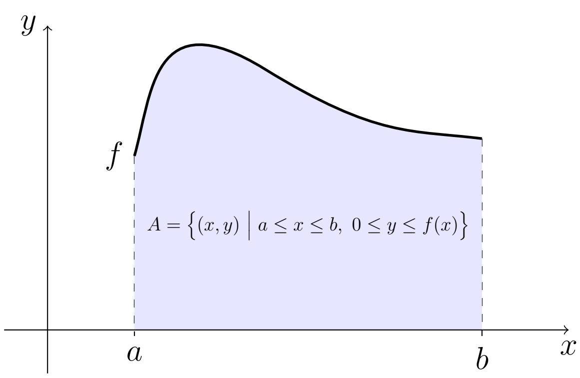
6. előadás

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 1.

Differenciálszámítással számos fontos gyakorlati problémát tudtunk megoldani, ilyenek többek között a görbékhez húzott érintőegyenes felállítása, szélsőértékfeladatok megoldása, kritikus határértékek kiszámítása, egy függvényt jól megközelítő polinom meghatározása, stb. Azonban vannak olyan problémák, amelyeknek megoldásához a deriválás művelet megfordítása szükséges, vagyis a megoldásban olyan függvény játszi szerepet, melyeknek deriváltja az adott függvény. Ezt a megfordított műveletet egyes szerzők „antideriválásnak” nevezik, és olyan jelentős gyakorlati problémák megoldásában alkalmazható, mint az ívhossz-, a terület-, a térfogat-, valamint a súlypont- és a nyomatékszámítás.

A deriválás művelet megfordításának a motivációja

A következőben azt fogjuk illusztrálni, hogy az antideriválás milyen szerepet játszik a területszámításban. Fontos megjegyezni, hogy most nem foglalkozunk a terület pontos értelmezésével, hiszen az illusztrációhoz elegendő a területnek az az intuitív megközelítése, amelyet a mindennapokban alkalmazunk.

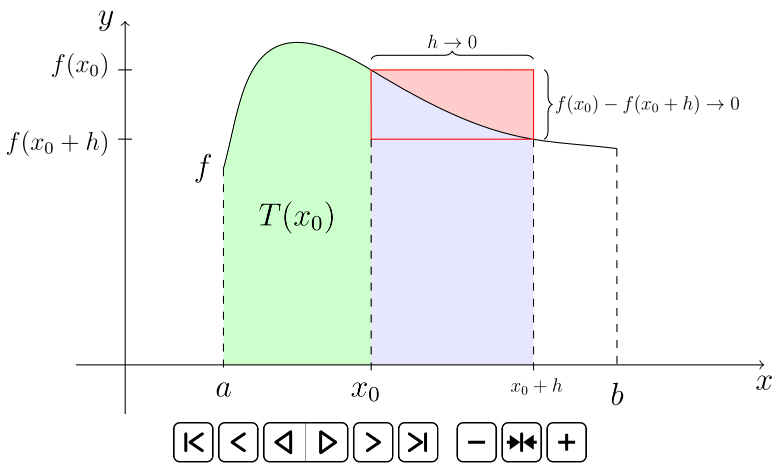


Legyen f egy folytonos függvény, amely egy adott $[a, b]$ zárt intervallumon pozitív értékeket vesz fel. Az ábrán látható függvény görbe alatti területét szeretnénk meghatározni, azaz a függvény grafikonja, az $x = a$ és az $x = b$ egyenesek, valamint az x tengely által közrezárt korlátos A síkidom területét.

A probléma megoldásához vezessünk be egy újabb függvényt! Minden egyes $x \in [a, b]$ értékhez rendeljük az f függvény a-tól x-ig terjedő görbe alatti területét, amit $T(x)$-szel jelölünk. Ezt a T függvényt ***az f függvény a ponttól induló területmérő függvényének*** nevezzük. A területmérő függvény ismeretében egyszerűen megállapíthatjuk a keresett síkidom területét, hiszen ehhez elegendő kiértékelni a területmérő függvényt az $x = b$ pontban. Ezért ezentúl a figyelmünk a területmérő függvény meghatározására fog irányulni.

Rögzítsünk egy $x_0 \in (a, b)$ értéket! A következő ábrán zöld színnel jelölt síkidom területe nem más, mint az a ponttól induló területmérő függvény értéke az x_0 pontban. Vegyünk egy olyan $h > 0$ elegendően kicsi számot, hogy $x_0 + h < b$ teljesüljön, és tekintsük azt a síkidomot, amely az f függvény x_0-tól $x_0 + h$-ig terjedő görbéje alatt van. Ezt az ábrán kék színnel jelöltük. A T területmérő függvény ismeretében nem nehéz kiszámolni a kék síkidom területét, hiszen elég kivonni az a-tól $x_0 + h$-ig terjedő görbe alatti területből az a-tól x_0-ig terjedő görbe alatti területet, azaz a kék síkidom területének mértéke:

$$T(x_0 + h) - T(x_0).$$



Másrészt ha egyesítjük az ábrán szereplő kék és piros területrészt, akkor egy olyan téglalapot kapunk, melynek egyik oldalának a hossza h, a másik oldalának a hossza $f(x_0)$, így területe $f(x_0)h$. Ezért, ha $\varepsilon(h)$-val jelöljük a piros síkidom területét, akkor fennáll a

$$T(x_0+h) - T(x_0) = f(x_0)h - \varepsilon(h) \tag{1}$$

összefüggés. A piros síkidom része egy olyan téglalapnak, melynek egyik oldalának a hossza h, a másik oldalának a hossza $f(x_0) - f(x_0+h)$, így területe $\big(f(x_0) - f(x_0+h)\big)h$. Ezért

$$\varepsilon(h) \le \big(f(x_0) - f(x_0+h)\big)h.$$

Ebből következik, hogy

$$0 \le \lim_{h\to 0+0} \frac{\varepsilon(h)}{h} \le \lim_{h\to 0+0} \big(f(x_0) - f(x_0+h)\big) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{h\to 0+0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0,$$

hiszen az f függvény folytonossága az x_0 pontban azt jelenti, hogy $f(x_0) - f(x_0+h) \to 0$, ha $h \to 0$. Így, ha az (1) egyenlet két oldalát h-val osztjuk és tartunk vele a nullához, akkor azt kapjuk, hogy

$$T'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{T(x_0+h) - T(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Hasonló eredményt kapunk, ha egy kis $h < 0$ számmal az előbbihez hasonló számításokat végzünk, nevezetesen $T'_-(x_0) = f(x_0)$, és így $T'(x_0) = f(x_0)$. Ez a területmérő függvény egy nagyon érdekes tulajdonságára enged következtetni, miszerint T olyan függvény, amelynek deriváltja az f függvény az (a, b) intervallum minden pontjában, amennyiben f folytonos függvény.

Fontos hangsúlyozni, hogy az előbbi gondolatmenet csak szemlélteti, de nem igazolja kellő precizitással az előbbi következtetést. Mégis mutatja, hogy miért szükséges az antideriválással foglalkozni. A témakör tárgyalását a primitív függvény és a határozatlan integrál fogalmával kezdjük.

A határozatlan integrál fogalma

A deriválás művelete egy differenciálható függvényhez hozzárendeli a deriváltfüggvényét. Az előző részben láttuk, hogy célszerű közelebbről megvizsgálni ennek a műveletnek a „megfordítását”: egy adott függvényhez keresünk olyan differenciálható függvényt, hogy ez utóbbinak a deriváltja a kiindulási függvény legyen. A keresendő függvényre érdemes külön elnevezést bevezetni. A következő fontos fogalmat csak az $\mathbb{R}$ egy adott $I \subset \mathbb{R}$ ***nyílt intervallumán*** (ez lehet korlátos és nem korlátos is) értelmezett függvényekre fogjuk bevezetni.

1. Definíció. *Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f* **primitív függvénye**, *ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.*

Világos, hogy ha a F függvény primitív függvénye f-nek, akkor $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye f-nek.

Példa. Az $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény két különböző primitív függvénye:

$$F_1(x) := \frac{x^3}{3} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad F_2(x) := \frac{x^3}{3} + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A `nevezetes elemi függvények deriváltjaira` gondolva több függvény primitív függvényét meg tudjuk már határozni. Például a $(\cos x)' = -\sin x$ deriváltból nem nehéz következtetni, hogy az $f(x) := \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény egyik primitív függvénye $F(x) := -\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$.

Kérdések:

1. Milyen függvényeknek van primitív függvénye?
2. Ha f-nek van primitív függvénye, akkor hogyan lehet azt meghatározni?
3. Ha az f egyik primitív függvényét ismerjük, akkor hogyan tudjuk meghatározni az összes többit?

$\boxed{\textbf{1.}}$ Jelenleg nem ismert olyan egyszerűen megfogalmazható, a függvény belső tulajdonságain alapuló feltétel, amelyik *szükséges és elégséges* feltételt ad arra, hogy az adott függvénynek legyen primitív függvénye, de külön tudunk ilyen feltételeket mondani.

Elégséges feltétel primitív függvény létezésére. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek van primitív függvénye.*

A folytonosság mint elégséges feltétel azért nem meglepő, mert a bevezetőből sejteni lehet, hogy egy f folytonos függvény területmérő függvénye az f primitív függvénye.

Szükséges feltétel primitív függvény létezésére. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f* **Darboux-tulajdonságú** *az I intervallumon, azaz tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz (a, b)-ben.*

Példa. Az előjelfüggvény (vagyis a sgn függvény) a $(-1, 1)$ intervallumon nem Darboux-tulajdonságú, ezért ezen az intervallumon *nincs primitív függvénye.*

$\boxed{\textbf{2.}}$ Egy primitív függvény keresése a deriválás műveletének a „megfordítása”. Deriválni általában nem volt bonyolult feladat, mert a deriválási szabályok összhangban vannak a műveletekkel, de az összeadás és a konstanssal való szorzás kivitelével a deriválási szabályok eredménye összetett, így megfordításukkal nem tudunk egyszerű műveleti szabályokat alkotni a primitív függvények keresésére.

A helyzet ennél súlyosabb. Könnyű meggondolni azt, hogy egy elemi függvény deriváltja mindig elemi függvény. Talán első hallásra meglepőnek tűnhet, de *vannak olyan elemi függvények, amelyeknek a primitív függvényei nem elemi függvények*, így semmilyen szabállyal vagy „ügyes” átalakítással nem tudjuk felírni. Ez jelentős különbség a deriválás és az integrálás között. *Joseph Liouville* (1809–1882) francia matematikus volt az első, aki megmutatta, hogy léteznek ilyen elemi függvények. Bebizonyítható, hogy pl. az alábbi (folytonos) elemi függvények primitív függvényei nem elemi függvények:

$$e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \frac{\sin x}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big), \quad \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),$$
$$\frac{1}{\ln x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big), \quad \sqrt{x^3 + 1} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

Ennek ellenére, amikor egy függvény primitív függvényeit keressük, akkor ugyanazt a módszert próbáljuk követni, amelyet a határérték és a deriváltak kiszámításánál alkalmaztunk. Először is ismerni kell a legegyszerűbb függvények primitív függvényeit. Ezután szabályokat alkotunk, fogásokat, és egyéb módszereket sajátítunk el, amivel „bonyolultabb” kifejezéseket is tudunk kezelni.

3. Egy primitív függvény ismeretében már könnyedén meghatározható az összes többi, konstansok hozzáadásával. A következő tétel a deriváltak egyenlőségéről szóló tétel következménye.

1. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény.*

1. *Ha $F : I \to \mathbb{R}$ az f függvénynek egy primitív függvénye, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a $F + c$ függvény is primitív függvénye f-nek.*
2. *Ha $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei az f függvénynek, akkor*

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon F_1(x) = F_2(x) + c \qquad (x \in I),$$

azaz a primitív függvények csak konstansban különböznek egymástól.

Megjegyzés. A tétel 2. állításában lényeges, hogy f intervallumon értelmezett függvény. Tekintsük például az

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \big(x \in (0,1)\big) \\ 0 & \big(x \in (2,3)\big) \end{cases}$$

függvényt. Legyen

$$F_1(x) := \begin{cases} x^2 & \big(x \in (0,1)\big) \\ 1 & \big(x \in (2,3)\big) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad F_2(x) := \begin{cases} x^2 & \big(x \in (0,1)\big) \\ 0 & \big(x \in (2,3)\big). \end{cases}$$

Ekkor $F_1' = f = F_2'$, de F_1 és F_2 nem csak egy konstansban különböznek egymástól. ■

2. Definíció. *Az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f* **határozatlan integráljának** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int f := \int f(x)\, dx := \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\}.$$

Ilyenkor f-re az **integrandus**, *illetve az* **integrálandó függvény** *elnevezéseket is használjuk.*

Ha $F \in \int f$, akkor az előző tétel 2. állításából következő $\int f = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ egyenlőséget rövidebben (és kevésbé precízen) az alábbi formában fogjuk jelölni:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \qquad (x \in I).$$

Az adott f függvény értelmezési tartományát – vagyis az I intervallumot – mindig feltüntetjük, a $c \in \mathbb{R}$ feltételt a képletbe „beleértjük”, de azt nem írjuk ki. Így például

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + c \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{vagy} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big).$$

Előfordul, hogy különböző módszerekkel határozunk meg egy határozatlan integrált, de különböző képleteket kapunk. Ez azért lehetséges, mert a két képlet valójában csak egy konstanssal tér el egymástól, ami több esetben csak megfelelő átalakítások után látható.

Határozatlan integrálra vonatkozó szabályok

1. ***Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása***

Az alapintegrálok a nevezetes elemi függvények deriváltjának megfordításával kapott határozatlan integrálok. Ezeket `ebben a táblázatban` soroltuk fel. Például

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \quad \big(x \in (-\infty,0)\big)$,
- $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \big(x \in (0,+\infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$.

Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a „határozzuk meg az $\int f$-et” feladatokban természetesen elengedhetetlen az f függvény, és így (többek között) az $I = \mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány ismerete. Ez utóbbi időnként „elsikkad” a feladat kitűzésekor, mondván, hogy az „magától értetődik”. Ez gyakran vezethet félreértésekre, ezért kerülni kell ezt a pongyolaságot. A továbbiakban mindig megadjuk, hogy melyik $I = \mathcal{D}_f$ *intervallumon* tekintjük az f függvény primitív függvényeit.

Az összeadásra és a konstanssal való szorzásra vonatkozó deriválási szabály megfordítása alapján kapjuk a következő szabályt.

2. Tétel (A határozatlan integrál linearitása). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye, és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$

Bizonyítás. Legyen $F \in \int f$ és $G \in \int g$. Ekkor $F, G \in D(I)$, illetve $F' = f$ és $G' = g$. Ekkor az említett deriválási szabályok miatt

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha F + \beta G \in \int(\alpha f + \beta g)$.

Példa. $\displaystyle\int \big(6x^2 - 8x + 3\big)\,dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$

Az ebbe a körbe tartozó „elemi fogásokkal” megoldható feladatok sokszor nem egyszerűek, mert át kell alakítani az integrandust úgy, hogy fel tudjuk írni alapintegrálok lineáris kombinációjaként. Például

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \operatorname{arc\,tg} x + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{2.}$ ***Az első helyettesítési szabály***

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást fogunk megmutatni. Az egyiket most, a másikat pedig később ismertetjük.

3. Tétel (Az első helyettesítési szabály). *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye, és*

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $F \in \int f$. Ekkor $F \in D(J)$ és $F' = f$. Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint ekkor $F \circ g \in D(I)$, és

$$(F \circ g)' = \big(F' \circ g\big) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Ez azt jelenti, hogy $F \circ g \in \int (f \circ g) \cdot g'$.

Példa. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \exp(x^2)\cdot(x^2)'\,dx = \frac{1}{2}\exp(x^2) + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \quad (x \in \mathbb{R}).$

Az első helyettesítési szabály speciális eseteit gyakorlaton fogjuk megismerni.

$\boxed{3.}$ ***A parciális integrálás***

A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó tétel „megfordítását” fejezi ki a következő állítás.

4. Tétel (A parciális integrálás szabálya). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye, és*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$

Bizonyítás. Ha $H \in \int f'g$, akkor $H \in D(I)$ és $H' = f'g$. Mivel $fg \in D(I)$, illetve $(fg)' = f'g + fg'$, ezért $(fg - H) \in D(I)$ és

$$(fg - H)' = (fg)' - H' = (f'g + fg') - f'g = fg'.$$

Így $(fg - H) \in \int fg'$ valóban fennáll.

Példa. $\displaystyle\int xe^x\,dx = \int \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \int \underbrace{x}_{f}\cdot(\underbrace{e^x}_{g})'\,dx = \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{e^x}_{g}\,dx =$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Gyakorlaton olyan integráltípusokat fogunk tanulni, ahol érdemes a parciális integrálás szabályát alkalmazni.

4. ***A második helyettesítési szabály***

Megemlítettük már, hogy az összetett függvény deriválására vonatkozó tételnek a „megfordításával” kapcsolatban két állítást fogalmazunk meg. Az elsőt már megismertük. A másodikhoz szükséges, hogy a g belső függvény ***invertálható*** legyen.

5. Tétel (A második helyettesítési szabály). *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$, $\mathcal{R}_g = I$, $g \in D(J)$, $g' > 0$ J-n (vagy $g' < 0$ J-n) és az $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye, és*

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Bizonyítás. Ha $g' > 0$ J-n, akkor g szigorúan monoton növekvő, és ha $g' < 0$ J-n, akkor g szigorúan monoton csökkenő. Mindkét esetben g invertálható, és mivel g folytonos és $g' \neq 0$ J-n, így az inverz függvény deriváltjára vonatkozó tétel szerint a $g^{-1} : I \to J$ függvény differenciálható I minden pontjában, és

$$\left(g^{-1}\right)' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}}.$$

Legyen $H \in \int (f \circ g) \cdot g'$, akkor $H \in D(J)$ és $H' = (f \circ g) \cdot g'$. Ekkor az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $H \circ g^{-1} \in D(I)$, és

$$\begin{aligned}\left(H \circ g^{-1}\right)' &= \left(H' \circ g^{-1}\right) \cdot \left(g^{-1}\right)' = \left(\left((f \circ g) \cdot g'\right) \circ g^{-1}\right) \cdot \left(g^{-1}\right)' = \\ &= \left((f \circ g \circ g^{-1}) \cdot (g' \circ g^{-1})\right) \cdot \left(g^{-1}\right)' = \left(f \cdot (g' \circ g^{-1})\right) \cdot \left(g^{-1}\right)' = \\ &= f \cdot (g' \circ g^{-1}) \cdot \frac{1}{g' \circ g^{-1}} = f.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $H \circ g^{-1} \in \int f$, amiből a tétel állítása következik.

Figyeljük meg, hogy mit jelent, és mikor érdemes használni ezt a szabályt. Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\,dx$ határozatlan integrált, vagyis f egyelőre ismeretlen primitív függvényét akarjuk kiszámítani. Ekkor egy alkalmas, a szabály feltételeit teljesítő g függvénnyel a „régi” x változó helyett vezessük be az $x = g(t)$ egyenlőségből adódó $t = g^{-1}(x)$ „új” változót. Ha sikerül a g függvényt úgy megválasztani, hogy $f(g(t))g'(t)$ primitív függvényét már ki tudjuk számítani, akkor ebben a t változót x-re visszahelyettesítjük, és ezzel megkaptuk f primitív függvényeit.

Példa. Az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \big(x \in (-1,1)\big)$$

határozatlan integrál kiszámításához az

$$x = \sin t =: g(t) \qquad \left(t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

helyettesítést alkalmazzuk. Mivel $g'(t) = \cos t > 0$ $\left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, így g $\uparrow$, azaz g invertálható. Másrészt $\mathcal{R}_g = (-1,1)$, így

$$t = g^{-1}(x) = \arcsin x \ \big(x \in (-1,1)\big).$$

A második helyettesítési szabályra vonatkozó tétel tehát alkalmazható. Így

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \left(\cos t > 0 \text{ miatt } \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t\right) =$$

$$= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c\Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c.$$

Itt a második tag egyszerűbb alakra hozható:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\cdot x\sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

A határozott integrál motivációja

Az előadás bevezetőjében folytonos függvények görbe alatti területét vizsgáltuk. Ott még nem foglalkoztunk a terület pontos értelmezésével, csak a területről alkotott intuitív megközelítést alkalmaztuk. Differenciálszámítással több geometria fogalomnak (pl. az érintőnek) adtunk analitikus értelmezést, amivel már számolni tudunk. Jogos kérdés, hogy nem tudnánk-e hasonlóan eljárni a függvények görbe alatti területével is.

A pontos feladat a következő: legyen f nemnegatív korlátos (***nem feltétlenül folytonos***) függvény a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, és tekintsük az f grafikonja alatti

$$A := \Big\{(x, y) \;\Big|\; x \in [a, b],\ 0 \le y \le f(x)\Big\}$$

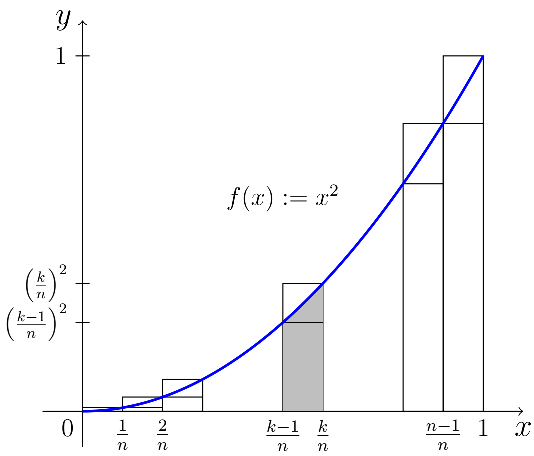
síkidomot. Hogyan érdemes A területét értelmezni, milyen f esetén beszélhetünk az A halmaz területéről, és hogyan lehet ezt a $T(A)$-val jelölt területet kiszámolni?

Abból a görög matematikusok által már alkalmazott elég „természetes” ötletből indulunk ki, hogy a szóban forgó síkidom területét téglalapok területeinek az összegével közelítjük. Lássuk, hogyan határozta meg Arkhimédész a parabola alatti területet! A modern jelöléseket és a már megismert fogalmakat fogjuk használni.

Tekintsük az

$$f(x) := x^2 \qquad \big(x \in [0, 1]\big)$$

függvényt! Rögzítsünk egy $1 \le n \in \mathbb{N}$ számot, és osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot az $x_k := \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ osztópontokkal. Közelítsük az A halmazt az alábbi ábrán szemléltetett „beírt” és „körülírt” téglalapokkal.



Jelölje s_n, illetve S_n a szóban forgó téglalapok területeinek az összegét. Az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$(m \in \mathbb{N}^+)$ képletből következik, hogy

$$s_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \qquad \text{és}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Ha növeljük az osztópontok n számát, akkor a „lépcsősidomok” egyre jobban közelítenek az A halmazhoz. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$s_n \leq T(A) \leq S_n.$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{és}$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3},$$

ezért a fenti egyenlőtlenségeket csak az $1/3$ szám elégíti ki. Kézenfekvő tehát azt mondani, hogy az A halmaznak van területe, és az legyen $1/3$.

Megjegyzés. A fenti eredmény összhangban van azzal, amit a területmérő függvényről mondtunk, de még nem igazoltunk. Ha $T(x)$ a 0-tól x-ig terjedő parabola alatti terület, akkor a $T(1)$ értékre vagyunk kíváncsiak. Azt mondtuk, hogy T olyan függvény, amelynek deriváltja az $f(x) = x^2$ függvényt adja a $(0,1)$ intervallum minden pontjában. Ezért $\exists c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$T(x) = \frac{x^3}{3} + c \qquad (0 < x < 1),$$

de mivel logikus, hogy területmérő függvény folytonos, ezért a fenti egyenlőség kiterjeszthető a $[0,1]$ intervallumra. 0-tól 0-ig még 0 a görbe alatti terület, azaz $T(0) = 0$. Tehát

$$T(0) = \frac{0^3}{3} + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 0, \qquad \text{így} \qquad T(1) = \frac{1^3}{3} + 0 = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

A határozott integrál értelmezése

A határozott integrált a korlátos és zárt $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett korlátos függvények körében értelmezzük. A $\boldsymbol{K[a,b]}$ szimbólummal fogjuk jelölni az ilyen függvények halmazát:

$$K[a,b] := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ korlátos } [a,b]\text{-n} \Big\}.$$

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az $[a,b]$ intervallum egy ***felosztásán*** a

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

halmazt értjük. $\boldsymbol{\mathcal{F}[a,b]}$ jelöli az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát. A

$$\|\tau\| := \max\{x_{k+1} - x_k \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

számot a τ felosztás ***finomságának*** nevezzük. Legyen $f \in K[a,b]$, $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$, továbbá

$$m_k := \inf\Big\{ f(x) \;\Big|\; x_k \leq x \leq x_{k+1} \Big\}, \qquad \text{illetve} \qquad M_k := \sup\Big\{ f(x) \;\Big|\; x_k \leq x \leq x_{k+1} \Big\}$$

minden $k = 0, ..., n-1$ indexre. A

$$s(f,\tau) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k), \qquad \text{illetve} \qquad S(f,\tau) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

összegeket az f függvény τ felosztáshoz tartozó ***alsó***, illetve ***felső közelítő összegének*** nevezzük.

Mivel tetszőleges $f \in K[a,b]$ függvény és $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás esetén

$$-\infty < \inf_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a) \le s(f,\tau) \le S(f,\tau) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(b-a) < +\infty,$$

ezért az

$$\Big\{s(f,\tau) \;\Big|\; \tau\in\mathcal{F}[a,b]\Big\} \qquad \text{és az} \qquad \Big\{S(f,\tau) \;\Big|\; \tau\in\mathcal{F}[a,b]\Big\}$$

halmazok korlátosak. Következésképpen mindegyik halmaz infimuma és szuprémuma véges. Az

$$I_*(f) := \sup\Big\{s(f,\tau) \;\Big|\; \tau\in\mathcal{F}[a,b]\Big\}, \quad \text{illetve az} \quad I^*(f) := \inf\Big\{S(f,\tau) \;\Big|\; \tau\in\mathcal{F}[a,b]\Big\}$$

valós számot az f függvény ***Darboux-féle alsó integráljának***, illetve ***Darboux-féle felső integráljának*** nevezzük. Igazolható, hogy

$$I_*(f) \le I^*(f) \qquad \big(f\in K[a,b]\big).$$

3. Definíció. *Tegyük fel, hogy $-\infty < a < b < +\infty$ és $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f* ***Riemann-integrálható*** *az $[a,b]$ intervallumon (röviden* **integrálható** *$[a,b]$-n), ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az*

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f)$$

számot az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett **Riemann-integráljának** *(vagy más szóval* **határozott integráljának***) nevezzük. Az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát az $\boldsymbol{R[a,b]}$ szimbólummal fogjuk jelölni.*

Az előzőekből következik, hogy bizonyos síkidomok területét a következőképpen célszerű *értelmezni.*

4. Definíció. *Ha a korlátos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $f(x)\ge 0$ $(x\in[a,b])$, akkor* **az $\boldsymbol{f}$ grafikonja alatti**

$$A := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\Big\}$$

síkidomnak van területe*, és a területét így értelmezzük:*

$$T(A) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Egyszerű példát lehet megadni olyan korlátos f függvényre, amelyre $I_*(f) < I^*(f)$, ami azt jelenti, hogy a függvény ***nem integrálható***. Például legyen

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \big(x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\big) \\ 1 & \big(x\in[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\big). \end{cases}$$

Ekkor $I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1$, ezért $f\notin R[0,1]$.

A határozott integrál tulajdonságai

Az ebben a részben szereplő tételeket bizonyítás nélkül mondjuk ki.

Először azt fogalmazzuk meg, hogy a Riemann-integrál „érzéketlen” a függvény *véges* halmazon való „viselkedésére”. Más szóval, ha egy Riemann-integrálható függvényt egy véges halmazon (tetszőlegesen) megváltoztatunk, akkor az így kapott „új” függvény is Riemann-integrálható lesz, és a (Riemann-)integrálja ugyanaz marad, mint a kiindulási függvényé.

6. Tétel. *Legyen $f, g \in K[a,b]$ és tegyük fel, hogy az $A := \Big\{x \in [a,b] \;\Big|\; f(x) \neq g(x)\Big\}$ halmaz véges. Ekkor*

a) $f \in R[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad g \in R[a,b]$,

b) *ha $f \in R[a,b]$, akkor* $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b g$.

A következő tételben kiderül, hogy a folytonosság „erősebb” tulajdonság a Riemann-integrálhatóságnál.

7. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R[a,b]$, azaz* **minden folytonos függvény integrálható**. ($C[a,b] \subset R[a,b]$).

Az állítás megfordítása nem igaz. Legyen például

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (0 < x \leq 1) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Ekkor $f \in R[0,1]$, de $f \notin C[0,1]$.

A 6. és 7. Tételből következik, hogy a véges sok szakadási hellyel rendelkező korlátos függvények integrálhatók. Kérdés, hogy a szakadási helyek számát valamilyen értelemben lehet-e növelni úgy, hogy a függvény továbbra is integrálható maradjon. Kiderül, hogy egy függvény Riemann-integrálhatósága lényegében azon múlik, hogy a függvény szakadási helyeinek a halmaza mennyire „kicsi”.

Precízen: Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz ***nullmértékű***, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma: *Tegyük fel, hogy $f \in K[a,b]$ és legyen az f szakadási helyeinek a halmaza $\mathcal{A} := \Big\{x \in [a,b] \;\Big|\; f \notin C\{x\}\Big\}$. Ekkor $f \in R[a,b]$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathcal{A}$ halmaz nullmértékű.*

Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt **szakaszonként folytonosnak** nevezzük, ha van véges sok olyan $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ osztópont, hogy minden $k = 0, 1, \ldots, m-1$ index esetén

- az $f|_{(x_k, x_{k+1})}$ függvény folytonos,
- léteznek és végesek a $\lim\limits_{x_k - 0} f$, $\lim\limits_{x_k + 0} f$ határértékek.

8. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként folytonos, akkor $f \in R[a, b]$ és*

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f.$$

Az integrálás és a függvényműveletek kapcsolatára vonatkoznak az alábbi állítások.

9. Tétel. *Tegyük fel, hogy f, $g \in R[a, b]$. Ekkor*

a) *minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\alpha f + \beta g \in R[a, b] \qquad \text{és} \qquad \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$$

b) $f \cdot g \in R[a, b]$,

c) *ha valamilyen $m > 0$ állandóval fennáll az*

$$\big|g(x)\big| \geq m > 0 \qquad \big(x \in [a, b]\big)$$

egyenlőtlenség, akkor az $\dfrac{f}{g}$ függvény is integrálható az $[a, b]$ intervallumon.

A Riemann-integrál monotonitását fejezi ki az alábbi állítás.

10. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in R[a, b]$. Ekkor*

a) *ha $g \in R[a, b]$, és $f(x) \leq g(x)$ $\big(x \in [a, b]\big)$, akkor $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$,*

b) $|f| \in R[a, b]$, *és* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Az előző tulajdonságokból következik, hogy ha $f \in R[a, b]$ és $f(x) \leq 0$ $(x \in [a, b])$, akkor

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq 0$$

Ennek abszolút értéke ***az f grafikonja feletti***

$$A := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; a \leq x \leq b,\; f(x) \leq y \leq 0\Big\}$$

síkidom területe. Ha $f \in C[a, b]$ és véges sok zérushelye van, akkor a szakaszonként folytonos függvényekre kimondott tétel értelmében a határozott integrál a zérus helyek között keletkezett grafikon alatti vagy feletti síkidomok előjeles területének összege. Ha a kétféle területösszeg megegyezik, akkor a függvény határozott integrálja nulla. Például ezért

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0.$$

A Riemann-integrál egy további fontos tulajdonságát fejezi ki a következő állítás.

11. Tétel (Intervallum szerinti additivitás). *Legyen* $a < b < c$ *valós számok és* $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény. Ekkor* $f \in R[a, c]$ *akkor és csak akkor, ha* $f \in R[a, b]$, $f \in R[b, c]$. *Ekkor*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Történeti utalások

A matematikai analízis alapgondolatának a felfedezése – vagyis hogy a keresett mennyiséget tetszőleges pontossággal való megközelítések segítségével határozzuk meg – *Eudoxos* (i.e. 408–355) nevéhez fűződik, aki megalkotta a *kimerítés módszerét.*

Arkhimédész (i.e. 287–212) minden idők egyik legnagyobb, de az ókornak minden bizonnyal legnagyobb matematikusa volt. A kimerítés módszerét továbbfejlesztve kiszámította különböző görbevonalú idomok (pl. parabolaszelet) területét, meghatározta a gömb térfogatát és felszínét, bizonyos spirálok ívhosszúságát, vizsgálta a forgási paraboloidokat és hiperboloidokat. Munkásságának nagyobb része elveszett, de így is hatalmas művet hagyott hátra. Meg kell jegyezni azonban azt is, hogy gondolatai nagyon sokáig nem találtak méltó folytatásra.

Az analízis mint széles körben alkalmazható általános módszer, mint tudományág csak akkor született meg, amikor XVII. századi európai matematikusok kidolgoztak egy elméletet, az ún. *kalkulust* vagy a mai szóval *differenciálszámítást.* Ezt nagy matematikusok sora (*Barrow, Cavalieri, Fermat, Kepler* és sokan mások) fejlesztették ki, majd *Isaac Newton* (1643–1727) és *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) foglalták össze. Így a század végére már megérett az idő egy nagyszabású monográfia megírására. Ez *L'Hospital* (1661–1704) *Infinitézimál-számítás* (azaz végtelen kicsiny mennyiségekkel való számolás) című műve volt (1696), amely csaknem 100 évig a téma legfontosabb tankönyve maradt.

A kalkulust kezdettől fogva sok kritika és támadás érte – tegyük hozzá teljes joggal. A módszer logikai tisztasága nagyon is vitatható volt, mert homályos fogalmakkal dolgozott, és a gondolatmenetei néha zavarosak voltak. Pl. mit jelent az, hogy végtelenül kicsiny mennyiség? A kalkulus körüli vita egészen a XIX. század végéig zajlott, és nemegyszer filozófiai síkra terelődött (Berkeley, Hegel).

Ezeket a belső problémákat végül mégis a matematikusok oldották meg a XIX. században, amikor a kalkulus intuitív, de homályos és ellentmondásos fogalmait precízen definiált matematikai fogalmakkal helyettesítették. A változó mennyiség fogalmát a függvény fogalmával, a differenciált a határértékkel, a differenciálhányadost pedig a deriválttal váltották fel. Ennek a tisztázási folyamatnak az eredményeképpen – amelyben *Augustin Cauchy* (1789–1857), *Karl Weierstrass* (1815–1897) és *Richard Dedekind* (1831–1916) vállaltak úttörő szerepet – a XIX. század végére a ***differeciál- és integrálszámítás*** (röviden ***analízis***) elérte a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel.

Az analízis precíz elméletének kidolgozása az újkori nyugati kultúra egyik legnagyobb szellemi teljesítménye volt. Ne csodálkozzunk hát, ha ezt az elméletet – főleg az alapjait, mindenekelőtt pedig annak centrális fogalmát, a határértéket – nehéznek találjuk.