数值分析

第二章　插值方法

参考　李庆扬　王能超　易大义

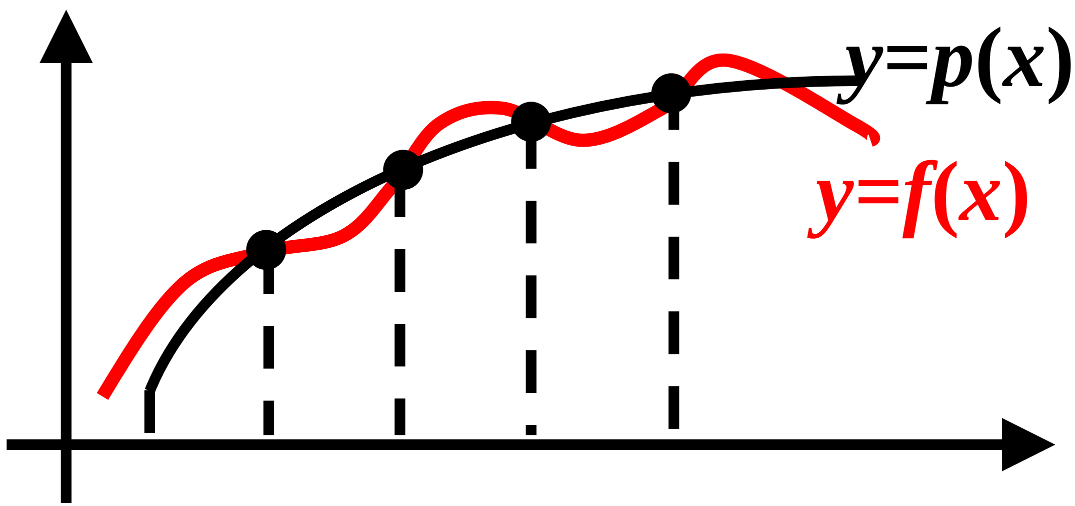
《数值分析》　第 5 版　第 2 章

第二章　插值法

§ 1. 引言 问题的提出

- 函数解析式未知，通过实验观测得到的一组数据，即在某个区间 $[a,b]$ 给出一系列点的函数值 $y_i = f(x_i)$
- 或者给出函数表

x	x_0	x_1	x_2	……	x_n
y	y_0	y_1	y_2	……	y_n



插值法的基本原理

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$上, $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $[a,b]$ 上取定的 $n+1$ 个互异节点, 且在这些点处的函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$ 为已知, 即 $y_i=f(x_i)$ 若存在一个 $f(x)$ 的近似函数 $\varphi(x)$, 满足

$$\varphi(x_i)=f(x_i) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2.1)$$

则称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个插值函数, $f(x)$为被插函数, 点 x_i 为插值节点, 称(2.1)式为插值条件, 而误差函数 $r(x)=f(x)-\varphi(x)$ 称为插值余项, 区间 $[a,b]$称为插值区间, 插值点在插值区间内的称为内插, 否则称外插

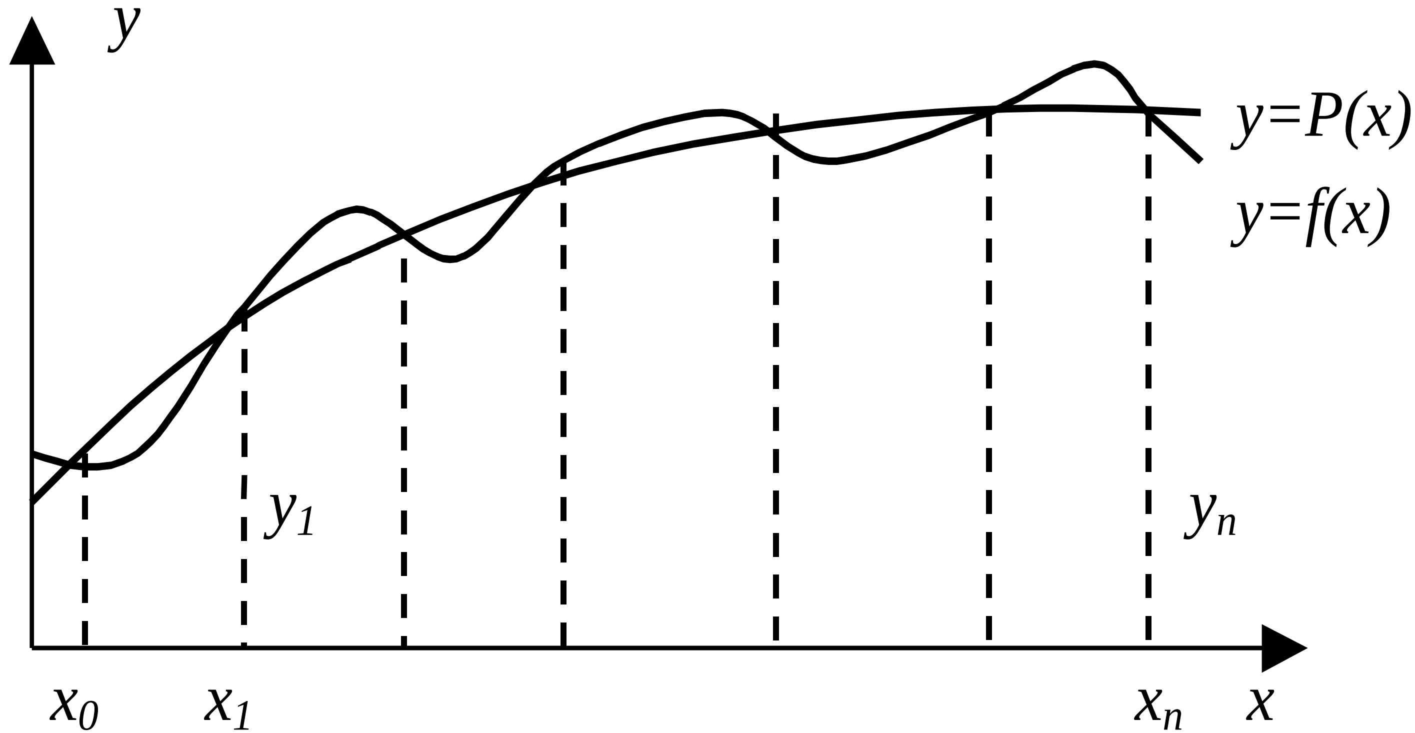
插值函数 $\varphi(x)$ 在 n+1 个互异插值节点 x_i (i=1,2,...,n) 处与 $f(x_i)$ 相等, 在其它点 x 就用 $\varphi(x)$ 的值作为 $f(x)$ 的近似值。这一过程称为插值, 点 x 称为插值点。换句话说，插值就是根据被插函数给出的函数表"插出"所要点的函数值。用 $\varphi(x)$ 的值作为 $f(x)$ 的近似值, 不仅希望 $\varphi(x)$ 能较好地逼近 $f(x)$, 而且还希望它计算简单 。由于代数多项式具有数值计算和理论分析方便的优点。所以本章主要介绍代数插值。即求一个次数不超过 n 次的多项式。

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

满足 $P(x_i)=f(x_i) \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$

则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次插值多项式。这种插值法通常称为代数插值法。其几何意义如下图所示



定理1 n 次代数插值问题的解是存在且惟一的

证明： 设 n 次多项式

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是函数 $y=f(x)$ 在区间[a, b]上的n+1个互异的节点 x_i (i=0, 1, 2, …, n)上的插值多项式, 则求插值多项式 $p(x)$ 的问题就归结为求它的系数 a_i(i=0, 1, 2, …, n)。

由插值条件: $p(x_i)=f(x_i)$ (i=0, 1, 2, …, n), 可得

$$\begin{cases} a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0=f(x_0) \\ a_nx_1^n+a_{n-1}x_1^{n-1}+\cdots+a_1x_1+a_0=f(x_1) \\ \cdots \\ a_nx_n^n+a_{n-1}x_n^{n-1}+\cdots+a_1x_n+a_0=f(x_n) \end{cases}$$

惟一性说明，不论用何种方法来构造，也不论用何种形式来表示插值多项式，只要满足插值条件(2. 1)其结果都是相互恒等的。

$$V=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)$$

称为Vandermonde（范德蒙）行列式，因为 $x_i \neq x_j$（当 $i \neq j$），故 $V \neq 0$ 。根据解线性方程组的克莱姆（Gramer）法则，方程组的解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 存在惟一，从而 $p(x)$ 被惟一确定。

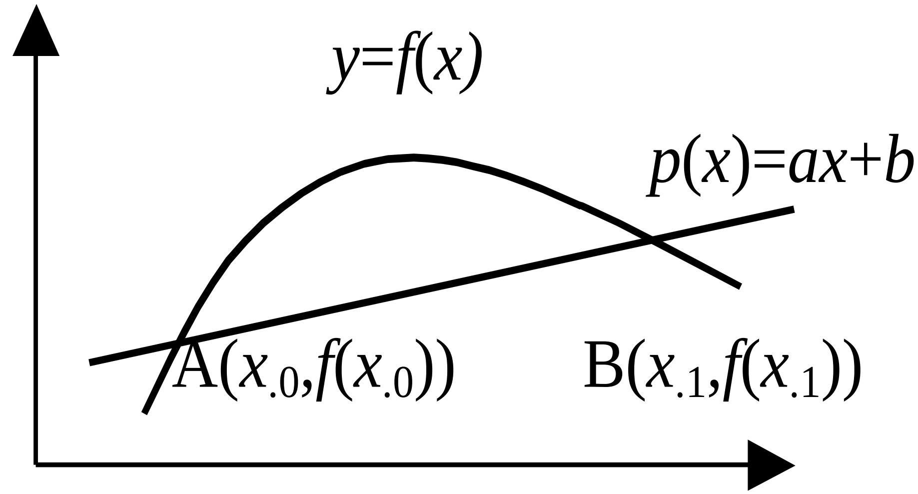
§2 拉格朗日（Lagrange）插值

为了构造满足插值条件 $p(x_i)=f(x_i)$ (i=0,1,2,…,n) 的便于使用的插值多项式 $p(x)$, 先考察几种简单情形, 然后再推广到一般形式。（线性插值与抛物插值）

（1）线性插值

线性插值是代数插值的最简单形式。假设给定了函数 $f(x)$在两个互异的点的值，x_0，x_1，$y_0=f(x_0), y_1=f(x_1)$, 现要求用线性函数 $p(x)=ax+b$ 近似地代替 $f(x)$. 选择参数a和b, 使 $p(x_i)=f(x_i)(i=0,1)$. 称这样的线性函数 $p(x)$是 $f(x)$ 的线性插值函数 。

线性插值的几何意义：用通过点 $A(x_0, f(x_0))$和 $B(x_1, f(x_1))$ 的直线近似地代替曲线 $y=f(x)$ 由解析几何知道，这条直线用点斜式表示为



$$p(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \Rightarrow p(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

为了便于推广，记 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$， $l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$

这是一次函数，且有性质

$$l_0(x_0)=1,\quad l_0(x_1)=0$$
$$l_1(x_0)=0,\quad l_1(x_1)=1$$
$$l_0(x)+l_1(x)=1$$

$$l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$l_0(x)$ 与 $l_1(x)$ 称为线性插值基函数。且有

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \qquad k = 0,1$$

于是线性插值函数可以表示为与基函数的线性组合

$$p(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1$$

例2. 1 已知 $\sqrt{100} = 10$ ，$\sqrt{121} = 11$ ， 求 $y = \sqrt{115}$

解： 这里 $x_0 = 100,\ y_0 = 10,\ x_1 = 121,\ y_1 = 11,$ 利用线性插值

$$p(x) = \frac{x - 121}{100 - 121} \times 10 + \frac{x - 100}{121 - 100} \times 11$$

$$y = \sqrt{115} \approx p(115) = 10.714$$

（2）抛物插值

抛物插值又称二次插值，它也是常用的代数插值之一。

设已知 $f(x)$ 在三个互异点 $x_{0,}\ x_{1,}\ x_2$的函数值 $y_{0,}\ y_{1,}\ y_2$，要构造次数不超过二次的多项式

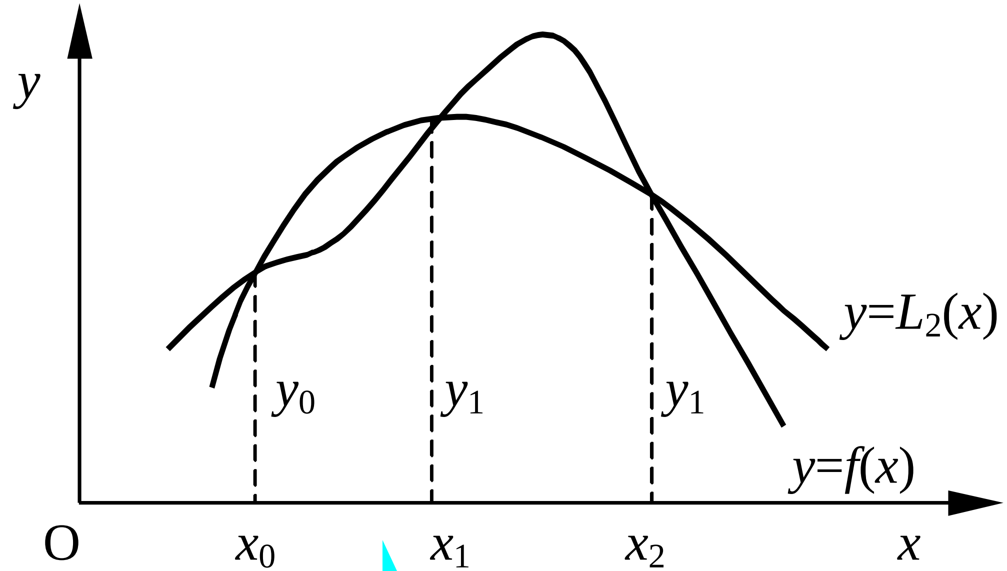
$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

使满足二次插值条件：

$$p(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2)$$

这就是二次插值问题。其几何意义是用经过3个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的抛物线 $y = P(x)$ 近似代替曲线 $y = f(x)$，如下图所示。因此也称之为抛物插值。

$p(x)$的参数 a_0, a_1, a_2 直接由插值条件决定，即 a_0, a_1, a_2 满足下面的代数方程组：



$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

该三元一次方程组的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

的行列式是范德蒙行列式，当 $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ 时，方程组的解唯一。

为了与下一节的 Lagrange 插值公式比较, 仿线性插值, 用基函数的方法求解方程组。先考察一个特殊的二次插值问题：

求二次式 $l_0(x)$ ，使其满足条件：

$$l_0(x_0)=1,\quad l_0(x_1)=0,\quad l_0(x_2)=0$$

这个问题容易求解。由上式的后两个条件知：x_1, x_2 是 $l_0(x)$ 的两个零点。于是

$$l_0(x)=c(x-x_1)(x-x_2)$$

再由另一条件 $l_0(x_0)=1$ 确定系数 $c=\dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

从而导出 $l_0(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

类似地可以构造出满足条件：$l_1(x_1)=1$， $l_1(x_0)=0$， $l_1(x_2)=0$ 的插值多项式

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

及满足条件：$l_2(x_2)=1$， $l_2(x_0)=0$， $l_2(x_1)=0$ 的插值多项式

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

这样构造出来的 $l_0(x),l_1(x),l_2(x)$ 称为抛物插值的基函数

取已知数据 y_0,y_1,y_2 作为线性组合系数, 将基函数 $l_0(x),l_1(x),l_2(x)$ 线性组合可得

$$p(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

容易看出, $p(x)$ 满足条件 $p(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,2)$

拉格朗日插值多项式

两个插值点可求出一次插值多项式，而三个插值点可求出二次插值多项式。插值点增加到 $n+1$个时，也就是通过 $n+1$个不同的已知点 $(x_i, y_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$ ，来构造一个次数为n的代数多项式 $p(x)$。与推导抛物插值的基函数类似，先构造一个特殊 n 次多项式 $l_i(x)$ 的插值问题，使其在各节点 x_i 上满足

$$l_k(x_0)=0,\ \cdots,\ l_k(x_{k-1})=0,\ l_k(x_k)=1,\ l_k(x_{k+1})=0,\ \cdots,\ l_k(x_n)=0$$

即 $$l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

由条件 $l_k(x_i)=0$ （$i\neq k$）知， $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 都是n次 $l_k(x)$ 的零点，故可设

$$l_k(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

其中 A_k 为待定常数。由条件 $l_k(x_k)=1$，可求得 A_k

$$A_k\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)=1 \quad \text{于是} \quad A_k=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}$$

代入上式, 得

$$l_k(x)=\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

称 $l_k(x)$为关于基点 x_i的 n 次插值基函数 $(i=0,1,\ldots,n)$

以 $n+1$ 个 n 次基本插值多项式 $l_k(x)\ (k=0,1,\cdots,n)$ 为基础，就能直接写出满足插值条件

$$p(x_i)=f(x_i)\qquad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

的 n 次代数插值多项式。

$$p(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

事实上，由于每个插值基函数 $l_k(x)\ (k=0,1,\cdots,n)$ 都是n次值多项式，所以他们的线性组合

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k \qquad \textbf{(2.8)}$$

是次数不超过 n 次的多项式，称形如（2.8）式的插值多项式为 n 次拉格朗日插值多项式。并记为 $L_n(x)$

引入记号

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{2.10}$$

则得

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

于是

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} \tag{2.11}$$

例 2.2 已知 $y=f(x)$ 的函数表

x	1	3
y	1	2

求线性插值多项式, 并计算 $x=1.5$ 的值

解: 由线性插值多项式公式得

$$p(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

$$=\frac{x-3}{1-3}\times 1+\frac{x-1}{3-1}\times 2=\frac{1}{2}(x+1)$$

$$f(1.5)\approx p(1.5)=1.25$$

例2.3 已知 $x=1,4,9$ 的平方根值，用抛物插值公式，求 $\sqrt{7}$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

$x_0=1,\ x_1=4,\ x_2=9$ $\quad y_0=1,\ y_1=2,\ y_2=3$

$$p_2(7) = \frac{(7-4)(7-9)}{(1-4)(1-9)} * 1 + \frac{(7-1)(7-9)}{(4-1)(4-9)} * 2 + \frac{(7-1)(7-4)}{(9-1)(9-4)} * 3$$

$$= 2.7$$

例2.4 已知函数 $y = f(x)$ 在节点上满足

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

求二次多项式 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

使之满足 $p(x_i)=y_i$ i=0, 1, 2

解: 用待定系数法, 将各节点值依次代入所求多项式, 得

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=y_1 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=y_2 \end{cases}$$

解上述方程, 将求出的 代入

$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 即得所求二次多项式

例2.5　求过点 $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ 的三点插值多项式

解: 由 Lagrange 插值公式

$$p(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$p(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 2+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 3$$
$$=x+1$$

（给定的三个点在一条直线上）

例2.6 已知 $f(x)$ 的观测数据

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

构造 Lagrange 插值多项式

解 四个点可构造三次Lagrange插值多项式:基函数为

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=-\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x$$

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x$$

Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x)=\sum_{k=0}^{3}y_k l_k(x)$$

$$=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

为便于上机计算，常将拉格朗日插值多项式(2.8)改写成

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[y_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)\right]$$

例2.7 已知 $f(x)$ 的观测数据

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	-5	-6	3

构造插值多项式

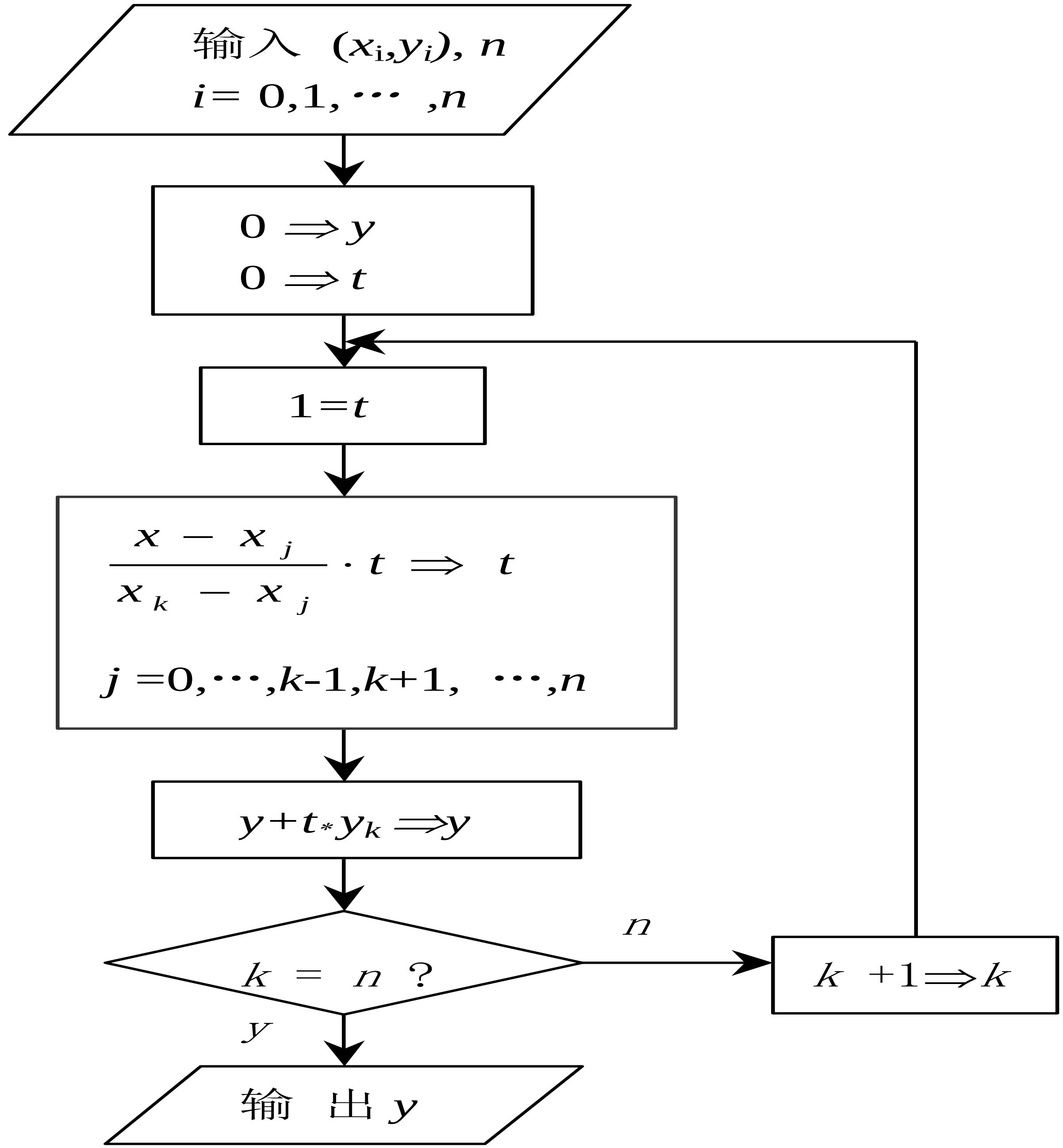
解: 四个点可以构造三次插值多项式，将数据代入插值公式，有

$$p(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 + l_3(x)y_3$$

$$= x^3 - 4x^2 + 3$$

这个例子说明 $p(x)$ 的项数不超过 $n+1$ 项，但可以有缺项。

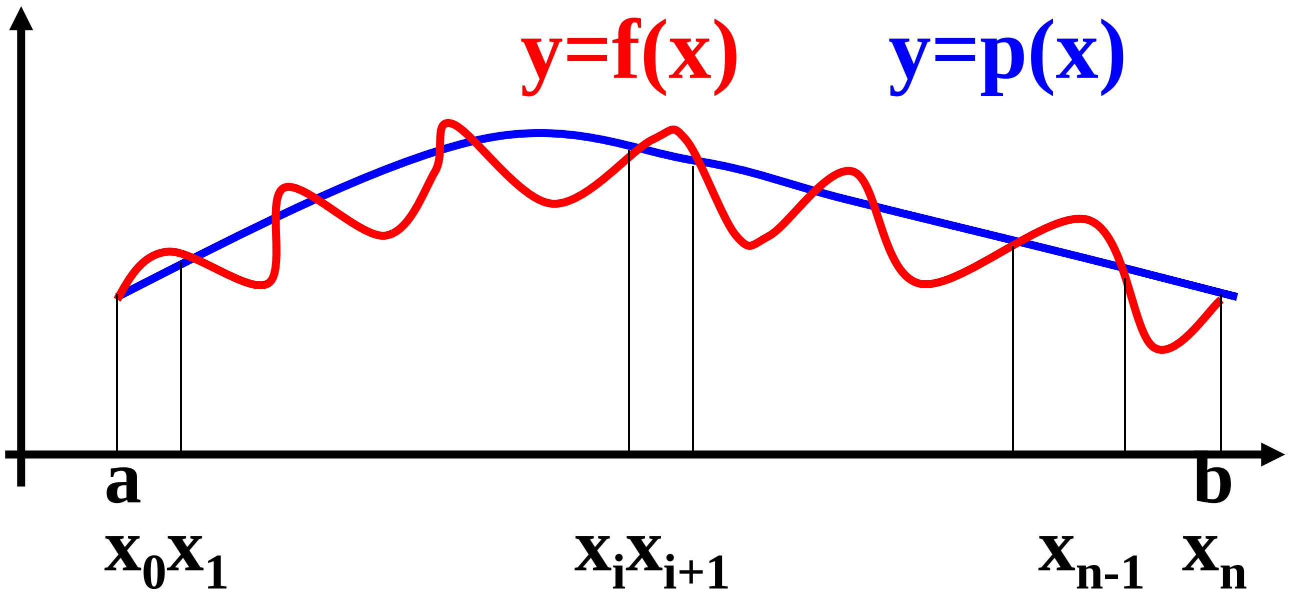
拉格朗日插值算法实现



输入 (x_i,y_i), n
$i= 0,1,\cdots ,n$
$0 \Rightarrow y$
$0 \Rightarrow t$
$1=t$
$\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\cdot t \Rightarrow t$
$j=0,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$
$y+t*y_k \Rightarrow y$
$k = n$?
n
$k+1\Rightarrow k$
y
输 出 y

插值多项式的误差

在插值区间[a, b]上用插值多项式 p(x) 近似代替 f(x), 除了在插值节点x_i上没有误差外，在其它点上一般是存在误差的。



若记 $R(x) = f(x) - p(x)$

则 R(x) 就是用 p(x) 近似代替 f(x) 时的截断误差, 或称插值余项我们可根据后面的定理来估计它的大小。

定理2 设 $f(x)$ 在$[a, b]$有$n+1$阶导数， $x_0, x_1,\dots, x_n$ 为

$[a, b]$上$n+1$个互异的节点, $p(x)$为满足

$p(x_i) = f(x_i)$ $(i=1,2, \dots, n)$的n 次插值多项式，

那么对于任何$x \in [a, b]$有插值余项

$$R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

$a<\xi<b$ 且依赖于 x

其中 $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \xi \in (a,b)$

证明（略）

若 $\max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|=M_{n+1}$，则

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

对于线性插值，其误差为

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)\qquad \xi\in(a,b)$$

在书上 P29 页例 3 有一个结论 $R(x)\le\frac{1}{8}(b-a)^2M_2$

对于抛物插值（二次插值），其误差为

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\quad \xi\in(a,b)$$

例2.8 已知 $x_0=100$, $x_1=121$, 用线性插值估计 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=115$ 时的截断误差

解: 由插值余项公式知 $R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega(x)$

因为 $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$$R_1(x)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$R_1(115)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(115-100)(115-121)$$

$$\le\frac{1}{8}\times\left|(115-100)(115-121)\right|\times\max_{\xi\in[100,121]}\xi^{-\frac{3}{2}}$$

$$\le\frac{1}{8}\times10^{-3}\times\left|(115-100)(115-121)\right|$$

$$=\frac{1}{8}\times15\times6\times10^{-3}=0.01125$$

例2.9 已知 $x_0=100,\ x_1=121,\ x_2=144,$ 当用抛物插值求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 x=115 时的近似值，估计其的截断误差

解

=

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad \because \quad f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$R_2(x)=\frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}(x-100)(x-121)(x-144)$$

$$\therefore \left|R_2(115)\right|\le\frac{1}{16}\left|(115-100)(115-121)(115-144)\right|\times10^{-5}<0.0017$$

例2.10 设 $f(x)=x^4$, 用余项定理写出节点 -1, 0, 1, 2的三次插值多项式

解: 根据余项定理

例如：p28页的例1

证明 $\sum_{i=0}^{5}(x-x_i)^2 l_i(x)=0$ ，

其中 $l_i(x)$ 是关于 x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的插值基函数。

§3 均差与牛顿插值多项式

拉格朗日插值多项式结构对称，使用方便。但由于是用基函数构成的插值，这样要增加一个节点时，所有的基函数必须全部重新计算，不具备承袭性，还造成计算量的浪费。这就启发我们去构造一种具有承袭性的插值多项式来克服这个缺点，也就是说，每增加一个节点时，只需增加相应的一项即可。这就是牛顿插值多项式。

由线性代数知, 任何一个不高于 n 次的多项式, 都可以表示成函数

$$1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

的线性组合, 也就是说, 可以把满足插值条件 $p(x_i)=y_i$ (i=0,1,…,n)的n次插值多项式, 写成如下形式

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中a_{k} (k=0,1,2,…,n) 为待定系数,这种形式的插值多项式称为 Newton 插值多项式。我们把它记为 $N_n(x)$ 即

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{3.12}$$

它满足

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中 a_k (k=0,1,2,…,n) 为待定系数，形如（3.12）的插值多项式称为牛顿(Newton)插值多项式。

可见，牛顿插值多项式 $N_n(x)$ 是插值多项式 $p(x)$ 的另一种表示形式, 与 Lagrange 多项式相比，它不仅克服了“增加一个节点时整个计算工作重新开始”的缺点, 且可以节省乘除法运算次数, 同时在 Newton 插值多项式中用到差分与差商等概念，又与数值计算的其他方面有密切的关系.

3.1 差商及其性质

因变量之差和自变量之差之比叫差商

定义 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的平均变化率

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

称为 $f(x)$ 关于 $[x_i, x_{i+1}]$ 的一阶差商，并记 $f[x_i, x_{i+1}]$

二阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

m 阶差商

$$f[x_0, x_1, \cdots x_m] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots x_m] - f[x_0, x_1, \cdots x_{m-1}]}{x_m - x_0}$$

差商及其性质

$f[x_i, x_j, x_k]$ 是指

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

例如：$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

一般的,可定义区间$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}]$上的n阶差商为

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

差商表

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
…	…		…	

$$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

例2.11 求 $f(x)=x^3$ 在节点 x=0, 2, 3, 5, 6上的各阶差商值

解：计算得如下表

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	0			
2	8	$\frac{8-0}{2-0}=4$		
3	27	$\frac{27-8}{3-2}=19$	$\frac{19-4}{3-0}=5$	
5	125	$\frac{125-27}{5-3}=49$	$\frac{49-19}{5-2}=10$	$\frac{10-5}{5-0}=1$
6	216	$\frac{216-125}{6-5}=91$	$\frac{91-49}{6-3}=14$	$\frac{14-10}{6-2}=1$

差商及其性质

在 $n+1$ 个节点处各阶差商的计算方法

如果 $f(x)$ 的函数值称为零阶差商，则计算如下表：

x	$f(x)$			
x_0	y_0			
x_1	y_1	$f[x_0,x_1]$		
x_2	y_2	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	y_3	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$ $\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\ddots$	
x_n	y_n	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]\cdots$	$f[x_0,x_1\cdots x_n]$

差商及其性质

性质1 函数 $f(x)$ 的 n 阶差商 $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ 可由函数值 $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ 的线性组合表示，且

$$f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)} \qquad \text{其中} \ \omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

这个性质可用数学归纳法证明（用Lagrange插值多项式比较最高项系数来得到）

证明：数学归纳法.

当$k=1$时，$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\dfrac{f[x_0]}{x_0-x_1}+\dfrac{f[x_1]}{x_1-x_0}$,

命题成立.

设$k=m-1$时, 命题成立, 即

$$f[x_0,\cdots,x_{m-1}]=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{m-1})}$$

和

$$f[x_0,\cdots,x_{m-2},x_m]=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq m-1}}^{m}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}$$

由m阶差商定义和上面两式知

$$f[x_0,\cdots,x_m]=\{f[x_0,\cdots,x_{m-2},x_m]-f[x_0,\cdots,x_{m-1}]\}\frac{1}{x_m-x_{m-1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-2} \frac{f(x_j)\left(\dfrac{1}{x_j - x_m} - \dfrac{1}{x_j - x_{m-1}}\right)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{m-2})} \frac{1}{x_m - x_{m-1}}$$

$$+ \frac{f(x_m)}{(x_m - x_0)\cdots(x_m - x_{m-2})} \frac{1}{x_m - x_{m-1}}$$

$$- \frac{f(x_{m-1})}{(x_{m-1} - x_0)\cdots(x_{m-1} - x_{m-2})} \frac{1}{x_m - x_{m-1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_m)}$$

性质2 差商具有对称性, 即在 k 阶差商中 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 任意交换两个节点 x_i 和 x_j 的次序, 其值不变。

例如

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_0, x_2, x_1] = \cdots$$

性质3 若 $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_k]$ 是 x 的 m 次多项式, 则 $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]$ 是 x 的 m-1 次多项式

证：由差商定义

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}] - f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_{k+1} - x}$$

右端分子为 m 次多项式, 且当 $x = x_{k+1}$ 时, 分子为 0 , 故分子含有因子 $x_{k+1} - x$，与分母相消后，右端为 m-1 次多项式。

性质4 若 $f(x)$是 n 次多项式，则 $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]$ 恒为0

证： $f(x)$是 n 次多项式，则 $f[x, x_0]$ 是 n-1 次多项式，

$f[x, x_0, x_1]$是 n-2 次多项式，依次递推

…… ……，

$f[x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ 是零次多项式，所以

$$f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]\equiv 0$$

性质5 k 阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 和 k 阶导数之间有下列关系

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \qquad \xi \in (\min_{0\le i\le n} x_i, \max_{0\le i\le n} x_i)$$

这个性质可直接用罗尔（Rolle）定理证明（或以下方法即余项方法）

牛顿(Newton)插值多项式

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 可根据插值条件推出, 即由

$$N_n(x_i)=f(x_i) \qquad i=0,1,\cdots,n \qquad \text{有}$$

$$N_n(x_0)=a_0=f(x_0)$$

$$N_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)=f(x_1)$$

$$N_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2)$$

……

$$N_n(x_n)=a_0+a_1(x_n-x_0)+\cdots+a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})=f(x_n)$$

这是关于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的下三角方程组, 可以求得

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

一般，用数学归纳法可证明

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \quad (k = 0,1,\cdots,n)$$

所以 n 次牛顿(Newton)插值公式为

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1 \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

其余项 $R_n(x) = f[x_0, x_1 \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

可以看出，牛顿插值公式计算方便，增加一个插值点，只要多计算一项，而 $N_n(x)$ 的各项系数恰好是各阶差商值，很有规律

$$R_n(x) = f[x_0, x_1 \cdots, x_n, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$f[x, x_0, x_1 \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

牛顿插值公式(另一种推导方法)

$$f[x_0,x]=\frac{f[x]-f[x_0]}{x-x_0} \Rightarrow f[x_0,x](x-x_0) = f(x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \boxed{f[x_0,x]}(x-x_0)$$

$$f[x_1,x_0,x]=\frac{f[x_0,x]-f[x_1,x_0]}{x-x_1} \Rightarrow f[x_1,x_0,x](x-x_1)=\boxed{f[x_0,x]}-f[x_1,x_0]$$

$$\Rightarrow f[x_0,x] = \boxed{f[x_1,x_0] + f[x_1,x_0,x](x-x_1)}$$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f[x_1,x_0] + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_1,x_0,x]$$

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_1,x_0]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_1,x_0,x]$$

$$f[x_2,x_1,x_0,x]=\frac{f[x_1,x_0,x]-f[x_2,x_1,x_0]}{x-x_2}$$

$$\Rightarrow\quad f[x_1,x_0,x]=(x-x_2)\,f[x_2,x_1,x_0,x]+f[x_2,x_1,x_0]$$

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+(x-x_0)f[x_1,x_0]\\&+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]\\&+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,f[x_2,x_1,x_0,x]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{f(x_0)+(x-x_0)f[x_1,x_0]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_0]+\dots+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\dots,x_0]}_{N_n(x)} \\
&\quad + \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x_n,x_{n-1},\dots,x_0,x]}_{R_n(x)}
\end{aligned}
$$

其中$N_n(x)$称为<u>生顿插值多项式</u>

$R_n(x)$称为<u>生顿插值余项</u>

如当n=1时,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1,x_0] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_1,x_0,x]$$

$$N_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_1,x_0] = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$

$$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+ \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0]$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
…	…		…	…

例 2.12 已知 x = 1, 4, 9 的平方根值，求 $\sqrt{7}$

解：

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
1	1		
4	2	$\frac{2-1}{4-1}=0.33333$	
9	3	$\frac{3-2}{9-4}=0.2$	$\frac{0.2-0.33333}{9-1}=-0.01667$

$$N(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f[x_1,x_0]+(x-x_0)(x-x_1)\,f[x_1,x_0,x_2]$$

$$N_2(7)=1+(7-1)*0.33333+(7-1)*(7-4)*(-0.01667)=2.69992$$

牛顿插值余项

由 $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}$ 建起了差商和导数的关系

用导数代替牛顿插值多项式中的差商，有

$$p(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

当$x_0, x_1, \cdots, x_n$都趋于x_0时，上式就是常用的泰 勒公式

差商和导数的关系也可用罗尔定理证出，余项

R(x) =$f(x)$- P(x) ⇒ R(x_i) =$f(x_i)$- P(x_i)=0　i=0,1, …,n

即 $R(x)$ 在 $[x_0, x_n]$ 有 $n+1$ 个零点，根据罗尔定理 $R^{(n)}(x)$ 在 $[x_0, x_n]$ 有 1 个零点，设为 ξ，即有

$$R_n^{(n)}(\xi)=0$$

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)$$

$$= f^{(n)}(x) - \{ f(x_0)+(x-x_0) f[x_0, x_1]$$

$$+(x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\}^{(n)}$$

$$= f^{(n)}(x) - n!\, f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

$$\begin{cases} R_n(x_i)=0 & (i=0,1,..,n) \\ R'_n(\xi_i)=0 & (i=0,1,..,n-1) \\ \vdots & \vdots \\ R_n^{(n)}(\xi)=0 & (\xi\in[x_0,x_1,\ldots,x_n]) \end{cases}$$

$$R_n^{(n)}(\xi)=0=f^{(n)}(\xi) - n!\, f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!} \qquad (\xi \in [x_0, x_1, \ldots, x_n])$$

增加新节点 x, 并且 $f(x)$ 为 $(n+1)$ 阶可导时, 有

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \in [x_0, x_1, \ldots, x_n, x])$$

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \quad = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$|f(x)^{(n+1)}| \le M_{n+1} \qquad |R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

例2.13 已知 x=0, 2, 3, 5 对应的函数值为 y=1, 3, 2, 5 ,

作三次 Newton 插值多项式。

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
2	3	1		
3	2	-1	-2/3	
5	5	3/2	5/6	3/10

∴ 所求的三次Newton插值多项式为

$$N_3 = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= 1 + 1\cdot(x-0) - \frac{2}{3}(x-0)(x-2) + \frac{3}{10}(x-0)(x-2)(x-3)$$

例2.14　已知 $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$

求 $f[2^0, 2^1, \ldots 2^7]$ 及 $f[2^0, 2^1, \ldots 2^7, 2^8]$

分析：本题 $f(x)$是一个多项式, 故应利用差商的性质

解:　由差商与导数之间的关系

例2.15 求 $\sqrt{7}$**的值** 并估计其误差

解： 作函数 $f(x)=\sqrt{x}$

取 x_0=4, x_1=9, x_2=6.25，建立差商表

x	$f(x)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
4	2		
9	3	$\frac{3-2}{9-4}=0.2$	
6.25	2.5	$\frac{2.5-3}{6.25-9}=0.18182$	$\frac{0.18182-0.2}{6.25-4}=0.00808$

$N_2(7)= 2 + (7-4)*0.2 + (7-4)*(7-9)*(-0.00808)= 2.64848$

由 $|R_n(x)| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$ $\quad |f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}$

在区间[4 , 9]上,

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \le \frac{3}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^5 = 0.011719$$

$$R_n(x) \le \frac{0.011719}{3!}|(7-4)(7-9)(7-6.25)| \approx 0.00879$$

余式近似 0.5 *10 $^{-2}$, $N_2(7) = 2.64848$ 可舍入为2.65

$\sqrt{7} = 2.645751...$

差分与等距节点插值

当插值节点等距分布时, 被插值函数的变化率就可用差分来表示, 这时牛顿插值公式的形式更简单, 计算量更小

等距节点 $x_{i+1} - x_i = h$，

函数在等距节点上的值为$y_0, y_1, \ldots, y_n$， 称

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$$

为函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的一阶差分。称

$$\Delta^2 y_{i-1} = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

为函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上的二阶差分。称

$$\Delta^k y_{i-1} = \Delta^{k-1} y_i - \Delta^{k-1} y_{i-1}$$

为函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_{i+k-1}]$ 上的 k 阶差分。

等距节点插值

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$			
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	
x_4	y_4	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y_0$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$
$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^3$$

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$$
$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$

结论：各阶差分中函数值的系数正好等于

$(a-b)^r$ 展开式中的系数

等距节点情况下$x_i = x_0+ih$，用差分表示差商：

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{y_2-y_1}{h}=\frac{\Delta y_1}{1!h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{\Delta y_1}{1!h}-\frac{\Delta y_0}{1!h}}{2h}=\frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{2h^2}=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}=\frac{\frac{\Delta y_2}{1!h}-\frac{\Delta y_1}{1!h}}{2h}=\frac{\Delta y_2-\Delta y_1}{2!h^2}=\frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{\frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}-\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}}{3h}=\frac{\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0}{2*3h^3}=\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$$

例2.16　计算 $f(x) = x^3$在等距节点0，1，2，3, 4上的各阶差分值

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0				
1	1	1			
2	8	7	6		
3	27	19	12	6	
4	64	37	18	6	0

牛顿前插公式

取间距为h，等距节点 $x_0\ x_1 \cdots x_n$ 顺序建立牛顿差商公式

$$
\begin{aligned}
f(x) = & f(x_0) + (x-x_0) f[x_0, x_1] \\
& +(x-x_0)(x-x_1) f[x_2, x_1, x_0] \\
& +\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] \\
& +(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, x]
\end{aligned}
$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{\Delta y_0}{1!h} \qquad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$$

$$N_n(x) = y_0 + (x-x_0)\frac{\Delta y_0}{1!h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

$$+\ldots+ (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$ **牛顿前插公式**

因 $x_i = x_0 + ih$ ，设 $x = x_0 + th$ ，则 $x - x_i = (t-i)h \quad (i = 0,1,\cdots,n)$

$$f(x)$$

$$= f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$

$$+ \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0, x]$$

$N_n(x)$

$R_n(x)$

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{h}}$$

其中t与不同的需要求出的点有关

$$P_n(x) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_0			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$+ \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

向后差分

函数$y=f(x)$, 若记$y_{-1}=f(x_0-h)$, $y_{-2}=f(x_0-2h),\ldots$

则各阶向后差分

一阶 $\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}$， $\nabla y_1 = y_1 - y_0$， $\nabla y_2 = y_2 - y_1$， …

二阶 $\nabla^2 y_0 = \nabla y_0 - \nabla y_{-1} = y_0 - y_{-1} - (y_{-1} - y_{-2}) = y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}$

$\nabla^2 y_1 = \nabla y_1 - \nabla y_0 = y_1 - y_0 - (y_0 - y_{-1}) = y_1 - 2y_0 + y_{-1}$

…

K阶 $\nabla^k y_0 = \nabla^{k-1} y_0 - \nabla^{k-1} y_{-1}$ $\nabla^k y_1 = \nabla^{k-1} y_1 - \nabla^{k-1} y_0$

同样利用向后差分可以得到牛顿向后插值公式

$$N_n(x)=N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

其中 $t=(x-x_n)/h$, 公式

$$R(x)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in\left[x_0,x+nh\right]$$

称之为牛顿向后插值公式余项。

这个题比较好，利用差分的形式求牛顿插值函数

例5.16 按下列数值表用牛顿前插公式求 y(-0.5) 的近似值

x	-1	0	1	2
y	-1	1	3	11

解： 建立差分表 $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{(-0.5)-(-1)}{1} = 0.5$

$$N_n(x_0+th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-1	-1			
0	1	2		
1	3	2	0	
2	11	8	6	6

$$N_3(x) = -1 + \frac{0.5}{1!} * 2 + \frac{0.5(0.5-1)}{2!} * 0 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!} * 6$$

$$= -1+1+0+0.375 = 0.375$$

例5.17　估计用线性插值法计算lg47时的误差限

x	42	45	48
lgx	1.6232493	1.6532126	1.6812413

解：应用n=1的拉格朗日插值公式

$$y=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

取x_0=45，x_1=48，

$$y=\frac{47-48}{45-48}y_0+\frac{47-45}{48-45}y_1=0.3333333y_0+0.6666667y_1$$

$$=1.671898401$$

误差限

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| |(x-x_0)(x-x_1)|$$

$$= \frac{1}{2}\lg''\xi \cdot (x-x_0)(x-x_1) \qquad (\xi \in [45, 48])$$

$$(\lg x)' = \frac{1ge}{x} \qquad (\lg x)'' = (\frac{1ge}{x})' = -\frac{\lg e}{x^2} = -\frac{0.43}{x^2}$$

$$R_1(x) \le \left|\frac{1}{2}\frac{0.43}{45^2} \times (47-45)(47-48)\right| = 0.2 \times 10^{-3}$$

插值公式的唯一性及其应用

- 插值公式的唯一性

若插值节点相同，则插值公式是唯一的。

$P_n(x)$ 与 $Q_n(x)$ 有相同的插值节点，

令 $R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$

对于 $x = x_i$， i=0,1,…,n

$$R_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0.$$

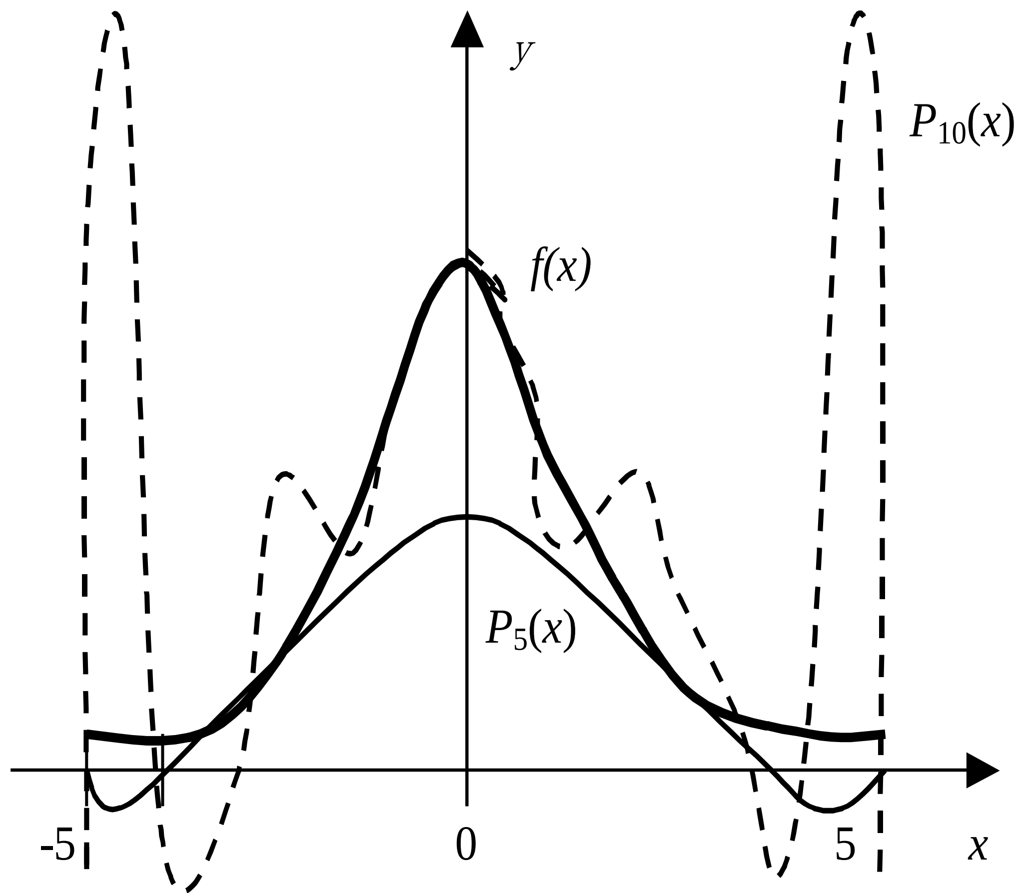
§4 分段线性插值

2.4.1 高次插值的龙格现象

插值多项式余项公式说明插值节点越多，一般说来误差越小，函数逼近越好，但这也不是绝对的，因为余项的大小既与插值节点的个数有关，也与函数 $f(x)$的高阶导数有关。换句话说，适当地提高插值多项式的次数，有可能提高计算结果的准确程度，但并非插值多项式的次数越高越好。当插值节点增多时，不能保证非节点处的插值精度得到改善，有时反而误差更大。考察函数

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad -5\le x\le 5$

右图给出了 $P_5(x)$ 和 $P_{10}(x)$ 的图像，当n增大时，$P_n(x)$ 在两端会发出激烈的振荡，这就是所谓龙格现象。该现象表明，在大范围内使用高次插值，逼近的效果往往是不理想的



另外，从舍入误差来看，高次插值误差的传播也较为严重，在一个节点上产生的舍入误差会在计算中不断扩大，并传播到其它节点上。因此，次数太高的高次插值多项式并不实用，因为节点数增加时，计算量增大了，但插值函数的精度并未提高。为克服在区间上进行高次插值所造成的龙格现象，采用分段插值的方法，将插值区间分成若干个小的区间，在每个小区间进行线性插值，然后相互连接，用连接相邻节点的折线逼近被插函数，这种把插值区间分段的方法就是分段线性插值法。

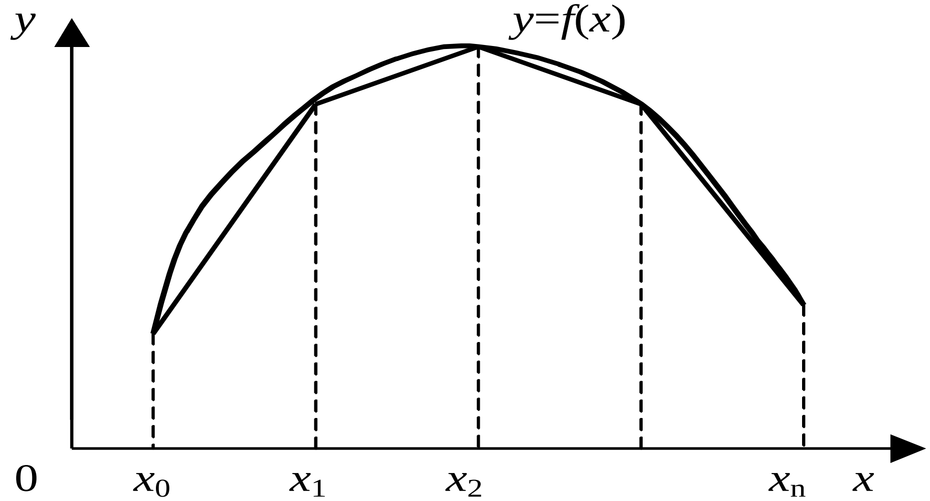
2.4.2 分段线性插值

分段线性插值就是通过插值节点用折线段连接起来逼近 $f(x)$.

设 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 上的函数值为 $f(x_0), f(x_1),\cdots, f(x_n)$, 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,n)$ 上作线性插值，得

$$S_1(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f(x_k)+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f(x_{k+1}) \qquad (x_k\le x\le x_{k+1})$$

在几何上就是用折线替代曲线,如右图所示若用插值基函数表示,则在 $[a,b]$ 上



$$S(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) \qquad (a \le x \le b)$$

其中
$$l_i(x)=\begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & x \in [a,b], x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

显然，$l_i(x)$是分段线性连续函数，且

$$l_i(x_k)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的分段线性插值函数。

由线性插值的余项估计式知，$f(x)$在每个子段$[x_i,x_{i+1}]$上有误差估计式

$$\left|f(x)-S(x)\right|\leq\frac{h_i^2}{8}\max_{x_i\leq x\leq x_{i+1}}\left|f''(x)\right|$$

其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$

例2.19 已知 $f(x)$ 在四个节点上的函数值如下表所示

x_i	30	45	60	90
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**

求 $f(x)$ 在区间 [30, 90]上的分段连续线性插值函数 $S(x)$

解 将插值区间[30,90]分成连续的三个小区间

[30,45], [45,60], [60,90]

则 $S(x)$ 在区间 [30,45] 上的线性插值为

$$S(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)=\frac{\sqrt{2}-1}{30}x+\frac{3}{2}-\sqrt{2}$$

$S(x)$ 在区间 [45, 60] 上的线性插值为

$$S(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30}x+2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$S(x)$ 在区间 [60, 90] 上的线性插值为

$$S(x)=\frac{x-x_3}{x_2-x_3}f(x_2)+\frac{x-x_2}{x_3-x_2}f(x_3)=\frac{2-\sqrt{3}}{60}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}-2$$

将各小区间的线性插值函数连接在一起，得

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}-1}{30}x+\dfrac{3}{2}-\sqrt{2} & 30\le x\le 45\\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30}x+2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3} & 45\le x\le 60\\[2ex] \dfrac{2-\sqrt{3}}{60}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-2 & 60\le x\le 90\end{cases}$$

§5 三次样条插值

我们知道，给定n+1个节点上的函数值可以作n次插值多项式，但当n较大时，高次插值不仅计算复杂，而且可能出现Runge现象，采用分段插值虽然计算简单、也有一致收敛性，但不能保证整条曲线在连接点处的光滑性，如分段线性插值，其图形是锯齿形的折线，虽然连续，但处都是“尖点”，因而一阶导数都不存在，这在实用上，往往不能满足某些工程技术的高精度要求。如在船体、飞机等外形曲线的设计中，不仅要求曲线连续，而且要有二阶光滑度，即有连续的二阶导数。这就要求分段插值函数在整个区间上具有连续的二阶导数。因此有必要寻求一种新的插值方法，这就是样条函数插值法

2.5.1　三次样条函数

定义5.4 设函数定义在区间 $[a,b]$ 上，给定 $n+1$ 个节点和一组与之对应的函数值，若函数满足：

（1）在每个节点上满足

$S(x_i)=f(x_i)$ (i=0,1, …, n)

（2）在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数

（3）在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ (i=0,1, …, n-1) 上是一个三次多项式。

则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。

三次样条插值函数 $S(x)$ 是一个分段三次多项式, 要求出 $S(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$上要确定4个待定参数, 若用 $S_i(x)$ 表示它在第i 个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$上的表达式, 则

$$S_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3 \qquad i = 0,1,\cdots,n-1$$

其中四个待定系数为 $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$,子区间共有 n 个所以要确定$S(x)$ 需要 $4n$ 个待定系数。

另一方面, 要求分段三次多项式S(x)及其导数 $S'(x)$ 和 $S''(x)$ 在整个插值区间 $[a, b]$ 上连续, 则要求它们在各个子区间的连接点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 上连续, 即满足条件

（1）　插值条件

$$S(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,\cdots,n$$

（2）　连接条件

$$S(x_i - 0) = S(x_i + 0)$$
$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0) \quad i = 1,2,\cdots,n-1$$
$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$$

上述二式共给出了 $4n-2$ 个条件, 而待定系数有 $4n$ 个, 因此还需要 **2** 个条件才能确定 $S(x)$, 通常在区间端点上 $a = x_0, b = x_n$ 各加一个条件, 称为边界条件, 常用边界条件有三种类型。

第一种类型： 给定两端点 $f(x)$ 的一阶导数值：

$$S'(x_0)=f'(x_0),\quad S'(x_n)=f'(x_n)$$

第二种类型： 给定两端点 $f(x)$ 的二阶导数值：

$$S''(x_0)=f''(x_0),\quad S''(x_n)=f''(x_n)$$

作为特例，$S''(x_0)=S''(x_n)=0$ 称为**自然边界条件**。满足自然边界条件的三次样条插值函数称为自然样条插值函数。

第三种类型： 当 $f(x)$ 是以为 x_n-x_0 周期的函数时，则要求 $S(x)$ 也是周期函数，这时边界条件应当满足 $f(x_0)=f(x_n)$

同时，$S'(x_0)=S'(x_n),\quad S''(x_0)=S''(x_n)$

这样，由上给定的任一种边界条件加上插值条件和连接条件，就能得出 $4n$ 个方程，可以惟一确定 $4n$ 个系数。从而得到三次样条插值函数 $S(x)$ 在各个子区间 $[x_{i,}\ x_{i+1}]$ 上的表达式 $S_{\mathrm{i}}(x),\ i=1,\ldots,n$ 但是，这种做法当 n 较大时，计算工作很大，不便于实际应用。因此我们希望找到一种简单的构造方法。

2.5.2 三次样条插值函数的求法

设 $S(x)$ 在节点 x_i 处的二阶导数为

$$S''(x_i)=M_i \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

因为在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 $S(x)=S_i(x)$ 是三次多项式，所以 $S''(x)$ 在此小区间上是x的线性函数，

且因为 $S''(x_{i-1})=M_{i-1}$，$S''(x_i)=M_i$ $\quad x\in[x_{i-1},x_i]$

用线性插值，可知其表达式为

这个函数的定义区间

$$S_i''(x)=M_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

记 $h_i=x_i-x_{i-1}$，则有 $S_i''(x)=M_{i-1}\dfrac{x_i-x}{h_i}+M_i\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}$

连续两次积分得

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x_i - x) + B_i(x - x_{i-1})$$

(5.31)

其中，A_i, B_i 为积分常数，可利用插值条件

$S(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), S(x_i) = f(x_i)$ 确定，即要求 A_i, B_i 满足

$$S(x_{i-1}) = \frac{1}{6}M_{i-1}h_i^2 + A_i h_i = f(x_{i-1}), \qquad S(x_i) = \frac{1}{6}M_i h_i^2 + B_i h_i = f(x_i)$$

并记 $f(x_{i-1}) = y_{i-1},\quad f(x_i) = y_i$ ，则得

$$A_i = \frac{1}{h_i}\left(y_{i-1} - \frac{1}{6}M_{i-1}h_i^2\right), \qquad B_i = \frac{1}{h_i}\left(y_i - \frac{1}{6}M_i h_i^2\right)$$

将其代入（5.31）即得

$$S_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}$$

$$+\left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6}h_i^2\right)\frac{(x_i - x)}{h_i} + \left(y_i - \frac{M_i}{6}h_i^2\right)\frac{(x - x_{i-1})}{h_i} \qquad (5.32)$$

$$(x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2\cdots, n)$$

由上讨论可知，只要确定 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 这n+1个值，就可定出三样条插值函数S(x)。

为了求出 $M_i(i = 0,1,\cdots,n)$，利用一阶导数在子区间连接点上连续的条件 $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0)$

对式(5. 32)求导一次，得在区间[x_{i-1}, x_i]上的表达式为

$$S_i'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \qquad (5.33)$$

也就是在右端点 x_i 上有

$$S_i'(x_i-0)=\frac{h_i}{2}M_i-\frac{h_i}{6}(M_i-M_{i-1})+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

在左端点上 x_{i-1} 有

$$S_i'(x_{i-1}+0)=-\frac{h_i}{2}M_{i-1}-\frac{h_i}{6}(M_i-M_{i-1})+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}=-\frac{h_i}{3}M_{i-1}-\frac{h_i}{6}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

将上式中的 $i-1$ 改为 i，即得在子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式 $S_{i+1}'(x)$，并由此得

$$S_{i+1}'(x_i+0)=-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}$$

利用 $S'(x)$ 在内接点的连续性，即 $S_i'(x_i-0)=S_{i+1}'(x_i+0)$

就可得到关于参数 M_{i-1}, M_i, M_{i+1} 的一个方程

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}M_i+\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i} \qquad \textbf{（5.34）}$$

上式两边同乘以 $\dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}$，即得方程 $(i=1,2,\cdots,n-1)$

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1}=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)$$

若记

$$\begin{cases}\mu_i=\dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\\[2ex]\lambda_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=1-\mu_i\\[2ex]g_i=\dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]\right)\end{cases} \qquad \textbf{（5.35）}$$

则所得方程可简写成

$$\boxed{\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = g_i} \qquad (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

即

$$\begin{cases} \mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = g_1 \\ \mu_2 M_1 + 2M_2 + \lambda_2 M_3 = g_2 \\ \cdots \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = g_{n-1} \end{cases} \qquad (5.36)$$

这是一个含有 $n+1$ 个未知数、$n-1$个方程的线性方程组. 要完全确定 $M_i(i = 0,1,\cdots,n)$的值还需要补充两个条件, 这两个条件通常根据实际问题的需要, 根据插值区间 $[a,b]$的两个端点处的边界条件来补充。边界条件的种类很多, 常见的有以下3种:

第一种边界条件： 即已知插值区间两端的一阶导数值：

$$S'(x_0)=f'(x_0),\ \ S'(x_n)=f'(x_n)$$ 需要知道这两个端点的导数值

则可得到包含 M_i 的两个线性方程，由(5.33)知，$S(x)$在子区间 $[x_0,x_1]$上的导数为

$$S_1'(x)=-M_0\frac{(x_1-x)^2}{2h_1}+M_1\frac{(x-x_0)^2}{2h_1}+\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{h_1}{6}(M_1-M_0)$$

由条件 $S'(x_0)=f'(x_0)=y_0'$ 得

$$y_0'=-M_0\frac{h_1}{2}+\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{h_1}{6}(M_1-M_0)$$

即 $$2M_0+M_1=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0'\right)\qquad(5.37)$$

同理，由条件 $S'(x_n)=f'(x_n)=y_n'$ 得

$$M_{n-1}+2M_n=\frac{6}{h_n}\left(y'_n-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right) \qquad (5.38)$$

将式（5.36）和式（5.37）以及式（5.38）合在一起即得确定 $M_0,M_1,\cdots,M_n$ 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (5.39)$$

其中 $$\begin{cases} g_0=\dfrac{6}{h_1}(f[x_0,x_1]-y'_0) \\ g_n=\dfrac{6}{h_n}(y'_n-f[x_{n-1},x_n]) \end{cases}$$

第二种边界条件：即已知插值区间两端的二阶导数值：

$$S''(x_0)=y_0'',\quad S''(x_n)=y_n''$$

由于在区间端点处二阶导数

$$M_0=y_0'',\quad M_n=y_n''$$

即其中的两个未知量已经知道

所以方程（5.36）中实际上只包含有 $n-1$ 个未知数

$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$，从而得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1-\mu_1 y_0'' \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1}-\lambda_{n-1}y_n'' \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

第三种边界条件: 由 $S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$ 与 $S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$，可得

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{M}_n \tag{5.41}$$

和

$$\lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=g_n \tag{5.42}$$

其中

$$\begin{cases}\mu_n=\dfrac{h_n}{h_1+h_n}\\[2ex] \lambda_n=\dfrac{h_n}{h_1+h_n}=1-\mu_n\\[2ex] g_n=\dfrac{6}{h_1+h_n}\left(f\left[x_0,x_1\right]-f\left[x_{n-1},x_n\right]\right)\end{cases} \tag{5.43}$$

将式（5.36)，（5.41)，（5.42)合在一起，即得关于 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ 的线性方程组。

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (5.44)$$

利用线性代数知识,可以证明方程组（5.39），（5.40）和（5.44）的系数矩阵都是非奇异的，因此有惟一解。

例2.20 已知的函数值如下： 重点

x	1	2	4	5
$f(x)$	1	3	4	2

在区间 $[1, 5]$ 上求三次样条插值函数 $S(x)$ 使它满足边界条件 $S''(1)=0,\ S''(5)=0$ 这个称为自然边界条件，为第二种边界条件的特殊情况

解: 这是在第二种边界条件下的插值问题，故确定 M_0, M_1, M_2, M_3 的方程组形如（5.40）所示，

由已知边界条件，有 $S''(x_0)=y_0''=M_0=0,\quad S''(x_3)=y_3''=M_3=0$

则得求解 M_1, M_2 的方程组为 M0和M3已知均为0.因此只用求M1和M2

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

在此矩阵中由于M0和M3均为0，因此简化了，比如原本还有\lamda2现在被简化了。

根据给定数据和边界条件算出 μ_i,λ_i 与 g_i

$$h_1=1 \qquad h_2=2 \qquad h_3=1$$

看不同参数他的下标变化范围。

$$f[x_0,x_1]=2 \qquad f[x_1,x_2]=\frac{1}{2} \qquad f[x_2,x_3]=-2$$

$$\lambda_1=\frac{h_2}{h_1+h_2}=\frac{2}{3}, \qquad \mu_2=\frac{h_2}{h_2+h_3}=\frac{2}{3}$$

$$g_1=\frac{6}{h_1+h_2}(f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1])=\frac{6}{3}(\frac{1}{2}-2)=-3$$

$$g_2=\frac{6}{h_2+h_3}(f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2])=\frac{6}{3}(-2-\frac{1}{2})=-5$$

则得方程组

$$\begin{cases} 2M_1+\frac{2}{3}M_2=-3 \\ \frac{2}{3}M_1+2M_2=-5 \end{cases}$$

解得 $M_1=-\frac{3}{4}$, $M_2=-\frac{9}{4}$ 又 $M_0=M_3=0$ 代入式(5.32)

即得$S(x)$在各子区间上的表达式 $S_i(x)(i=1,2,3)$

由式（5.32）知，$S(x)$ 在$[x_0, x_1]$上的表达式为

$$S_1(x)=M_0\frac{(x_1-x)^3}{6h_1}+M_1\frac{(x-x_0)^3}{6h_1}+\left(y_0-\frac{M_0}{6}h_1^2\right)\frac{(x_1-x)}{h_1}+\left(y_1-\frac{M_1}{6}h_1^2\right)\frac{(x-x_0)}{h_1}$$

将 $x_0=1,\ x_1=2,\ y_0=1,\ y_1=3,\ h_1=1,\ M_0=0,\ M_1=-\frac{3}{4}$ 代入上式化简后得

$$S_1(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x-1$$

同理 $S(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上的表达式为

$$S_2(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{4}x-1$$

$S(x)$ 在 $[x_2, x_3]$ 上的表达式为

$$S_3(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{91}{4}x - 19$$

故所求的三次样条插值函数 $S(x)$ 在区间 $[1,5]$ 上的表达式为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1 & (1 \le x \le 2) \\ -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1 & (2 \le x \le 4) \\ \frac{3}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{91}{4}x - 19 & (4 \le x \le 5) \end{cases}$$

用三次样条函数$S(x)$逼近 $f(x)$ 是收敛的，并且也是数值稳定的，但其误差估计与收敛定理的证明都比较复杂，这里只给出结论。

定理5 设 $f(x)$是 $[a,b]$ 上二次连续可微函数，在 $[a,b]$ 上，以 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为节点的三次样条插值函数$S(x)$ 满足 $\left|f(x) - S(x)\right| \le \frac{M_2}{2} \max_i \left|x_i - x_{i-1}\right|$

其中 $M_2 = \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$

证明 （略）

三、误差界与收敛性

定理4 设 $f(x)\in C^4[a,b]$, $S(x)$ 满足第一或第二边界条件, 令 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1} h_i, h_i=x_{i+1}-x_i (i=0,1,\cdots,n-1)$, 则有估计式

$$\max_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)-s^{(k)}(x)| \le C_k \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|h^{4-k},$$

$$k=0,1,2. \tag{7.17}$$

其中 $C_0=\dfrac{5}{384}$, $C_1=\dfrac{1}{24}$, $C_2=\dfrac{3}{8}$.

用三次样条绘制的曲线不仅有很好的光滑度，而且当节点逐渐加密时，其函数值在整体上能很好地逼近被插函数，相应的导数值也收敛于被插函数的导数，不会发生龙格现象。因此三次样条在计算机辅助设计中有广泛的应用。

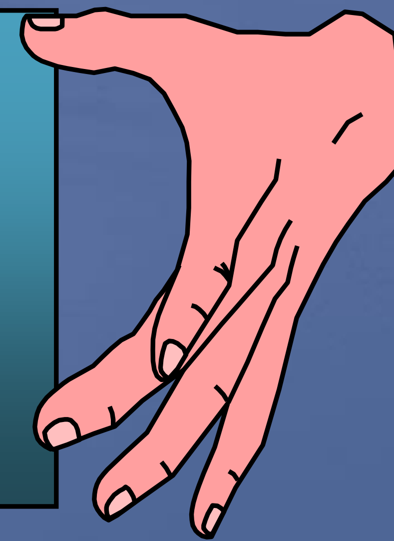
本章小结

本章介绍的插值法是实用性很强的方法。它们解决的实际问题虽然各式各样，但抽象为数学问题却有它的共性，即利用已知的数据去寻求某个较为简单的函数 $P(x)$ 来逼近 $f(x)$ 。插值法给出了寻求这种近似函数的原则，以及构造近似函数的几种具体方法。插值法要求近似函数在已知的数据点必须与 $f(x)$ 完全一致。

插值法中的拉格朗日插值多项式是研究数值微积分与微分方程数值解的重要工具。牛顿插值多项式是拉格朗日插值多项式的变形，具有承袭性，比拉格朗日插值多项式节省计算量。分段低次多项式插值由于具有良好的稳定性与收敛性，且算法简单，便于应用。特别是应用广泛的三次样条插值，不但有较好的稳定性和收敛性，而且具有较好的光滑性，从而满足了许多实际问题的要求。需对样条函数作进一步了解的读者可参阅有关文献

第二章作业

习题P48：2,4,8，14，18，19



埃尔米特(Hermite)插值

许多实际问题不但要求插值函数$P(x)$在插值节点处与被插函数 $f(x)$ 有相同的函数值 $P(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$，而且要求在有些节点或全部节点上与 $f(x)$ 的导数值也相等，甚至要求高阶导数值也相等，能满足这种要求的插值问题就称为埃尔米特插值(Hermite)

2.4 埃尔米特插值

定义 已知 $n+1$ 个互异点上 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的函数值 $f(x_i)$ 和导数值 $f'(x_i)$，若存在一个次数不超过 的多项式 $H(x)$，满足

$$H(x_i) = f(x_i), \qquad H'(x_i) = f'(x_i) \qquad (i = 0,1,\cdots,n)$$

则称 $H(x)$ 为 $f(x)$ 的 $2n+1$ 次埃尔米特(Hermite)插值

上式给出了 $2n+2$ 个条件，可惟一确定一个次数不超过 $2n+2$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)$，采用类似于求 Lagrange插值多项式的基函数方法求埃尔米特(Hermite)插值多项式 $H_{2n+1}(x)$。

次数不超过 2n+1 次的多项式的形式为：

$$\mathbf{H_{2n+1}(x)= H(x),}$$

$$\mathbf{H_{2n+1}(x)=a_0+ a_1x+ a_2x^2+ \ldots+ a_{2n+1}x^{2n+1}}$$

由 2n+2 个条件来确定 2n+2 个系数 $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$ 显然非常复杂，所以要用求 Lagrange 插值多项式的基函数的方法，求插值基函数 $\alpha_i(x)$及 $\beta_i(x)$ （i=0, 1, 2, …, n）共有 2n+2 个，设每一个基函数为次数不超过 2n+1 次的多项式，且满足条件

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad \alpha_i'(x_j) = 0$$

$$\beta_i'(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad \beta_i(x_j) = 0$$

(i, j =0,1,2, …,n)

Hermite 插值多项式可写成插值基函数表示的形式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[\alpha_i(x)y+\beta_i(x)y'\right]$$

验证：

$$H_{2n+1}(x_j)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x_j)f(x_j)+\sum_{i=0}^{n}\beta_i(x_j)f'(x_j)=\sum_{i=0}^{n}\delta_{ij}f(x_j)+0=f(x_j)$$

$$H'_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[\alpha_i(x)y+\beta_i(x)y'\right]$$

$$H'_{2n+1}(x_j)=\sum_{i=0}^{n}\alpha'_i(x_j)f(x_j)+\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x_j)f'(x_j)+\sum_{i=0}^{n}\beta'_i(x_j)f'(x_j)$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\beta_i(x_j)f''(x_j)=0+0+\sum_{i=0}^{n}\delta_{ij}f'(x_j)+0=f'(x_j)$$

根据插值条件可求出 $\alpha_j(x)$ 和 $\beta_j(x)(j=0,1\cdots,n)$

$$\boxed{\alpha_j(x)=\left[1-2(x-x_j)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_k}\right]l_j^2(x)}$$

埃尔米特插值基函数

$$\boxed{\beta_j(x)=(x-x_j)l_j^2(x)}$$

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[1-2(x-x_j)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_k}\right]\cdot l_j^2(x)f(x_j)+\sum_{j=0}^{n}(x-x_j)l_j^2(x)f'(x_j)$$

$H_{2n+1}(x)$ 为满足条件 $H(x_i)=f(x_i),\quad H'(x_i)=f'(x_i)\quad (i=0,1,\cdots,n)$

的 2n+1 次 **Hermite** 插值多项式。

定理5.3　满足插值条件

$$H(x_i)=f(x_i),\qquad H'(x_i)=f'(x_i)\qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

的 **Hermite** 插值多项式是惟一的。

证：设$H_{2n+1}(x)$ 和 $\overline{H}_{2n+1}(x)$ 都满足上述插值条件, 令

$$\varphi(x)=H_{2n+1}(x)-\overline{H}_{2n+1}(x)$$

则每个节点 $x_k(k=0,1,\cdots,n)$ 均为 $\varphi(x)$的二重根, 即 $\varphi(x)$ 有2n+2个根，但 $\varphi(x)$ 是不高于2n+1次的多项式所以

$$\varphi(x)\equiv 0$$

惟一性得证。

$$H_{2n+1}(x)=\overline{H}_{2n+1}(x)$$

定理5.4 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 $2n+2$ 阶导数，则 $2n+1$ 次 Hermite 插值多项式的余项为

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x)$$

其中 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\qquad \xi\in(a,b)$

定理的证明可仿照 Lagrange 插值余项的证明方法

实际中使用最广泛的是三次 **Hermite** 插值多项式,

即 n=1 的情况

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1}\alpha_j(x)f(x_j)+\sum_{j=0}^{1}\beta_j(x)f'(x_j)$$

$$\alpha_0(x)=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 \qquad \alpha_1(x)=(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 \qquad \beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

余项 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4\,!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \qquad \xi\in(x_0,x_1)$

例5.18 已知函数 y= f(x)的数据如下表所示，求次数不超过三次的 Hermite的插值多项式 $H_3(x)$使

$H_3(x_i) = y_i$　　　　(i=0,1,2)

$H'_3(x_i) = y'_i$

x	-1	0	1
$y = f(x)$	-1	0	1
$y' = f'(x)$		0	

解　所求三次Hermite的插值多项式为

$$H_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

解　所求三次Hermite的插值多项式为

$$H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

由插值条件得到以下方程组

$$\begin{cases} H_3(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3=-1 \\ H_3(0)=a_0=0 \\ H_3(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=1 \\ H_3'(0)=a_1=0 \end{cases}$$

解上述方程组

$$a_0=0, a_1=0, a_2=0, a_3=1$$

故得　$H_3(x)=x^3$

另解 由题意知：x=0是$H_3(x)$的二重零点，故可令

$H_3(x)=x^2(ax+b)$

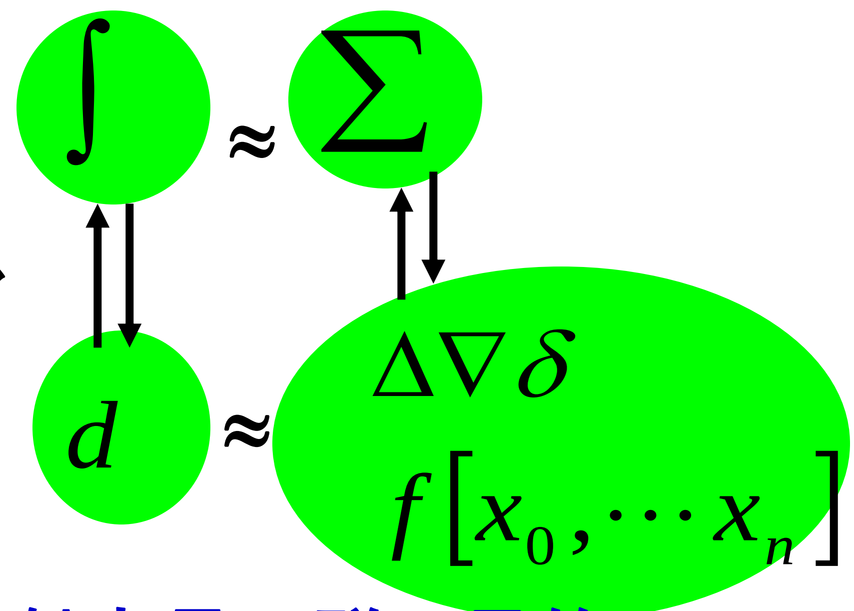
由$H_3(-1)= -1$　$H_3(-1)=1$ 知

$$\begin{cases} b - a= -1 \\ a +b= 1 \end{cases}$$

解之得 a=1　b=0　故有 $H_3(x)=x^3$

x	-1	0	1
$y=(x)$	-1	0	1
$y'=f'(x)$		0	

微分和积分、差分、差商与求和这几种矛盾相互转化的运算规律如有图所示，$\approx$ 表示近似 $\rightleftarrows$ 表示互为逆运算。



至于如何实现这些基本运算之间的联系和转化，途径是多种多样的，结果是丰富多彩 的，魅力是无群无尽的