede tener más de una variable aunque la definición presente una sola variable.

Resumen de Características de Polinomios

- Los exponentes de las variables son números enteros no negativos.
 - Los exponentes no pueden ser fraccionarios
 - Los exponentes no pueden ser negativos
 - Los exponentes no pueden ser variables
- Las variables de un polinomio no pueden aparecer en el denominador de una fracción.
- Las variables de un polinomio no pueden aparecer dentro de un radical.

Reflexión

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Según la definición de polinomios, las expresiones a_n representan números reales.
- Observa que el último término a_0 es una constante ya que no tiene variables.
- Observa que en la definición los exponentes de las variables van disminuyendo hasta llegar al último término que no tiene variables
- Aunque la definición presenta los exponentes en orden decreciente, en realidad un polinomio puede tener los términos en cualquier orden.

Ejercicio 1

Identifica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas representan polinomios. Aquellos que no sean polinomios, indica la razón.

ITEM	EXPRESION ALGEBRAICA	POLINOMIO (SI / NO)
1	$\frac{1}{X-1}$	No, se observa la variable en un denominador
2	$\frac{3}{4}X - 3$	Si
3	$\frac{5x}{7} + 3x - \frac{1}{2}$	Si
4	$X^{-5} + 3X - 2$	No, se observa un exponente negativo de una variable
5	$\sqrt{2X+1}$	No, se observa una variable dentro de un radical
6	$8X^5Y^2Z^3$	Si
7	$2x^{\frac{1}{2}} + 3y$	No, se observa una fracción como exponente de una variable
8	$Ax^2 + Bx + C$	Si
9	-4	Si
10	$2x^y + 3x - 1$	No, se observa una variable como exponente de otra variable
11	$0.25X^3 - 1$	Si
12	$\sqrt{3}x - \frac{2}{5}x$	Si
13	$2x^{0.25} + 6$	No, se observa un exponente fraccionario
14	$2^3 x^5 + 2x - 1$	Si

Evaluación de Polinomios

Evaluación de un Polinomio

- Los polinomios representan números dependiendo del valor que se le asigne a sus variables.
- Por ejemplo, si consideramos el polinomio $2x + 3$, y le asignamos a la variable x el valor de 1, entonces el polinomio realmente representa al número cinco.
- Veamos:

$$\begin{aligned} &2x + 3 \\ &2(1) + 3 \\ &2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

- El proceso anterior se conoce como **evaluación de un polinomio**.

Evaluación de un Polinomio

- Evaluación de un polinomio significa hallar el valor del polinomio, dados los valores de las variables.
- Para poder evaluar un polinomio necesitamos conocer los valores de las variables.
- Luego sustituimos esos valores donde aparezcan las variables y efectuamos las operaciones indicadas para hallar el valor numérico que asume el polinomio.
- Veamos varios ejemplos de este proceso.

Ejemplo 1

- Si $x = -1$, halla el valor de: $\frac{3}{4}x - 3$

$$\frac{3}{4}x - 3$$

$$\frac{3}{4} \bullet (-1) - 3$$

$$-\frac{3}{4} - 3$$

$$-\frac{3}{4} + -\frac{3}{1}$$

$$-\frac{3}{4} + -\frac{12}{4}$$

$$= -\frac{15}{4}$$

Ejemplo 2

- Si $x = -2$, evalúa el polinomio: $x^2 - 3x + 8$

$$x^2 - 3x + 8$$

$$(-2)^2 - 3(-2) + 8$$

$$4 + 6 + 8$$

$$= 18$$

Otras Definiciones relacionadas con Polinomios

Coeficiente

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- En la definición de polinomio presentada anteriormente, cada número a_i que aparece delante de cada variable x^i se llama el **coeficiente** de x^i .
- Ejemplo:
 - a_n es el coeficiente de x^n
 - a_{n-1} es el coeficiente de x^{n-1}
 - a_{n-2} es el coeficiente de x^{n-2}
 - a_2 es el coeficiente de x^2
 - a_1 es el coeficiente de x
 - a_0 es el coeficiente de x^0 , o sea la constante.

Coeficiente

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Cabe señalar que el término x^0 no se escribe ya que se sobreentiende que es igual a 1 ($x^0 = 1$).
- Por ejemplo:
 - Se acostumbra escribir el polinomio $5x + 3x^0$ como $5x + 3$.
- Los coeficientes pueden ser cualesquiera números reales: enteros, fracciones, números negativos, números decimales o números irracionales.
- En general, un coeficiente puede ser cualquier número. Es importante identificar correctamente los coeficientes de un polinomio.
- Veamos varios ejemplos.

Ejemplo 1

- Halla **todos** los coeficientes del siguiente polinomio: $3x^5 + 2x^4 - \sqrt{2} x^2 - 5$

DESCRIPCIÓN	COEFICIENTE
a_5 es el coeficiente de x^5	$a_5 = 3$
a_4 es el coeficiente de x^4	$a_4 = 2$
a_3 es el coeficiente de x^3 . Observe que x^3 no aparece en el polinomio. Por lo tanto, se asume que el polinomio incluye el término $0x^3 = 0$.	$a_3 = 0$
a_2 es el coeficiente de x^2	$a_2 = -\sqrt{2}$
a_1 es el coeficiente de x . Observe que x no aparece en el polinomio. Por lo tanto, se asume que el polinomio incluye el término $0x = 0$.	$a_1 = 0$
a_0 es la constante o el coeficiente de $x^0=1$	$a_0 = -5$

- Todos** los coeficientes son: $\{, 2, 0, -\sqrt{2}, 0, -5$

Reflexión

- En ocasiones se utilizan letras diferentes para designar coeficientes en un polinomio.
- Por ejemplo:

Todos los coeficientes del polinomio

$5ax^3 - 2bx^2 + 5$ son: $\{5a, -2b, 0, 5\}$ ya que:

$$a_3 = 5a$$

$$a_2 = -2b$$

$$a_1 = 0 \text{ (observe que } x \text{ no aparece)}$$

$$a_0 = 5$$

Reflexión

- A veces nos referimos a los coeficientes de los términos que están presentes en el polinomio, no a todos.
- Por ejemplo: Halla los coeficientes de los términos del polinomio: $3x^4 - 2x^2 + 8$
- Como los términos presentes son x^4 , x^2 , x^0 , los coeficientes de los términos son: 3, -2 y 8.
- Observa que el ejemplo no nos pide **todos** los coeficientes, sino los coeficientes de los términos del polinomio.

Coeficiente Líder

- El coeficiente líder del polinomio es el coeficiente a_n del polinomio, o sea el coeficiente del término donde aparece el exponente mayor, en este caso n .
- Ejemplo 1:
Halla el coeficiente líder de: $2x^3 - 5x^2 + 1$
- Como el exponente mayor de la variable es 3, el **coeficiente líder es 2**, ya que 2 es el coeficiente del término donde aparece el exponente mayor.

Coeficiente Líder

- Ejemplo 2:

Halla el coeficiente líder de: $x^4 - 5x^2 - 3x^5$

- En este caso, tenemos que el exponente mayor es 5 por tanto el **coeficiente líder es -3.**

Término Constante

- El término constante del polinomio es el coeficiente a_0 del polinomio, o sea el coeficiente del término donde aparece x^0 .
- Se llama constante porque como no hay variable, solo está a_0 y a_0 es un número, o sea una constante.
- Ejemplo 1:
Halla el término constante de: $2x^3 - 5x^2 + 1$
- El **término constante es 1.**

Forma Decreciente

- Se dice que un polinomio está escrito en forma **decreciente** si los exponentes de x van descendiendo en valor (de mayor a menor).
- Considere los siguientes dos casos:
CASO #1: $2x^3 - 5x^2 + 1$
CASO#2: $x^4 - 5x^2 - 3x^5$
- El polinomio en el *caso #1* está escrito en forma decreciente ya que los exponentes van de mayor a menor.
- No ocurre así con el polinomio en el *caso #2*, ya que aunque al principio parece que los valores de los exponentes descienden, luego aumentan al final (el exponente de x^5 es 5).
- Se acostumbra escribir los polinomios en forma decreciente.

Grado de un Término

- El exponente de la variable en un término del polinomio se conoce como el **grado de un término** en el polinomio.
- Si el **término incluye más de una variable**, entonces el grado del término es la suma de los exponentes de las variables en ese término.
- Considere los siguientes casos:

CASO	TÉRMINO	GRADO DEL TÉRMINO
1	$7x^2y^3$	El grado del término es 5 ya que se suman los exponentes de las variables que lo componen: $2+3=5$
2	$2x^3$	El grado del término es 3 ya que este es el exponente de la variable.

Grado de un Polinomio

- El **grado del polinomio** es el grado mayor de todos los términos del polinomio.
- Para hallar el grado de un polinomio,
 - Primero hay que hallar el grado de cada término.
 - Luego se mira cuál es el grado del término que tenga el grado mayor.
 - El grado mayor será el grado del polinomio.

Grado de un Polinomio

- El grado del término constante es 0. Recuerda que el término constante es a_0 y la variable de este término es x^0 , por tanto el exponente de la variable es cero.
- El único término constante que no tiene grado es el número cero. Aunque el cero también es un polinomio, no se le asigna grado alguno.
- Ejemplo:
Halla el grado del polinomio: $7x^2y^3 + 2x^3 + 5$
- El grado del primer término es 5, el del segundo término es 3 y el del tercer término es 0. Como el grado mayor es 5, el **grado del polinomio es 5**.

Clasificación de Polinomios

- Los polinomios se pueden clasificar de varias maneras. Una de ellas es de acuerdo a la cantidad de términos que tiene.
- Para clasificar los polinomios de acuerdo a la cantidad de términos que poseen se utilizan los siguientes conceptos:

CONCEPTO	DESCRIPCION	EJEMPLO
MONOMIO	Cuando el polinomio tiene un solo término	$7x^2y^3$
BINOMIO	Cuando el polinomio tiene dos términos	$2x + 5$
TRINOMIO	Cuando el polinomio tiene tres términos	$x^2 + 5x - 3$

- Cuando el polinomio tiene más de tres términos no usamos un nombre particular sino más bien lo llamamos polinomio.

Ejemplos

- Identifica el tipo de polinomio:

Ejemplo	Tipo de Polinomio
$x^2 - y^2$	Binomio
$3x^2y^3z$	Monomio
$12x^5 + 4x^3 - 6x + 1$	Polinomio
-5	Monomio
$x^2 - 10x + 25$	Trinomio

Suma de Polinomios

Introducción a la Suma de Polinomios

- Los polinomios son expresiones algebraicas que representan números. Por tal razón, podemos realizar operaciones con ellos de la misma manera que lo hacemos con los números.
- En esta sección veremos cómo se realiza la operación de suma.
- Para ello es necesario definir primero lo que son **términos semejantes**.

Términos Semejantes

- Definición de términos semejantes:
Dos términos son **semejantes** si ambos tienen las mismas variables con los mismos exponentes.
- El saber reconocer si un grupo de términos son o no semejantes nos ayuda a realizar correctamente la suma de polinomios.
- En la próxima pantalla veremos cómo reconocer términos semejantes.

Considera los siguientes casos...

CASO	TÉRMINOS	SEMEJANTES (SI / NO)
1	$2x^3, 5x^3$	Si. Son semejantes ya que ambos tienen la variable x elevada a la misma potencia 3.
2	$3x^5, 3x^2$	No. No son semejantes ya que la variable x esta elevada a potencias diferentes.
3	$3x^2y^3, 2x^3y^2$	No. No son semejantes ya que los exponentes en las variables no coinciden. En el primer término la x tiene un exponente 2, mientras que la x en el segundo término tiene un exponente 3. La misma situación ocurre con la y .
4	$2x, 2y$	No. No son semejantes ya que las variables en ambos términos son diferentes.
5	$-3x^2y^3, 5x^2y^3$	Si. Son semejantes ya que ambos términos tienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.
6	3, 5	Si. Son semejantes ya que ambos términos son constantes. Se asume que ambos tienen la variable x elevada al exponente cero ($x^0=1$).

Resumen

- Para que sean semejantes dos términos de un polinomio, éstos tienen que tener las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.
- Si no tienen las mismas variables, no son semejantes.
- Si tienen las mismas variables pero los exponentes no coinciden, no son semejantes.
- Los términos constantes se consideran semejantes. Recuerda que el término constante es a_0 y la variable de este término es x^0 , por tanto el exponente de la variable es cero. Así que dos términos constantes tienen la misma variable elevada al mismo exponente.

Proceso para Sumar Polinomios

- En suma de polinomios **solo se pueden sumar términos semejantes**.
- El procedimiento consiste en **sumar los coeficientes** de dichos términos.
- Por ejemplo:
 - Sabemos que $2x^2$ y $3x^2$ son términos semejantes.
 - Si deseamos sumar dichos términos solo tenemos que sumar sus coeficientes: **$(2+3) x^2$** .
 - El resultado de la suma será igual a **$5x^2$** .

Suma de Polinomios

Ejemplo 1: Halla la suma: $4x^2 + 3x^2 - 2x^2$.

- Se puede sumar ya que los tres términos son semejantes.
- Para sumar sumamos los coeficientes solamente:

$$(4 + 3 - 2) x^2 = 5 x^2$$

- El resultado es: $5 x^2$

Suma de Polinomios por el Método Horizontal

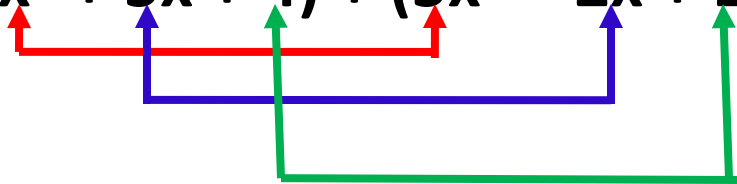
- Podemos sumar polinomios aplicando dos posibles métodos: el **método horizontal** o el **método vertical**. Veamos primero el método horizontal.

Ejemplo 2: Sume aplicando el Método Horizontal:

$$(x^2 + 5x + 4) + (5x^2 - 2x + 1)$$

- En este método vamos sumando los términos semejantes en forma horizontal, como lo hicimos en los ejemplos anteriores.

$$(x^2 + 5x + 4) + (5x^2 - 2x + 1) = 6x^2 + 3x + 5$$



Las flechas señalan aquellos términos que son semejantes

- El resultado es: $6x^2 + 3x + 5$

Suma de Polinomios por el Método Vertical

Ejemplo 3: Sume aplicando el Método Vertical:

$$(x^4 - 3x^3 + x^2) + (-x^3 - 2x^2 + 3x) + (3x^2 - 4x - 5)$$

- Se colocan los términos semejantes uno debajo del otro para luego sumar los coeficientes. Este método es el preferido generalmente cuando se tienen que sumar varios polinomios.

- Veamos:
$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 + x^2 \\ - x^3 - 2x^2 + 3x \\ \hline 3x^2 - 4x - 5 \\ \hline x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 5 \end{array}$$

- Resultado: $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 5$
- En general, se puede utilizar el método que desee para sumar polinomios.

Suma de Polinomios

Ejemplo 4: Sume: $(5x^3 + 3x^2 + 2x) + (3x^4 + x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 3x^2 + 2x \\ 3x^4 \quad + x^2 - 2x + 1 \\ \hline 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 \quad + 1 \end{array}$$

- Resultado: $3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 1$
- En este caso aplicamos el método vertical. Observe que los términos se acomodan de modo que se puedan sumar los términos semejantes.
- Cuando no encontramos términos semejantes en los polinomios que se pretenden sumar, como en el segundo polinomio que no hay x al cubo), simplemente lo dejamos en blanco.
- A veces ayuda escribir todos los términos en forma decreciente para asegurarse que se colocaron todos los términos. De esta manera el resultado final quedará también en forma decreciente.

Suma de Polinomios

Ejemplo 5: Suma: $(2x^4 + 5x^2 + 1) + (3x^3 - 2x)$

- Observe que en este caso no encontramos términos semejantes. Procedemos a escribir todos los términos en forma decreciente. El resultado final será:

$$2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x + 1$$

Resta de Polinomios

Introducción a la Resta de Polinomios

- Para entender la resta de polinomios debemos recordar la resta de números enteros.
- En la resta de enteros cambiamos la resta a suma del opuesto del sustraendo (el que le sigue al signo de resta).
- Por ejemplo:
$$3 - 5 = 3 + (-5) = -2$$
- Observa que la resta se convirtió en suma, y el 5 se cambia a su opuesto que es -5. Luego, como ahora tenemos una suma, se aplican las reglas de suma.

Resta de Polinomios

- En la resta de dos polinomios, se cambia a suma del opuesto del polinomio que corresponde al sustraendo. Luego se aplican las reglas de suma de polinomios.
- Para obtener el opuesto de un polinomio debemos cambiar los signos de **todos los coeficientes** del polinomio.
- Veamos en la próxima pantalla algunos ejemplos para hallar el opuesto de un polinomio:

Opuesto de un polinomio

CASO	POLINOMIO	SU OPUESTO
1	$3x + 2$	$-3x - 2$
2	$2x^2 - 5x - 2$	$-2x^2 + 5x + 2$
3	$-3x^5 + 8x - 7$	$3x^5 - 8x + 7$

- Observa que para obtener el opuesto de un polinomio se cambia el signo de cada término del polinomio.
- El que era positivo se convierte en negativo.
- El que era negativo se convierte en positivo.
- Recuerda que sumar un negativo es equivalente a restarlo en forma positiva y restar un positivo es equivalente a sumarlo en forma negativa.

Resta de Polinomios

- Veamos algunos ejemplos de resta de polinomios.

CASO	RESTA	SUMA CORRESPONDIENTE
1	$7X^3 - (2X^3 + 5)$	$7X^3 + (-2X^3 - 5)$
2	$(X^2 - 8) - (4X^2 - 3X + 5)$	$(X^2 - 8) + (-4X^2 + 3X - 5)$
3	$(5X^2 + X - 6) - (-2X^2 - 3X + 11)$	$(5X^2 + X - 6) + (2X^2 + 3X - 11)$

- Una vez tenemos las restas expresadas en términos de suma procedemos a sumar los polinomios aplicando la suma de polinomios demostrada en la sección anterior.

Ejemplos de Resta de Polinomios

Ejemplo 1: Reste $2x^2 - 5x + 4$ de $5x^2 - 6$.

- Como dice que se resta $2x^2 - 5x + 4$ del polinomio $5x^2 - 6$, el sustraendo es $2x^2 - 5x + 4$. Así que colocamos algebraicamente los polinomios de la siguiente manera:

$$(5x^2 - 6) - (2x^2 - 5x + 4)$$

- Cambiamos la resta a suma del opuesto y tenemos:

$$(5x^2 - 6) + (-2x^2 + 5x - 4)$$

- Ahora podemos proceder a sumar:

$$\begin{array}{r} 5x^2 \qquad \qquad - 6 \\ -2x^2 + 5x - 4 \\ \hline 3x^2 + 5x - 10 \end{array}$$

- Resultado: $3x^2 + 5x - 10$

Ejemplos de Resta de Polinomios

Ejemplo 2: Reste $7x^4 + 4x^2 - 3x + 15$ de $12x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 9$

- Como dice que se resta $7x^4 + 4x^2 - 3x + 15$ del polinomio $12x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 9$, el sustraendo es $7x^4 + 4x^2 - 3x + 15$. Así que colocamos algebraicamente los polinomios de la siguiente manera:

$$(12x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 9) - (7x^4 + 4x^2 - 3x + 15)$$

- Cambiamos la resta a suma del opuesto y tenemos:

$$(12x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 9) + (-7x^4 - 4x^2 + 3x - 15)$$

- Ahora podemos proceder a sumar:

$$\begin{array}{r} 12x^5 \qquad - 6x^3 + 8x^2 \qquad - 9 \\ \quad -7x^4 \qquad - 4x^2 + 3x - 15 \\ \hline 12x^5 - 7x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 3x - 24 \end{array}$$

- Resultado: $12x^5 - 7x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 3x - 24$

Ejemplos de Resta de Polinomios

Ejemplo 3: Reste:

$$(4x^2y - 6x^3y^2 + x^2y^2) - (4x^2y + x^3y^2 + 3x^2y^3 - 8x^2y^2)$$

- Como dice que se reste el primer polinomio menos el segundo, ya está en la forma usual de resta. En este caso el sustraendo es el segundo polinomio.

$$(4x^2y - 6x^3y^2 + x^2y^2) - (4x^2y + x^3y^2 + 3x^2y^3 - 8x^2y^2)$$

Cambiamos la resta a suma del opuesto y tenemos:

$$(4x^2y - 6x^3y^2 + x^2y^2) + (-4x^2y - x^3y^2 - 3x^2y^3 + 8x^2y^2)$$

- Ahora podemos proceder a sumar:

$$\begin{array}{r} 4x^2y - 6x^3y^2 \qquad + x^2y^2 \\ -4x^2y - x^3y^2 - 3x^2y^3 + 8x^2y^2 \\ \hline -7x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9x^2y^2 \end{array}$$

- Resultado: $-7x^3y^2 - 3x^2y^3 + 9x^2y^2$

Reflexión

- A veces tenemos situaciones en las cuales se combinan restas y sumas de polinomios en el mismo ejercicio. En estos casos debemos identificar los sustraendos de cada resta para hallar sus opuestos a fin de expresarlo todo como una suma para luego sumar.
- Veamos ejemplos en la próxima pantalla.

Más Ejemplos

- **Ejemplo 4:** Efectúe las operaciones indicadas:

$$(3x^3 + 5x - 2) + (x^2 + 5x + 4) - (x^3 - 5x + 2)$$

- En este caso tenemos tres polinomios donde los primeros dos se suman y luego se resta el tercero. Si convertimos la resta a suma del opuesto, podemos luego sumar los tres a la vez.
Veamos:

$$(3x^3 + 5x - 2) + (x^2 + 5x + 4) - (x^3 - 5x + 2)$$

$$(3x^3 + 5x - 2) + (x^2 + 5x + 4) + (-x^3 + 5x - 2)$$

- Ahora podemos proceder a sumar los tres polinomios:

$$\begin{array}{r} 3x^3 \quad + 5x - 2 \\ \quad x^2 + 5x + 4 \\ \underline{-x^3 \quad + 5x - 2} \\ 2x^3 + x^2 + 15x \end{array}$$

- Resultado: $2x^3 + x^2 + 15x$

Problemas de Aplicación

Problemas de Aplicación

- En la introducción de esta lección se mencionó sobre las múltiples aplicaciones que tienen los polinomios.
- En esta sección veremos algunos ejemplos de problemas donde se aplican los conceptos y operaciones con polinomios.

Problema 1

- La ganancia de una compañía se determina restando los costos de los gastos de los ingresos obtenidos en las ventas.
- Los costos de los gastos se representan con la siguiente ecuación:

$$\text{Costos } C(x) = 2x^2 - 60x$$

- Los ingresos de las ventas se representan con la siguiente ecuación:

$$\text{Ingresos en ventas } R(x) = 8050 - 420x$$

- Determina el polinomio que representa la ganancia de la compañía.
- Si x representa el total de objetos que vendieron, calcula la ganancia obtenida por la compañía después de vender 100 objetos.
- Veamos cómo se resuelve el problema en la próxima pantalla.

Solución al Problema 1

- Para determinar la ganancia debemos restar el polinomio que representa los costos de los gastos del polinomio que representa los ingresos obtenidos en las ventas: $R(x) - C(x)$.

$$(2x^2 - 60x) - (8050 - 420x)$$

- Si restamos tenemos:

$$(2x^2 - 60x) - (8050 - 420x)$$

$$(2x^2 - 60x) + (-8050 + 420x)$$

$$2x^2 - 60x$$

$$\underline{420x - 8050}$$

$$2x^2 + 360x - 8050$$

- Así que el polinomio que representaría la ganancia de la compañía es: $2x^2 + 360x - 8050$
- Continúa en la próxima pantalla.

Continuación...

- Para determinar la ganancia de la compañía después de vender 100 objetos, evaluamos el polinomio de ganancia asignando el valor de $x = 100$.

- Veamos:

$$2x^2 + 360x - 8050$$

$$2(100)^2 + 360(100) - 8050$$

$$2(10000) + 360(100) - 8050$$

$$20000 + 36000 - 8050$$

$$= 47950$$

- La ganancia de la compañía después de vender 100 objetos es: \$47,950.00

Problema 2

- Determina el perímetro de un cuadrado cuyos lados miden $x^2 + 2x + 5$.

- Visualizamos el cuadrado:



$$x^2 + 2x + 5$$

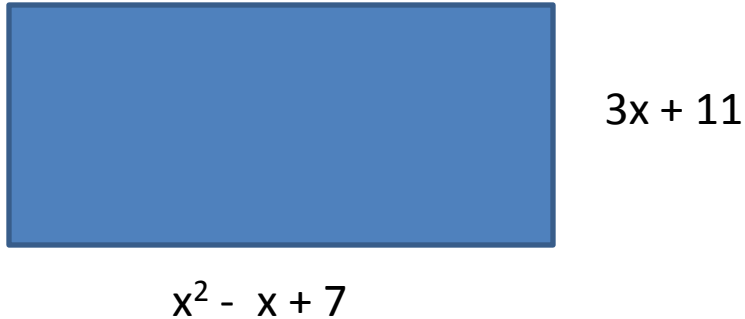
- Para hallar el perímetro sumamos todos los lados del cuadrado:

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 5) + (x^2 + 2x + 5) + (x^2 + 2x + 5) + (x^2 + 2x + 5) \\ = 4x^2 + 8x + 20 \end{aligned}$$

- El perímetro del cuadrado es: $4x^2 + 8x + 20$

Problema 3

- Determina el perímetro del rectángulo a continuación:



- Para hallar el perímetro sumamos todos los lados del rectángulo:

$$\begin{aligned} & (x^2 - x + 7) + (x^2 - x + 7) + (3x + 11) + (3x + 11) \\ & = 2x^2 + 4x + 36 \end{aligned}$$

- El perímetro del rectángulo es: $2x^2 + 4x + 36$

Problema 4



- El volumen de una esfera de radio r está dado por la fórmula: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Un payaso sopla bombas en un cumpleaños. Halla el volumen de aire que hay dentro de una bomba que tiene un radio 4 pulgadas.
- Para hallar el volumen de la bomba sustituimos en la fórmula la cantidad de radio dada.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}(3.14)(4)^3$$

Aproximamos π a 3.14.

$$V = \frac{4}{3}(3.14)(64)$$

$$V = \frac{4}{3}(200.96)$$

$$V = \frac{803.84}{3}$$

$$V = 267.95$$

- El volumen de la bomba es: 267.95 pulgadas cúbicas.

Ejercicios de Práctica

Instrucciones

- Resuelve los ejercicios a continuación en tu libreta.
- Sigue las instrucciones que aparecen en cada pantalla.
- Después de hacer los ejercicios, verifica los resultados en la sección final donde aparecen las **Contestaciones a los Ejercicios de Práctica**.

Ejercicio 1

1. Indique si las siguientes expresiones algebraicas son o no polinomios. Si no son polinomios, explique por qué.

ITEM	EXPRESION ALGEBRAICA
A	$\frac{1}{2x^2-1} + 2$
B	$\frac{2}{3}x + 3$
C	$\frac{3}{4}x^2y^3 - 3^2$
D	$x^{-2} + 3x$
E	$\sqrt{5x+1} - 4$
F	$8x^{(1/3)} + 3x$
G	$Ax^2 + Bx + C$
H	7
I	$x^y + 3x - 1$
J	$6.25x^3 - 1$

Ejercicio 2

2. Evalúa los siguientes polinomios de acuerdo a los valores asignados a las variables.

ITEM	POLINOMIO	VALOR ASIGNADO A LAS VARIABLES
A	$7x^2y^3$	$x = 2, y = -1$
B	$3x^5 - x^3 + x + 4$	$x = -1$
C	$\frac{X^3}{8} - 1$	$x = 2$
D	$3x^2 + \frac{1}{2}$	$x = 2$

Ejercicio 3

3. Mencione todos los coeficientes de los siguientes polinomios:

ITEM	POLINOMIO
A	$x^5 - 32$
B	$\frac{2}{3}x + 3$
C	$\frac{3}{4}x^2 - 3^2$
D	$\frac{x^3}{8} - 2x - 1$
E	$Ax^2 + Bx + C$
F	7
G	$6.25x^3 - 1$

Ejercicio 4

4. Clasifique los siguientes polinomios de acuerdo a la cantidad de términos que tiene en: monomio, binomio, trinomio o polinomio, e indique su grado.

ITEM	POLINOMIO
A	$x^5 y^4 - 2xy + 1$
B	$\frac{2}{3}x + 3$
C	$\frac{2}{5}X^2Y^5$
D	$\frac{X^3}{8} - 2x^2 + x - 1$
E	$Ax^2 + Bx + C$
F	7
G	$6.25x^3 - x$

Ejercicio 5

- Suma o Reste, según sea el caso:

ITEM	DESCRIPCION
1	$(x^2-3x+5) + (7x^2-8x-3)$
2	$(x^4+x^2-6) + (x^3-5x^2-3x+1)$
3	$(5x^3-2) + (x^5-3x^4+2x^2-1) + (x^4-6x+1)$
4	$(7x - 5) + (-x + 3) + (-8x - 2)$
5	$(2x^4 - x^2 - 7) + (3x^3+7x^2+2x) + (x^2 - 3x - 1)$
6	$(5x+7) - (2x+3)$
7	$(y^2 - 6y - 1) - (2y^2 - 6y + 1)$
8	Reste $(3x^3 - 2x^2 + 5)$ de $(2x^3 - 3x + 2)$
9	Reste $(4 + x)$ de la suma de $(x^5 + 3)$ y $(x^4 + x^2 + 1)$
10	Reste $(4x^3 - 2x + 2)$ de cero
11	Reste la suma de $(x^3 + 3x - 11)$ y $(2x^2 + x - 1)$ de la suma de $(3x^4+x^3+ x^2 - 1)$ y $(3x^3+x^2 - 1)$

Ejercicio 6

- Calcula la ganancia de una tienda que vende muebles en un mes en el que se vendieron 850 muebles. La ganancia se calcula restando los gastos de los ingresos. Los gastos mensuales se determinan por el polinomio $(6x^2 - 20x - 4)$ y los ingresos mensuales están determinados por el polinomio $(3500 - 230x + 8x^2)$.

Contestaciones a los Ejercicios

Ejercicio 1

ITEM	EXPRESION ALGEBRAICA	POLINOMIO (SI/NO)
A	$\frac{1}{2x^2 - 1} + 2$	No, se observa una variable en el denominador
B	$\frac{2}{3}x + 3$	Si
C	$\frac{3}{4}x^2y^3 - 3^2$	Si
D	$x^{-2} + 3x$	No, se observa un exponente negativo en la variable
E	$\sqrt{5X + 1} - 4$	No, se observa una variable dentro de un radical
F	$8x^{(1/3)} + 3x$	No, se observa una fracción como exponente de la variable
G	$Ax^2 + Bx + C$	Si
H	7	Si
I	$x^y + 3x - 1$	No, se observa una variable como exponente de otra
J	$6.25x^3 - 1$	Si

Ejercicio 2

ITEM	POLINOMIO	VALOR ASIGNADO A LAS VARIABLES	RESUL TADO
A	$7x^2y^3$	$x=2, y= - 1$	-28
B	$3x^5 - x^3 + x + 4$	$x = -1$	1
C	$\frac{x^3}{8} - 1$	$x = 2$	0
D	$3x^2 + \frac{1}{2}$	$x = 2$	12.5

Ejercicio 3

ITEM	POLINOMIO	COEFICIENTES
A	$x^5 - 32$	$\{1, 0, 0, 0, 0, -32\}$
B	$\frac{2}{3}x + 3$	$\{2/3, 3\}$
C	$\frac{3}{4}X^2 - 3$	$\{3/4, 0, -3\}$
D	$\frac{X^3}{8} - 2x - 1$	$\{1/8, 0, -2, -1\}$
E	$Ax^2 + Bx + C$	$\{A, B, C\}$
F	7	$\{7\}$
G	$6.25x^3 - 1$	$\{6.25, 0, 0, -1\}$

Ejercicio 4

ITEM	POLINOMIO	TERMINOS	GRADO
A	$x^5 y^4 - 2xy + 1$	Trinomio	9
B	$\frac{2}{3}x + 3$	binomio	1
C	$\frac{2}{5}x^2 y^5$	monomio	7
D	$\frac{x^3}{8} - 2x^2 + x - 1$	polinomio	3
E	$Ax^2 + Bx + C$	trinomio	2
F	7	monomio	0
G	$6.2x^3 - x$	binomio	3

Ejercicio 5

ITEM	RESPUESTA
1	$8x^2 - 11x + 2$
2	$x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x - 5$
3	$x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 6x - 2$
4	$-2x - 4$
5	$2x^4 + 3x^3 + 7x^2 - x - 8$
6	$3x + 4$
7	$-y^2 - 2$
8	$-x^3 - x - 3$
9	$x^5 + x^4 + x^2 - x$
10	$-4x^3 + 2x - 2$
11	$3x^4 + 3x^3 - 4x + 10$

Ejercicio 6

- Calculamos el polinomio de ganancia:

$$\begin{array}{r} (3500 - 230x + 8x^2) - (6x^2 - 20x - 4) \\ (3500 - 230x + 8x^2) + (-6x^2 + 20x + 4) \\ 8x^2 - 230x + 3500 \\ -6x^2 + 20x + 4 \\ \hline 2x^2 - 210x + 3504 \end{array}$$

- Hallamos la ganancia en el mes que se vendieron 850 muebles.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 210x + 3504 \\ 2(850)^2 - 210(850) + 3504 \\ 2(722500) - 210(850) + 3504 \\ 1445000 - 178500 + 3504 \\ = 1270004 \end{array}$$

- La ganancia fue: \$ 1,270,004 .