数值分析

第七章　非线性方程与方程组的数值解法

参考 李庆扬　王能超　易大义

《数值分析》 第 5 版　第 7 章

第七章　非线性方程与方程组的数值解法

引言

在科学研究和工程设计中，经常会遇到的一大类问题是非线性方程

$$f(x)=0 \tag{7.1}$$

的求根问题，其中 $f(x)$为非线性函数。方程 $f(x)=0$ 的根, 亦称为函数 $f(x)$的零点

如果 $f(x)$ 可以分解成 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$, 其中 m 为正整数且 $g(x^*)\neq 0$, 则称 x^*是 $f(x)$ 的 m 重零点, 或称方程 $f(x)=0$ 的 m 重根。当 $m=1$时称 x^*为单根。 若 $f(x)$有m 阶导数, 则是方程 $f(x)$ 的m重根。 当且仅当

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0, f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

当 $f(x)$不是 x 的线性函数时，称对应的函数方程为非线性方程。如果 $f(x)$是多项式函数，则称为代数方程，否则称为超越方程（三角方程，指数、对数方程等）。**一般称 n 次多项式构成的方程**

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

为 n 次代数方程, 当 $n > 1$ 时, 方程显然是非线性的。

一般稍微复杂的 3次以上的代数方程或超越方程, 很难甚至无法求得精确解。本章将介绍常用的求解非线性方程的近似根的几种数值解法

通常方程根的数值解法大致分为三个步骤进行

① 判定根的存在性。即方程有没有根？如果有根，有几个根？

② 确定根的分布范围。即将每一个根用区间隔离开来，这个过程实际上是获得方程各根的初始近似值。

③ 根的精确化。将根的初始近似值按某种方法逐步精确化，直到满足预先要求的精度为止

- 本章介绍方程的迭代解法，它既可以用来求解代数方程，也可以用来解超越方程，并且仅限于求方程的实根。

- 运用迭代法求解方程的根应解决以下两个问题：
  - 确定根的初值；
  - 将进一步精确化到所需要的精度。

7.1 二分法

二分法又称二分区间法，是求解方程(7.1)的近似根的一种常用的简单方法。

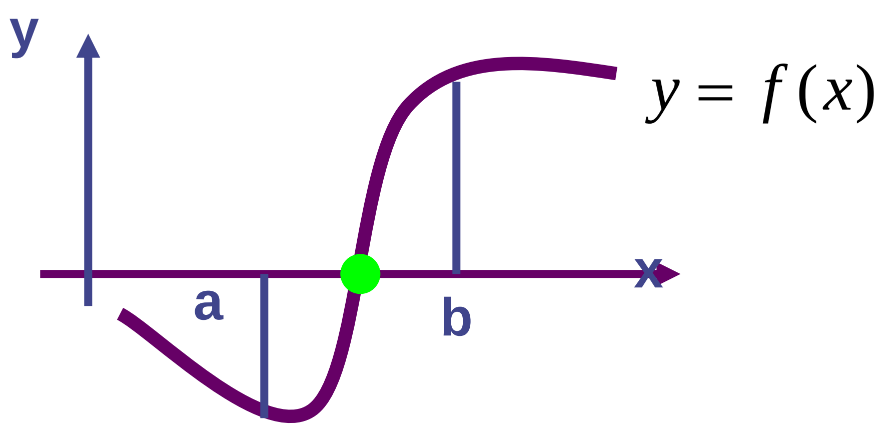
设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续，且 $f(a)f(b)<0$，根据连续函数的性质可知，$f(x)=0$ 在 (a,b) 内必有实根，称区间 $[a,b]$为有根区间。为明确起见，假定方程 $f(x)=0$在区间 $[a,b]$内有惟一实根 x^*。

二分法的基本思想是： 首先确定有根区间，将区间二等分，通过判断 $f(x)$ 的符号，逐步将有根区间缩小，直至有根区间足够地小，便可求出满足精度要求的近似根。

7.1.1确定有根区间的方法

- 为了确定根的初值，首先必须圈定根所在的范围，称为圈定根或根的隔离。
- 在上述基础上，采取适当的数值方法确定具有一定精度要求的初值。
- 对于代数方程，其根的个数（实或复的）与其次数相同。至于超越方程，其根可能是一个、几个或无解，并没有什么固定的圈根方法
- 求方程根的问题，就几何上讲, 是求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标。

由高等数学知识知，设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的单值连续，如果我们有 $f(a)f(b)<0$，则 $[a,b]$ 中至少有一个实根。如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上还是单调地递增或递减，则仅有一个实根。



- 由此可大体确定根所在子区间，方法有：

（1）画图法

（2）逐步搜索法

(1) 画图法

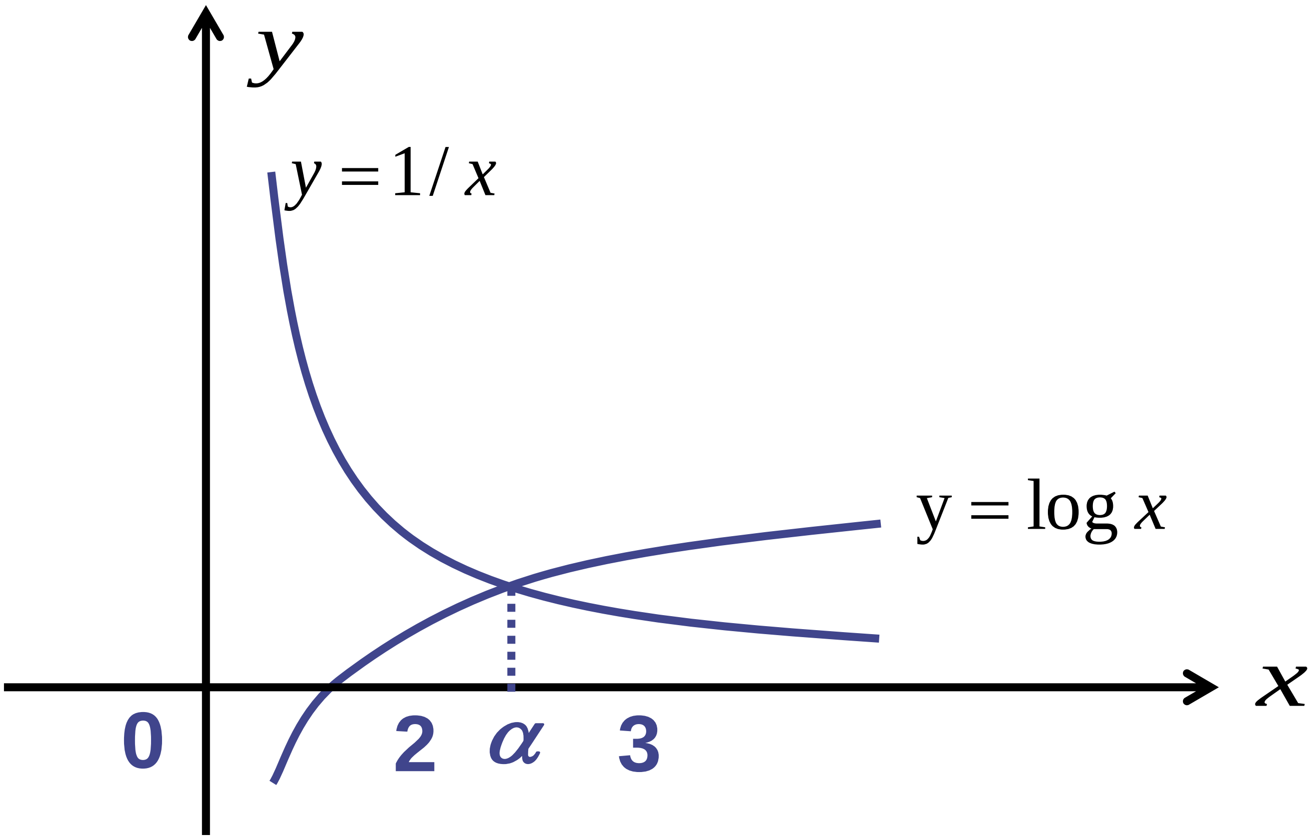
- 画出$y=f(x)$ 的略图，从而看出曲线与x 轴交点的大致位置。
- 也可将 $f(x)=0$ 分解为 $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ 的形式，$\varphi_1(x)$与 $\varphi_2(x)$两曲线交点的横坐标所在的子区间即为含区间。

例如 $x\log x-1=0$

可以改写为 $\log x=1/x$

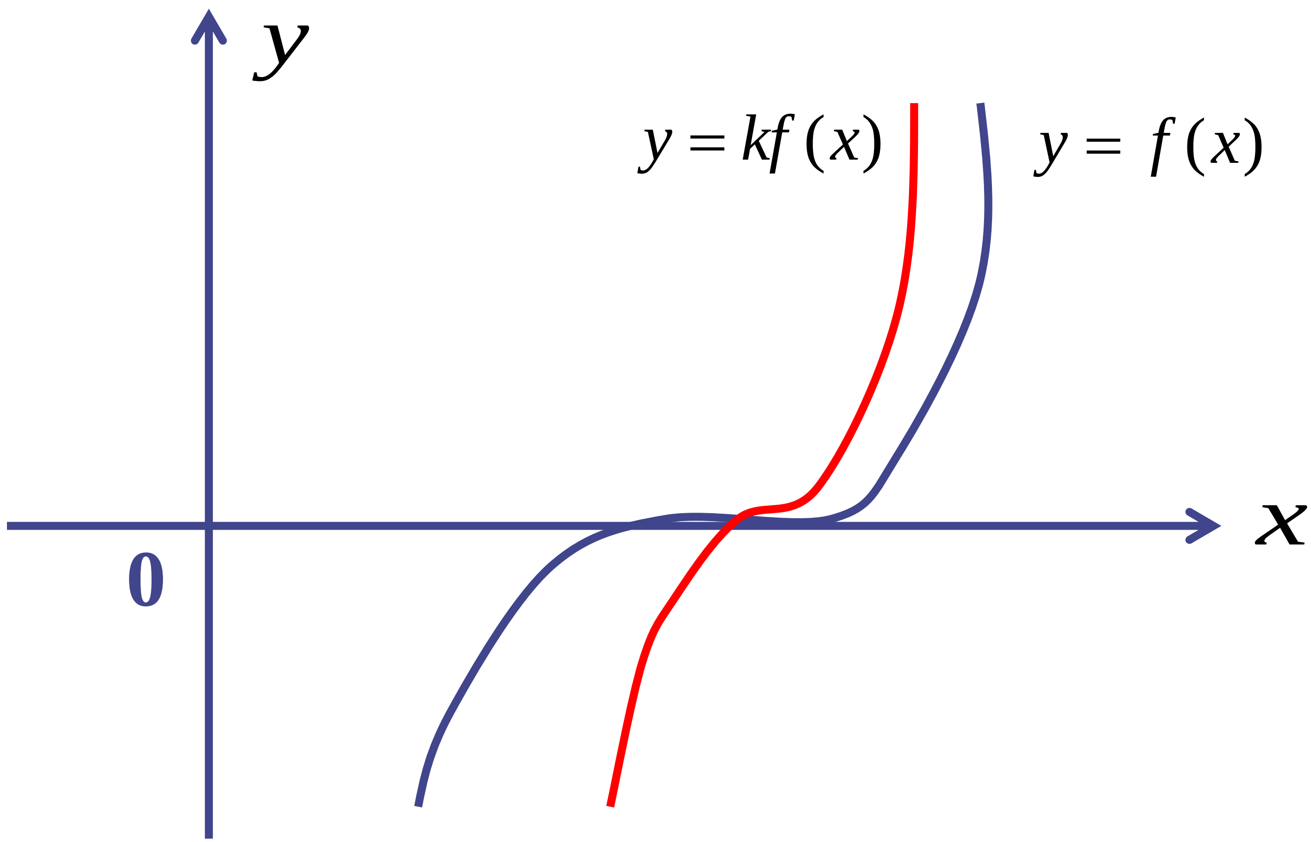
画出对数曲线 $y=\log x$, 与双曲线$y=1/x$, 它们交点的横坐标位于区间$[2,3]$内

（1） 画图法



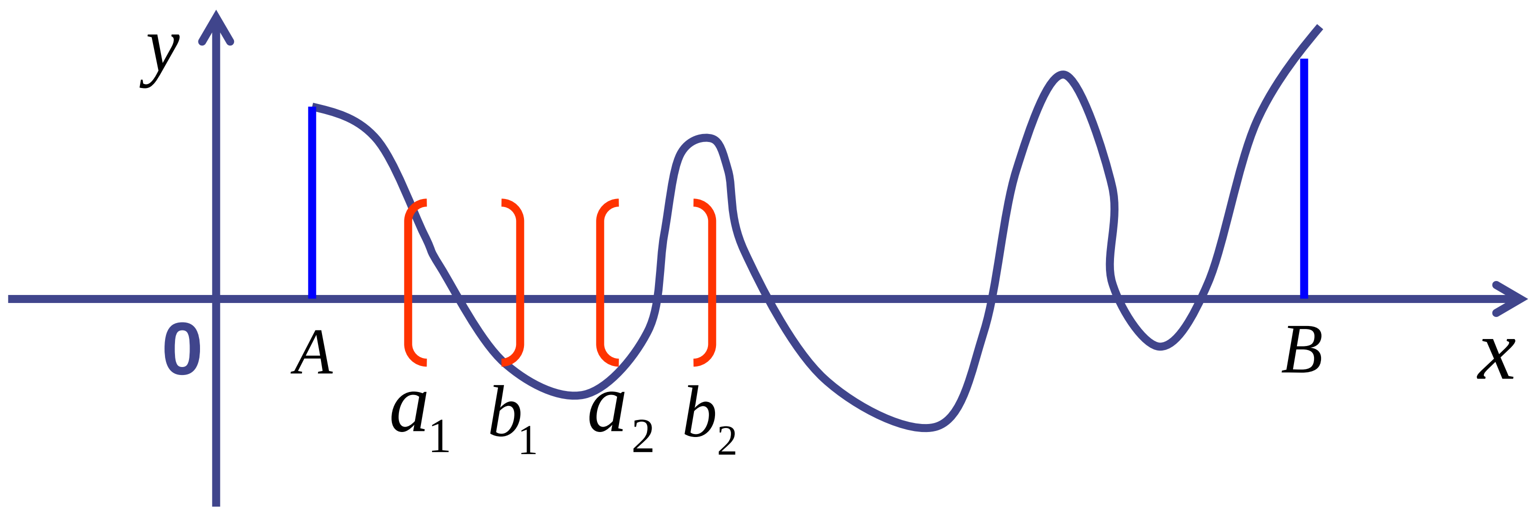
(1)　画图法

对于某些看不清根的函数，可以扩大一下曲线



（2）搜索法

对于给定的 $f(x)$，设有根区间为 $[A,B]$，从 $x_0 = A$ 出发，以步长 $h=(B-A)/n$（n 是正整数），在$[A,B]$内取定节点：$x_i = x_0 + ih\,(i = 0,1,2,\ldots,n)$，从左至右检查 $f(x_i)$ 的符号，如发现 x_i 与端点 x_0 的函数值异号，则得到一个缩小的有根子区间 $[x_{i-1}, x_i]$。



例1 方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 确定其有根区间

解： 用试凑的方法，不难发现

$$f(0)<0 \quad f(2)>0$$

则 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内至少有一个实根

设从 $x=0$ 出发, 取 $h=0.5$ 为步长向右进行根的搜索, 列表如下

x	0	0.5	1.0	1.5	2
$f(x)$	–	–	–	+	+

可以看出，在 $[1.0,1.5]$ 内必有一根

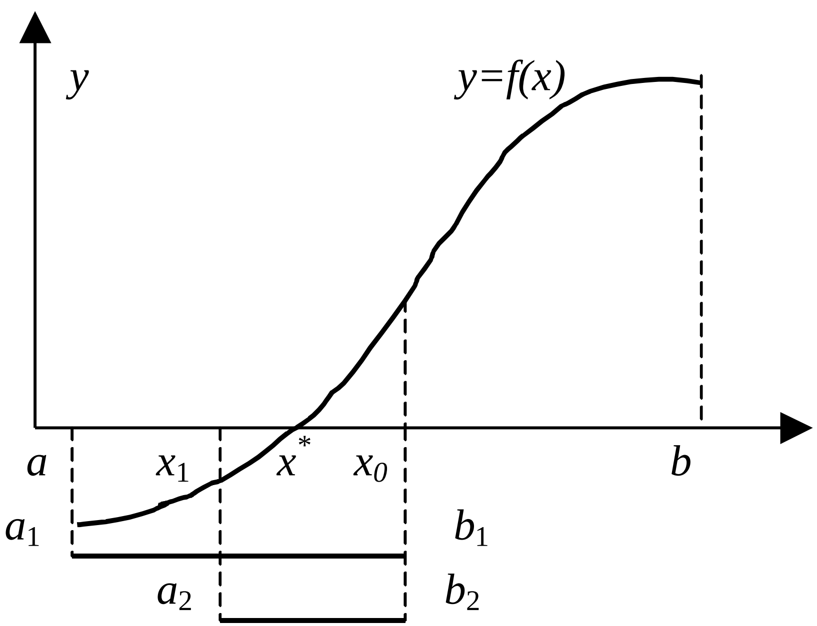
- 用逐步搜索法进行实根隔离的关键是选取步长 h
- 要选择适当 h ，使之既能把根隔离开来，工作量又不太大。
- 为获取指定精度要求的初值, 可在以上隔离根的基础上采用对分法继续缩小该含根子区间

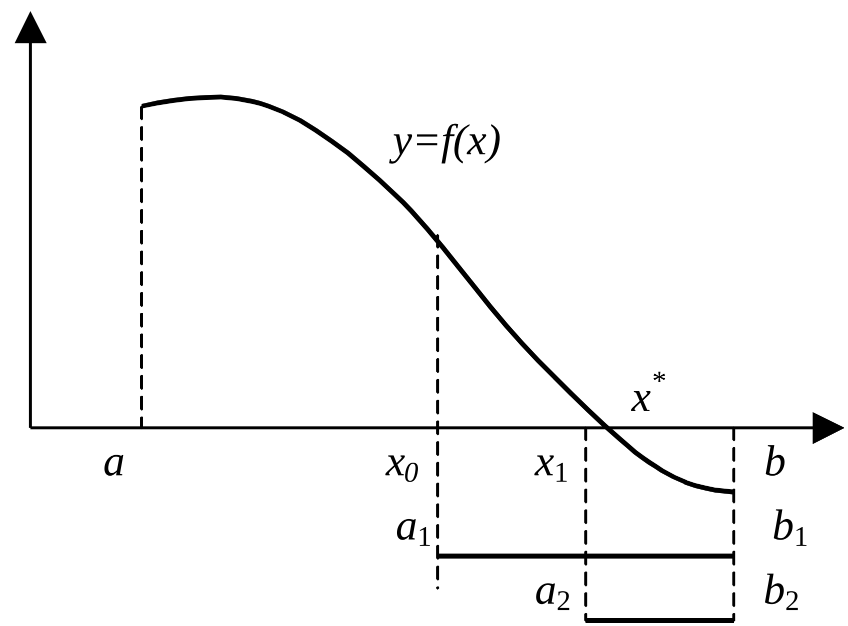
二分法可以看作是搜索法的一种改进。

7.1.2 二分法求根过程

设方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内有根, 二分法就是逐步收缩有根区间，最后得出所求的根。具体过程如下

① 取有根区间 $[a,b]$ 之中点，将它分为两半, 分点 $x_0=\frac{a+b}{2}$,这样就可缩小有根区间





② 对压缩了的有根区间 $[a_1, b_1]$ 施行同样的手法，即取中点 $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$，将区间 $[a_1, b_1]$ 再分为两半，然后再确定有根区间 $[a_2, b_2]$，其长度是 $[a_1, b_1]$ 的二分之一

③ 如此反复下去，若不出现 $f(x_k) = 0$，即可得出一系列有根区间序列：

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots$$

上述每个区间都是前一个区间的一半，因此 $[a_k, b_k]$ 的长度

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

当 $k \to \infty$ 时趋于零，这些区间最终收敛于一点 x^* 即为所求的根。

每次二分后, 取有根区间 $[a_k, b_k]$ 的中点 $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ 作为根的近似值，得到一个近似根的序列

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ 该序列以根 x^* 为极限

只要二分足够多次(即 k 足够大), 便有 $|x^* - x_k| < \varepsilon$ 这里 ε 为给定精度, 由于 $x^* \in [a_k, b_k]$, 则

$$\boxed{|x^* - x_k| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}}$$

$$\because \frac{b_k - a_k}{2} = b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

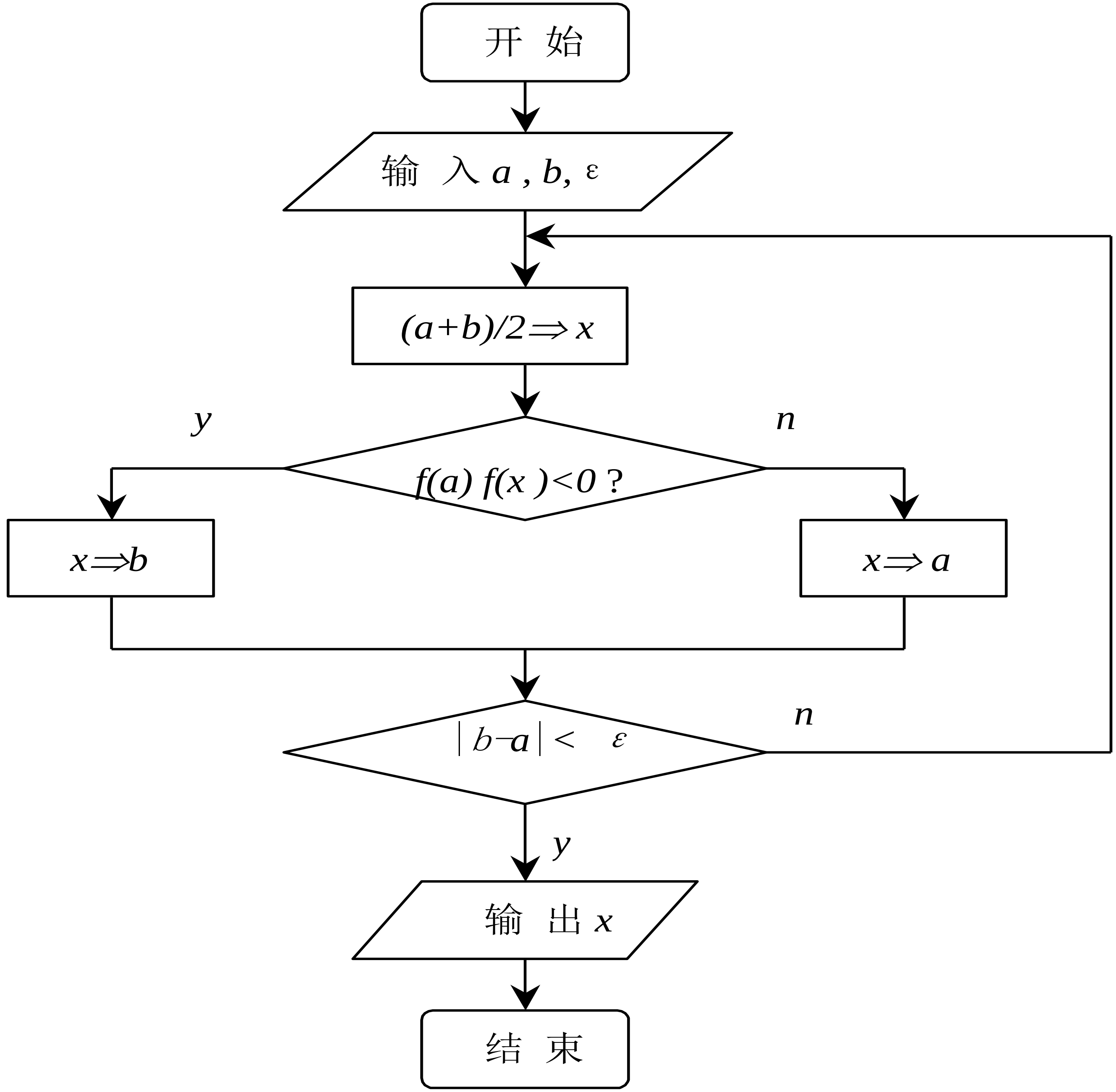
当给定精度 $\varepsilon > 0$ **后, 要想** $\left|x^{*} - x_k\right| < \varepsilon$ **成立, 只要取** k **满足** $\frac{1}{2^{k+1}}(b-a) < \varepsilon$ **即可，**亦即当:

$$k \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1$$

时, 做到第 $k+1$ 次二分, 计算得到的 x_k就是满足精度要求的近似根。

　　在程序中通常用相邻的 x_k 与 x_{k-1} 的差的绝对值或 a_k 与 b_k 的差的绝对值是否小于 ε 来决定二分区间的次数。

二分法算法实现



例 2 求方程$f(x)=x^3-x-1=0$在区间 $[1.0,1.5]$内的一个实根，使误差不超过 0.5×10^{-2}

例 3 证明方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间 $[2,3]$ 内有一个根，使用二分法求误差不超过 0.5×10^{-3} 的根要二分多少次？

证明 令 $f(x)=x^3-2x-5$ $f(2)=-1<0$, $f(3)=16>0$ 且 $f(x)$在 $[2,3]$上连续, 故方程 $f(x)=0$在 $[2,3]$内至少有一个根。又 $f'(x)=3x^2-2$当 $x\in[2,3]$ 时，我们有 $f'(x)>0$, 故 $f(x)$在 $[2,3]$上是单调递增函数, 从而 $f(x)$在 $[2,3]$上有且仅有一根。

给定误差限$\varepsilon=0.5\times10^{-3}$, 使用二分法时

误差限为 $\left|x^{*}-x_{k}\right| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$ 只要取 k 满足

$$\frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$ 即可，亦即

$$2^{k} \geq 10^{3} \text{ i.e., } k \geq 3\frac{\log 10}{\log 2}=9.97$$

所以需二分 10 次便可达到要求。

二分法的优点是不管有根区间 $[a,b]$ 多大, 总能求出满足精度要求的根, 且对函数 $f(x)$ 的要求不高, 只要连续即可, 计算亦简单; 它的局限性是只能用于求函数的实根, 不能用于求复根及重根, 它的收敛速度与比值为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数相同。

7.2 不动点迭代法及其收敛性

对于一般的非线性方程, 没有通常所说的求根公式求其精确解, 需要设计近似求解方法, 即迭代法。它是一种逐次逼近的方法, 用某个固定公式反复校正根的近似值, 使之逐步精确化， 最后得到满足精度要求的结果。

7.2.1 迭代法的基本思想

为求解非线性方程 $f(x)=0$ 的根，先将其写成便于迭代的等价方程

$$x = \varphi(x) \tag{7.3}$$

其中 $\varphi(x)$ 为 x 的连续函数

即如果数 x^* 使 $f(x)=0$, 则也有 $x^*=\varphi(x^*)$， 反之, 若 $x^*=\varphi(x^*)$， 则也有 $f(x^*)=0$， 称 $\varphi(x)$ 为迭代函数。 任取一个初值 x_0， 代入式 $x=\varphi(x)$ 的右端， 得到 $x_1=\varphi(x_0)$

再将 $\boldsymbol{x_1}$ 代入式 $x=\varphi(x)$ 的右端， 得到 $x_2=\varphi(x_1)$, 依此类推， 得到一个数列 $x_3=\varphi(x_2)$, …
其一般表示

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (7.4)$$

式(7.4)称为求解非线性方程的简单迭代法。

如果由迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

则称迭代法收敛。

实际计算中当然不可能也没必要无穷多步地做下去，对预先给定的精度要求 ε，只要某个 k 满足

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

即可结束计算并取 $x^* \approx x_k$

当然，迭代函数 $\varphi(x)$ 的构造方法是多种多样的。

例4 用迭代法求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的一个根

解　将方程改写成如下两种等价形式

$$x = \varphi_1(x) = \sqrt[3]{x+1}$$
$$x = \varphi_2(x) = x^3 - 1$$

相应地可得到两个迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi_1(x_k) = \sqrt[3]{x_k + 1}$$
$$x_{k+1} = \varphi_2(x_k) = x_k^3 - 1$$

如果取初始值 $x_0 = 1.5$，用上述两个迭代公式分别迭代，计算结果

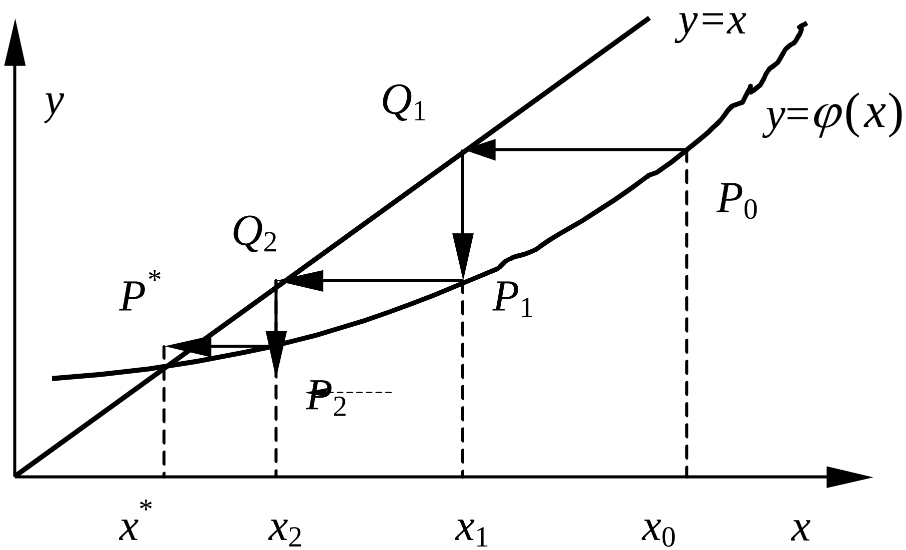
(1) $x_0 = 1.5,\ x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1},\ (k = 0,1,2,\ldots).$

k	x_k
0	1.5
1	1.35721
2	1.33086
3	1.32588
4	1.32494
5	1.32476
6	1.32473
7	1.32472

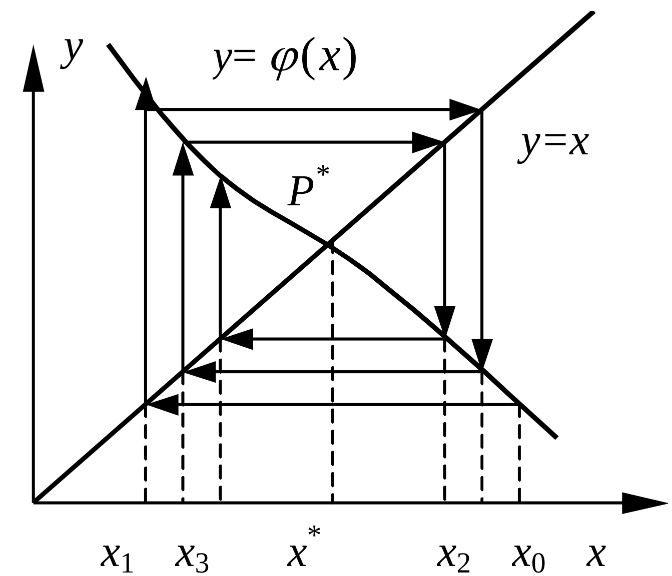
(2) $x_{k+1} = x_k^3 - 1,\ x_0 = 1.5,\ x_1 = 2.375,\ x_2 = 12.39, \cdots.$

7.2.2 迭代法的几何意义

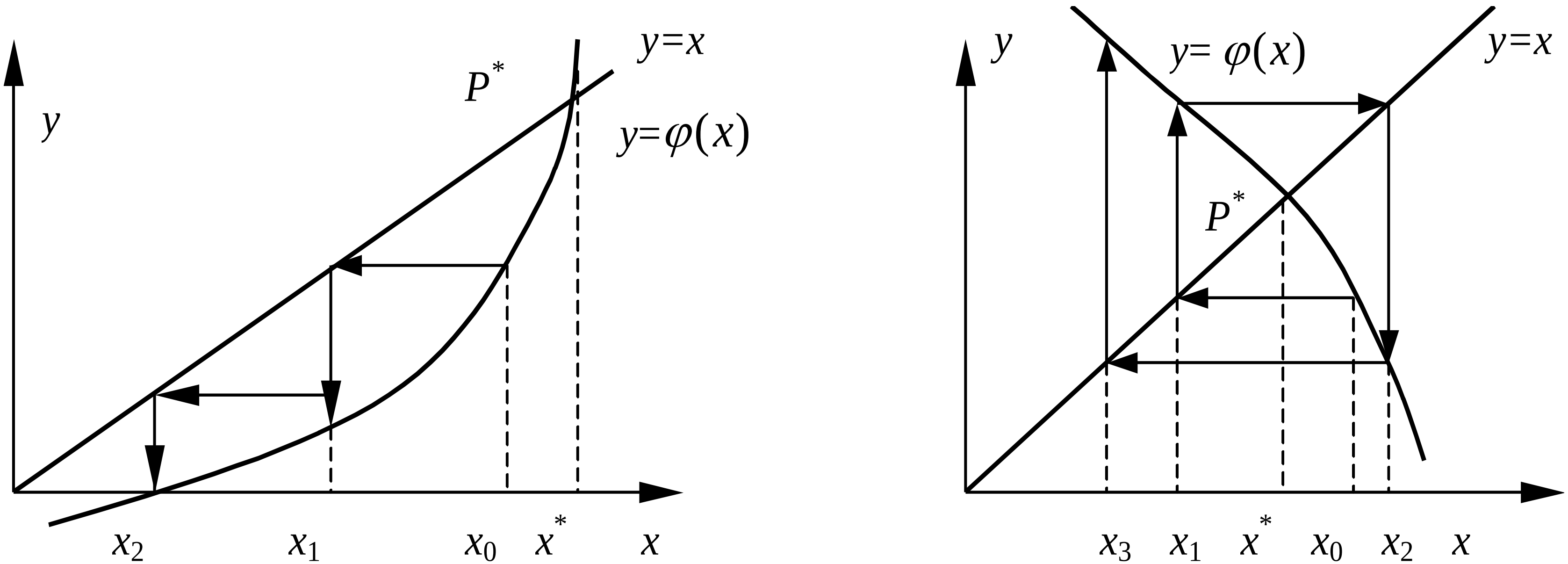
通常将方程 $f(x)=0$ 化为与它同解的方程 $x=\varphi(x)$ 的方法不止一种, 有的收敛, 有的不收敛, 这取决于 $\varphi(x)$ 的性态, 方程 $x=\varphi(x)$ 的求根问题在几何上就是确定曲线 $y=\varphi(x)$与直线 $y=x$的交点 P^*的横坐标(图7-2所示)



(a) $0<\varphi'(x^*)<1$



(b) $-1<\varphi'(x^*)<0$



$\varphi'(x^*) > 1$

（c）

$\varphi'(x^*) < -1$

（d）

图7-2　迭代法的几何意义

7.2.3　迭代法收敛的条件

　　对方程 $f(x)=0$ 可以构造不同的迭代公式，但迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

并非总是收敛。那么，当迭代函数 $\varphi(x)$ 满足什么条件时，相应的迭代公式才收敛呢？即使迭代收敛时，我们也**不可能迭代很多次，而是迭代有限次后就停止**，这就需要估计迭代值的误差，以便适时终止迭代

定理7.2 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的一阶导数, 且满足

（1）对所有的 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi(x)\in[a,b]$

（2）存在 $0<L<1$, 使所有的 $x\in[a,b]$ 有 $|\varphi'(x)|\le L$

则方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$上的解 x^* 存在且唯一，对任意的 $x_0\in[a,b]$，迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 均收敛于 x^*。并有误差估计式

① $$|x^*-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

② $$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

证： 构造函数 $\psi(x)=\varphi(x)-x$, 由条件①对任意的 $x\in[a,b]$

$\varphi(x)\in[a,b]$ 有

$$\psi(a)=\varphi(a)-a\geq 0$$
$$\psi(b)=\varphi(b)-b\leq 0$$

由连续函数介值定理知， 必有 $x^*\in[a,b]$， 使

$\psi(x^*)=\varphi(x^*)-x^*=0$ 所以有解存在， 即 $x^*=\varphi(x^*)$

假设有两个解 x^* 和 $\tilde{x}$ ，x^*， $\tilde{x}\in[a,b]$ ， 则，

$$\tilde{x}=\varphi(\tilde{x})$$

由微分中值定理有 $x^*-\tilde{x}=\varphi(x^*)-\varphi(\tilde{x})=\varphi'(\xi)(x^*-\tilde{x})$

其中 ξ 是介于 x^* 和 $\tilde{x}$ 之间的点 从而有 $\xi\in[a,b]$， 进而有 $(x^*-\tilde{x})[1-\varphi'(\xi)]=0$ 由条件②有 $|\varphi'(x)|<1$， 所以 $x^*-\tilde{x}=0$， 进而解唯一。

按迭代过程 $x_k=\varphi(x_{k-1})$，有

$$x^* - x_k = \varphi(x^*) - \varphi(x_{k-1}) = \varphi'(\xi)(x^* - x_{k-1})$$

$$\left|x^* - x_k\right| = \left|\varphi'(\xi)(x^* - x_{k-1})\right| \le L\left|x^* - x_{k-1}\right|$$

$$\left|x^* - x_k\right| \le L\left|x^* - x_{k-1}\right| \le L^2\left|x^* - x_{k-2}\right| \le \cdots \le L^k\left|x^* - x_0\right|$$

由于 $L<1$，所以有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \to x^*$，可见 L 越小，收敛越快

再证误差估计式

① $$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right|$$

② $$\boxed{\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|}$$

$$\because \quad \left|x^* - x_k\right| \le L\left|x^* - x_{k-1}\right| = L\left|x^* - x_k + x_k - x_{k-1}\right|$$

$$\le L(\left|x^* - x_k\right| + \left|x_k - x_{k-1}\right|)$$

$$(1-L)\left|x^* - x_k\right| \le L\left|x_k - x_{k-1}\right|$$

$$\therefore \quad \left|x^* - x_k\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right|$$

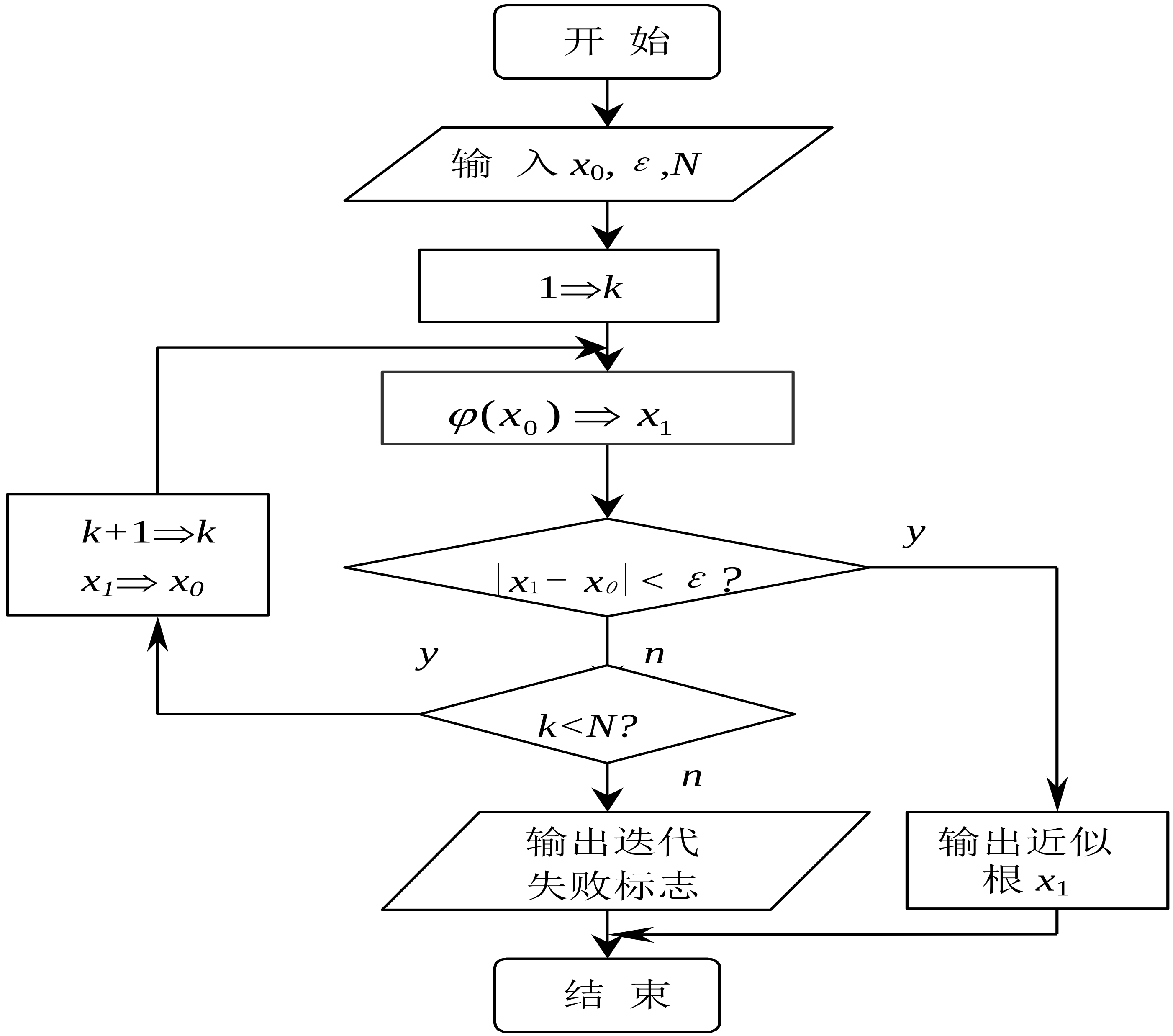
即 ① 得证。

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| = \left|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-2})\right| = \left|\varphi'(\xi)(x_{k-1} - x_{k-2})\right| \le L\left|x_{k-1} - x_{k-2}\right|$$

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right| \le \frac{L^2}{1-L}\left|x_{k-1} - x_{k-2}\right| \le \cdots \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

即 ② 得证。

7.2.4 迭代法的算法框图



例5 对方程 $x^5-4x-2=0$, 构造收敛的迭代格式,

求其最小正根, 计算过程保留 4 位小数。

解 容易判断 $[1,2]$ 是方程的有根区间, 且在此区间内 $f'(x)=5x^4-4>0$, 所以此方程在区间 $[1,2]$ 有且仅有一根。将原方程改写成以下两种等价形式。

① $x=\dfrac{x^5-2}{4}$, 即 $\varphi(x)=\dfrac{x^5-2}{4}$, $\quad |\varphi'(x)|=\dfrac{5x^4}{4}>1 \quad x\in[1,2]$

不满足收敛条件。

② $x=\sqrt[5]{4x+2}$, 即 $\varphi(x)=\sqrt[5]{4x+2}$,

$$|\varphi'(x)|=\frac{1}{5\sqrt[5]{(4x+2)^4}}<\frac{1}{5\sqrt[5]{(4+2)^4}}\approx 0.2<1 \quad x\in[1,2]$$

此时迭代公式满足迭代收敛条件。

7.2.5 局部收敛性

当迭代函数较复杂时，通常只能设法使迭代过程在根的邻域(局部)收敛。

定理3 设 $\varphi(x)$ 在 $x=\varphi(x)$ 的根 x^* 的邻域中有连续的一阶导数，且 $\left|\varphi'(x^*)\right|<1$ 则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。

证: 由于 $\left|\varphi'(x^*)\right|<1$，存在充分小邻域 $\Delta:\left|x-x^*\right|<\delta$，使成立 $\left|\varphi'(x^*)\right|\le L<1$ 这里 L 为某个定数，根据微分中值定理 $\varphi(x)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi)(x-x^*)$ 由于 $\varphi(x^*)=x^*$，又当 $x\in\Delta$ 时有 $\xi\in\Delta$，故有 $\left|\varphi(x)-x^*\right|\le L\left|x-x^*\right|\le\left|x-x^*\right|<\delta$

由定理1知 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意的 $x_0\in\Delta$ 都收敛

例6 设 $\varphi(x)=x+\alpha(x^2-5)$，要使迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^*=\sqrt{5}$，求 α的取值范围。

解：

$$\varphi(x)=x+\alpha(x^2-5)$$

$$\varphi'(x)=1+2\alpha x$$

由在根 $x^*=\sqrt{5}$ 邻域具有局部收敛性时，收敛条件

$$\left|\varphi'(x^*)\right|=\left|1+2a\sqrt{5}\right|<1$$

$$-1<1+2a\sqrt{5}<1$$

$$-2<2a\sqrt{5}<0$$

所以 $$-\frac{1}{\sqrt{5}}<a<0$$

例7　已知方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内有根 x^*，且在 $[a,b]$ 上满足 $|\varphi'(x)-3|<1$，利用 $\varphi(x)$ 构造一个迭代函数 $g(x)$，使 $x_{k+1}=g(x_k)\,(k=0,1,2,\ldots)$ 局部收敛于 x^*。

解: 由 $x=\varphi(x)$ 可得，$x-3x=\varphi(x)-3x$

$$x=-\frac{1}{2}(\varphi(x)-3x)=g(x)$$

$$|g'(x)|=\left|-\frac{1}{2}(\varphi'(x)-3)\right|=\frac{1}{2}|\varphi'(x)-3|<\frac{1}{2}<1 \qquad x\in[a,b]$$

故 $|g'(x^*)|<1$，迭代公式

$$x_{k+1}=g(x_k)=-\frac{1}{2}(\varphi(x_k)-3x_k) \qquad \textbf{局部收敛}$$

数 p 的大小反映了迭代法收敛的速度的快慢，p 愈大，则收敛的速度愈快，故迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

定义2.2 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛于 $x=\varphi(x)$的根 x^*，记迭代误差

$$e_k = x^* - x_k$$

若存在常数 $p(p\geq 1)$和 $c(c>0)$，使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c$$

即后一次迭代的误差与前一次迭代的误差的p次方的比值若为一个常数，则可以用p的值来判断这个迭代函数是几阶收敛。

则称序列 $\{x_k\}$是 p 阶收敛的，c称渐近误差常数。特别地，$p=1$时称为**线性收敛**，$p=2$时称为**平方收敛**。$1<p<2$时称为**超线性收敛**。

定理4 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻域连续且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

则迭代过程在 x^* 邻域是 p 阶收敛的。

证： 由于 $\varphi'(x^*)=0$ 即在 x^* 邻域 $|\varphi'(x^*)|<1$, 所以 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 有局部收敛性，将 $\varphi(x_k)$ 在 x^* 处泰勒展开

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{1}{2!}\varphi''(x^*)(x_k-x^*)^2+\cdots+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-x^*)^p$$

根据已知条件得 $\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\dfrac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-x^*)^p$

由迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 及 $x^*=\varphi(x^*)$ 有

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}\neq 0$$

例8 已知迭代公式 $x_{k+1}=\frac{2}{3}x_k+\frac{1}{x_k^2}$ 收敛于 $x^*=\sqrt[3]{3}$

证明该迭代公式平方收敛。

证： 迭代公式相应的迭代函数为 $\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{x^2}$

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2}{x^3}, \quad \varphi''(x)=\frac{6}{x^4}$$

将 $x^*=\sqrt[3]{3}$ 代入，$\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)=\frac{6}{3\sqrt[3]{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\neq 0$

是前一页的定理4

根据定理7.3可知，迭代公式平方收敛。

为了使迭代过程收敛或提高收敛的速度, 可设法

① 提高初值的精度以减少迭代的次数

② 提高收敛的阶数 p

7.3 迭代过程的加速*

（1）加权法

设 x_k是根 x^*的某个近似值, 用迭代公式校正一次得 $\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$ 又 $x^* = \varphi(x^*)$ 根据中值定理有

$x^* - \bar{x}_{k+1} = \varphi(x^*) - \varphi(x_k) = \varphi(\xi)(x^* - x_k)$ 其中 $\xi \in (x^*, x_k)$

当$(x^* - x_k)$范围不大时, 设 $\varphi'(\xi)$ 变化不大, 其估计值为L, 则有

$$x^* - \bar{x}_{k+1} \approx L(x^* - x_k)$$

$$x^* = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k$$

可见, 若将迭代值 $\bar{x}_{k+1}$ 与 x_k加权平均, 则可得到的

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k$$ 是比 $\bar{x}_{k+1}$ 更好的近似根

迭代：

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k$$

改进：

$$\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$$

或合并写成：

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\left[\varphi(x_k) - Lx_k\right]$$

例9 用加权法加速技术求方程 $x = e^{-x}$ 在 0. 5 附近的一个根。

解： 因为在 $x_0 = 0.5$ 附近

$$\varphi'(x)\,\big|_{0.5} = -e^{-x}\,\big|_{0.5} = -e^{-0.5} \approx -0.6$$

取 $L = -0.6$，建立如下迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-(-0.6)}\left[e^{-x_k} - (-0.6)x_k\right] = \frac{1}{1.6}\left[e^{-x_k} + 0.6x_k\right]$$

仍取 $x_0 = 0.5$, 逐次计算得 $x_1 = 0.56658 \cdots$ $x_4 = 0.56714$。迭代 4 次便可得到精度 10^{-4} 的结果, 而不用加速技术需迭代 18 次, 效果显著。

这样得到埃特金加速公式

$$
\begin{cases}
\text{迭代} & \tilde{x}_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad \bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1}) \\
\text{加速} & x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}
\end{cases}
$$

将迭代值 $\tilde{x}_{k+1}$ 再迭代一次, 得新的迭代值 $\bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1})$

则 $\bar{x}_{k+1} - x^* = \varphi(\tilde{x}_{k+1}) - \varphi(x^*) \approx L(\tilde{x}_{k+1} - x^*)$

将上述两个方程联立消去常数 L 化简可得

$$
x^* \approx \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}
$$

例10 用埃特金方法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在初值 $x_0=1.5$ 附近的一个根，精度要求 $\varepsilon=10^{-4}$，

取迭代格式 $$x=\left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

解 埃特金方法迭代格式为

$$\tilde{x}_{k+1}=\left(\frac{10}{4+x_k}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \bar{x}_{k+1}=\left(\frac{10}{4+\tilde{x}_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\frac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

只迭代二次就得到满足精度要求的解。

7.4 牛顿迭代法

用迭代法可逐步精确方程 $f(x)=0$ 根的近似值，但必须要找到 $f(x)=0$的等价方程 $x=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 选得不合适，不仅影响收敛速度，而且有可能造成迭代格式发散。能否找到一种迭代方法，既结构简单，收敛速度快，又不存在发散的问题。这就是本节要介绍的牛顿迭代法

7.4.1 牛顿迭代法的基本思想

牛顿迭代法一种重要和常用的迭代法，它的基本思想是将非线性函数 $f(x)$ 逐步线性化，从而将非线性方程 $f(x)=0$ 近似地转化为线性方程求解。

对于方程 $f(x)=0$，设其近似根为 x_k ，函数 $f(x)$ 可在 x_k 附近作泰勒展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(x-x_k)^2+\cdots$$

忽略高次项，用其线性部分作为函数 $f(x)$ 的近似，

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

设 $f(x)=0$ 的根 x^*，则有 $f(x^*)=0$，即 $f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)\approx 0$

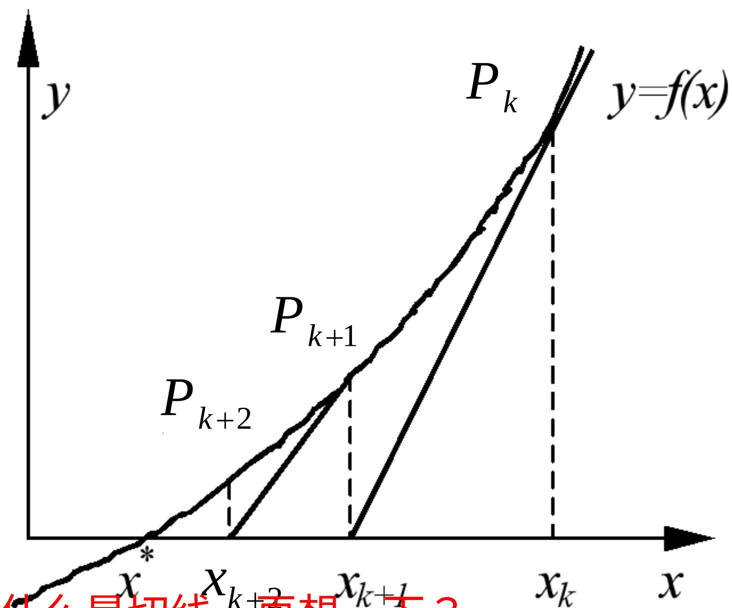
$$x^*\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

这就是著名的牛顿迭代公式

$$\boxed{x_{k+1}\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}\qquad (k=0,1,2\cdots)$$

7.4.2 牛顿迭代法的几何解释

方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标，设 x_k 是根 x^* 的某个近似值，过曲线 $y=f(x)$ 的横坐标为 x_k 的点 $P_k=(x_k, f(x_k))$ 引切线交 x 轴于 x_{k+1}，并将其作为 x^* 新的近似值，重复上述过程，可见一次次用切线方程来求解方程 $f(x)=0$ 的根，所以亦称为牛顿切线法。



牛顿迭代法的图形为什么是切线，再想一下？

若不是 单根则他的一阶导数为0，此时的迭代函数便不能继续了。因为有一阶导数在分母上。

7.4.3 牛顿迭代法的收敛性

定理2.4 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的单根，且 $f(x)$ 在 x^* 的某邻域内有连续的二阶导数，则牛顿法在 x^* 附近局部收敛，且至少二阶收敛，有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x^*-x_{k+1}|}{|x^*-x_k|^2}=\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$

证: 牛顿迭代公式对应的迭代函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

若 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的单根，则有 $f(x^*)=0$ $f'(x^*)\neq 0$

从而

$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2}=0$$

由定理3知，牛顿迭代法在 x^* 附近局部收敛。又由定理4知，迭代公式至少具有二阶收敛速度。

利用泰勒公式

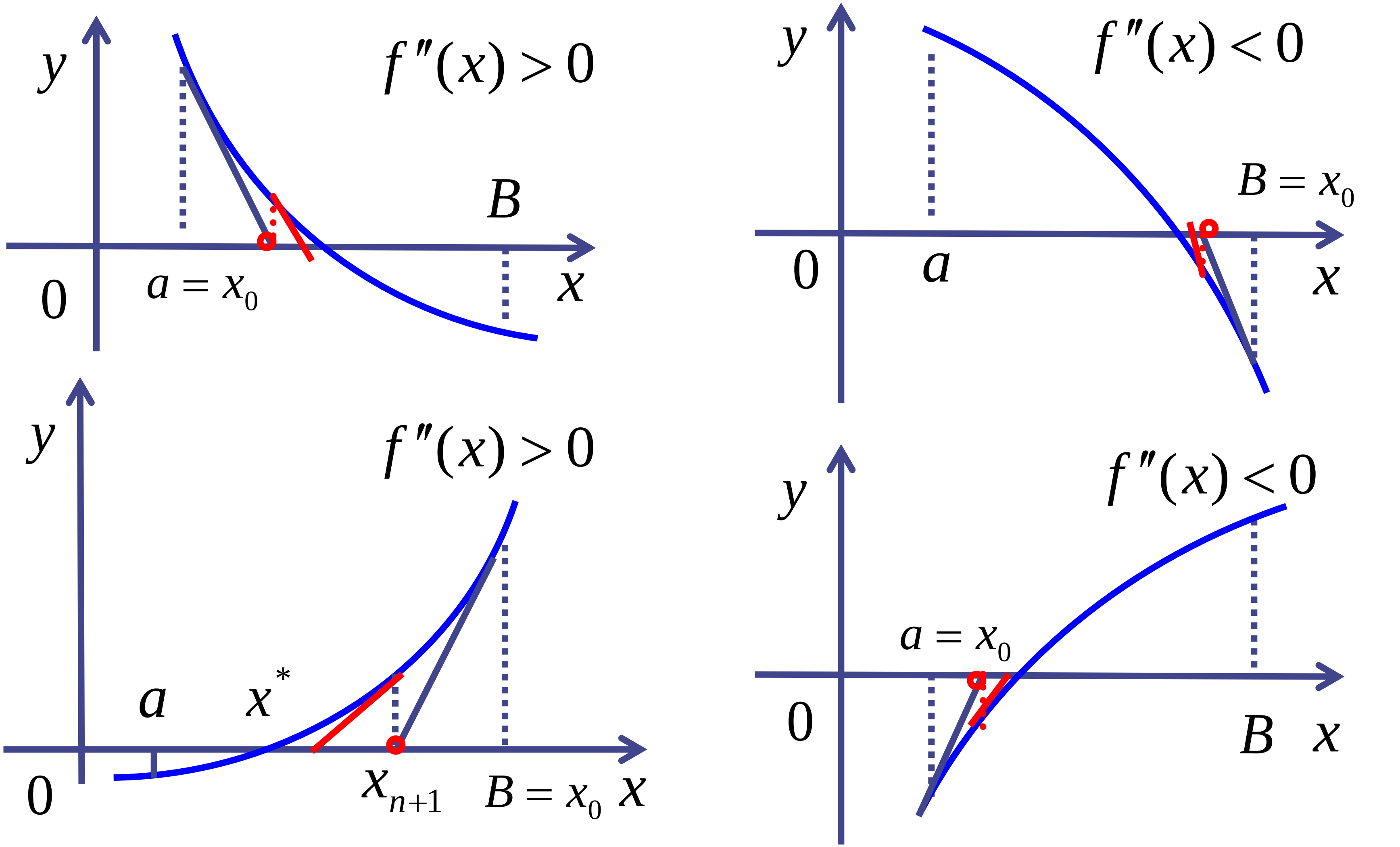
$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_k)^2, \qquad \xi \in [x^*, x_k]$$

$$x_k - x^* = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

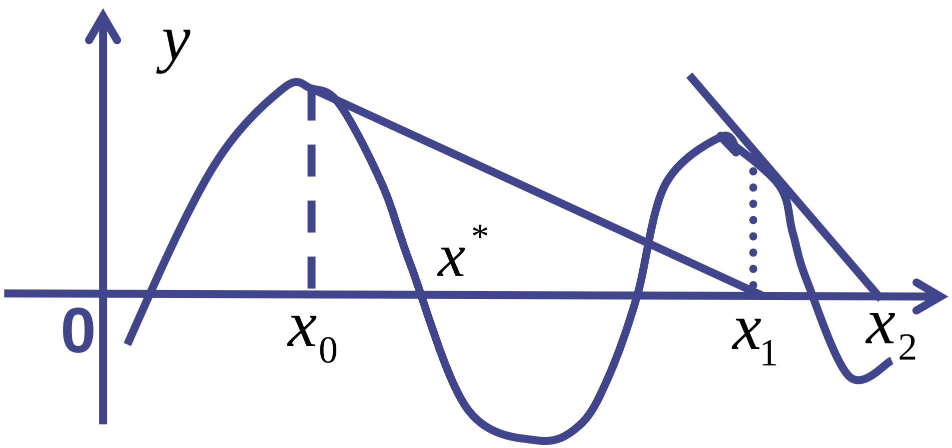
$$x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

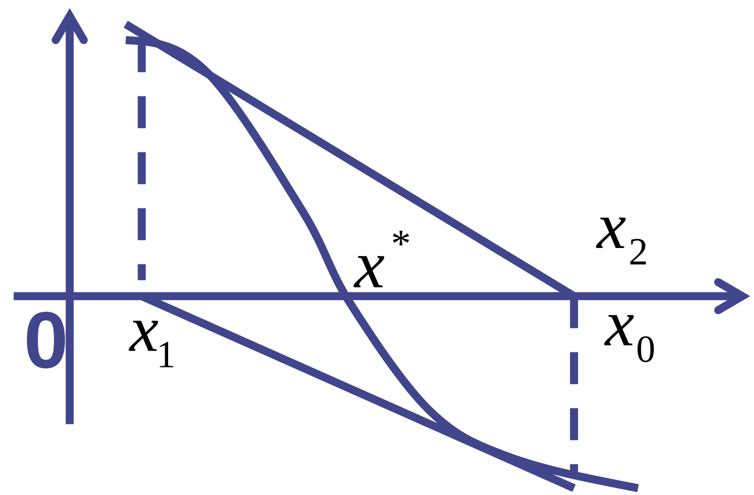
所以 $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \frac{\left|x^* - x_{k+1}\right|}{\left|x^* - x_k\right|^2} = \frac{\left|f''(x^*)\right|}{2\left|f'(x^*)\right|}$ 证毕



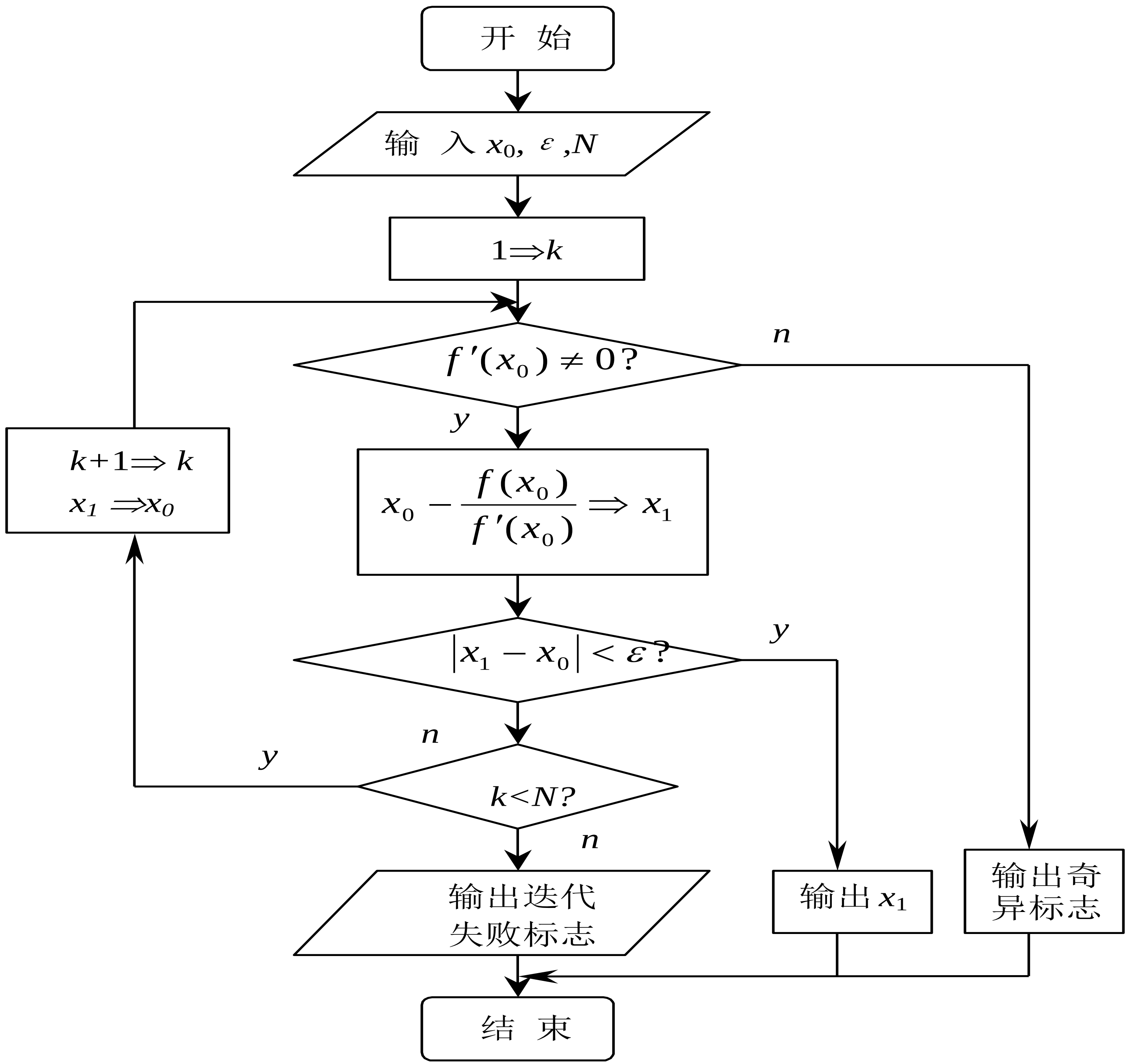
y
$f''(x) > 0$
B
0
$a = x_0$
x
y
$f''(x) < 0$
$B = x_0$
0
a
x
y
$f''(x) > 0$
a
x^*
0
x_{n+1}
$B = x_0$
x
y
$f''(x) < 0$
$a = x_0$
0
B
x

不满足迭代条件时，可能导致迭代值远离根的情况而找不到根或死循环的情况





7.4.4 牛顿迭代法的算法实现



例11 用牛顿迭代法求 $x = e^{-x}$ 的根，$\varepsilon = 10^{-4}$

解：因 $f(x_k) = xe^{-x} - 1, f'(x) = e^{x}(x+1)$

建立迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - 1}{e^{x_n}(1 + x_n)} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + x_n}$$

取 $x_0 = 0.5$, 逐次计算得

$x_1 = 0.57102$，

$x_2 = 0.56716$，

$x_3 = 0.56714$

7.4.5 牛顿下山法

通常，牛顿迭代法的收敛性依赖于初始值 x_0 的选取，如果 x_0 偏离所求的根 x^* 比较远，则牛顿法可能发散。为了防止迭代发散，我们对牛顿迭代法的迭代过程再附加一项要求，即具有单调性

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

满足这项要求的算法称**下山法。**

将牛顿迭代法与下山法结合起来使用，即在下山法保证函数值下降的前提下，用牛顿迭代法加快收敛速度。把这一算法称为牛顿下山法。即

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ 其中 $\lambda(0 < \lambda < 1)$ 为**下山因子**

下山因子的选择是个逐步探索的过程，设从 $\lambda=1$ 开始反复将 λ 减半进行试算，即逐次取 λ 为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots$$

从中挑选下山因子，直至找到其中某个 λ 使单调性条件

$$\left|f(x_{k+1})\right|<\left|f(x_k)\right|$$

成立，则称“下山成功”，否则“下山失败”，

这时需另选初值重算。

重根情形

m重根情形, $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，牛顿法不是平方收敛,
可将迭代法改为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad (4.13)$$

仍平方收敛.

还可令$\mu(x)=f(x)/f'(x)$，若x^*是$f(x)$的m重根，则

$$\mu(x)=\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)},$$

故x^*是$\mu(x)=0$的单根.

对$\mu(x)$用牛顿法得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},\tag{4.14}$$

仍平方收敛.

例：用上述三种方法求解 $x^4-4x^2+4=0$ 的二重根 $x^*=\sqrt{2}$

解：（1）牛顿法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-2}{4x_k}$;

（2）（4.13） $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-2}{2x_k}$;

（3）（4.14） $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k(x_k^2-2)}{x_k^2+2}$. 计算结果如下：

k	x_k	(1)	(2)	(3)
0	x_0	1.5	1.5	1.5
1	x_1	1.458333333	1.416666667	1.411764706
2	x_2	1.436607143	1.414215686	1.414211438
3	x_3	1.425497619	1.414213562	1.414213562

7.5　弦截法

　　牛顿迭代法虽然具有收敛速度快的优点，但每迭代一次都要计算导数 $f'(x_k)$ $f(x)$，当比较复杂时，不仅每次计算 $f'(x_k)$ 带来很多不便，而且还可能十分麻烦，如果用不计算导数的迭代方法，往往只有线性收敛的速度。本节介绍的弦截法便是一种不必进行导数运算的求根方法。弦截法在迭代过程中不仅用到前一步 x_k 处的函数值，而且还使用 x_{k-1} 处的函数值来构造迭代函数，这样做能提高迭代的收敛速度。

7.5.1 弦截法的基本思想

为避免计算函数的导数 $f'(x_k)$，使用差商

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{(x_k-x_{k-1})}$$

替代牛顿公式中的导数 $f'(x_k)$，便得到迭代公式

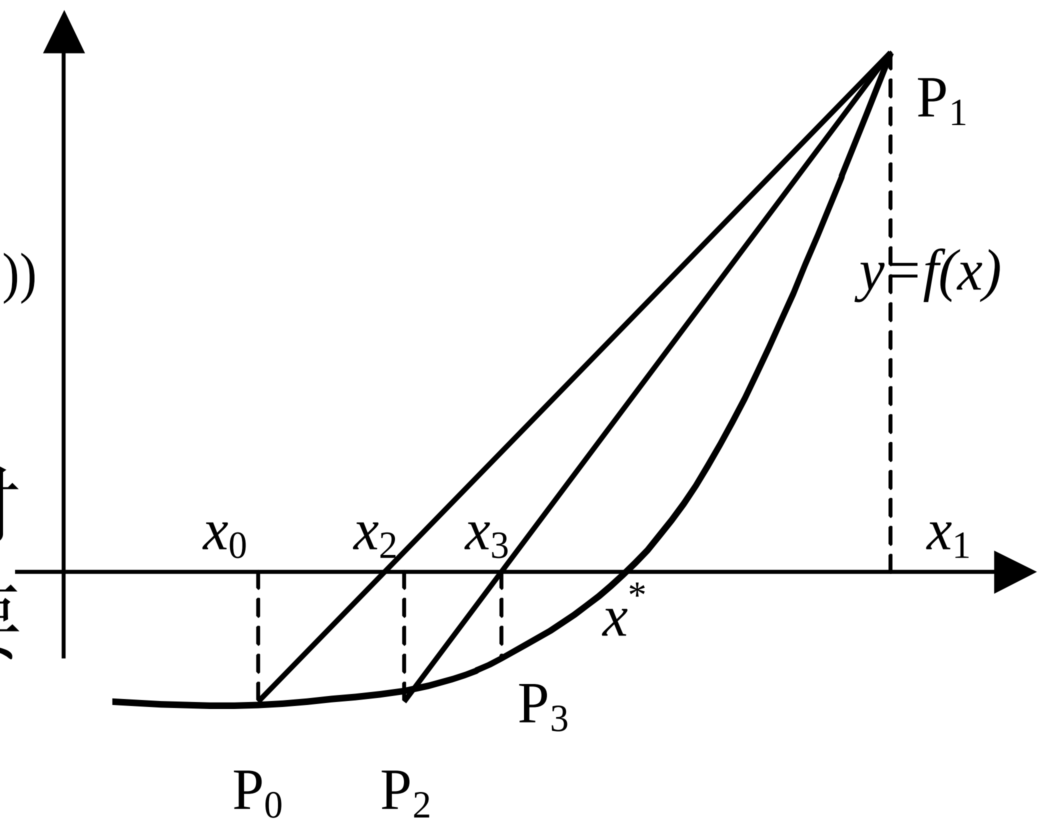
$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

称为弦截迭代公式，

相应的迭代法称为弦截法。

7.5.2 弦截法几何意义

弦截法也称割线法，其几何意义是用过曲线上两点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 、 $P_1(x_1, f(x_1))$ 的割线来代替曲线，用割线与x轴交点的横座标作为方程的近似根 x_2再过 P_1 点和点 $P_2(x_2, f(x_2))$ 作割线求出 x_3，再过 P_2 点和点$P_3(x_3, f(x_3))$ 作割线求出 x_4，余此类推，当收敛时可求出满足精度要求的 x_k



可以证明，**弦截法具有超线性收敛**，收敛的阶约为1.618，它与前面介绍的一般迭代法一样都是线性化方法，但也有区别。即一般迭代法在计算 x_{k+1}时只用到前一步的值 x_k，故称之为单点迭代法；而弦截法在求 x_{k+1}时要用到前两步的结果 x_{k-1}和 x_k，使用这种方法必须给出两个初始近似根 x_0, x_1，这种方法称为多点迭代法

例12 用弦截法求方程 $x = e^{-x}$ 在 $x_0 = 0.5$ 初始值邻近的一个根。要求 $\left|x_{k+1} - x_k\right| < 0.0001$

解： 取 $x_0 = 0.5$，$x_1 = 0.6$， 令 $f(x) = x - e^{-x}$

利用弦截迭代公式

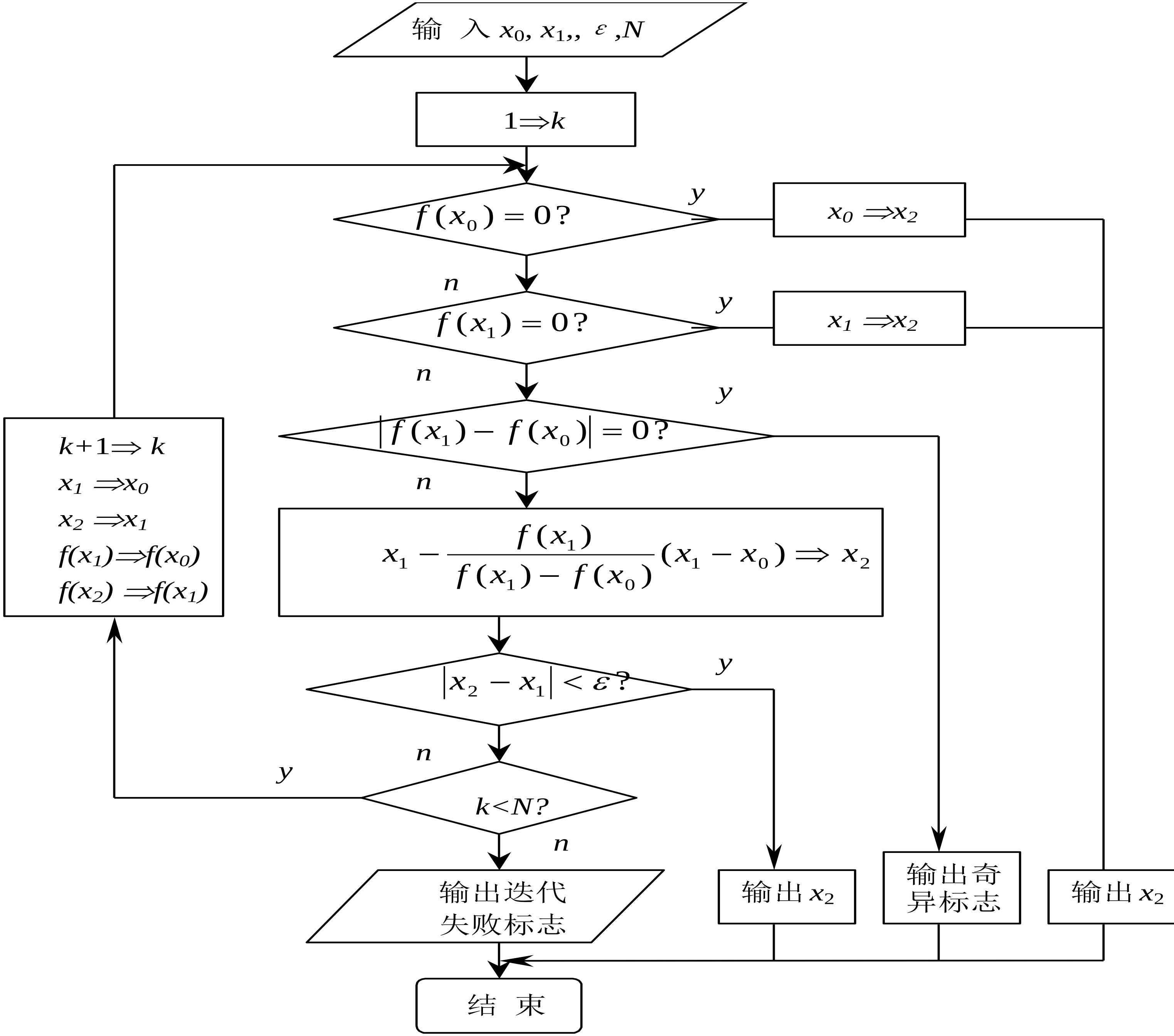
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - e^{-x_k})}{(x_k - x_{k-1}) - (e^{-x_k} - e^{-x_{k-1}})}(x_k - x_{k-1})$$

计算结果，

易见取近似根 $x_4 \approx 0.56714$

则可满足精度要求。

7.5.3 弦截法算法实现



输 入 $x_0, x_1,, \varepsilon ,N$
$1 \Rightarrow k$
$f(x_0)=0$?
y
$x_0 \Rightarrow x_2$
n
$f(x_1)=0$?
y
$x_1 \Rightarrow x_2$
n
$|f(x_1)-f(x_0)|=0$?
y
n
$x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0) \Rightarrow x_2$
$|x_2-x_1|<\varepsilon$?
y
n
$k<N$?
y
n
$k+1 \Rightarrow k$
$x_1 \Rightarrow x_0$
$x_2 \Rightarrow x_1$
$f(x_1) \Rightarrow f(x_0)$
$f(x_2) \Rightarrow f(x_1)$
输出迭代失败标志
输出 x_2
输出奇异标志
输出 x_2
结 束

抛物线法

以x_k, x_{k-1}和x_{k-2}为插值节点，得到插值函数

$$p_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

令$p_2(x) = 0$，得到两个零点：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}},$$

式中$\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$.

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega + \mathrm{sgn}(\omega)\sqrt{\omega - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}.$$

抛物线法按阶$p = 1.840$ 收敛到 x^*

§6　解非线性方程组的迭代法

考虑非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0. \end{cases}$$

利用向量记号写为

$$F(X) = O$$

这里是$F(X)$定义在某区域$D \subset R^n$上向量值函数. 若存在$X^* \in D$, 使得$F(X^*) = 0$, 则称X^*为非线性方程组的解.

考虑等价的方程组

$$X = G(X).$$

定义1. 设$G: D \subset R^n \to R^n$, $\exists L \in (0,1)$, 使得

$$\|G(Y) - G(X)\| \le L\|Y - X\|, \ \forall X, Y \in D_0 \subset D,$$

则称G在D_0上是压缩映像.

定理7 （压缩映像原理）设 $G: D \subset R^n \to R^n$ ，且

（1） G 在 D_0 上是压缩的，

（2） G 把 D_0 映入自身，即$G(X) \in D_0, \forall X \in D_0$,

则 G 在 D_0 中有唯一的不动点 $X^* = G(X^*)$

定理8 设 $G: D \subset R^n \to R^n$ 在 D 内有一不动点 X^*，且 G 在 X^* 可导，$\rho(G'(X^*)) = \sigma < 1$,

则存在开球 $S = S(X^*, \delta) \subset D$, 对 $\forall X^{(0)} \in S$, 迭代序列 $\{X^{(k)}\}$ 收敛于 X^*.

牛顿迭代公式

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[F'(X^{(k)})\right]^{-1} \cdot F(X^{(k)}),$$

其中

$$F'(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

称为 $F(X)$ 的 Jacobi 矩阵

定理3 （局部二阶收敛性）…

例12 用牛顿法求解方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=x_1+2x_2-3=0, \\ f_2(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2-5=0, \end{cases}$$

k	x^k
0	(1.5, 1.0)^T
1	(1.5, 0.75)^T
2	(1.488095, 0.755952)^T
3	(1.488034, 0.755983)^T

初值 $X^{(0)}=(1.5,1.0)^T$.

解：$F'(X)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$, $F'(X)^{-1}=-\dfrac{1}{2x_2-8x_1}\begin{bmatrix} 2x_2 & -2 \\ -4x_1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\dfrac{(x_2^{(k)})^2-2(x_1^{(k)})^2+x_1^{(k)}x_2^{(k)}-3x_2^{(k)}+5}{x_2^{(k)}-4x_1^{(k)}}, \\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-\dfrac{(x_2^{(k)})^2-2(x_1^{(k)})^2-8x_1^{(k)}x_2^{(k)}+12x_2^{(k)}-5}{2(x_2^{(k)}-4x_1^{(k)})}. \end{cases}$$

逐次迭代得结果

本章小结

非线性方程的解通常叫做方程的根，也叫做函数的零点，本章讨论了求解非线性方程近似根常用的一些数值方法。先要确定有根区间，且对于收敛的迭代格式，这个区间要足够小。针对各种求根的数值方法的特点，要考虑其收敛性、收敛速度和计算量。

二分法是逐步将含根区间分半，主要用来求实根；迭代法是一种逐次逼近的方法，起着把根的精确值一步一步算出来的作用；牛顿法具有较快的收敛速度，但对初值选取要求较高。弦截法避开了导数的计算，具有超线性的收敛速度，每计算一步，要用到前面两步的信息。

Thank you very much!

作业

习题 p238

1, 3, 6, 7, 13