

# Ejercicios en clase: Heapsort, Análisis probabilístico, Prog. Dinámica

Análisis y Diseño de Algoritmos

20 de mayo de 2020

## Heap

**Ejercicio 1.** Muestre que un heap con  $n$  elementos tiene altura  $\lfloor \lg n \rfloor$ .

**Ejercicio 2.** Muestre que existen como máximo  $\lceil n/2^{h+1} \rceil$  nodos de altura  $h$  en un heap con  $n$  nodos.

**Ejercicio 3.** Ilustre la operación MAX-HEAPIFY desde el nodo 2 y desde el nodo 3 en el arreglo  $[27, 3, 3, 16, 13, 10, 1, 5, 7, 12, 4, 8, 9, 0]$ .

**Ejercicio 4.** Ilustre la operación BUILD-MAX-HEAP en el arreglo  $[5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9]$ .

**Ejercicio 5.** Ilustre la operación de HEAPSORT en el arreglo  $[5, 13, 2, 25, 7, 17, 20, 8, 4]$ .

**Ejercicio 6.** Illustrate the operation de MAX-HEAP-INSERT( $A, 10$ ) en el heap  $[15, 13, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 0, 6, 2]$ .

**Ejercicio 7.** La operación HEAP-DELETE elimina el ítem en el nodo  $i$  del heap  $A$ . De una implementación de HEAP-DELETE que corre en  $O(\lg n)$  para un max-heap con  $n$  elementos.

**Ejercicio 8.** Escriba en pseudocódigo cada uno de los siguientes procedimientos, que implementan una fila de prioridades con un min-heap: HEAP-MINIMO, HEAP-EXTRAER-MINIMO, HEAP-DISMINUYE-LLAVE y HEAP-INSERTA.

## Análisis probabilístico / Quicksort

**Ejercicio 9.** Sea  $X$  una variable aleatoria que guarda el número de caras en dos lanzamientos de una moneda justa. ¿Cuánto vale  $E[X^2]$ ? ¿Cuánto vale  $E[X]^2$ ?

**Ejercicio 10.** En el pseudocódigo de HIRE-ASSISTANT, suponiendo que los candidatos se presentan en de manera aleatoria uniforme, ¿cual es la probabilidad que se contrate exactamente una vez?, ¿cual es la probabilidad de que se contrate  $n$  veces?

**Ejercicio 11.** Considere el siguiente algoritmo que determina el mayor y menor elemento de un vector  $v[1 \dots n]$  con números positivos distintos.

MAYORMENOR( $v, n$ )

```
1:  $mayor = v[1]$ 
2:  $menor = v[1]$ 
3: for  $i = 2$  to  $n$ 
4:   if  $v[i] > mayor$ 
5:      $mayor = v[i]$ 
6:   else
7:     if  $v[i] < menor$ 
8:        $menor = v[i]$ 
9: return  $mayor, menor$ 
```

Suponga que la entrada del algoritmo es una permutación de 1 a  $n$  escogida uniformemente dentro todas las permutaciones de 1 a  $n$ . ¿Cual es el número esperado de comparaciones ejecutadas en la línea 7 del algoritmo? ¿Cual es el número esperado de atribuciones efectuadas en la línea 8 del algoritmo?

**Ejercicio 12.** Escriba una función que reciba un vector con  $n$  letras  $A$  y  $B$  y, a través de intercambios, mueve todas las  $A$  al comienzo del vector. Su función deberá tener tiempo de ejecución  $O(n)$ .

**Ejercicio 13.** ¿Cual es el tiempo de ejecución de QUICKSORT cuando todos los elementos del arreglo  $A$  tienen el mismo valor?

## Programación Dinámica

**Ejercicio 14.** Diseñe un algoritmo que tome como parámetros un número entero  $n > 0$  y un vector que almacene un secuencia de  $n$  enteros y devuelve la longitud de una subsecuencia creciente de suma máxima. Su función debe consumir tiempo  $O(n^2)$ . Modifique su función (sin empeorar su complejidad asintótica) para que también devuelva una subsecuencia creciente de suma máxima.

**Ejercicio 15.** Debes cortar un tronco en varias piezas. La empresa la mejor forma de hacerlo es con Analog Cutting Machinery (ACM), que cobra según el longitud de registro a cortar. Su máquina de corte permite que solo se haga un corte a la vez. Si queremos hacer varios cortes, es fácil ver que diferentes órdenes de estos cortes conducen a precios muchos diferentes. Por ejemplo, considere un registro de 10 metros de largo, que debe ser cortado a 2, 4 y 7 metros de uno de sus extremos. Hay varias posibilidades. Podemos primero cortar a 2 metros, luego a 4 y después a 7. Este pedido cuesta  $10 + 8 + 6 = 24$ , porque el primer tronco tenía 10 metros de largo, lo que quedaba era de 8 metros de largo y el la última pieza era de longitud 6. Si cortamos en orden 4, luego 2, luego 7, pagaríamos  $10 + 4 + 6 = 20$ , que es más barato. Su jefe ordenó un programa que, dada la longitud  $l$  del tronco y  $k$  puntos  $p_1, \dots, p_k$  de corte, encuentre el costo mínimo para realizar estos cortes en el ACM.

**Ejercicio 16.** Los transbordadores se utilizan para transportar automóviles entre una orilla de un río y la otra. Considere los transbordadores miden lo suficiente como para acomodar dos carriles de automóviles a lo largo de toda su longitud. Los autos entran a los carriles por un lado del transbordador y salen, en la otra orilla, al otro lado del transbordador.

La cola de automóviles para ingresar al transbordador es una sola línea y el operador dirige cada automóvil a cualquiera de las dos pistas del transbordador, el carril izquierdo o el carril derecho, a manera de equilibrar las dos pistas. Cada automóvil en la cola tiene una longitud diferente, que el operador estima mientras los autos están en línea. Con base en estas estimaciones, el operador decide cuál de los dos carriles cada automóvil debe abordar y abordar tantos automóviles en la cola como sea posible. Escribir un programa que informa al operador a qué carril debe dirigir cada automóvil para maximizar el número de carros cargados en el transbordador.

**Ejercicio 17.** Supongamos que tienes un máquina y un conjunto de  $n$  trabajos, identificados por los números  $1, 2, \dots, n$ , para procesar en esa máquina. Cada trabajo  $j$  tiene un tiempo de procesamiento  $t_j$ , un beneficio  $p_j$  y una fecha límite fin  $d_j$ . La máquina solo puede procesar un trabajo a la vez, y el trabajo debe realizarse ininterrumpidamente durante  $t_j$  unidades de tiempo consecutivas. Si el trabajo ya está completado en su fecha límite  $d_j$ , usted recibe una ganancia  $p_j$ , pero si se completa después de su fecha límite, no recibe ganancias. Escriba un algoritmo para encontrar el orden de ejecución de los trabajos que maximiza la suma de beneficios, suponiendo que todos los tiempos de procesamiento son enteros entre 1 y  $n$ . ¿Cuál es el tiempo de ejecución de su algoritmo?

**Ejercicio 18.** En China, la gente usa pares de palillos para comer, pero el Sr. L es un poco diferente. El utiliza tres palillos de dientes: un par y uno extra largo para recoger objetos más grandes pegándolos. La longitud de los dos palillos de dientes normales más pequeños debe ser lo más cerca posible, pero la longitud del palillo extra no importa mientras sea el más largo de los tres. Para un conjunto de palillos de dientes de longitud  $a$ ,  $b$  y  $c$  ( $a \leq b \leq c$ ), la función  $(a - b)^2$  mide qué tan malo es el conjunto. El Sr. L invitó a  $k$  personas a su fiesta de cumpleaños y está ansioso por presentar su forma de usar palillos de dientes. Debe preparar  $k$  juegos de palillos de dientes. Pero los palillos de dientes del Sr. L son longitudes variadas!

Escribe una función que, dado  $k$  y las longitudes ordenadas de manera no decreciente de cada uno de los  $n \geq 3k$  palillos, encuentre una manera de componer los  $k$  conjuntos de palillos de dientes para minimizar la suma de lo malos que son los conjuntos.