Diszkrét matematika I. feladatok
Relációk I

Harmadik alkalom (2024.02.26-03.01.)

1. Legyen $A = \{1,2,3,4\}$ és $B = \{5,6,7,8,9\}$. Tekintsük a következő $R \subset A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $R = \{(1,5),(1,6),(1,7),(3,6),(3,9),(4,5),(4,7),(4,9)\}$.

   a) Határozza meg a R reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

   b) Rajzolja meg a reláció gráfját.

   c) Legyen $H_1 = \{1,2,3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a R reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűíését.

   d) A következő relációk közül melyek lehetnek a R reláció kiterjesztései?

   - $R_1 = \{(1,5),(1,6),(1,7),(2,2),(2,4),(3,6),(3,9),(4,3),(4,5),(4,7),(4,9)\} \subset \{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$
   - $R_2 = \{(1,5),(1,6),(1,7),(3,6),(3,8),(4,5),(4,6),(4,7),(4,9)\} \subset \{1,2,3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}$
   - $R_4 = A \times B$
   - $R_4 = B \times A$

   e) Határozza meg a R reláció inverzét, $R(\{1,2\})$ képét és $R^{-1}(\{5,6\})$ inverz képet.

2. Legyen
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
Az alábbi R relációkra határozza meg $\mathrm{dmn}(R), \mathrm{rng}(R)$ halmazokat, illetve az A képét $R(A)$, teljes inverzképét $R^{-1}(A)$, megszorítását $R\mid_A$:

   a) $R = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$,

   b) $R = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = N\mathbf{v}\}$,

   c) $R = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = N\mathbf{v}\}$,

   d) $R = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = N^2\mathbf{v}\}$.

3. Legyen $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f\}$, $C = \{2,4,6,8\}$ továbbá $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$,
$R = \{(1,a),(1,b),(2,c),(2,f),(3,d),(3,e),(3,f)\}$ és
$S = \{(a,2),(a,4),(c,6),(c,8),(d,2),(d,4),(d,6),(f,8)\}$.
Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

4. Legyen
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
Az alábbi R, S relációkra határozza meg az $R \circ S$ és $S \circ R$ kompozíciókat.

   a) $R = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$, $S = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$,

   b) $R = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = M\mathbf{v}\}$, $S = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = M^2\mathbf{v}\}$,

   c) $R = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = N\mathbf{v}\}$, $S = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N\mathbf{u} = M\mathbf{v}\}$

5. Tekintsük a sajátvektor reláció $\{(\mathbf{v}, M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists\lambda : M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$. Mi lesz a reláció értelmezési tartománya, értékkészlete?

6. Tekintsük a sajátérték reláció $\{(\lambda, M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists\mathbf{v} : M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$. Mi lesz a reláció értelmezési tartománya, értékkészlete?