Diszkrét matematika I. feladatok
Logika
Első alkalom (2024.02.12-16.)

1. Pozitív egészeket tekintve, jelölje $P(x)$, $E(x)$, $O(x)$, illetve $D(x, y)$ rendre azt, hogy x prím, páros, páratlan, illetve hogy x osztója y-nak. Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás. Tagadjuk a formulákat formálisan. Tagadjuk a formulákat köznyelvileg. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás tagadása.

   a) $P(7)$; b) $(E(2) \wedge P(2))$; c) $(\forall x(D(2, x) \Rightarrow E(x)))$; d) $(\exists x(E(x) \wedge D(x, 6)))$;
   e) $(\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2, x)))$; f) $(\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x, y) \Rightarrow E(y)))))$;
   g) $(\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(E(y) \wedge D(x, y)))))$; h) $(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y)))))$;
   i) $((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge (\exists y(\neg x = y \wedge E(y) \wedge P(y)))))))$.

2. Az embereket tekintve, jelölje $J(x)$, $B(x)$, $U(x)$, $I(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x, y)$, illetve $T(x, y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, ügyeskedő, idős, életerős, politikus, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y-nak, valamint hogy x tiszteli y-t. Formalizáljuk az alábbi állításokat:

   a) minden bíró jogász;
   b) vannak ügyeskedő jogászok;
   c) nincs ügyeskedő bíró;
   d) bizonyos bírók idősek, de életerősek;
   e) d bíró sem nem idős, sem nem életerős;
   f) a bírók kivételével minden jogász ügyeskedő;
   g) néhány jogász, aki politikus, képviselő is;
   h) egyetlen képviselő felesége sem idős;
   i) minden idős képviselő jogász;
   j) van olyan nő, aki jogász és képviselő;
   k) minden olyan nő, aki jogász, tisztel néhány bírót;
   l) bizonyos jogászok csak bírókat tisztelnek;
   m) van olyan bíró, aki tisztel néhány nőt;
   n) bizonyos ügyeskedők egyetlen jogászt sem tisztelnek;
   o) d bíró egyetlen ügyeskedőt sem tisztel;
   p) vannak jogászok és ügyeskedők is, akik tisztelik d bírót;
   q) csak bírók tisztelnek bírókat;
   r) minden bíró csak bírókat tisztel;
   s) minden nős képviselő életerős;
   t) azok a jogászok, akiknek életerős feleségük van, mind képviselők.

3. Az embereket tekintve, jelölje $N(x)$ illetve $G(x, y)$ azt, hogy x nő illetve x gyereke y-nak. Definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y-nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja, apai nagyapja, anyai nagyapja, apai nagyanyja, anyai nagyanyja, testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, nagynénje, unokaöccse, unokahúga.

4. Formalizáljuk az alábbi állításokat:

   a) Márta nem szőke;

b) nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz;

c) esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár;

d) Éva vagy Pisti ott volt;

e) ha a hegy nem megy Mohamedhez, Mohamed megy a hegyhez;

f) elmegyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj;

5. Egy táncmulatságon fiúk és lányok táncolnak. Jelölje $T(L, F)$, hogy az L lány táncolt az F fiúval. Formalizáljuk pontosan az alábbi ,,gyorsírással" felírt formulákat. Döntsük el, hogy melyik következik a másikból. (Egy formulából következik egy másik formula, ha valahányszor az egyik igaz, a másik is.)

   a)
   $$\begin{array}{lll} \exists L \forall F\ T(L,F), & \forall F \exists L\ T(L,F), & \exists F \forall L\ T(L,F), \\ \forall L \exists F\ T(L,F), & \forall L \forall F\ T(L,F), & \exists L \exists F\ T(L,F); \end{array}$$

   b) $\neg \exists L \exists F\ T(L,F)$, $\forall F \exists L\ \neg T(L,F)$, $\forall L \exists F\ \neg T(L,F)$, $\forall L \forall F\ \neg T(L,F)$

6. Legyenek A, B, C predikátumok. Igazolja a következő állítások igazak:

   a) $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

   b) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C)$ és $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C)$

   c) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ és $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

   d) $A \oplus B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Szorgalmi feladatok

7. Az asztalon van 50 darab érme, 25 darab a fej, 25 darab az írás oldalán. Bekötött szemmel hogyan tudunk két kupacot csinálni, hogy mindkét kupacban ugyanannyi legyen a fej oldalán? (**1 pont**)

1. (SAT-probléma) Legyenek $x_1, x_2, \ldots$ Boole változók, és tekintsünk egy formulát a változók és $\wedge, \vee, \neg$ műveletekkel. Egy formula *kielégíthető*, ha van olyan választása az $x_1, x_2, \ldots$ változók értékének, hogy a formula értéke igaz. Például a $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ kielégíthető, mert $x_1 = x_2 =$ igaz esetén a F értéke igaz. A $G(x_1) = x_1 \wedge \neg x_1$ nem kielégíthető, mert $G(\text{igaz}) = G(\text{hamis}) =$ hamis. Írjon programot, mely adott n változós formula esetén eldönti, hogy az kielégíthető-e. Melyik a legnagyobb n érték (Boole változók száma), melyre a programja tetszőleges n-változós formulára eldönti a kielégíthetőséget (emberi időn belül, például 1 órán belül)? (**2 pont**)