Ejercicios en clase: introducción

Análisis y Diseño de Algoritmos

1 de abril de 2020

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes desigualdades

(*a*) Para todos números reales x, y, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

(*b*) Para todos números reales x, y, $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

(*c*) Para todo número natural n, $(n-1)/2 \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$

(*d*) Para todo número natural n, $n/2 \leq \lceil n/2 \rceil \leq (n+1)/2$

(*e*) Para todo número natural n, $n = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$

(*f*) Para todos $x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{Z}$, $\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil = \lceil \frac{x}{ab} \rceil$

(*g*) Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \rfloor = \lfloor \frac{x}{ab} \rfloor$

(*h*) Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lceil \frac{a}{b} \rceil \leq \frac{a+b-1}{b}$

(*i*) Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \geq \frac{a-b+1}{b}$

Ejercicio 2. Probar por inducción que, para todo número natural n,

(*a*) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(*b*) $1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1$,

(*c*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Ejercicio 3. Demostrar las siguientes igualdades,

(*a*) $\log_{\sqrt{b}} x = 2 \log_b x$

(*b*) $\log_{b^4} x^2 = \log_b \sqrt{x}$

Ejercicio 4. (*a*) Encuentre una fórmula simple para $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

(*b*) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + c$, donde c es una constante. Sugerencia: usar la serie harmónica

(c) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(kx^k) = x/(1-x)^2$ cuando $|x| < 1$.

(d) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(k^2x^k) = x(1+x)/(1-x)^3$ cuando $|x| < 1$.

(e) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)/2^k = 0$.

(f) Evalúe el producto $\prod_{k=1}^{n}(2 \cdot 4^k)$

(g) Evalúe la sumatoria $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$ para $|x| < 1$

(h) Evalúe el producto $\prod_{k=2}^{n}(1 - 1/k^2)$

Ejercicio 5. (a) Muestre que $\sum_{k=0}^{n+1}(3^k) \leq c3^{n+1}$ para alguna constante $c \geq 1$

(b) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq n \cdot \text{máx}_{1 \leq k \leq n} a_k$

(c) Suponga que $a_{k+1}/a_k \leq r$ para todo $k \geq 0$. Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq a_0 \frac{1}{1-r}$.

(d) Usando el ejercicio anterior, muestre que $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k) \leq 1$.

(e) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} k \geq (n/2)^2$

(f) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k \leq c$ para alguna constante c

(g) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} 1/k \leq \lg n + 1$

(h) Muestre que $\sum_{k=1}^{n}(1/k^2) \leq c$ para alguna constante c

(i) Encuentre un limitante superior para $\sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^k \rceil$

(f) Muestre que para todo n_0 existe una constante c tal que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k \geq c \lg n$ para todo $n \geq n_0$.