3. feladatsor: Függvények, részbenrendezés

1. feladat
Válasszuk ki a következő relációk közül a függvényeket. Adja meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét. Mely függvény szürjektív, injektív, bijektív?
(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{10, 11, 12, 13, 14\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, 11), (2, 11), (4, 12), (5, 10)\}$
(b) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (3, f), (4, a)\}$
(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, a), (4, e), (5, d)\}$
(d) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, f \subseteq A \times B, f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 5)\}$

2. feladat
Legyen $A = \{$olyan egyenlőszárú háromszögek, amelyeknek az alaphoz tartozó magasságuk egyenlő egy rögzített $m > 0$ számmal$\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. Definiáljuk az $R \subseteq A \times B$ relációt a következőképpen: $aRb, a \in A, b \in B$, ha az a háromszög területe b. Mutassuk meg, hogy R függvény, és vizsgáljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait (fennálnak-e a következők: szürjektív, injektív, bijektív).

3. feladat
(a) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := 3x - 4$. Bizonyítsa be, hogy a függvény bijektív, majd határozza meg az inverzét.
(b) Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) := 3 - |x|$. Bizonyítsa be, hogy a függvény se nem injektív, se nem szürjektív.

4. feladat
Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.
(a) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x \mid y$
(b) $f \subseteq \{0, 3, 5\} \times \{1, 2, 5\}, xfy \iff xy = 0$
(c) $f \subseteq \{1, 2, 5\} \times \{0, 3, 5\}, xfy \iff xy = 0$
(d) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff$ tízes számrendszerben x ugyanazokból a számjegyekből áll mint y
(e) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff 2x = y$
(f) $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, xfy \iff x^2 = y^2$
(g) $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, xfy \iff x^2 = y^2$
(h) $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, xfy \iff x^2 + y^2 = 9$

5. feladat
Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények.
(a) $f_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 7x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(b) $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2 + 6y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(c) $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 7x^2 - 6 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(d) $f_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid y = |x|\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$
(e) $f_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x + 4)^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(f) $f_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid 2y = \sqrt{x}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$
(g) $f_7 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \mid x - y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(h) $f_8 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid xy = 1\} \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$
(i) $f_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(j) $f_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(k) $f_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(1 - x^2) = x - 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(l) $f_{12} = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}) \mid y(1 - x^2) = x - 1\} \subseteq (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{1, -1\})$
Ha a reláció függvény, döntsük el, hogy injektív, szürjektív, bijektív-e illetve ha nem függvény, akkor reflexív, szimmetrikus, tranzitív-e.

6. feladat
Legyen $A = \{2, 3, 6, 8, 9, 12, 18\} \subseteq \mathbb{N}^+, R \subseteq A \times A$ és $aRb \iff a \mid b$.
(a) Mutassa meg, hogy az R reláció részbenrendezés az A halmazon.
(b) Rajzolja meg az R rendezési diagramját (Hasse-diagram).

7. feladat
(a) Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{N}$ halmazon $\leq$ részbenrendezési reláció, ahol $\leq$ definíciója: $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N}(n + k = m)$
(b) Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \iff m_1 \leq m_2 \wedge n_1 \leq n_2$ részbenrendezés.

8. feladat
Döntse el a következő relációkról, hogy részbenrendezési relációk-e az adott halmazon.
(a) P a valós együtthatós polinomok halmaza, $R \subseteq P \times P, fRy \iff \deg f \leq \deg g$
(b) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, aRb \iff |a| \leq |b|$
(c) V a 10 egység hosszúságú $\mathbb{R}^2$-beli vektorok halmaza, $R \subseteq V \times V, xRy \iff$ az x vektor hajlásszöge kisebb-egyenlő mint az y vektor hajlásszöge (hajlásszög legyen $[0; 2\pi[$-beli)
(d) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, xRy \iff$ az x vektor hossza kisebb-egyenlő mint az y vektor hossza

9. feladat
Döntse el, mely relációk teljes rendezések az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon.
(a) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
(b) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
(c) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$