(Hf) 1. Határozza meg az $E = (-1, 3)$ halmaz

$$f(x) = \frac{2x+4}{x+1} \qquad (x \neq -1)$$

függvény által létesített képet és ősképet!

Megoldás: a) $f[E] = ?$

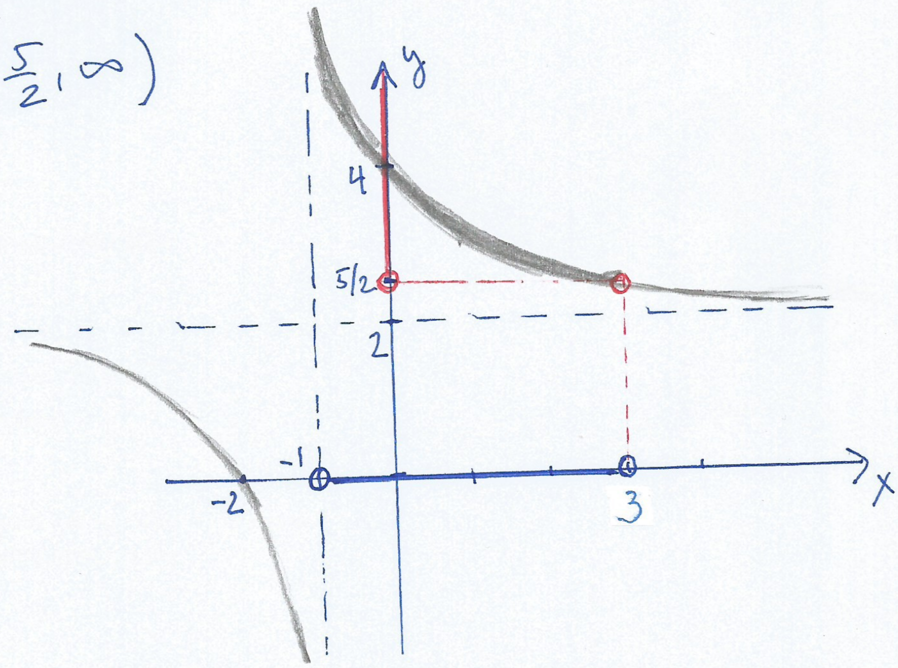
$$f[E] = \{ f(x) \mid x \in E \} = \left\{ \frac{2x+4}{x+1} \;\middle|\; -1 < x < 3 \right\}$$

Átalakítással: $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1} = \dfrac{(2x+2)+2}{x+1} = 2 + \dfrac{2}{x+1}$. Ekkor

$$-1 < x < 3 \iff 0 < x+1 < 4 \iff \frac{1}{x+1} > \frac{1}{4} \iff \frac{2}{x+1} > \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \frac{2}{x+1} + 2 > 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Ezért $f[E] = \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$



b) $f^{-1}[E] = ?$

$$f^{-1}[E] = \{ x \in D_f \mid f(x) \in E \} = \left\{ x \neq -1 \;\middle|\; -1 < \frac{2x+4}{x+1} < 3 \right\}$$

Oldjuk meg az $-1 < \dfrac{2x+4}{x+1} < 3$ egyenlőtlenséget!

I. $x > -1 \implies x+1 > 0$

$$-(x+1) < 2x+4 < 3(x+1)$$

$$-x-1 < 2x+4 < 3x+3 \quad \backslash +x+1$$

$$0 < 3x+5 < 4x+4$$

$$x > -5/3 \qquad 1 < x \qquad \iff \quad x > 1$$

II. $\underline{x < -1} \Rightarrow x+1 < 0$

$$-(x+1) > 2x+4 > 3(x+1)$$

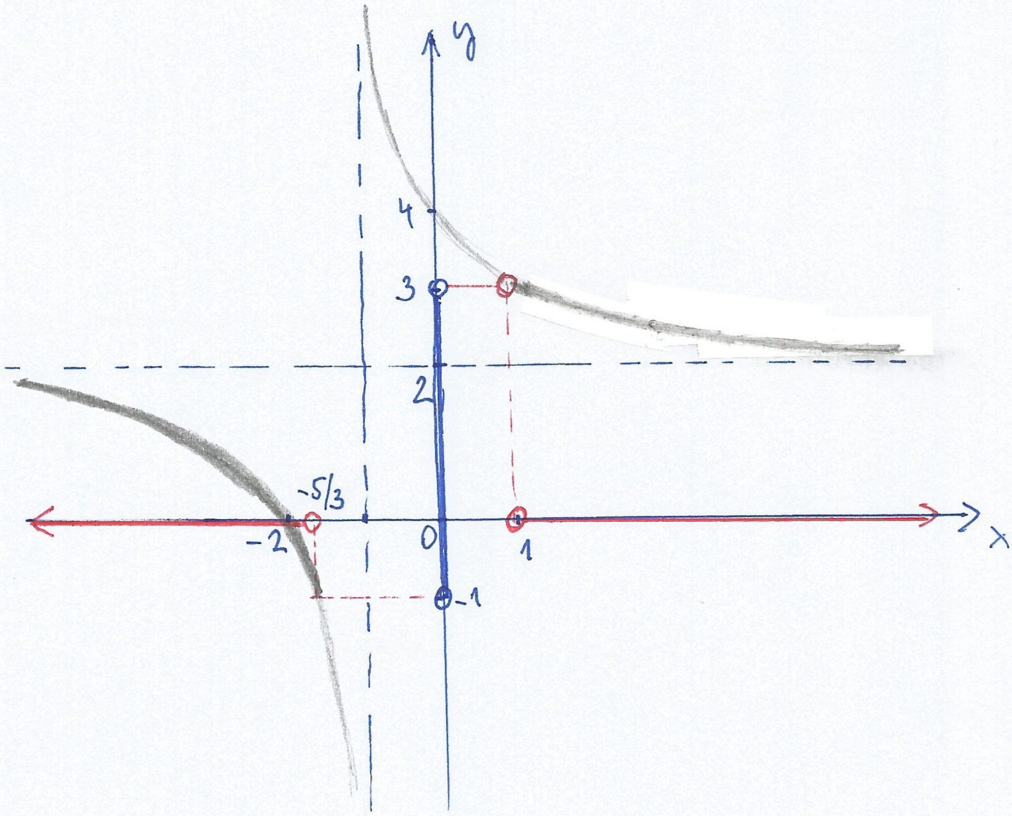
$$-x-1 > 2x+4 > 3x+3 \quad \backslash +x+1$$

$$0 > 3x+5 > 4x+4$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x < -5/3 \qquad x < 1 \qquad \Longleftrightarrow \quad x < -5/3$$

$$f^{-1}(E) = (-\infty, -5/3) \cup (1, +\infty)$$



(Hf) 2. Mutassa meg, hogy az

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad (x\in[0,+\infty))$$

függvény invertálható, és számítsa ki az inverzét!

Megoldás. Legyen $x,t\geq 0$. Ekkor

$f(x)=f(t) \Rightarrow x=t$?

Átalakítással: $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=-\frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1}=-1+\frac{2}{\sqrt{x}+1}$

Ebből

$f(x)=f(t) \Rightarrow -1+\frac{2}{\sqrt{x}+1}=-1+\frac{2}{\sqrt{t}+1} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1}=\frac{2}{\sqrt{t}+1} \Rightarrow \sqrt{t}+1=\sqrt{x}+1$

$\Rightarrow \sqrt{t}=\sqrt{x} \Rightarrow t=x$. ✓ a függvény invertálható.

$R_f=?$

$x\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1\geq 1 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{\sqrt{x}+1}\leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<\frac{2}{\sqrt{x}+1}\leq 2 \Leftrightarrow -1<\frac{2}{\sqrt{x}+1}-1\leq 1$. Ezért

$D_{f^{-1}}=R_f=(-1,1]$

! $y\in(-1,1)$ és $x\geq 0$, hogy $f(x)=y$. Ekkor

$y=\frac{2}{\sqrt{x}+1}-1 \Leftrightarrow y+1=\frac{2}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\frac{2}{y+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{2}{y+1}-1=\frac{2-(y+1)}{y+1}=\frac{1-y}{y+1} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1-y}{y+1}\right)^2.$

$$f^{-1}(y)=\left(\frac{1-y}{y+1}\right)^2 \qquad y\in(-1,1]$$

(Hf) 3. Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót, ha

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad g(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0; \\ -1, & \text{ha } x < 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$$

a) $f \circ g = ?$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} =$$

$$= \{x \neq 0 \mid \tfrac{1}{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \mathrm{sign}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$$

b) $g \circ f = ?$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{sign}(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\mathrm{sign}(x)} \qquad (x \neq 0)$$