

4. előadás

SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK

Már elemzett speciális függvények

Az Analízis I. kurzuson több speciális függvénnyel foglalkoztunk, igazoltuk bizonyos tulajdonságait, ábráztuk a grafikonjukat. Első körben sikerült teljesen elemezni a

- **hatványfüggvényeket:** $f(x) := x^n$ ($x \in \mathbb{R}$), ahol $n = 0, 1, 2, \dots$,
- **reciprokfüggvényeket:** $f(x) := 1/x^n$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), ahol $n = 1, 2, 3, \dots$,
- **gyökfüggvényeket:** $f(x) := \sqrt[n]{x}$ ($x \in [0, +\infty)$), ahol $n = 2, 3, 4, \dots$.

A következő körben az exponenciális függvényre és logaritmusfüggvényre került sor. Velük kapcsolatban a következő függvényeket is elemeztük:

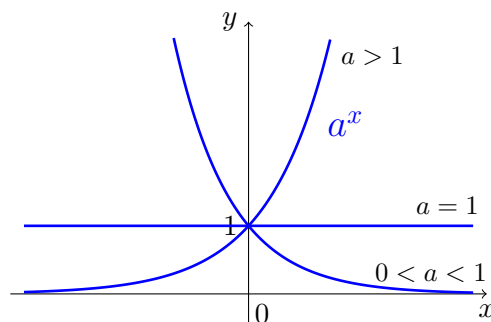
- **a alapú exponenciális függvény:** $f(x) := \exp_a(x) = a^x$ ($x \in \mathbb{R}$), ahol $a > 0$,
- **a alapú logaritmusfüggvény:** $f(x) := \log_a x$ ($x \in (0, +\infty)$), ahol $a > 0$ és $a \neq 1$,
- **általános hatványfüggvény:** $f(x) := x^\alpha$ ($x \in (0, +\infty)$), ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ez utóbbi körben még nem vizsgáltuk a függvények konvexitását, hiszen ehhez a differenciálszámítás eszközeit szerettük volna alkalmazni. Most fogjuk ezt pótolni. A konvexitáshoz a függvény második deriváltjának előjeleit kell meghatározni.

Az \exp_a függvény szigorúan konvex \mathbb{R} -n, ha $a > 0$ és $a \neq 1$. Ez abból következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\exp_a(x))'' = (\exp_a(x) \ln a)' = \exp_a(x) \ln^2 a > 0.$$

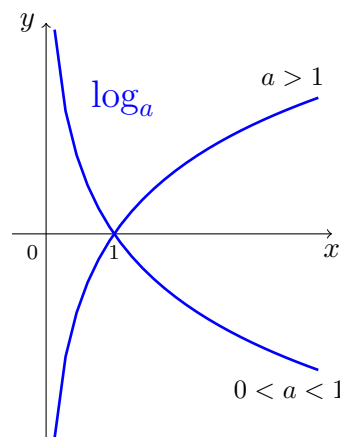
Ha $a = 1$, akkor az $\exp_a \equiv 1$ lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv \mathbb{R} -n, de nem szigorú értelemben.



A \log_a függvény szigorúan konkáv $(0, +\infty)$ -n, ha $a > 1$, és szigorúan konvex $(0, +\infty)$ -n, ha $0 < a < 1$, hiszen minden $x > 0$ esetén

$$(\log_a(x))'' = \left(\frac{1}{x \ln a}\right)' = -\frac{1}{x^2 \ln a} \begin{cases} < 0, \text{ ha } a > 1, \\ > 0, \text{ ha } 0 < a < 1, \end{cases}$$

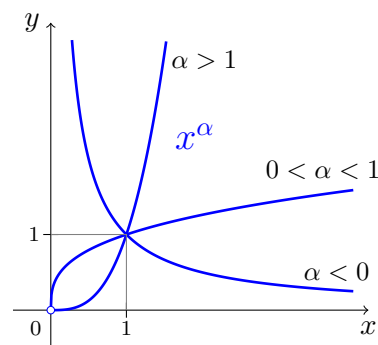
mivel $\ln a > 0$, ha $a > 1$, illetve $\ln a < 0$, ha $0 < a < 1$.



Az x^α függvény konvexitása is függ az α értéktől. Valóban, minden $x > 0$ esetén

$$(x^\alpha)'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Tehát az $\alpha(\alpha-1)$ előjelen múlik a függvény konvexitása. Ha $\alpha > 1$ vagy $\alpha < 0$, akkor $(x^\alpha)'' > 0$, és így az x^α függvény konvex $(0, +\infty)$ -n. Ha $0 < \alpha < 1$, akkor $(x^\alpha)'' < 0$, és így az x^α függvény konkáv $(0, +\infty)$ -n. Ha $\alpha = 0$ vagy $\alpha = 1$, akkor x^α lineáris függvény, azaz egyszerre konvex és konkáv $(0, +\infty)$ -n, de nem szigorú értelemben.



Az Analízis I. kurzuson szintén foglalkoztunk a szinusz- és a koszinuszfüggvénnyel, de nem fejeztük be az elemzésüket. A következő részben ezt fogjuk elvégezni.

Trigonometrikus függvények

A középiskolában már megismertedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$, valamint alkalmas $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ számok szemléletes definícióival, amiket **érdemes felidézni** és megjegyezni. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságaikat. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerepelnek viszonylag bonyolult és definiálatlan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése” vagy a körív hossza. A **π számot** az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal 3,14.

Az Analízis I. kurzuson a **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. Néhány már megismert összefüggés azonban jelzi a hasonlóságot. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján kapott szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használtuk a „szokásos” \sin és \cos szimbólumokat.

• A \sin és a \cos függvény

A **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** az egész \mathbb{R} -en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Most bizonyítás nélkül összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket az Analízis I. kurzuson már megismertünk.

1. Paritás: a \sin függvény páratlan, és a \cos függvény páros, azaz

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Addíciós képletek: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

3. Érdemes megjegyezni azt a tényt, hogy **két szinusz, illetve koszinusz összege és különbsége szorzattá alakítható**. A következő azonosságok az addíciós képletek egyszerű következményei. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, & \sin x - \sin y &= 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, & \cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

4. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

5. Négyzetes összefüggés:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6. Folytonosság: A \sin és a \cos függvény folytonos \mathbb{R} -en.

7. A π szám értelmezése: A \cos függvénynek a $[0, 2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0, 2]$ -nek pontosan egy ξ pontjában áll fenn a $\cos \xi = 0$ egyenlőség. Ennek a ξ számnak a kétszereseként értelmezzük a π számot:

$$\pi := 2\xi.$$

Megjegyzések.

1. A π értelmezéséhez kapcsolódó tétel bizonyításából (Analízis I.-ben) kiderült, hogy

$$(2) \quad \sin x > 0, \quad \cos x > 0 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

2. Az Analízis I. kurzuson szintén láttuk, hogy a \sin és a \cos függvény a nevezetes helyeken vett értékei megegyeznek a középiskolai és más korábbi tanulmányokban már megismert értékekkel

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

8. Az addíciós képletekből a következő kapcsolat adódik:

$$(3) \quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

9. Periodicitás: A \sin és a \cos függvény 2π szerint periodikus, azaz

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2k\pi) \quad (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}).$$

és 2π mindegyik függvénynek a legkisebb periódusa.

Az eddig felsorolt tulajdonságokat az Analízis I. kurzuson tanultunk. Ezentúl a differenciálszámítás eszköztárát felhasználva fogjuk a \sin és a \cos függvény „alaki” tulajdonságait tanulmányozni. A deriváltjukat már ismerjük.

10. Differenciálhatóság: A \sin és a \cos függvény differenciálható \mathbb{R} -en, és

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A periodicitást és a paritást figyelembe véve, a vizsgálatokat elég a $[0, \pi]$ -n elvégezni.

1. Tétel.

1. $\sin \uparrow [0, \frac{\pi}{2}]$ -en, $\downarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n és szigorúan konkáv $[0, \pi]$ -n.
2. $\cos \downarrow [0, \pi]$ -n, szigorúan konkáv $[0, \frac{\pi}{2}]$ -en és szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n.

Bizonyítás. Az addíciós képletek és a paritás alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos(-x) + \cos \pi \sin(-x) = 0 + (-1) \cdot \sin(-x) = \sin x,$$

$$\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos(-x) - \sin \pi \sin(-x) = (-1) \cdot \cos(-x) - 0 = -\cos x.$$

Mivel (2) szerint $\sin x > 0$ és $\cos x > 0$ a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon, ezért a fenti egyenlőségekből meg tudjuk adni a \sin és \cos függvény előjelét a teljes $(0, \pi)$ intervallumon:

$$\cos x > 0 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2})), \quad \cos x < 0 \quad (x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)) \quad \text{és} \quad \sin x > 0 \quad (x \in (0, \pi))$$

Ezekből a deriváltakra vonatkozó már ismert

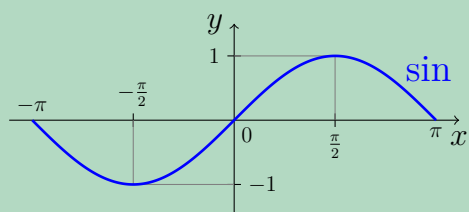
$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \cos'' x = -\cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

képleteket, továbbá a monotonitás, illetve a konvexitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó eredményeket felhasználva kapjuk a tétel állítását.

A \sin függvény páratlan, ezért a grafikonja szimmetrikus az origóra. A következő ábrán szemléltetjük a \sin függvény grafikonját a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:

A \sin függvény

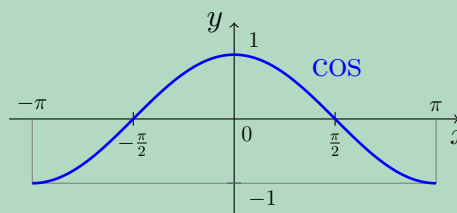
- $\downarrow [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ -en, $\uparrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ -en és $\downarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n,
- szigorúan konvex $[-\pi, 0]$ -n,
szigorúan konkáv $[0, \pi]$ -n,
- 0 inflexiós pont.



A cos függvény páros, ezért a grafikonja szimmetrikus az y -tengelyre. A következő ábrán a cos függvény grafikonját szemléltetjük a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:

A cos függvény

- $\uparrow [-\pi, 0]$ -n és $\downarrow [0, \pi]$ -n,
- szigorúan konvex $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ -en,
szigorúan konkáv $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ -en,
szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n,
- $\pm \frac{\pi}{2}$ inflexiós pontok.



A periodicitást figyelembe véve az előzőekből már következnek a sin és a cos függvény **zérushelyeire** vonatkozó alábbi állítások:

$$\begin{aligned} \sin x = 0 & \iff x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \cos x = 0 & \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Az (1) azonosságokat és a fenti egyenlőségeket felhasználva egyszerűen bebizonyíthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin x = \sin y & \iff x - y = 2k\pi \text{ vagy } x + y = (2k + 1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \cos x = \cos y & \iff x - y = 2k\pi \text{ vagy } x + y = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

• A tg és a ctg függvény

1. Definíció. A tangensfüggvényt így értelmezzük:

$$\operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right).$$

A sin és a cos függvények tulajdonságait felhasználva adódnak a következő állítások:

- a) tg *páratlan* függvény, azaz $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ ($x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}}$),
- b) a tg függvény π szerint *periodikus*, azaz $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$ ($x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}}$, $k \in \mathbb{Z}$),
- c) a tg függvény *zérushelyei*:

$$\operatorname{tg} x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

d) Mivel

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y},$$

ezért

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \iff \sin(x - y) = 0 \iff x = y + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek alapján a tg függvény „alaki tulajdonságait” elég a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon megállapítani. Mivel $\text{tg} \in D^\infty(-\pi/2, \pi/2)$, és például

$$\text{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{tg}'' x = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

Meg kell azonban vizsgálnunk a tg függvény $\pm \frac{\pi}{2}$ pont körüli viselkedését. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1, \quad \text{és} \\ \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{továbbá} \quad \cos x > 0, \quad \text{ha } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

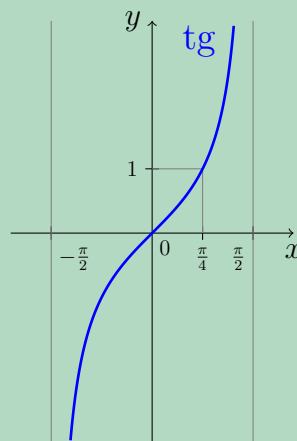
ezért

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \text{tg } x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \text{tg } x = +\infty.$$

A tg függvény grafikonja a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon, és alapvető tulajdonságai:

A tg függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ -en,
- szigorúan konkáv $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ -n,
szigorúan konvex $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ -en,
- 0 inflexiós pont,
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \text{tg } x = -\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \text{tg } x = +\infty$.



2. Definíció. A *kotangensfüggvényt* így értelmezzük:

$$\text{ctg } x := \text{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right).$$

A ctg függvény páratlan és π szerint periodikus, továbbá

$$\text{ctg } x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{ctg } x = \text{ctg } y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x - y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A tg és a ctg függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$(4) \quad \text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x}, \quad \text{ctg } x = -\text{tg} \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{tg } x = -\text{ctg} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \left(x \in \mathcal{D}_{\text{tg}} \cap \mathcal{D}_{\text{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

A ctg függvény tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $(0, \pi)$ -n megvizsgálni. Mivel $\text{ctg} \in D^\infty(0, \pi)$, és

$$\text{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{ctg}'' x = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} \quad (x \in (0, \pi)),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

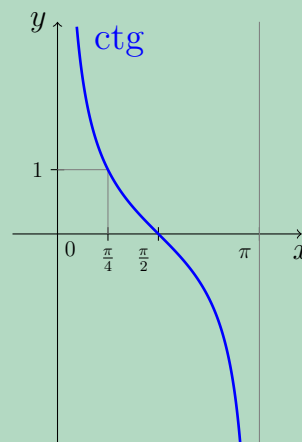
A ctg függvény 0 és π pont körüli viselkedésére a következők teljesülnek:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \text{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} \text{ctg} x = -\infty.$$

A ctg függvény grafikonja a $(0, \pi)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:

A ctg függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\downarrow (0, \pi)$ -n,
- szigorúan konvex $(0, \frac{\pi}{2}]$ -en,
szigorúan konkáv $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ -n,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont,
- $\lim_{x \rightarrow 0+0} \text{ctg} x = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \text{ctg} x = -\infty$.



Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények)

A trigonometrikus függvények mindegyike periodikus, ezért egyikük sem invertálható. Mind a négy függvénynek vannak azonban olyan alkalmas intervallumra vonatkozó leszűkítései, amelyekben a függvények szigorúan monotonok, ezért invertálhatók. Ki fogunk választani egy-egy ilyen intervallumot, és ezekre vonatkozó leszűkítéseket invertáljuk. Az így kapott függvényeket **arkuszfüggvényeknek** nevezzük. (Az *arcus* szó — ívet jelent — azt jelzi, hogy a függvények helyettesítési értékei bizonyos körív hosszával hozható kapcsolatba.)

3. Definíció. A szigorúan monoton

$$\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}, \quad \cos |_{[0, \pi]}, \quad \text{tg} |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}, \quad \text{ctg} |_{(0, \pi)}$$

függvények inverzeit rendre **arkuszszinusz-, arkuszkoszinusz, arkusztangens-, arkuszkotangens-függvényeknek** nevezzük és így jelöljük:

$$\begin{aligned} \arcsin &:= \left(\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}, & \arccos &:= \left(\cos |_{[0, \pi]} \right)^{-1}, \\ \arctg &:= \left(\text{tg} |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}, & \text{arccotg} &:= \left(\text{ctg} |_{(0, \pi)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy invertálható függvényt és annak inverzét egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk (feltéve azt, hogy a tengelyeken az egységek egyenlő hosszúak), akkor a szóban forgó függvények grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre vonatkozóan. Következésképpen mindegyik arkuszfüggvény grafikonját a neki megfelelő trigonometrikus függvény (már ismert) grafikonjából kapjuk meg.

Az arc sin függvény definíciójából következik, hogy tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén $\arcsin x$ az a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba eső y szög, amelynek a szinusza x -szel egyenlő, azaz

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \arcsin x & = & y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin y = x. \\ (x \in [-1, 1]) & & (y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \end{array}}$$

Az \arcsin függvény *folytonos* $[-1, 1]$ -en (lásd az „inverz függvény folytonosságára” vonatkozó tételt), a függvény *deriválhatósága* pedig egyszerűen adódik az inverz függvény deriválási szabályából: Legyen $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin y = x \in [-1, 1]$, azaz $y = \arcsin x$. Mivel $\sin' y = \cos y > 0$, ha $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ezért $\arcsin \in D(-1, 1)$ és

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

azaz

$$(5) \quad \boxed{\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1))}.$$

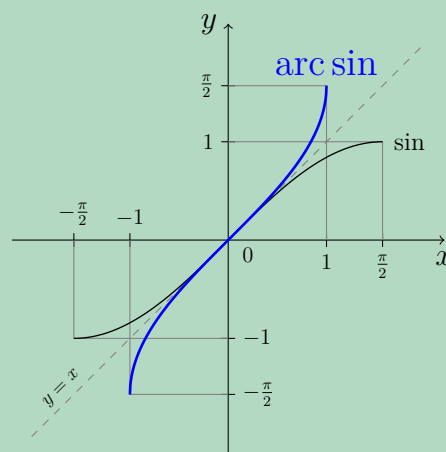
A következő ábrán szemléltetjük az \arcsin függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az arc sin függvény

- $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1, 1]$, $\mathcal{R}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- folytonos $[-1, 1]$ -en,
- deriválható $(-1, 1)$ -en, és

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1))$$

- \uparrow $[-1, 1]$ -en,
- szigorúan konkáv $[-1, 0]$ -en,
szigorúan konvex $[0, 1]$ -n,
- 0 inflexiós pont.



Az arc cos függvény definíciójából következik, hogy

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \arccos x & = & y \quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = x. \\ (x \in [-1, 1]) & & (y \in [0, \pi]) \end{array}}$$

Most is az inverz függvény deriválási szabállyal meg tudjuk határozni az \arccos függvény deriváltját. A függvény folytonos $[-1, 1]$ -en az inverz függvény folytonossága alapján. Legyen $y \in [0, \pi]$ és $\cos y = x \in [-1, 1]$, azaz $y = \arccos x$. Mivel $\cos' y = -\sin y < 0$, ha $y \in (0, \pi)$, ezért $\arccos \in D(-1, 1)$ és

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos' y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

azaz

$$(6) \quad \boxed{\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1))}.$$

Érdekességgént megmutatjuk a differenciálszámításnak egy nagyszerű alkalmazhatóságát. Az (5) és (6) összefüggésekből látható, hogy $\forall x \in (-1, 1)$ esetén

$$(\arcsin x + \arccos x)' = \arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

Ezért $\arcsin x + \arccos x$ konstans, független az x megválasztásától. De mivel $\arcsin 0 = 0$ és $\arccos 0 = \pi/2$, és mindkét függvény folytonos a teljes $[-1, 1]$ intervallumon, így

$$(7) \quad \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1])}.$$

Megjegyzés. Az előző tulajdonság elemi úton is igazolható a (3) azonosságok felhasználásával. A bizonyításhoz vegyünk egy tetszőleges $x \in [-1, 1]$ elemet. Ekkor

$$\arcsin x =: y_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff x = \sin y_1 \iff x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y_1\right), \text{ és}$$

$$\arccos x =: y_2 \in [0, \pi] \iff x = \cos y_2.$$

Mivel $\frac{\pi}{2} - y_1 \in [0, \pi]$, és $\cos \downarrow [0, \pi]$ -n, így

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y_1\right) = \cos y_2 \iff \frac{\pi}{2} - y_1 = y_2 \iff y_1 + y_2 = \frac{\pi}{2} \iff \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

■

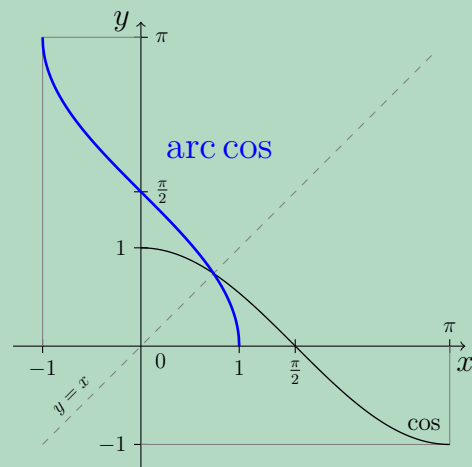
A következő ábrán szemléltetjük az \arccos függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az \arccos függvény

- $\mathcal{D}_{\arccos} = [-1, 1]$, $\mathcal{R}_{\arccos} = [0, \pi]$,
- folytonos $[-1, 1]$ -en,
- deriválható $(-1, 1)$ -en, és

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1))$$

- \downarrow $[-1, 1]$ -en,
- szigorúan konvex $[-1, 0]$ -en,
szigorúan konkáv $[0, 1]$ -n,
- 0 inflexiós pont.



Az arc tg függvény definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc tg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{arc tg} \uparrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{arc tg } x & = & y \quad \iff \quad \text{tg } y = x, \\ (x \in \mathbb{R}) & & (y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arc tg } x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arc tg } x = \frac{\pi}{2}.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = -\frac{\pi}{2}$ (illetve az $y = \frac{\pi}{2}$) egyenletű egyenes az arc tg függvény aszimptotája a $(-\infty)$ -ben (illetve a $(+\infty)$ -ben).

Mivel minden $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ esetén $\text{tg}' y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, ezért minden $x = \text{tg } y \in \mathbb{R}$ pontban az arc tg függvény deriválható és az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\text{arc tg}' x = \frac{1}{\text{tg}' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

azaz

$$\boxed{\text{arc tg}' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

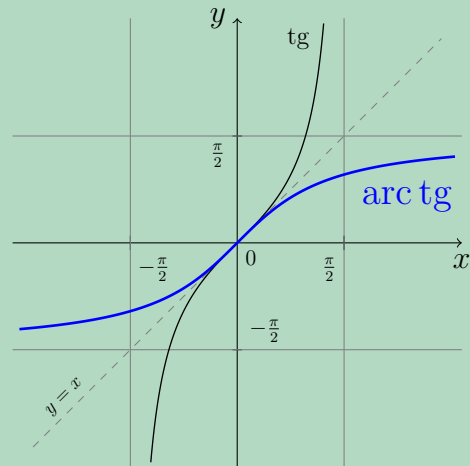
A következő ábrán szemléltetjük az arc tg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az arc tg függvény

- $\mathcal{D}_{\text{arc tg}} = \mathbb{R}, \mathcal{R}_{\text{arc tg}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- folytonos és deriválható \mathbb{R} -en, ill.

$$\text{arc tg}' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- \uparrow \mathbb{R} -en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$ -n,
szigorúan konkáv $[0, +\infty)$ -en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm \frac{\pi}{2}$ aszimptota a $(\pm\infty)$ -ben.



Az arc ctg függvény definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$\mathcal{D}_{\text{arc ctg}} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_{\text{arc ctg}} = (0, \pi), \quad \text{arc ctg} \downarrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}\text{-en},$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{arc ctg } x & = & y \quad \iff \quad \text{ctg } y = x, \\ (x \in \mathbb{R}) & & (y \in (0, \pi)) \end{array}}$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arc ctg } x = \pi \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arc ctg } x = 0.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = \pi$ (illetve az $y = 0$) egyenletű egyenes az \arctg függvény aszimptotája $(-\infty)$ -ben (illetve $(+\infty)$ -ben).

Az inverz függvény deriválási szabályából nem nehéz igazolni, hogy $\arctg \in D(\mathbb{R})$ és

$$\arctg' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezután, az \arcsin és \arccos függvényeknél bemutatott módszerrel igazolható, hogy

$$\arctg x + \arctg x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

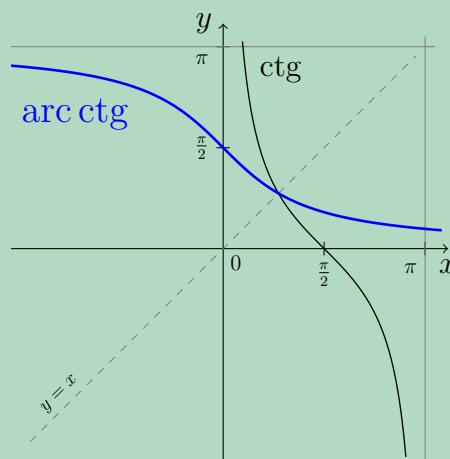
Most szemléltetjük az \arctg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:

Az \arctg függvény

- $\mathcal{D}_{\arctg} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\arctg} = (0, \pi)$,
- folytonos és deriválható \mathbb{R} -en, ill.

$$\arctg' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- \downarrow \mathbb{R} -en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$ -n,
szigorúan konvex $[0, +\infty)$ -en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pi$ aszimptota a $(-\infty)$ -ben és
 $y = 0$ aszimptota a $(+\infty)$ -ben.



Hiperbolikus függvények és inverzeik

• Hiperbolikus függvények

4. Definíció. A szinuszhiperbolikus- és a koszinuszhiperbolikus-függvényt az egész \mathbb{R} -en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmezzük:

$$\operatorname{sh} x := \operatorname{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ch} x := \operatorname{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az \exp függvény

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

definíciójából közvetlenül következnek az alábbi fontos formulák:

$$(8) \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A hiperbolikus függvények sok rokon vonást mutatnak a trigonometrikus függvényekkel, ezekre utalnak az elnevezések. Az (8) formulák, valamint az \exp függvény alaptulajdonságai felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a trigonometrikus függvényekhez hasonló alábbi állítások:

1. Paritás: A sh páratlan, a ch pedig páros függvény.

2. Addíciós képletek: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

3. Négyzetes összefüggés:

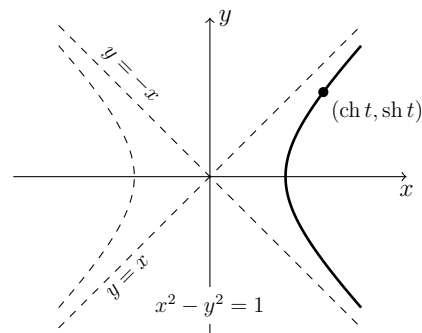
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A négyzetes összefüggés geometriai tartalma a következő:

Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az

$$(x, y) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$$

síkbeli pont rajta van az $x^2 - y^2 = 1$ ($x > 0$) egyenletű hiperbolaágon (innen származik a szóban forgó függvények nevében szereplő „hiperbolikus” jelző).



4. Differenciálhatóság: A sh és a ch függvény differenciálható (tehát folytonos is) \mathbb{R} -en, és

$$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

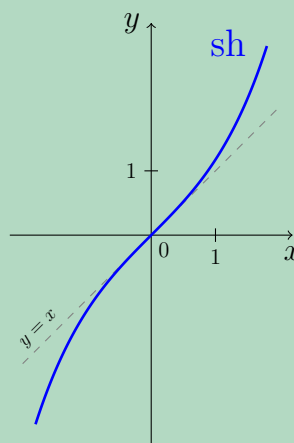
A differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával vizsgálhatjuk a sh és a ch függvény analitikus és „alaki” tulajdonságait. Most a részletek mellőzésével felsoroljuk ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, majd azok felhasználásával ábrázoljuk a grafikonjaikat.

A sh függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható \mathbb{R} -en, ill.

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

- \uparrow \mathbb{R} -en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$ -n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$ -en,
- 0 inflexiós pont.

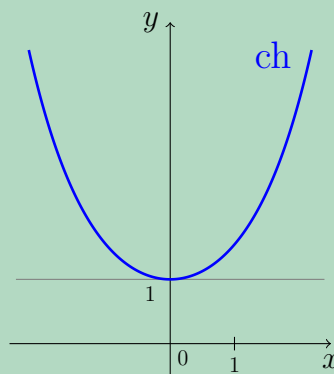


A ch függvény

- $\mathcal{D}_{\text{ch}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{ch}} = [1, +\infty)$,
- páros függvény,
- folytonos és deriválható \mathbb{R} -en, ill.

$$\text{ch}' x = \text{sh } x \quad (x \in \mathbb{R})$$

- $\downarrow (-\infty, 0)$ -en, és $\uparrow (0, +\infty)$ -en,
- szigorúan konvex \mathbb{R} -en,
- 0 abszolút minimumhely.



Megjegyzés. A ch függvény képét **lán cgörbének** is nevezik, mert egy homogén, hajlékony, nyúlásmentes, két végén felfüggesztett fonal (lánc) ilyen alakot vesz fel. ■

5. Definíció. A tangenshiperbolikus- és a kotangenshiperbolikus-függvényeket a tg és a ctg függvények mintájára értelmezzük:

$$\text{th } x := \text{th}(x) := \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{cth } x := \text{cth}(x) := \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

A definícióknál figyelembe vettük azt, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $\text{ch } x \neq 0$, és $\text{sh } x = 0 \iff x = 0$.

Mindkét függvény páratlan, ezért a tulajdonságaikat elég a $(0, +\infty)$ intervallumon megállapítani. Meg kell még vizsgálni a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}$, a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{cth}$ és a $\lim_{x \rightarrow 0+0} \text{cth}$ határértékeket. Mivel

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \stackrel{(8)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0, \quad \text{cth } x = \frac{1}{\text{th } x} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \text{sh } x = 0,$$

ezért

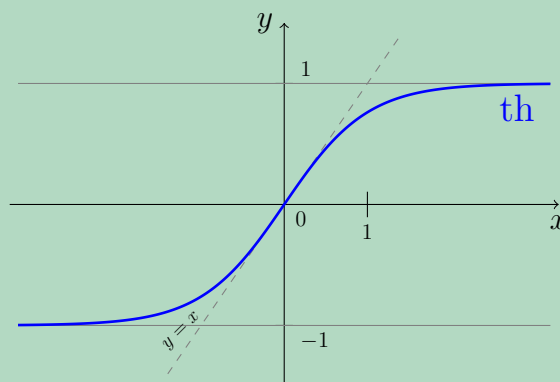
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th } x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{cth } x = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \text{cth } x = +\infty.$$

A th függvény

- $\mathcal{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\text{th}} = (-1, 1)$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható \mathbb{R} -en, ill.

$$\text{th}' x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- $\uparrow \mathbb{R}$ -en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$ -n, szigorúan konkáv $[0, +\infty)$ -en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$ -ben.

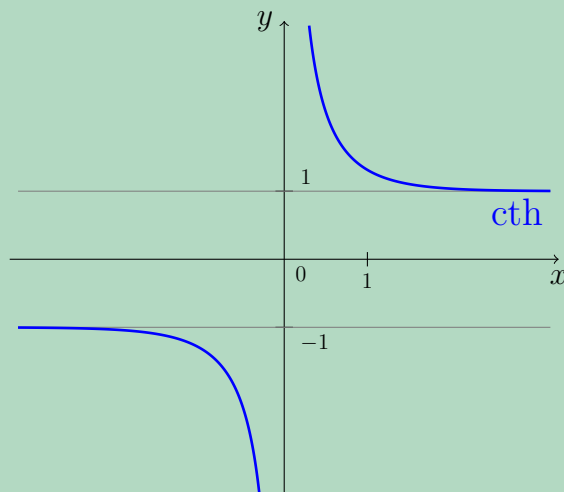


A cth függvény

- $\mathcal{D}_{\text{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{R}_{\text{cth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$,
- páratlan függvény,
- folytonos és deriválható \mathbb{R} -en, ill.

$$\text{cth}' x = -\frac{1}{\text{sh}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

- $\downarrow (-\infty, 0)$ -en, és $\downarrow (0, +\infty)$ -en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$ -n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$ -en,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$ -ben.

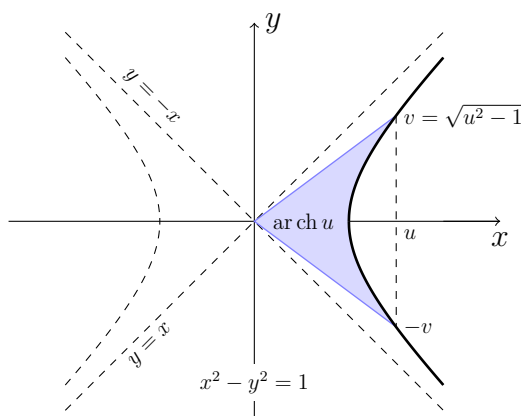


Hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények)

6. Definíció. A sh , $\text{ch}|_{[0,+\infty)}$, th , cth függvények invertálhatók. Az inverzeiket rendre **areaszinuszhiperbolikus-**, **areakoszinuszhiperbolikus-**, **areatangenshiperbolikus-**, **areakotangenshiperbolikus-függvényeknek** nevezzük és így jelöljük:

$$\text{ar sh} := \text{sh}^{-1}, \quad \text{ar ch} := \left(\text{ch}|_{[0,+\infty)} \right)^{-1}, \quad \text{ar th} := \text{th}^{-1}, \quad \text{ar cth} := \text{cth}^{-1}.$$

Megjegyzés. Az inverz hiperbolikus függvények nevében megjelenő *area*=terület szó azt jelzi, hogy az $\text{ar ch } u$ mennyiség egy bizonyos síkidom területével egyenlő. Pontosabban: Legyen $u \geq 1$ és $v = \sqrt{u^2 - 1}$. Jelölje A_u azt a tartományt, amelyet az origót az (u, v) és $(u, -v)$ pontokkal összekötő két szakasz, valamint az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolának az (u, v) és $(u, -v)$ pontok közötti íve határol. Meg lehet mutatni, hogy az A_u tartomány területe éppen $\text{ar ch } u$ -val egyenlő. Ezt szemlélteti a következő ábra.



Az inverz függvény deriválási szabályából következik, hogy mindegyik areafüggvény az értelmezési tartományának minden belső pontjában deriválható, és

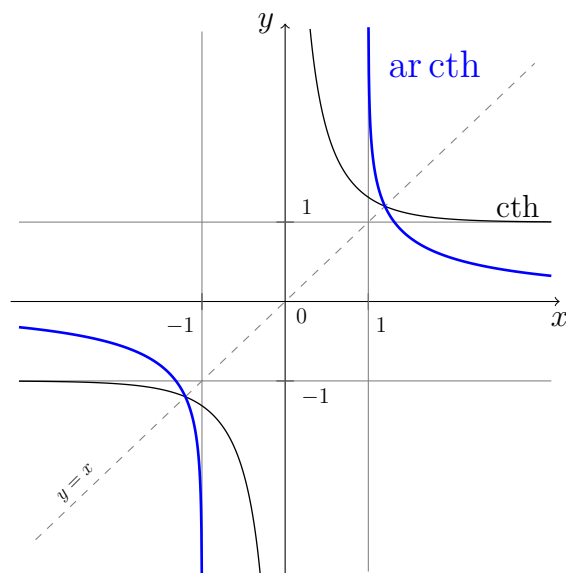
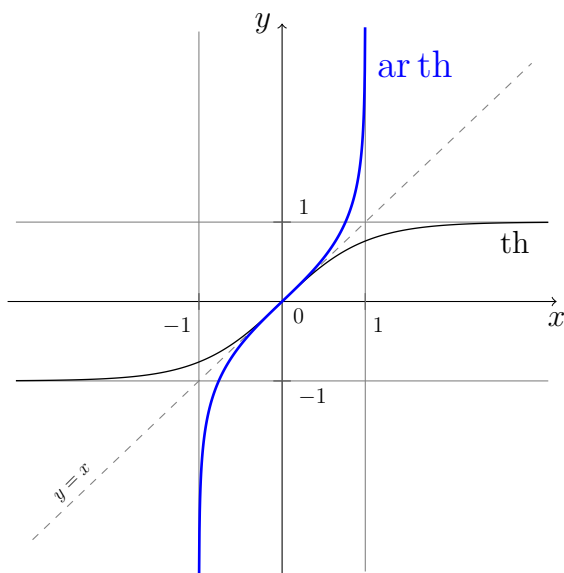
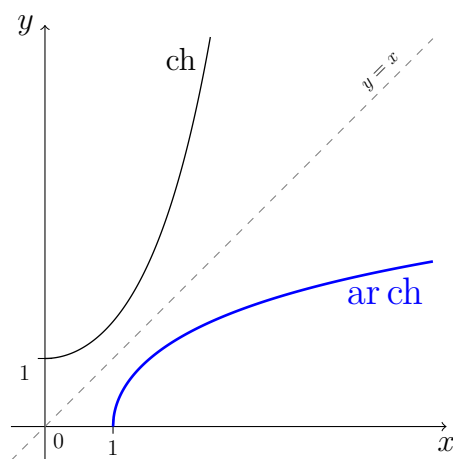
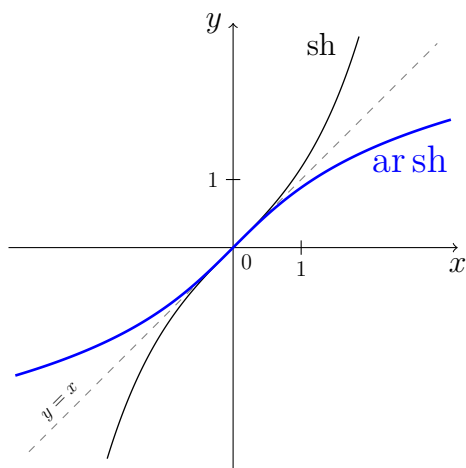
$$\text{ar sh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{ar ch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \in (1, +\infty)),$$

$$\text{ar th}' x = \frac{1}{1 - x^2} \quad (x \in (-1, 1)),$$

$$\text{ar cth}' x = \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| > 1).$$

Az areafüggvények alábbi ábrákon szemléltetett analitikus és geometriai tulajdonságai a korábbiakhoz hasonlóan állapíthatók meg.



A hiperbolikus függvényeket ki lehet fejezni az exp függvénnyel. Az exp függvény inverze az ln függvény, ezért nem meglepő, hogy az areafüggvényeket az ln segítségével is fel tudjuk írni.

2. Tétel. A következő azonosságok teljesülnek:

$$\operatorname{ar sh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ar ch} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \in [1, +\infty)),$$

$$\operatorname{ar th} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (x \in (-1, 1)),$$

$$\operatorname{ar cth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad (|x| > 1).$$

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlóak, ezért csak az első azonosság igazolását részletezzük.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $y := \operatorname{ar sh} x$, azaz

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Bevezetve a $t := e^y$ jelölést, t -re a

$$t^2 - 2xt - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Mivel $t > 0$, ezért ennek egyetlen megoldása van:

$$e^y = t = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

azaz

$$y = \operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A fenti képletek jelentősége a következő: Ha az \ln függvény helyettesítési értékeit ki tudjuk számolni, akkor az areafüggvények helyettesítési értékei is számolhatók. ■

Az elemi függvények helyettesítési értékeinek a kiszámolása

Az analízisben (és általában a matematikában) a leggyakrabban előforduló függvények a polinomok, a racionális függvények, az exponenciális-, hatvány- és logaritmussfüggvények, a trigonometrikus függvények, a hiperbolikus függvények és az inverzeik. **Elemi függvényeknek** nevezzük azokat a függvényeket, amelyeket a fentiekből kaphatjuk meg a négy alpművelet, a kompozíció és valamely nyílt intervallumra való leszűkítés véges számú alkalmazásával.

Fontos kérdés az elemi függvények helyettesítési értékeinek „tetszőleges pontossággal” való kiszámíthatósága. Polinomok és racionális függvények helyettesítési értékei a négy alpművelet véges sokszori alkalmazásával egyszerűen számolhatók. Hatványsor összegfüggvényei polinomok sorozatának határértékei, ezért azok helyettesítési értékeit általában nem tudjuk pontosan kiszámolni. A közelítő értékeit azonban (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk határozni a négy alpművelet véges sokszori felhasználásával.

Érdekes és fontos tény az, hogy mindegyik elemi függvényt *ki lehet fejezni* néhány „alapfüggvény” segítségével. Pontosabban igaz a következő állítás: *Mindegyik elemi függvény kifejezhető az*

- $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x$,
- $(0, +\infty) \ni x \mapsto \ln x$,
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arctg} x$

függvényekkel a négy alpművelet, a kompozíció és valamely nyílt intervallumra való leszűkítés véges számú alkalmazásával.

Ez azt is jelenti, hogy az *összes* elemi függvény tetszőleges pontossággal való kiszámolhatóságához elég előállítani csak az utolsó négy függvényt hatványsor összegfüggvényeként. Az \exp és a \sin függvényekre ilyen előállítást már megismertünk. Az \ln és az \arctg függvények alkalmas leszűkítéseit hamarosan elő fogjuk állítani hatványsor összegfüggvényeként.

Most felsoroljuk a fenti állítás bizonyításához alkalmazható formulákat:

- $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x \in (0, +\infty), \alpha \in \mathbb{R})$
- $a^x = e^{x \ln a}$ $(x \in \mathbb{R}, a \in (0, +\infty))$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $(x \in (0, +\infty), a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
- $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in (-1, 1))$
- $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ $(x \in [-1, 1])$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$
- $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})$
- $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \arctg x$ $(x \in \mathbb{R})$
- $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$
- $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $(x \in \mathbb{R})$
- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$
- $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $(x \in [1, +\infty))$
- $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $(x \in \mathbb{R})$
- $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $(x \in (-1, 1))$
- $\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
- $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$ $(x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$