Ejercicios en clase: introducción

Teoría de la computación

2 de abril de 2020

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes desigualdades

Recordar: el piso de un número $x \in \mathbb{R}$ es el único entero i tal que $i \leq x < i+1$. Se denota por $\lfloor x \rfloor$. El techo de un número $x \in \mathbb{R}$ es el único entero j tal que $j-1 < x \leq j$. Se denota por $\lceil x \rceil$. Ejemplo:$\lfloor 3.4 \rfloor = 3$,$\lceil 3.4 \rceil = 4$

Propiedad (directamente de la definición)

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

(*a*) Para todos números reales x, y, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

De la definición, tenemos que $\lfloor x+y \rfloor > x + y - 1 \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1$. Eso significa que $\lfloor x+y \rfloor > \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1$. Como ambos lados de la desigualdad son números enteros, eso implica que $\lfloor x+y \rfloor \geq (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1) + 1 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

De la definición, tenemos que $\lfloor x+y \rfloor \leq x+y < (\lfloor x \rfloor + 1) + (\lfloor y \rfloor + 1) = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Eso significa que $\lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Como ambos lados de la desigualdad son números enteros, eso implica que $\lfloor x+y \rfloor \leq (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2) - 1 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

(*b*) Para todos números reales x, y, $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

De la definición, tenemos que $\lceil x+y \rceil \geq x+y > \lceil x \rceil - 1 + \lceil y \rceil - 1 = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 2$. Eso significa que $\lceil x+y \rceil > \lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 2$. Como ambos lados de la desigualdad son números enteros, eso implica que $\lceil x+y \rceil \geq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1$.

De la definición, tenemos que $\lceil x+y \rceil < x+y+1 \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil + 1$. Eso significa que $\lceil x+y \rceil < \lceil x \rceil + \lceil y \rceil + 1$. Como ambos lados de la desigualidad son números enteros, eso implica que $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$.

(*c*) Para todo número natural n, $(n-1)/2 \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$

De la definición, tenemos que $2\lfloor n/2 \rfloor > 2(\frac{n}{2} - 1) = n - 2$.

Luego $2\lfloor n/2 \rfloor > n - 2$. Lo que implica, como ambos lados son enteros, que $2\lfloor n/2 \rfloor \geq n - 1$. Luego, $\lfloor n/2 \rfloor \geq (n-1)/2$. Además, por definición, tenemos que $\lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$.

(*d*) Para todo número natural n, $n/2 \leq \lceil n/2 \rceil \leq (n+1)/2$

De la definición, tenemos que $2\lceil n/2 \rceil < 2(\frac{n}{2} + 1) = n + 2$.

Luego $2\lceil n/2 \rceil < n + 2$. Lo que implica, como ambos lados son enteros, que $2\lceil n/2 \rceil \leq n + 1$. Luego, $\lceil n/2 \rceil \leq (n+1)/2$. Además, por definición, tenemos que $\lceil n/2 \rceil \geq n/2$.

(e) Para todo número natural n, $n = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$

De los ejercicios 1c y 1d, al sumar las desigualdades, tenemos que

$$n - \frac{1}{2} \leq \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil \leq n + 1/2.$$

Luego, como n es entero, la propiedad sigue.

(f) Para todos $x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{N}$, $\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil = \lceil \frac{x}{ab} \rceil$

Se sabe por definición que $x/a \leq \lceil x/a \rceil < x/a + 1$.

Luego $x/ab \leq \lceil x/a \rceil / b < x/ab + 1/b$. (ya que b es positivo)

Luego $\lceil \frac{x}{ab} \rceil \leq \lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil < \lceil x/ab + 1/b \rceil$. (porque la funcion techo es creciente)

Luego $\lceil \frac{x}{ab} \rceil \leq \lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil < \lceil x/ab \rceil + \lceil 1/b \rceil$. (por ejercicio 1b)

Luego $\lceil \frac{x}{ab} \rceil \leq \lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil < \lceil x/ab \rceil + 1$ (porque $b \geq 1$, entonces $1 \geq 1/b > 0$)

Luego $\lceil \frac{x}{ab} \rceil \leq \lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil \leq \lceil x/ab \rceil$ (porque los términos son números enteros)

(g) Para todos $a, b \in \mathbb{N}$, $\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \rfloor = \lfloor \frac{x}{ab} \rfloor$

(h) Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lceil \frac{a}{b} \rceil \leq \frac{a+b-1}{b}$

Pista $a = b\lfloor a/b \rfloor + r$; $r < b$

(i) Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \geq \frac{a-b+1}{b}$

Ejercicio 2. Probar por inducción que, para todo número natural n,

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1$,

(c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Ejercicio 3. Demostrar las siguientes desigualdades,

(a) $\log_{\sqrt{b}} x = 2 \log_b x$

(b) $\log_{b^4} x^2 = \log_b \sqrt{x}$

Ejercicio 4. (a) Encuentre una fórmula simple para $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$

$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2$

(b) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + c$, donde c es una constante. Sugerencia: usar la serie harmónica

Recordar: serie armónica: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Se sabe que $H_n = \lg n + c$.

En el problema, note que

$\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = 1 + 1/3 + 1/5 + \ldots + 1/(2n-1) =$.

Osea,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) &= \sum_{k=1}^{2n} 1/k - \sum_{k=1}^{n}(1/2k) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} 1/k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1/k \\
&= \lg 2n + c - \frac{1}{2}(\lg n + c) \\
&= \lg 2 + \lg n + c - \frac{1}{2}\lg n - c/2 \\
&= \lg n - \frac{1}{2}\lg n + c/2 + 1 \\
&= \frac{1}{2}\lg n + c/2 + 1 \\
&= lg\sqrt{n} + c/2 + 1
\end{aligned}$$

(c) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(kx^k) = x/(1-x)^2$ cuando $|x| < 1$.

Usar la serie geométrica: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

Veamos $\sum_{k=0}^{\infty}(kx^k) = 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$

Note que

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{1-x})^2 &= (\sum_{k=0}^{\infty}(x^k))^2 \\
&= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots (k+1)x^k + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)x^k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(kx^{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(kx^k/x) \\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}(kx^k)
\end{aligned}$$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty}(kx^k) = x/(1-x)^2$.

(d) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(k^2x^k) = x(1+x)/(1-x)^3$ cuando $|x| < 1$.

Note que

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{1-x})^3 &= (\sum_{k=0}^{\infty}(x^k))^3 \\
&= (\sum_{k=0}^{\infty}x^k)^2\cdot(\sum_{k=0}^{\infty}x^k) \\
&= (\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k)\cdot(\sum_{k=0}^{\infty}x^k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+3k+2}{2}x^k \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k+3\sum_{k=0}^{\infty}kx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}x^k)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k &= 2/(1-x)^3-3\sum_{k=0}^{\infty}kx^k-2\sum_{k=0}^{\infty}x^k \\
&= \frac{2}{(1-x)^3}-3\frac{x}{(1-x)^2}-2\frac{1}{1-x} \\
&= \frac{2-3x(1-x)-2(1-x)^2}{(1-x)^3} \\
&= \frac{2-3x+3x^2-2x^2+4x-2}{(1-x)^3} \\
&= \frac{x+x^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

(e) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)/2^k=0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)/2^k &= \sum_{k=-1}^{\infty}k/2^{k+1} \\
&= -1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}k/2^k \\
&= -1+(1/2)/(1-1/2)=0
\end{aligned}$$

(f) Evalúe el producto $\prod_{k=1}^{n}(2 \cdot 4^k)$

(g) Evalúe la sumatoria $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$ para $|x| < 1$

(h) Evalúe el producto $\prod_{k=2}^{n}(1 - 1/k^2)$

Ejercicio 5. (a) Muestre que $\sum_{k=0}^{n+1}(3^k) \leq c3^{n+1}$ para alguna constante $c \geq 1$

Por inducción en n. Cuando $n = 0$, tenemos que $4 \leq 3c$, lo cual se cumple si $c \geq \frac{4}{3}$. Cuando $n > 0$, por hipótesis de inducción, existe una constante $c \geq 1$ tal que $\sum_{k=0}^{n}(3^k) \leq c3^n$.

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \\ &\leq c3^n + 3^{n+1} \\ &= 3^{n+1}(\frac{c}{3} + 1) \\ &\leq c3^{n+1} \end{aligned}$$

Lo cual es cierto si $c/3 + 1 \leq c$, es decir $c \geq \frac{3}{2}$. Basta tomar entonces una constante $c \geq \frac{3}{2}$.

(b) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq n \cdot \text{máx}_{1 \leq k \leq n}(a_k) = \text{máx}\{a_1, a_2 \cdots, a_n\}$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots a_n \leq a_{\text{máx}} + a_{\text{máx}} + \cdots + a_{\text{máx}} = n \cdot a_{\text{máx}}$

(c) Suponga que $a_{k+1}/a_k \leq r$, donde $0 < r < 1$, para todo $k \geq 0$. Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq a_0 \frac{1}{1-r}$.

Note que

$a_1 \leq a_0 r$,

$a_2 \leq a_1 r \leq a_0 r r = a_0 r^2$,

$a_3 \leq a_2 r \leq a_0 r^2 r = a_0 r^3$,

$\ldots$

$a_k \leq a_0 r^k$.

Luego $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + a_0 r^3 + \cdots = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{a_0}{1-r}$.

(d) Usando el ejercicio anterior, muestre que $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k) \leq 1$.

Borrador: $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$.

Notamos que $\frac{2}{9}/\frac{1}{3} = 2/3$, $\frac{3}{27}/\frac{2}{9} = 1/2 < 2/3$, $\frac{4}{81}/\frac{3}{27} = 4/9 < 2/3$. Probaremos que la constante es $r = 2/3$.

Solución: Note que $a_{k+1}/a_k = \frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} = (k+1)/(3k) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3k} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2/3$. Entonces usamos el ejercicio anterior, con $r = 2/3$ y $a_0 = 1/3$. Obtenemos que $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k) \leq (1/3)/(1 - 2/3) = 1$.

(*e*) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} k \geq (n/2)^2$ para n par.

$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k \geq \sum_{k=1}^{n/2} 0 + \sum_{k=n/2+1}^{n} (n/2) = 0 + (n/2)(n/2)$

(*f*) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k \leq c$ para alguna constante c

$\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k = 0 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} k^2/2^k$. Aplicar el ejercicio c para encontrar una cota superior

(*g*) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} 1/k \leq \lg n + 1$

(*h*) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} (1/k^2) \leq c$ para alguna constante c

(*i*) Encuentre un limitante superior para $\sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^k \rceil$

(*f*) Muestre que para todo n_0 existe una constante c tal que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k \geq c \lg n$ para todo $n \geq n_0$.