Ejercicios en clase: Notación asintótica

Análisis y Diseño de Algoritmos

13 de abril de 2020

Ejercicio 1. Demostrar, usando las definiciones que

(a) $n^2 + 10n + 2 = O(n^2)$

(b) $\lceil n/3 \rceil = O(n)$

(c) $\lg n = O(\log_{10} n)$

(d) $n = O(2^n)$

(e) $\lg n$ no es $\Omega(n)$

(f) $n/100$ no es $O(1)$

(g) $n^2/2$ no es $O(n)$

Calentamiento: Probar $n^2/2 + 3n = O(n^2)$

Borrador: $n^2/2 + 3n \leq cn^2$. Probamos con $c = 1$ tendria $3n \leq n^2/2$. Esto se cumple si n es mayor o igual a 6.

Demostración. Note que para $n \geq 6$, tenemos que $6n \leq n^2$. Luego $3n \leq n^2/2$.

Portanto,

$$n^2/2 + 3n \leq n^2/2 + n^2/2 = n^2.$$

Concluimos que $n^2/2 + 3n = O(n^2)$ (ya que $0 \leq n^2/2 + 3n \leq cn^2$ para $n \geq n_0$, con $n_0 = 6$ y $c = 1$).

(a) Probar $n^2 + 10n + 2 = O(n^2)$

Borrador: $n^2 + 10n + 2 \leq cn^2$. Probamos con $c = 3$.

Demostración. Note que para $n \geq 10$, tenemos que $10n \leq n^2$ Luego $n^2 + 10n + 2 \leq n^2 + n^2 + n^2 = 3n^2$.

Portanto, Concluimos que $n^2 + 10n + 2 = O(n^2)$.

(b) Cuando $n \geq 1$, tenemos que $\lceil n/3 \rceil \leq n/3 + 1 \leq n/3 + n = \frac{4}{3}n$. Concluimos que $\lceil n/3 \rceil = O(n)$.

(c) Sabemos que $\lg n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2}$. Luego para todo $n \geq 1$, $\lg n \leq \lg 10 \cdot \log_{10} n$.

Obs. $\frac{1}{\log_x y} = \log_y x$

(d) Comenzaremos probando por inducción en n, que para todo número natural n se cumple que $n \leq 2^{n-1}$. Cuando $n = 1$, tenemos que $n = 1 \leq 2^{1-1} = 2^{n-1}$. Considere ahora el caso en que $n > 1$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $n - 1 \leq 2^{n-2}$. Luego $n = \frac{n}{n-1}(n-1) \leq \frac{n}{n-1}2^{(n-2)} = \frac{n}{2(n-1)}2^{(n-1)} \leq 2^{(n-1)}$.

Considere ahora $n \in \mathbb{R}$. Como $\lceil n \rceil \in \mathbb{N}$, tenemos que $n \leq \lceil n \rceil \leq 2^{\lceil n \rceil - 1} \leq 2^n$. Portanto $n = O(n^2)$.

(e) Suponga por contradicción que $\lg n = \Omega(n)$. Luego existen $c, n_0 > 0$ tales que $\lg n \geq cn$ para todo $n \geq n_0$. Es decir, $f(n) = n/\lg n \leq \frac{1}{c} = d$ para todo $n \geq n_0$. Sea $d' = \max\{f(n) : n \geq n_0\}$ y sea n' tal que $f(n') = d'$. Note que, como $n'^2 \geq n' \geq n_0$, tenemos que $f(n'^2) = \frac{n'^2}{\lg n'^2} = \frac{n'}{2} \cdot \frac{n'}{\lg n'} > \frac{n'}{\lg n'} = d'$. Hemos encontrado un n tal que $f(n) > d'$, contradicción.

Otra manera: probar que $n/\lg n$ es una función creciente y concluir que no puede ser acotada por una constante.

(f) Suponga por contradicción que $n/100 = O(1)$. Entonces existen constantes $n_0, c > 0$ tales que $\frac{n}{100} \leq c$ para todo $n \geq n_0$. Como $n_0 \geq n_0$ tenemos que $n_0/100 \leq c$ lo que implica que $n_0 \leq 100c$. Tome $n = 200c \geq n_0$ y note que $\frac{n}{100} = \frac{200c}{100} = 2c > c$, contradicción.

(g) Suponga por contradicción que $n^2/2 = O(n)$. Entonces existen constantes $n_0, c > 0$ tales que $n^2/2 \leq cn$ para todo $n \geq n_0$. Como $n_0 \geq n_0$ tenemos que $n_0^2/2 \leq cn_0$ lo que implica que $n_0 \leq 2c$. Tome $n = 4c \geq n_0$ y note que $\frac{n^2}{2} = \frac{(4c)^2}{2} = 8c^2 = 2c \cdot 4c = 2cn > cn$, contradicción.

Ejercicio 2. Demostrar o dar un contraejemplo

(*a*) $\lg \sqrt{n} = O(\lg n)$

(*b*) Si $f(n) = O(g(n))$ y $g(n) = O(h(n))$ entonces $f(n) = O(h(n))$

(*c*) Si $f(n) = O(g(n))$ y $g(n) = \Theta(h(n))$ entonces $f(n) = \Theta(h(n))$

(*d*) Si $f(n) = O(g(n))$ entonces $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

(*e*) $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$

(*f*) $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$

(*g*) $(n + a)^b = \Theta(n^b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

(a) Note que para todo $n \geq 0$ tenemos que $\lg \sqrt{n} = \frac{1}{2}\lg n \leq \frac{1}{2}\lg n$. Luego $\lg \sqrt{n} = O(\lg n)$

(b) Del enunciado tenemos que existen constantes $c_0, n_0, c_1, n_1 > 0$ tales que

$$0 \leq f(n) \leq c_0 g(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

y

$$0 \leq g(n) \leq c_1 h(n) \text{ para todo } n \geq n_1$$

Luego

$$0 \leq f(n) \leq c_0 g(n) \leq c_0 c_1 h(n) \text{ para todo } n \geq \text{máx}\{n_0, n_1\},$$

lo que implica que $f(n) = O(h(n))$.

(c) Falso, tome $f(n) = n$, $g(n) = n^2$, $h(n) = n^2$.

(d) Si $f(n) = O(g(n))$ entonces $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

Falso, tome $f(n) = 100 \lg n$, $g(n) = \lg n$. Entonces $2^{f(n)} = 2^{100 \lg n} = (2^{\lg n})^{100} = n^{100}$. Pero $2^{g(n)} = n$. Como $n^{100} \neq O(n)$, tenemos una contradicción.

(e) $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$?

Verdadero. Suponga por contradicción que $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) \neq \emptyset$. Luego, existen funciones $f(n), g(n)$ tales que $f(n) = o(g(n))$ y $f(n) = \omega(g(n))$. Sea c una constante positiva arbitrária. Por defición de o y ω, tenemos que existen $n_0, n_1 > 0$ tales que

$$0 \leq f(n) < cg(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

y

$$0 \leq cg(n) < f(n) \text{ para todo } n \geq n_1$$

Luego

$0 \leq cg(n) < f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq \text{máx}\{n_0\, n_1\}$, una contradicción.

(f) Es facil ver que $\text{máx}\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$ lo que implica que $\text{máx}\{f(n), g(n)\} = O(f(n) + g(n))$.

También,$\text{máx}\{f(n), g(n)\} \geq \frac{f(n)+g(n)}{2}$ lo que implica que $\text{máx}\{f(n), g(n)\} = \Omega(f(n) + g(n))$.

(g) Sera dejado como tarea con puntos (evaluacion continua)

Ejercicio 3. (*a*) Usando la aproximación de Stirling, muestre que $\lg n! = \Theta(n \lg n)$. También, pruebe que $n! = \omega(2^n)$ y $n! = o(n^n)$

(*b*) Muestre que $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

(*c*) Muestre que si $k \ln k = \Theta(n)$ entonces $k = \Theta(n / \ln n)$

(*d*) Verdadero o falso: $\lceil \lg n \rceil ! = O(n)$

(*d*) Muestre que $\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$