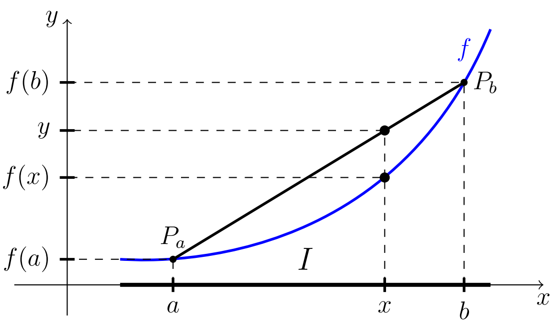
3. előadás

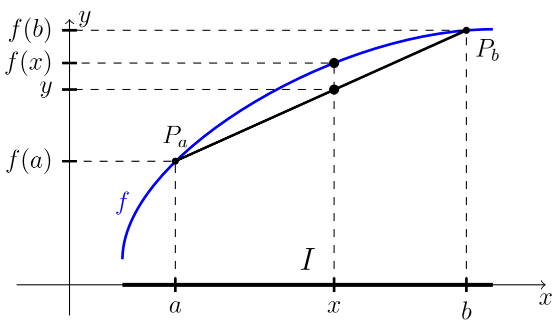
FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTTAL 2.

Konvex és konkáv függvények

A konvex és konkáv függvények fogalmát már az Analízis I. kurzuson bevezettük. Ezzel az volt a célunk, hogy néhány alapfüggvény konvexitási tulajdonságát vizsgáljuk, és így teljes képet kapjunk ezekről a függvényekről. A hatvány-, a reciprok- és a gyökfüggvények esetében sikerült ezt megvalósítani, azonban a többi speciális függvény esetében azt mondtuk, hogy konvexitásukat a differenciálszámítás eszköztárával jóval egyszerűbben tudjuk igazolni.

Emlékezzünk, hogy egy függvény konvexitása bizonyos „alaki” tulajdonságaival van összefüggésben. Az mondtuk, hogy egy függvény szigorúan konvex (konkáv) egy I intervallumon, ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ pontpár esetén a függvény (a, b) intervallumhoz tartozó része az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr alatt (felett) van. Az alábbi ábrák ezt a ***geometriai jelentést*** illusztrálják, ahol a bal oldali függvény szigorúan konvex, és a jobb oldali függvény szigorúan konkáv.





A szóban forgó húr egyenesének egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \qquad \text{vagy} \qquad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

A konvex és konkáv függvények pontos fogalma a következő:

1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $I \subset \mathcal{D}_f$ egy intervallum. Ha $\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén igaz az, hogy*

- *ha $\forall x \in (a, b)$: $f(x) \le \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konvex az I intervallumon***,*
- *ha $\forall x \in (a, b)$: $f(x) \ge \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konkáv az I intervallumon***,*

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan konvex***, illetve* **szigorúan konkáv** *függvényekről beszélünk.*

Megjegyzés. Mivel a húr egyenesének egyenlete kétféle módon írható fel, így a fenti definícióban szereplő

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \qquad \text{kifejezés helyett az} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$$

kifejezés is írható. ■

1. Tétel (A konvexitás és a derivált kapcsolata). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D(I)$. Ekkor*

1. f *konvex* $[$ *illetve* f *konkáv* $]$ I*-n* $\iff$ $f' \nearrow$ $[$ *illetve* $f' \searrow$ $]$ I*-n,*
2. f $\begin{matrix}\textit{szigorúan}\\ \textit{konvex}\end{matrix}$ $\left[\textit{illetve } f \begin{matrix}\textit{szigorúan}\\ \textit{konkáv}\end{matrix}\right]$ I*-n* $\iff$ $f' \uparrow$ $[$ *illetve* $f' \downarrow$ $]$ I*-n.*

Bizonyítás. A tételt csak konvex függvények esetében fogjuk igazolni. A bizonyítás hasonlóan történik konkáv függvények esetében, hiszen ekkor elegendő megfordítani a kisebb vagy egyenlő relációk irányát. Szigorúan konvex és szigorúan konkáv függvények esetében a bizonyítás további meggondolást igényel.

Azt igazoljuk tehát, hogy $\underline{f \text{ konvex } I\text{-n} \iff f' \nearrow I\text{-n}}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Legyen f konvex I-n. Legyen tovább $u, v \in I$, $u < v$ két tetszőleges pont és $x \in (u, v)$ is tetszőleges. Ekkor a konvexitás definíciójából, valamint a tétel előtti megjegyzés miatt egyszerre igaz, hogy

$$f(x) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u)+f(u) \qquad \text{és} \qquad f(x) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-v)+f(v)$$

(itt u, v átvette a definícióban szereplő a, b szerepét), ami egyszerű átrendezésekkel a következő módon írható át

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le \frac{f(x)-f(v)}{x-v}.$$

Tudjuk, hogy $f \in D\{u\}$ és $f \in D\{v\}$. Ekkor az $x \to u$, ill. az $x \to v$ határátmenettel

$$f'(u) = f'_+(u) = \lim_{x \to u+0} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le \lim_{x \to v-0} \frac{f(x)-f(v)}{x-v} = f'_-(v) = f'(v).$$

Tehát tetszőleges $u, v \in I$, $u < v$ esetén $f'(u) \le f'(v)$, ami azt jelenti, hogy $f' \nearrow I$-n.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy $f' \nearrow I$-n, és legyen $u, v \in I$, $u < v$ két tetszőleges pont és $x \in (u, v)$ is tetszőleges. Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik egy $u < \xi_1 < x$ és egy $x < \xi_2 < v$ szám, hogy

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(v)-f(x)}{v-x}.$$

Mivel $f' \nearrow I$-n, így $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, azaz

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(x)}{v-x},$$

ami a következő módon alakítható át:

$$\big(f(x)-f(u)\big)(v-x) \le \big(f(v)-f(x)\big)(x-u)$$
$$f(x)\big((v-x)+(x-u)\big) \le f(u)(v-x)+f(v)(x-u)$$
$$f(x)(v-u) \le f(u)\big((v-u)-(x-u)\big)+f(v)(x-u)$$
$$f(x)(v-u) \le (f(v)-f(u))(x-u)+f(u)(v-u)$$
$$f(x) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u)+f(u).$$

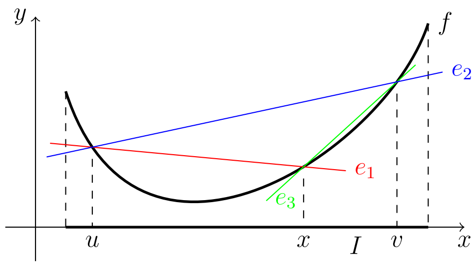
Ez azt jelenti, hogy f konvex függvény I-n.

Megjegyzések.

1. Az ábra szemlélteti a tételben szereplő $(*)$ egyenlőtlenségek geometriai jelentését. Látható, hogy az e_1, az e_2 és az e_3 húrok meredekségei rendre

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u}, \quad \frac{f(v)-f(u)}{v-u}, \quad \frac{f(x)-f(v)}{x-v},$$

és ezek nagysága megfelelnek a $(*)$-ban szereplő egyenlőtlenségeknek.



2. Ha a függvény konkáv, szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv I-n, akkor a $(*)$-ban szereplő relációk irányán és élességén kell megfelelően változtatni.

3. A tétel bizonyítása nem alkalmazható szigorúan konvex függvények esetében, mert a megfelelő

$$(**) \qquad \frac{f(x)-f(u)}{x-u} < \frac{f(v)-f(u)}{v-u} < \frac{f(x)-f(v)}{x-v}$$

egyenlőtlenségekből az $x \to u$, ill. az $x \to v$ határátmenettel nem következik rögtön az éles $f'(u) < f'(v)$ egyenlőtlenség. Ehhez szokás bevezetni az

$$F_a(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \big(x \in I \setminus \{a\}\big)$$

különbséghányados-függvényt, ahol $a \in I$ egy tetszőleges rögzített pont. $(**)$-ból igazolható, hogy ha f szigorúan konvex I-n, akkor $F_a \uparrow I$-n. Ezzel már igazolni tudjuk, hogy

$$f'(u) = f'_+(u) = \lim_{x\to u+0} F_u(x) < F_u(v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u} = F_v(u) < \lim_{x\to v-0} F_v(x) = f'_-(v) = f'(v).$$

Hasonló gondolatmenet alkalmazható szigorúan konkáv függvények esetében.

A konvexitás és a derivált kapcsolatáról szóló tétel azt állítja, hogy differenciálható f függvények esetén az f' derivált monotonitása meghatározza azt, hogy az f függvény (szigorúan) konvex vagy (szigorúan) konkáv egy adott nyílt intervallumon. Ha azonban az f' függvény is differenciálható, akkor monotonitása megvizsgálható az $(f')' = f''$ kétszeres derivált értékeinek előjelei alapján. Ezzel eljutunk a következő állításhoz.

2. Tétel (A konvexitás és a kétszeres derivált kapcsolata). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D^2(I)$. Ekkor*

1. *f konvex $\big[$ illetve f konkáv $\big]$ I-n $\iff$ $f'' \geq 0$ $\big[$ illetve $f'' \leq 0$ $\big]$ I-n;*
2. *$f'' > 0$ $\big[$ illetve $f'' < 0$ $\big]$ I-n $\implies$ f $\begin{matrix}\text{szigorúan}\\ \text{konvex}\end{matrix}$ $\left[\text{illetve } f \begin{matrix}\text{szigorúan}\\ \text{konkáv}\end{matrix}\right]$ I-n.*

Bizonyítás. Ha $f \in D^2(I)$, akkor $f' \in D(I)$, ezért f'-re alkalmazhatunk a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tételt. Másrészt $(f')' = f''$. Ekkor a konvexitás és a kétszeres derivált kapcsolata alapján:

- f konvex I-n $\iff$ $f' \nearrow I$-n $\iff$ $(f')' \geq 0$ I-n,
- f konkáv I-n $\iff$ $f' \searrow I$-n $\iff$ $(f')' \leq 0$ I-n,
- f szigorúan konvex I-n $\iff$ $f' \uparrow I$-n $\impliedby$ $(f')' > 0$ I-n,
- f szigorúan konkáv I-n $\iff$ $f' \downarrow I$-n $\impliedby$ $(f')' < 0$ I-n.

Megjegyzések.

1. Vegyük észre, hogy a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tétel miatt az előző tétel 2. állításában nem ekvivalencia, hanem implikáció szerepel.
2. Az előző tétel értelmében az exponenciális függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$-n, hiszen
$$(\exp)''(x) = \exp(x) > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Definíció. *Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $c \in (a, b)$ pont az f függvénynek* **inflexiós pontja**, *ha*

$$\exists \delta > 0\colon\ f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n} \ \text{ és } \ \text{konkáv } [c, c+\delta)\text{-n},$$

vagy fordítva.

Megjegyzések.

1. A konvexitás és a derivált kapcsolata értelmében, ha $c \in (a, b)$ inflexiós pont, akkor az f' függvény monotonitása megváltozik a c pontban, azaz c az f' függvény lokális szélsőértékhelye. Ezért, ha $f \in D^2\{c\}$ és f-nek a c pontban inflexiója van, akkor $f''(c) = (f')'(c) = 0$. Ezt hívjuk ***az inflexiós pontra vonatkozó másodrendű szükséges feltételnek***.
2. Az előző állítás nem fordítható meg, hiszen az $f(x) := x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény esetében $f''(0) = 0$, de 0 nem inflexiós pontja az f függvénynek.
3. Igazolható, hogy a függvény inflexiós pontjain az érintő „átszeli" a függvény grafikonját szigorú konvexitási váltás mellet. Pontosabban, ha e jelöli az f függvény grafikonjához húzott érintőt egy ilyen c inflexiós pontban, akkor a $\varphi := f - e$ függvénynek szigorú előjelváltása van a c pontban. Ez a jelenség könnyen megfigyelhető az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény esetén a $c = 0$ pontban, ahol a függvénynek inflexiós pontja van, és ott az érintő egyenlete $e(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

1. Feladat. *Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából a következő függvényt*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big),$$

és határozzuk megy az inflexiós pontjait!

Megoldás. Világos, hogy $f \in D^2\{x\}$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$f''(x) = \frac{2x+6}{x^4}, \qquad (x \neq 0).$$

Az előző tétel szerint azokat az intervallumokat kell meghatározni, amelyeken az f'' függvény állandó előjelű. Az f'' függvény egyetlen zérushelye az az $x = -3$ pont, ezért a keresett intervallumok a következők: $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ és $(0, +\infty)$. Most a monotonitáshoz hasonló táblázatot készítünk, de ennek első sorában f'' szerepel. A $\smile$ szimbólummal jelöljük azt, hogy a függvény konvex, a $\frown$ szimbólummal pedig azt, hogy a függvény konkáv az adott intervallumon.

	$x < -3$	-3	$-3 < x < 0$	$x > 0$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\frown$	$-2/9$	$\smile$	$\smile$
		infl.		

A táblázatból rögtön leolvasható, mely intervallumokon lesz konvex vagy konkáv a függvény, illetve az, hogy f-nek inflexiós pontja van az $x = -3$ helyen, ahol a függvény értéke $f(-3) = -2/9$.

Aszimptoták

Ha egy függvény grafikonja nem korlátos, akkor úgy kell ábrázolni, hogy érzékelhető legyen az a tendencia, amit a függvény követ, amikor „elhagyja” a rajzterületet. Ehhez a függvény határérték nagyon fontos segítséget nyújt. Előfordul, hogy a grafikon pontjai tetszőleges közelségbe kerülnek egy adott egyeneshez, ún. ***aszimptotához***. A legegyszerűbb ilyen eset, amikor a függvénynek egy a pontban van bal vagy jobb oldali határértéke, és ez $-\infty$ vagy $+\infty$. Ekkor az $x = a$ egyenletű egyenes egy ***függőleges aszimptotája*** lesz a függvénynek.

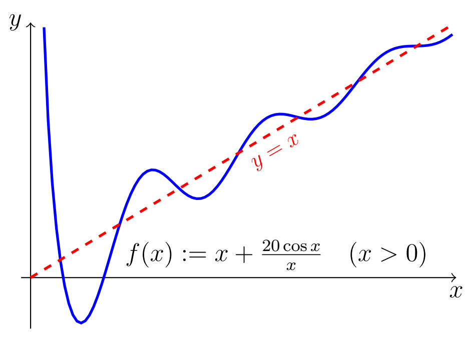
Ha a függvény értelmezési tartománya nem korlátos, akkor lehet ***vízszintes aszimptotája*** is. Ez akkor fordul elő, amikor létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben vagy a $+\infty$-ben, és ez egy B számmal egyenlő. Ekkor $y = B$ az aszimptota egyenlete.

Azonban az aszimptoták tetszőleges

$$y = Ax + B$$

egyenletű egyenesek is lehetnek, ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Ha $A \neq 0$, akkor ***ferde aszimptotáról*** beszélünk.

Az ábrán olyan példa látható, ahol egy függvénynek ferde aszimptotája van. Valóban, ha x „nagy”, akkor az $f(x)$ érték „közel” van az x számhoz.



Az a tény, hogy egy függvény grafikonja közel kerül egy egyeneshez, a következő módon fogjuk precízen értelmezni.

3. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy* **az f függvénynek van aszimptotája $(+\infty)$-ben**, *ha*

$$\exists\ l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ekkor az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes **az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben**.

A függvény $(-\infty)$-beli aszimptotáját *is hasonló módon értelmezzük.*

Az előbbi definíció nem adja meg, hogyan tudjuk az A és a B értékeket meghatározni. Ebben a segítségünkre lehet a következő állítás.

3. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Bizonyítás. A tétel könnyen igazolható a határérték alaptulajdonságai alapján.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ha $l(x) = Ax + B$ az f függvény aszimptotája a $(+\infty)$-ben, akkor

$$f(x) - Ax - B \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(x) - Ax - B}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Így

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - Ax - B + Ax + B}{x} = \frac{f(x) - Ax - B}{x} + A + \frac{B}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 + A + 0 = A.$$

Másrészt

$$f(x) - Ax - B \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) - Ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} B.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad f(x) - Ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} B \in \mathbb{R},$$

akkor rögtön a második határértékből következik, hogy

$$f(x) - Ax - B \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

és így $l(x) = Ax + B$ az f függvény aszimptotája a $(+\infty)$-ben.

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására. ■

A L'Hospital-szabály

Láttuk, hogy a differenciálszámítás eszköztárával hatékonyan tudunk meghatározni több függvénytulajdonságot. Az aszimptoták kivételeknek tűnnek, mert meghatározásukhoz „csak" határértékszámítás szükséges. Most megmutatjuk, hogy a differenciálszámítás szintén egy hatásos eszköz a függvények pontbeli határértékek kiszámításában.

Először lássuk, hogyan számítjuk ki a következő határértéket az eddigi ismereteink alapján:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^8+3x^5-2x^2-2}{x^4-6x^2+5x}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^7+x^6+x^5+4x^4+4x^3+4x^2+2x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2-5x)}=-\frac{19}{3}.$$

A fenti határérték egy $0/0$ típusú kritikus határérték. A számlálóból és a nevezőből kiemeltük az $x-1$ tényezőt, és egyszerűsítés után a fennmaradó kifejezést kiértékeltük az $x=1$ helyen. Itt a problémát a kiemelés jelenti, amire több módszer ismert, de ezek általában sok számítással járnak. Most megpróbálkozunk valami mással. Legyen $a=1$, illetve

$$f(x):=x^8+3x^5-2x^2-2 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g(x):=x^4-6x^2+5x \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Tudjuk, hogy f és g differenciálható függvények, és

$$f'(x)=8x^7+15x^4-4x \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad g'(x)=4x^3-12x+5 \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Mivel az $\underline{f,g\in D\{a\},\ f(a)=g(a)=0 \text{ és } g'(a)\neq 0}$ feltételek teljesülnek, ezért

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Mivel $f'(a)=f'(1)=19$ és $g'(a)=g'(1)=-3$, így a két értékek elosztásával megkapjuk a már ismert végeredményt. Ezzel a módszerrel a határérték kiszámításához „csak" külön kellett deriválni a számlálót és a nevezőt, és az így kapott hányadost kiértékelni az $x=a$ helyen.

A most bemutatott módszer csak a fent megadott egyszerű feltételek mellett alkalmazható. Szerencsére, ez csak egy speciális esete egy jóval általánosabb állításnak, amit L'Hospital-szabálynak nevezünk. Ennek a szabálynak két esete van, amivel „ügyes" átalakításokkal több kritikus határérték kiszámítható. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty)+(-\infty),\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0^0.$$

4. Tétel (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben). *Legyen $-\infty\le a<b<+\infty$, illetve $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f,g\in D(a,b),\\ \bullet\ \forall x\in(a,b)\colon g'(x)\neq 0,\\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f=\lim\limits_{a+0} g=0,\\ \bullet\ \exists\lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \implies \exists\lim_{a+0}\frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0}\frac{f}{g}=\lim_{a+0}\frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy a Rolle-tétel alapján, ha $g' \neq 0$ (a,b)-n, akkor g-nek legfeljebb egy zérushelye van (a,b)-n. Ekkor választhatunk olyan $b > a$ számot, hogy $g \neq 0$ (a,b)-n.

Két esetet fogunk megkülönböztetni:

1. $\boxed{a > -\infty \text{ (véges).}}$ Legyen $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$. Azt kell igazolni, hogy $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$, azaz

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a,b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(\#\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta^* > 0,\ \forall y \in (a, a+\delta^*) \subset (a,b)\colon \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

A $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a,b)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített szám, és $\delta^* > 0$ a (##)-ben szereplő szám. Legyen $\delta := \delta^*$, és $x \in (a, a+\delta)$ egy tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy $\exists \xi_x \in (a,x) \subset (a, a+\delta^*)$, amire:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \quad \text{(és ez (\#\#) miatt)} \quad \in K_\varepsilon(A).$$

A (#) állítást tehát bebizonyítottuk. A $\lim_{a+0} \frac{f}{g}$ határérték létezik, és $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$.

2. $\boxed{a = -\infty.}$ Nem bizonyítjuk.

Most megfogalmazzuk a $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ kritikus határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

5. Tétel (L'Hospital-szabály a $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ esetben). *Legyen* $-\infty \leq a < b < +\infty$*, illetve* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0, \\ \bullet\ \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty, \\ \bullet\ \exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \implies \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.

Megjegyzések.

1. A L'Hospital-szabály mindkét esete könnyen átfogalmazható ***bal oldali és $+\infty$-ben vett határértékekre*** is. Ehhez elegendő $-\infty < a < b \leq +\infty$ mellett mindenhol $b-0$ bal oldali határértékeket írni. Nem nehéz meggondolni, hogy az így kapott állítások igazolhatók a jobb oldali határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályból az $y=-x$ helyettesítéssel. A bal- és jobb oldali határértékekre vonatkozó állításokból a L'Hospital-szabály ***kétoldali határértékekre*** is átfogalmazható.

2. A $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ kritikus határértékekre, a bal oldali határértékre, valamint a (kétoldali) határértékre, sőt a $(-\infty)$-ben és $(+\infty)$-ben vett határértékre hasonló állítások érvényesek.

3. ***Vigyázat!*** A L'Hospital-szabály alkalmazása előtt győződjünk meg, hogy a szabály alkalmazásához szükséges feltételek teljesülnek, ui. „hagyja magát alkalmazni” akkor is, ha nem lehet. Például, ha
$$f(x) := \cos x, \quad \text{és} \quad g(x) := x+1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_0 \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1, \quad \text{de} \quad \lim_0 \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0 \neq \lim_0 \frac{f}{g}.$$

4. Az (a,b) intervallum hossza tetszőlegesen kicsi lehet, ezért nem egyszerű olyan példát megadni, ahol a $\forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0$ feltétel teljesül minden (a,b) esetén, és g nem azonosan nulla. Emiatt ezt a feltételt nem szoktuk ellenőrizni.

5. A L'Hospital-szabály többször egymás után is alkalmazható, ha szükséges. Például
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$
Azonban előfordul, hogy ez soha nem vezet eredményhez. Például
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$
és ha még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt, akkor az induló kifejezést kapjuk.

6. A L'Hospital-szabály nem fordítható meg abban az értelemben, hogy ha elvégzése után a kapott határérték nem létezik, akkor attól még lehet, hogy a keresett határérték létezik. Például
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1} \nexists, \text{ de } \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

7. A többi kritikus határértéktípust gyakran vissza lehet vezetni $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{+\infty}{+\infty}$ típusú határértékre, ahol megpróbálhatjuk alkalmazni a L'Hospital-szabályt.

Példák.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} x\ln x = \big(0\cdot(-\infty)\big) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x) = 0.$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = (?) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\,\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\,\cos x} =$
$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\,\sin x} = \frac{0}{1+1-0} = 0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \left(0^0\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} \left(e^{\ln x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x\right) = \exp(0) = 1,$

   hiszen exp folytonos függvény, és már igazoltuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = 0$.

4. Ha $a > 1$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)\cdot a^x}{n\cdot x^{n-1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^2\cdot a^x}{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}} = \cdots =$$

$$= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^{n-1}\cdot a^x}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^n\cdot a^x}{n!} = +\infty.$$

   Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy ha $a > 1$, akkor $x \to +\infty$ esetén az a^x $(x \in \mathbb{R})$ függvény gyorsabban tart $(+\infty)$-hez, mint x bármelyik pozitív kitevőjű hatványa, és ezt szokás így is jelölni:

$$\boxed{x^n \ll a^x, \quad \text{ha} \;\; x \;\; \text{elég nagy}}\,.$$

5. Hasonlóan, ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n\cdot\ln^{n-1} x}{m\cdot x^m} = \cdots = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{m^n\cdot x^m} = 0,$$

   azaz x bármely pozitív kitevőjű hatványa gyorsabban tart $(+\infty)$-hez $x \to +\infty$ esetén, mint $\ln x$ bármely pozitív kitevőjű hatványa. Röviden: minden $n, m \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\boxed{\left(\ln x\right)^n \ll x^m, \quad \text{ha} \;\; x \;\; \text{elég nagy}}\,.$$

Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény ***teljes függvényvizsgálatán*** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

$\boxed{1.}$ Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, zérushelyek, előjelvizsgálat, paritás, periodicitás megállapítása.)

$\boxed{2.}$ Lokális szélsőértékek és monotonitási intervallumok.

$\boxed{3.}$ Konvexitási intervallumok és inflexiós pontok.

$\boxed{4.}$ Határértékek és aszimptoták.

$\boxed{5.}$ A függvény grafikonjának felrajzolása.

2. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az*

$$f(x) := x - 1 - \frac{4x}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. A deriválási szabályok alapján az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor deriválható. Mivel

$$f(x) = x - 1 - \frac{4x}{x^2+1} = \frac{x^3 - x^2 - 3x - 1}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2-2x-1)}{x^2+1},$$

így $f(x) = 0 \iff x = -1$ vagy $x^2 - 2x - 1 = 0$, azaz

$$x = -1, \qquad x = x_1 := 1 - \sqrt{2} \approx -0,414 \qquad \text{vagy} \qquad x = x_2 := 1 + \sqrt{2} \approx 2,414.$$

Előjelvizsgálat

	$x < -1$	-1	$-1 < x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

A függvény nem páros, páratlan vagy periodikus.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 1 - \frac{4 \cdot (x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 3}{(x^2+1)^2},$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \iff \qquad x^4 + 6x^2 - 3 = 0.$$

A $t = x^2$ helyettesítéssel

$$t^2 + 6t - 3 = 0 \qquad \iff \qquad t = -3 - 2\sqrt{3} < 0, \quad \text{vagy} \quad t = -3 + 2\sqrt{3} > 0.$$

Ezért $x^2 = 2\sqrt{3} - 3 \qquad \iff$

$$x = x_3 := \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0,681 \quad \text{vagy} \quad x = -x_3 := -\sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx -0,681$$

	$x < -x_3$	$-x_3$	$-x_3 < x < x_3$	x_3	$x > x_3$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	0, 18	$\downarrow$	$-2,18$	$\uparrow$
lok.		max		min	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 12x)(x^2+1)^2 - (x^4 + 6x^2 - 3) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{8x(3 - x^2)}{(x^2+1)^3},$$

ezért $f''(x) = 0 \iff x = 0, \quad x = -\sqrt{3} \approx -1,73, \quad$ vagy $\quad x = \sqrt{3} \approx 1,73.$

	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	0	$0 < x\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\smile$	-1	$\frown$	-1	$\smile$	-1	$\frown$
		infl.		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - 1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = \pm\infty - 1 - 0 = \pm\infty.$$

Továbbá

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{1+x^2}\right) = 1 =: A$$

és

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = -1 =: B.$$

Ez azt jelenti, hogy az $y = Ax+B$, azaz az $y = x-1$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben és $(+\infty)$-ben is.

$\boxed{5.}$ ***Ábrázolás***.