Analízis II. (F) gyakorlatok

Programtervező informatikus BSc
Szoftverfejlesztő (C) specializáció

1. gyakorlat

Differenciálszámítás 1.

■ Szükséges ismeretek

- A derivált fogalma.
- A deriválási szabályok.
- Nevezetes függvények deriváltja.

■ Feladatok

1. Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsuk ki $f'(a)$-t, ha

a) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 1,$

b) $f(x) := \sqrt{x} \quad \big(x \in [0, +\infty)\big), \qquad a := 2,$

c) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad a := 3,$

d) $f(x) := x|x| \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 0,$

e) $f(x) := \begin{cases} 1 - x, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 - x + 1, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad a := 0.$

2. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \qquad (x > 0),$

c) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5\,x^5} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big),$

d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} \qquad (x > 0), \ \ a > 0$ paraméter.

3. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := x^2 \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) \qquad (x > 0),$

c) $f(x) := \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \qquad (x \in \mathbb{R}),$

d) $f(x) := \dfrac{2^x + 1}{2 + \sin x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$

4. Feladat. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := \left(5x^2 + 3x\right)^{2020} \qquad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \qquad (x \geq 0),$

c) $f(x) := \sin \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} \qquad (x > -3),$

d) $f(x) := \sin^2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$

■ Házi feladatok

1. Feladat. A definíció alapján lássa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

a) $f(x) := \dfrac{1}{x^2} \quad (x < 0), \qquad a := -1,$

b) $f(x) := \begin{cases} x^3 + x, & \text{ha } x \leq 0, \\ e^x - 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad a := 0.$

2. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := x^2 e^{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \log_2 \left(\dfrac{x + 2}{x - 1}\right) \quad (x > 1),$

c) $f(x) := \sin \sqrt{2^x + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$

d) $f(x) := \dfrac{\cos(\ln 2x)}{x^2 \ln x} \quad (x > 0).$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. A definíció alapján lássa be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsa ki $f'(a)$-t, ha

a) $f(x) := 3x^2 - x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 3,$

b) $f(x) := \sqrt{x + 1} \quad (x > -1), \qquad a := 3,$

c) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a := 0,$

d) $f(x) := \frac{2}{x} + 4 \quad (x > 0), \qquad a := 2,$

e) $f(x) := \begin{cases} x^3 - x, & \text{ha } x < 1, \\ x^2, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases} \qquad a := 1,$

f) $f(x) := \begin{cases} 2 \sin x, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 + 2x, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad a := 0.$

2. Feladat. Számítsa ki az

$$f(x) := \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \quad (x > 0)$$

függvény deriváltfüggvényét. (Egyszerűsítsen is.)

3. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$a)\quad f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$b)\quad f(x) := \dfrac{e^x}{1+e^x} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$c)\quad f(x) := \sin\sqrt{1+x^3} \quad (x > -1),$

$d)\quad f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}} \quad (x > 0),$

$e)\quad f(x) := \ln\Big(e^{-x}\sin x\Big) \quad (0 < x < \pi),$

$f)\quad f(x) := \sqrt{1+\sin^2 x}\cdot\cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$

$g)\quad f(x) := e^x \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$

$h)\quad f(x) := x^2\sqrt[3]{x} \quad (x > 0),$

$i)\quad f(x) := (x+2)^8(x+3)^6 \quad (x \in \mathbb{R}),$

$j)\quad f(x) := \Big(\sin^3 x\Big)\cdot\cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$

$k)\quad f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} \quad (x > 0),$

$l)\quad f(x) := \dfrac{\sin\left(2x^2\right)}{3-\cos(2x)} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$m)\quad f(x) := \ln(x^2 e^x) \quad (x > 0),$

$n)\quad f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x) \quad (x \in \mathbb{R}),$

$o)\quad f(x) := \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}} \quad (x > 0),$

$p)\quad f(x) := \ln\Big(\cos x\Big) \quad (0 < x < \tfrac{\pi}{2}),$

$q)\quad f(x) := \sqrt[5]{x\cos x} \quad (x > 0),$

$r)\quad f(x) := \sin^2\Big(\ln(\sqrt{1+\cos^2 x}+1)\Big) \quad (x \in \mathbb{R}).$

■ További feladatok

1. Feladat. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat!

$a)\quad f(x) := |3x-1| \quad (x \in \mathbb{R}),$

$b)\quad f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$c)\quad f(x) := \ln|x| \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}),$

$d)\quad f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign}|x-1|) \quad (x \in \mathbb{R}).$

2. Feladat. Legyen α valós paraméter. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat!

3. Feladat. Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az f függvény deriváltját g segítségével, ha

a) $f(x) := g^2(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := g\Big(g(x)\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}),$

c) $f(x) := \ln|g(x)| \qquad \Big(x \in \mathbb{R}\setminus\{y \mid g(y) = 0\}\Big).$

4. Feladat. Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h'-t f és g segítségével, ha

a) $h(x) := f\Big(g(\sin x)\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $h(x) := \log_{f(x)}\Big(g(x)\Big) \qquad \Big(x \in \mathbb{R}\setminus\{y \mid f(y) = 1\}\Big).$

5. Feladat. Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h'-t f és g segítségével, ha

a) $h(x) := f\Big(g(\sin x)\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}),$

b) $h(x) := \log_{f(x)}\Big(g(x)\Big) \qquad \Big(x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\}\Big).$

6. Feladat. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a következő határértékeket!

$$a) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}, \qquad\qquad b) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}.$$

7. Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

$$a) \quad f(x) := g(x)(x-a) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad\qquad b) \quad f(x) := g(x)|x-a| \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény deriválható az a pontban?

2. gyakorlat

Differenciálszámítás 2.

Szükséges ismeretek

- Az érintő fogalma, egyenlete.
- Az inverz függvényre vonatkozó deriválási szabály.
- Egyoldali pontbeli deriváltak.
- A Rolle- és a Lagrange-féle középértéktétel.

Feladatok

1. Feladat. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

a) $f(x) := e^{2x}\sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a = 0,$

b) $f(x) := \ln \dfrac{3x-1}{x^2+1} \quad \big(x \in (1/3, +\infty)\big), \qquad a = 1.$

2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját!

$$a)\quad f(x) := \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \quad (x > -1), \qquad b)\quad f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1-x} \quad (x > 0),$$

$$c)\quad f(x) := \left(\ln x\right)^{x+1} \quad (x > 1).$$

3. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények invertálhatók és inverzei differenciálhatók! Számítsuk ki az $(f^{-1})'$ függvény értékét a megadott b pontban!

a) $f(x) := x^3 + x \ \ (x \in \mathbb{R}), \qquad b := -2,$

b) $f(x) := 2x + \ln(x^2+1) \ \ (x > 0), \qquad b := 2 + \ln 2.$

4. Feladat. Állapítsuk meg, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények a megadott a pontokban!

$$a)\quad f(x) := \begin{cases} x^2 + 1 & (x < 0) \\ \ln(x^2+1) & (x \geq 0), \end{cases} \qquad a = 0,$$

$$b)\quad f(x) := \begin{cases} 2^x & (x < 1) \\ 2 & (x = 1) \\ \sqrt{x^3+3} & (x > 1), \end{cases} \qquad a = 1,$$

$$c)\quad f(x) := \begin{cases} \cos^2 x & \left(x \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ (x - \frac{\pi}{2})^2 & \left(x > \frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \qquad a = \frac{\pi}{2}.$$

5. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+b & (x<1) \\ \dfrac{a}{x} & (x\geq 1). \end{cases} \qquad b)\quad f(x)=\begin{cases} \sin ax+b & (x\leq 0) \\ e^{x^2}+x & (x>0). \end{cases}$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Írja fel az

$$f(x):=\cos\frac{x-1}{x^2+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény grafikonjának az $a=\frac{1}{2}$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

2. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$a)\quad f(x):=x^x \quad (x>0), \qquad b)\quad f(x):=(x^3+x)^{\ln x} \quad (x>1).$$

3. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi függvény invertálható és inverze differenciálható a $(-\pi,\pi)$ intervallumon! Számítsa ki a függvény inverzének deriváltja a $b=1+\frac{\pi}{2}$ pontban!

$$f(x):=x+\sin x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

4. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvény?

$$f(x):=\begin{cases} ax^2-ax+b\cos(x+1), & \text{ha } x<-1, \\ \dfrac{2a}{x^2+1}+e^{bx+b}, & \text{ha } x\geq -1. \end{cases}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$a)\quad f(x):=\left(1+e^{3x+1}\right)^{x^2+1} \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad b)\quad f(x):=(2+\sin x)^{\cos x} \quad (x\in\mathbb{R}),$$

$$c)\quad f(x):=x^{\sqrt{x}} \quad (x>0), \qquad d)\quad f(x):=\sin\left(x^{\cos x}\right) \quad (x>0).$$

2. Feladat. Számítsa ki a következő függvény deriváltját, és írja fel a függvény grafikonjának az $a=2$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

$$f(x):=\frac{1}{\ln^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} \qquad (x>1)$$

3. Feladat. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét!

a) $f(x):=\sqrt{1+x^2} \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad a=1/2,$

b) $f(x):=\dfrac{\sin\sqrt{1+x^2}}{x+3} \quad \big(x\in(-3,+\infty)\big), \qquad a=0,$

c) $f(x) := (x+2)^{x^2+1} \quad (x > -2), \qquad a = -1,$

d) $f(x) := x^{\ln x} \quad (x > 0), \qquad a = e^2.$

4. Feladat. A logaritmikus deriválás segítségével számítsa ki a következő függvények deriváltját!

$$a) \quad f(x) := \frac{x^4\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}} \quad (x \neq 0), \qquad b) \quad f(x) := \frac{(2x+3)^8(x+4)^5}{x^x(3x+1)^3} \quad (x > 0).$$

5. Feladat. Igazolja, hogy az alábbi függvény invertálható és inverze differenciálható! Számítsa ki a függvény inverzének deriváltja a $b = 2$ pontban!

$$f(x) := x^5 + x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

6. Feladat. Igazolja az inverz kapcsolat segítségével, hogy az alábbi függvények invertálhatók, inverzük differenciálható és határozza meg az inverz függvényük deriváltját!

$$a) \quad f(x) := 3\,e^{\sqrt[3]{x}} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad b) \quad f(x) := e^{e^x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. Feladat. Állapítsa meg, hogy differenciálhatóak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

$$a) \quad f(x) := \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & \text{ha } x \leq 1, \\ e^{1-x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} \qquad a = 1,$$

$$b) \quad f(x) := \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x^2 - \pi x, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad a = \frac{\pi}{2},$$

$$c) \quad f(x) := \begin{cases} e^x, & \text{ha } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 3 - \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x > 1, \end{cases} \qquad a_1 = 0,\ a_2 = 1,$$

$$d) \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{4x+5}{x+1}, & \text{ha } x < -2, \\ 1 - x, & \text{ha } -2 \leq x \leq 2, \\ \cos\big(\pi(x-1)\big), & \text{ha } x > 2, \end{cases} \qquad a_1 = -2,\ a_2 = 2,$$

$$e) \quad f(x) := \begin{cases} \sin(x^2 + \pi), & \text{ha } x \leq 0, \\ x\ln(x+1), & \text{ha } x > 0, \end{cases} \qquad a = 0.$$

8. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

a) $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + a, & \text{ha } x < 0, \\ bx^3 + ax^2 + bx, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} a + x - x^2, & \text{ha } x < 0, \\ e^{bx} - a, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} + a, & \text{ha } x < 0, \\ \ln(\sin x + b), & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{ha } x < 1, \\ \cos\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$

9. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatók legyen a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} a - \dfrac{bx}{x^2+1}, & \text{ha } x < 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{ax} + bx, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

10. Feladat. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -16 \leq x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 6, & \text{ha } 2 < x \leq 8. \end{cases}$$

a) Teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei a $[-6, 6]$ intervallumon?

b) Van-e zérushelye f'-nek a $(-6, 6)$ intervallumon?

11. Feladat. Legyen

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Igazolható, hogy $f(-1) = f(1)$, de nincs olyan pont -1 és 1 között, ahol a függvény deriváltja nulla. Ez pedig a Rolle-féle középértéktételnek ellenmond. Hol hibádzik az előző okfejtés?

12. Feladat. Legyen

$$f(x) := x(x+1)(x+2)(x+3) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Igazoljuk, hogy az f' függvénynek pontosan három zérushelye van!

13. Feladat. Igazolja, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

14. Feladat. Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$\sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n} \qquad (x \geq -1).$$

15. Feladat. Igazolja, hogy az $f(x) := x^7 + 14x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvénynek pontosan egy zérushelye van!

■ További feladatok

1. Feladat. Adja meg olyan p és q értékeket, hogy az x tengely érintse az

$$f(x) := x^3 + px + q \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

2. Feladat. Igazolja, hogy az

$$f(x) := e^x + x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2(\mathbb{R})$, majd számítsa ki az $\left(f^{-1}\right)''(1)$ értékét!

3. Feladat. Igazolja, hogy van olyan deriválható $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$h(x^3 + 3x + 1) = x^3 - 2x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül, majd számítsa ki a $h'(-3)$ értéket!

4. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := \sqrt{e^{2x-1} + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvények invertálható, inverze differenciálható, és határozzuk meg az inverz függvényének deriváltját!

Megoldás. A feladat megoldható az inverz függvény közvetlen kiszámításával. Ehelyett az inverz függvényre vonatkozó szabályt fogjuk alkalmazni.

A deriválási szabályok szerint $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x-1}+1}} \cdot \left(e^{2x-1}+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x-1}+1}} \cdot 2\,e^{2x-1} = \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x-1}+1}} > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért f szigorúan monoton növekvő függvény $\mathbb{R}$-en, és így invertálható. Mivel $e^{2x-1} > 0$ és felvesz minden pozitív értéket, így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = (1, +\infty)$. f folytonos $\mathbb{R}$-en, mert differenciálható minden $x \in \mathbb{R}$ pontban.

Legyen $y > 1$ valós szám, és $x := f^{-1}(y)$, azaz $y = f(x) > 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$y = \sqrt{e^{2x-1}+1}, \quad e^{2x-1} = y^2 - 1 \qquad \text{és} \qquad f'(x) = \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x-1}+1}} = \frac{y^2-1}{y} \neq 0.$$

Ekkor az inverz függvényre vonatkozó szabály feltételei teljesülnek, és így $f^{-1} \in D(1, +\infty)$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{y}{y^2-1} \qquad (y > 1).$$

5. Feladat. Adott $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$, ill. az a pontban differenciálható $g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvény esetén mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{ha } x < a, \\ g(x), & \text{ha } x \geq a \end{cases}$$

függvény deriválható az a pontban?

6. Feladat. Állapítsuk meg, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvény a megadott a pontokban!

$$f(x) := \begin{cases} x^3 + 1 & (x \leq 0) \\ \dfrac{\sin x}{x} & (x > 0), \end{cases} \qquad a = 0.$$

Megoldás. $A := f(0) = 0^3 + 1 = 1$, illetve legyen

$$b(x) := x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

A deriválási szabályok alapján $b \in D(\mathbb{R})$ és $b'(x) = 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. A j függvény esetében igaz, hogy $j \in C\{0\}$, hiszen ismert a nevezetes határérték:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Másrészt $j \in D\{0\}$ és $j'(0) = 0$, hiszen a hatványsorok határértéke alapján

$$j'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \frac{x^5}{7!} + \cdots\right) = 0.$$

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{0\}$, $b(0) = j(0) = 1 = A$.
- II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{0\}$ és $b'(0) = 0 = j'(0)$.

Ezért $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = 0$.

7. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha n rendre páros, illetve páratlan, akkor a

$$p(x) := x^n + ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak legfeljebb kettő, illetve három gyöke van!

A differenciálszámítás középértéktételei

Emlékeztető. A Rolle-féle középértéktétel:

Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b), \\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon f'(\xi) = 0.$$

A Lagrange-féle középértéktétel:

Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

8. Feladat. Legyen $a, b \neq 1$ két pozitív szám. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := a^x + b^x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek legfeljebb két zérushelye lehet!

Megoldás. A Rolle-féle középértéktétel szerint, ha az $f \in D(a,b)$ függvénynek két különböző $x_1 < x_2$ zérushelye van az (a,b) intervallumon, akkor f'-nek van legalább olyan ξ zérushelye, amire $x_1 < \xi < x_2$ teljesül. Ha pedig három különböző $x_1 < x_2 < x_3$ zérushelye van az (a,b) intervallumon, akkor f'-nek van legalább két olyan ξ_1 és ξ_2 zérushelye, amire $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$ teljesül.

Világos, hogy $x = 0$ a feladatban szereplő f függvény egyik zérushelye. Legyen

$$g(x) := f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad g'(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy f-nek van legalább három zérushelye. Ekkor f'-nek, azaz g-nek lenne legalább két zérushelye, és így g'-nek lenne legalább egy zérushelye. Ez utóbbi nem lehetséges, mert $g' > 0$.

9. Feladat. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \qquad (x > 0).$$

Megoldás.

- $\boxed{\ln(x+1) < x \quad (x>0)}$

  Legyen $x > 0$ egy tetszőleges rögzített szám, $a := 1$ és $b := x + 1$. Ha $f := \ln$, akkor $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$, így a Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $1 = a < \xi < b = x + 1$, hogy

  $$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

  De $f'(\xi) = \dfrac{1}{\xi} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\ln(x+1)}{x} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln(x+1) < x.$

- $\boxed{x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x+1) \quad (x>0)}$

  Legyen $x > 0$, és alkalmazzuk az előző módszert az

  $$f(t) := \ln t + \frac{(t-1)^2}{2} \qquad (t > 0)$$

  függvénnyel. Ekkor van olyan $1 < \xi < x + 1$, hogy

  $$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(1)}{(x+1) - 1} = \frac{\ln(x+1) + \frac{x^2}{2}}{x}$$

  és

  $$f'(t) = \frac{1}{t} + t - 1 \quad (t > 0) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(\xi) = \underbrace{\frac{1}{\xi} + \xi}_{>2} - 1 > 1,$$

  amiből az igazolandó egyenlőtlenség következik.

10. Feladat. A Rolle-tétel felhasználásával igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$\sin x > \frac{2x}{\pi} \qquad \Big(0 < x < \frac{\pi}{2}\Big).$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) := \sin x - \frac{2x}{\pi} \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$$

Tudjuk, hogy $\sin(0) = 0$ és $\sin(\pi/2) = 1$. Ezért $f(0) = f(\pi/2) = 0$. Másrészt

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$$

Az Analízis I. kurzuson azt tanultunk, hogy a koszinusz függvény folytonos és szigorúan monoton csökkenő a $(0, 2)$ intervallumon. Mivel $\cos(0) = 1$ és $\cos(\pi/2) = 0$, így $f'(0) > 0$ és $f'(\pi/2) < 0$. Ezért a Bolzano-tétel szerint f-nek van zérushelye a $(0, \pi/2)$ intervallumon, de a szigorú monotonitás miatt pontosan egy van.

3. gyakorlat

Függvénytulajdonságok kapcsolata a deriválttal 1.

Szükséges ismeretek

- A monotonitás és a derivált kapcsolata.
- A lokális szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele.
- A lokális szélsőérték elsőrendű és másodrendű elégséges feltétele.
- A lokális és abszolút szélsőérték viszonya.
- A Weierstrass-tétel.

Feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az alábbi függvények monoton, és számítsa ki a függvények lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

a) $f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}\big)$.

2. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2+1} \qquad \Big(x \in \big[-\tfrac{1}{2}, 2\big]\Big)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit!

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő!

4. Feladat. Határozzuk meg egy R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű téglalap méreteit, ha a téglalap egyik oldala a félkör átmérőjén fekszik!

5. Feladat. Keresse meg a $P(1, 4)$ ponthoz legközelebbi pontot az $y^2 = 2x$ egyenletű parabolán!

Házi feladatok

1. Feladat. Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha

a) $f(x) := x - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

b) $f(x) := \dfrac{e^x}{x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$.

2. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek

a) a lokális szélsőértékeit,

b) az abszolút szélsőértékeit a $[-2, 0]$ halmazon!

3. Feladat. Keresse meg azt a maximális területű téglalapot az első síknegyedben, amelynek az egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló két oldala a koordinátatengelyekre illeszkedik, és az origóval szemközti csúcs az

$$f(x) := e^{-3x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

függvény grafikonján helyezkedik el!

4. Feladat. Hogyan kell megválasztani egy 1 liter térfogatú, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy a gyártási költsége minimális legyen?

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha

a) $f(x) := 1 - 4x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := x^2(x-3) \quad (x \in \mathbb{R})$,

c) $f(x) := x \ln x \quad (x > 0)$,

d) $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{1+x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\big)$,

e) $f(x) := 2e^{x^2-4x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

f) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

g) $f(x) := \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3} \quad (x > -1,\ x \neq 0)$,

h) $f(x) := (x-3)\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$.

2. Feladat. Határozza meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit, ha

a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := \dfrac{x^2}{x-3} \quad (x \neq 3)$,

c) $f(x) := x^2e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

d) $f(x) := x - \ln(1+x) \quad (x > -1)$.

3. Feladat. Számítsa ki az f függvény abszolút szélsőértékeit, ha

a) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (-3 \leq x \leq 3)$,

b) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (-1 \leq x \leq 4)$,

c) $f(x) := x^2e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

d) $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x} \quad (0 < x < +\infty)$.

4. Feladat. A $6x+y = 9$ egyenletű egyenesen keressük meg a $(-3, 1)$-hez legközelebbi pontot!

5. Feladat. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ ponthoz?

6. Feladat. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le!

7. Feladat. Mely pozitív szám esetén lesz a szám és reciprokának összege a lehető legkisebb?

8. Feladat. Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

9. Feladat. Határozzuk meg egy R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű trapéz méreteit, ha a trapéz egyik párhuzamos oldala a félkör átmérőjén fekszik!

10. Feladat. A Tisza partján egy 3200 m^2 területű, téglalap alakú telket kell bekeríteni. Mekkorára válaszuk a téglalap méreteit, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség? (A folyóparton nem állítunk kerítést.)

11. Feladat. Egy ablak alakja egy téglalap és egy fölé állított szabályos háromszögből áll. Kerülete 5 m. Milyennek válasszuk a méreteket, hogy az ablak a legtöbb fényt bocsássa át?

12. Feladat. Az R sugarú gömbbe írt kúpok közül keressük meg azt, amelyiknek a térfogata maximális!

13. Feladat. Határozzuk meg az 1 literes, felül nyitott legkisebb felszínű henger méreteit!

■ További feladatok

1. Feladat. Határozzuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény monoton, ha

$$f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás. Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = 12\,x^3 - 12\,x^2 - 24\,x = 12\,x\,(x^2 - x - 2) = 12\,x\,(x-2)\,(x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Alkalmazzuk a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó tételt, tehát $f'(x)$ előjelét kell meghatároznunk. Mivel f' folytonos $\mathbb{R}$-en, így f' csak a zérushelyein tud előjelet váltani. Világos, hogy

$$f'(x) = 12\,x\,(x-2)\,(x+1) = 0 \qquad \iff \qquad x = -1,\ x = 0 \text{ vagy } x = 2.$$

Ezzel négy részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2) \quad \text{és} \quad (2, +\infty).$$

Nem nehéz meghatározni f' előjeleit ezeken az intervallumokon, hiszen ehhez elegendő kiszámolni f' értékét az intervallumok egyik pontján. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f monotonitására vonatkozóan.

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

2. Feladat. Mutassa meg, hogy ha $f \in D(\mathbb{R})$ és f páros (páratlan), akkor f' páratlan (páros)!

3. Feladat. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

4. Feladat. Az $\ln' 1 = 1$ egyenlőség alapján bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

5. Feladat. Vizsgáljuk meg van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$$

függvénynek az $x = a$ pontban, ha a φ függvény folytonos az $x = a$ pontban, $\varphi(a) \neq 0$ és n egy pozitív egész szám!

6. Feladat. Két, egymást derékszögben metsző egyenes egy-egy pontja egyidejűleg kezd a csúcspont felé mozogni. Az egyik 100 m, a másik 60 m távolságban indul a csúcsponttól. Az első sebessége 4 m/s, a másiké 2 m/s. Mikor lesz a két pont egymáshoz legközelebb, és mekkora lesz ekkor egymástól a távolságuk?

7. Feladat. Egy 5 m széles csatornán szálfákat úsztatnak. A csatornából egy 2,5 m széles mellékág vezet le, amelynek az iránya az eredetivel derékszöget zár be. Legfeljebb hány méter hosszúságú szálfát tudunk a szóban forgó mellékágra terelni?

8. Feladat. Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

9. Feladat. Egy ellipszis két féltengelyének hossza a és b. Mekkorák az ellipszisbe írható legnagyobb területű téglalap méretei, ha feltételezzük, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak az ellipszis féltengelyeivel?

4. gyakorlat

Függvénytulajdonságok kapcsolata a deriválttal 2.

Szükséges ismeretek

- L'Hospital szabály.
- A konvexitás és a derivált kapcsolata.
- Az inflexiós pontok létezésének szükséges és elégséges feltétele.

Feladatok

1. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{5x^3-8x+3}{x^7+x-2}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3-8x+3}{x^7+x-2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^3-8}$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$.

2. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(xe^{1/x}-x\right)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \ln x\cdot \ln(1-x)$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

3. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

4. Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

a) $f(x) := 2x^3-21x^2+36x \quad (x\in\mathbb{R})$, *b)* $f(x) := \ln(x^2+2x+2) \quad (x\in\mathbb{R})$,

c) $\displaystyle f(x) := \frac{x^3}{4-x^2} \quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\big)$, *d)* $\displaystyle f(x) := \frac{e^x}{x+1} \quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\big)$.

Házi feladatok

1. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg} x}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(\operatorname{arc\,tg} x-\frac{\pi}{2}\right)$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\operatorname{sh} x}$.

2. Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$a)\quad f(x) := e^{2x} - (4x+1) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad b)\quad f(x) := \frac{4x}{x^2-1} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\big).$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$a)\quad \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}, \qquad b)\quad \lim_{x\to -2} \frac{2x^7+4x^6-x^2-x+2}{3x^4+7x^3-5x-2},$$

$$c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x^2+x+4}}{x}, \qquad d)\quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{8x^2+6x+20}-2x}{x^3+x-10},$$

$$e)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}, \qquad f)\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x+x}{x^3},$$

$$g)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}, \qquad h)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{x^2},$$

$$i)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}, \qquad j)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin x}{(1-\cos x)^2},$$

$$k)\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}, \qquad l)\quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3} \quad (a>0),$$

$$m)\quad \lim_{x\to 0+0} \frac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}, \qquad n)\quad \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg} x},$$

$$o)\quad \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}-\frac{1}{x}\right), \qquad p)\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right),$$

$$q)\quad \lim_{x\to \infty} (x-\sqrt{x^2+x}), \qquad r)\quad \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right),$$

$$s)\quad \lim_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{ctg} x, \qquad t)\quad \lim_{x\to +\infty} e^{x-x^2}\cdot \ln(x^2-x+1),$$

$$u)\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \qquad v)\quad \lim_{x\to 0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$w)\quad \lim_{x\to 0+0} (e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}, \qquad x)\quad \lim_{x\to \infty} (e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}},$$

$$y)\quad \lim_{x\to 0+0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}, \qquad z)\quad \lim_{x\to 0+0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}.$$

2. Feladat. Határozza meg a következő határértékeket!

$$a)\quad \lim_{n\to +\infty} n(\sqrt[n]{\alpha}-1) \quad (\alpha>0), \qquad b)\quad \lim_{n\to +\infty} \Big(1+\sin(\tfrac{1}{n})\Big)^n.$$

3. Feladat. Határozzuk meg a

$$\frac{\sin 4x \sin 3x}{x\sin 2x}$$

hányados határértékét ha $x \to 0$ és ha $x \to \frac{\pi}{2}$.

4. Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

a) $f(x) := 1 - (x+1)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := x^5 - 5x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$,

c) $f(x) := \dfrac{x^3}{3x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

d) $f(x) := \dfrac{4x}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

e) $f(x) := x\sqrt{8-x^2} \quad (|x| \le 2\sqrt{2})$,

f) $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} \quad (x \neq -1)$,

g) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

h) $f(x) := \dfrac{x}{e^x(x-1)} \quad (x \neq 1)$,

i) $f(x) := \ln(x^2+1) \quad (x \in \mathbb{R})$,

j) $f(x) := x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$.

5. Feladat. Írjuk fel az

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

függvény grafikonjához húzott érintők egyenletét a függvény inflexiós pontjaiban!

■ További feladatok

1. Feladat. Igazoljuk, hogy az

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$,

határértékek L'Hospital-szabállyal nem határozhatók meg és keressük meg más úton az értéküket!

2. Feladat. Határozzuk meg az a és b értékeket úgy, hogy

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0.$$

3. Feladat. Határozzuk meg a c értéket úgy, hogy

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4.$$

4. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to +\infty} x^n \sin\frac{a}{x}$$

határértéket, ahol $a \neq 0$ valós szám és n egy pozitív egész szám!

5. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

függvénynek három inflexiós pontja van, melyek egy egyenesre illeszkednek!

6. Feladat. Keressük olyan a értékeket, hogy az $f(x) = e^x + ax^3$ függvénynek legyen inflexiós pontja!

5. gyakorlat

Elemi függvények és teljes függvényvizsgálat

Szükséges ismeretek

- A trigonometrikus függvények inverzeinek fogalma és legfontosabb összefüggések.
- Az aszimptota fogalma és meghatározásának módja.
- A teljes függvényvizsgálat menete, és az egyes szempontok vizsgálatának módja.

Feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!

$$\arcsin \tfrac{1}{2}, \quad \arcsin(\sin 10), \quad \arccos\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,tg} 1.$$

2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

3. Feladat. Van-e az alábbi függvényeknek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.

a) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$,

c) $f(x) := x - 2 \operatorname{arc\,tg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

4. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

5. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk a következő függvény grafikonját!

$$f(x) := \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\big)$$

6. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az

$$f(x) := \frac{e^x}{x+1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$$

függvény grafikonját!

Házi feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket!

$$\arcsin\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}, \quad \operatorname{ar\,sh}\left(\tfrac{3}{4}\right), \quad e^{-2\ln 3}, \quad \log_{1/4} \tfrac{1}{1024}.$$

2. Feladat. Van-e az f függvényeknek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.

$$f(x) := \frac{x^2+4}{x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

3. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvények grafikonját!

$$a)\quad f(x) := \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2 \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\big), \qquad b)\quad f(x) := x^2 e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket!

$$\operatorname{arc\,cos}\left(-\tfrac{1}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,sin}(\cos 10), \quad \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}), \quad \operatorname{ar\,ch}\left(\tfrac{5}{4}\right), \quad \log_9 \tfrac{3}{27^3}, \quad 8^{\log_4 9}.$$

2. Feladat. Differenciálszámítással igazolja, hogy

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Milyen kapcsolat van az arc tg és az arc ctg függvények grafikonjai között?

3. Feladat. Van-e az alábbi függvényeknek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg az aszimptotákat.

$$a)\quad f(x) := \frac{1-x^3}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big), \qquad b)\quad f(x) := \frac{\ln x}{x} \quad (x > 0),$$

$$c)\quad f(x) := x \ln|x| \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big), \qquad d)\quad f(x) := \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

4. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvények grafikonját!

$a)$ $f(x) := 3x - x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

$b)$ $f(x) := x^4 + 8x^2 - 9 \quad (x \in \mathbb{R})$,

$c)$ $f(x) := (x-1)^2(x+2)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

$d)$ $f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$,

$e)$ $f(x) := x + \sqrt{1-x} \quad (x \leq 1)$,

$f)$ $f(x) := \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

$g)$ $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

$h)$ $f(x) := \dfrac{x^2+9}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

$i)$ $f(x) := \dfrac{x+1}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

$j)$ $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}\big)$,

$k)$ $f(x) := \dfrac{x^2}{x^3-x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}\big)$,

$l)$ $f(x) := \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$,

$m)$ $f(x) := \left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^2 \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$,

$n)$ $f(x) := \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}\big)$,

$o)$ $f(x) := x + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

$p)$ $f(x) := 3x + \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x^3} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

$q)$ $f(x) := xe^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

$r)$ $f(x) := e^x - x \quad (x \in \mathbb{R})$,

$s)$ $f(x) := \dfrac{e^x}{x+1} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$,

$t)$ $f(x) := \dfrac{e^x}{1+e^x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

$u)$ $f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

$v)$ $f(x) := e^{2x-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

$w)$ $f(x) := \ln(x^2 + x + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$, $\qquad$ $x)$ $f(x) := x \ln^2 x$ $(x > 0)$,

$y)$ $f(x) := \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$, $\qquad$ $z)$ $f(x) := x - \operatorname{arc\,tg} 2x$ $(x \in \mathbb{R})$.

■ További feladatok

1. Feladat. Differenciálszámítással igazoljuk, hogy

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\arcsin$ és az $\arccos$ függvények grafikonjai között?

Megoldás. Az sin függvény folytonos és szigorúan monoton növekvő $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-n. Legyen $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ és $\sin y = x \in [-1, 1]$, azaz $y = \arcsin x$. Mivel $\sin' y = \cos y \neq 0$, ha $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, így az inverz függvény deriválási szabályából:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = (\cos y > 0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1, 1)).$$

Az cos függvény folytonos és szigorúan monoton csökkenő $[0, \pi]$-n. Legyen $y \in [0, \pi]$ és $\cos y = x \in [-1, 1]$, azaz $y = \arccos x$. Mivel $\cos' y = -\sin y \neq 0$, ha $y \in (0, \pi)$, így az inverz függvény deriválási szabályából:

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos' y} = \frac{1}{-\sin y} = (\sin y > 0) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1, 1)).$$

Legyen

$$f(x) := \arcsin x + \arccos x \qquad (x \in [-1, 1]).$$

Ekkor $f \in D(-1, 1)$. Ha $x \in (-1, 1)$, akkor

$$f'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = 0.$$

Így $\forall x \in (-1, 1)$: $f'(x) = 0$. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = c$ $(x \in (-1, 1))$. Mivel $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, ezért $f(x) = \frac{\pi}{2}$, ha $x \in (-1, 1)$. Ez az egyenlőség a ± 1 pontokban is igaz, mert

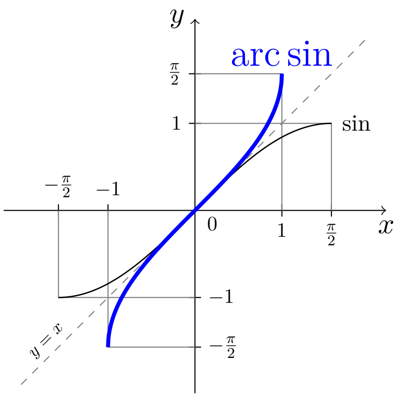
$$f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

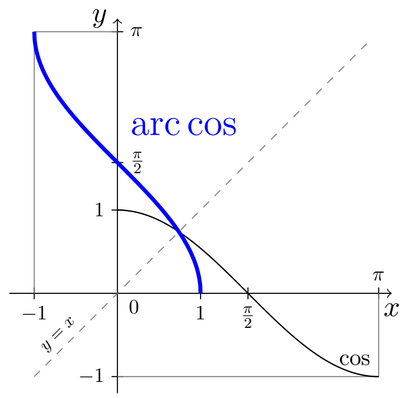
$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

A feladat állítását tehát bebizonyítottuk. A bebizonyított egyenlőségből következik, hogy az $\arcsin$ és az $\arccos$ függvények grafikonjai egymásból elemi függvénytranszformációkkal származtathatók. Mivel

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad (x \in [-1, 1]),$$

ezért az $\arccos$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az $\arcsin$ függvény grafikonját először tükrözzük az x tengelyre, majd a y tengely irányában „felfele” toljuk $\frac{\pi}{2}$-vel. Az $\arcsin$ függvény képe az $\arccos$ függvény képéből hasonló módon adódik.





2. Feladat. Szemléltessük az

$$f(x) := \arcsin(\sin x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás. A sin függvény, következésképpen az f is 2π szerint periodikus. Így f-et elég megvizsgálni egy 2π hosszúságú intervallumon, például $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$-n.

Az arc sin függvény definíciójából következik, hogy

$$\arcsin(\sin x) = y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = \sin y \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Legyen $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. A $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ függvény $\uparrow$, ezért a $\sin x = \sin y$ egyenlőség csak $x = y$ esetén teljesül. Így

$$\underline{\underline{f(x) = x, \quad \text{ha } \ x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].}}$$

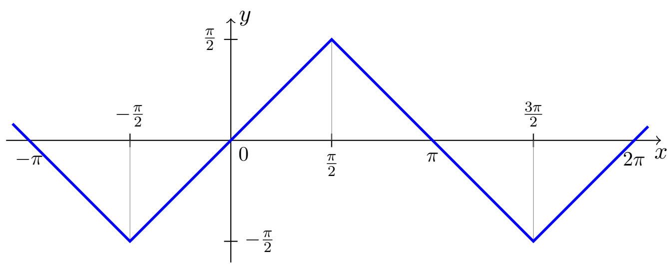
Tegyük fel, hogy $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Ekkor

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \quad \text{azaz} \quad -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}.$$

A $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin y$ egyenlőség csak akkor igaz, ha $\pi - x = y$. Így

$$\underline{\underline{f(x) = \pi - x, \quad \text{ha } \ x \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right].}}$$

A fentiek alapján az f függvény grafikonját az alábbi ábrán szemléltetjük:



3. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) := \ln(x^2 - 1) \quad (|x| > 1)$,

b) $f(x) := x + \ln(x^2 - 4x) \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus [0, 4]\big)$,

c) $f(x) := x \ln |x| \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

d) $f(x) := \dfrac{x^4}{|x| \cdot (x^2 - 1)} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}\big)$,

e) $f(x) := 2^{-x} \sin \pi x \quad (x \in \mathbb{R})$,

f) $f(x) := e^{\sin \pi x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

g) $f(x) := \sin^2 x - 2 \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$,

h) $f(x) := x \operatorname{arc\,tg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

4. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja a következő függvény grafikonját!

$$f(x) := \begin{cases} x^4\Big(2 + \sin \frac{1}{x}\Big), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

5. Feladat. Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. ***Gauss-görbét***)!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. $f \in D^{\infty}(\mathbb{R})$, páros függvény és mindenütt pozitív.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás, lok. szélsőértékek***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0.$$

	$x < 0$	0	$x > 0$
f'	$+$	0	$-$
f	$\uparrow$	1	$\downarrow$
lok.		max	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

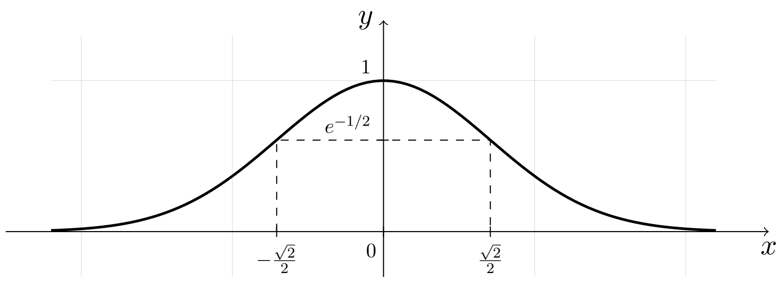
	$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$e^{-1/2}$	$\frown$	$e^{-1/2}$	$\smile$
		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. A határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben kell megvizsgálni.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0,$$

azaz létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben, és mindkettő a $B = 0$ számmal egyenlő. Tehát f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y = 0$ egyenletű egyenes.

$\boxed{5.}$ ***A függvény grafikonja***.



6. Feladat. Legyen $g(x) := e^{-x^2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ a Gauss-görbe. Teljes függvényvizsgálat végzése után ábrázoljuk az

$$f(x) := -g''(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. ***Sombrero-függvényt***)!

6. gyakorlat

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

Szükséges ismeretek

- A lineáris közelítés.
- A Taylor-polinom fogalma.
- A Taylor-formula.
- A Taylor-sor fogalma.
- A hatványsor összegfüggvénye és Taylor-sora közötti kapcsolat.
- Egy függvény Taylor-sorának a felírásához létező módszerek.

Feladatok

1. Feladat. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad (x > -1) \qquad \text{és} \qquad A := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}}.$$

a) Milyen lineáris becslést tudunk adni az f függvényre az $a = 0$ pont környezetében? Becsüljük vele a A értéket, és adjunk hibabecslést!

b) Írjuk fel az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon legfeljebb mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!

c) A b) pontban kapott becslés felhasználásával adjunk újabb becslést az A számra, és becsüljük meg a közelítés hibáját!

2. Feladat. Legyen $f(x) := \ln(1+x)$ $(x > -1)$.

a) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény második $T_{2,0}f$ Taylor-polinomját a 0 pontban!

b) Közelítsük meg az $\ln 2$ értékét a $T_{2,0}f(1)$ segítségével, és becsüljük meg a hibát!

c) Becsüljük meg a közelítés hibáját $f(x) \approx T_{2,0}f(x)$ esetén, ha $x \in [-1/2, 0]$ és $x \in [0, 2]$.

3. Feladat. Az $f(x) = e^x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó negyedfokú Taylor polinomja segítségével adjunk becslést a $\sqrt{e}$ értékére és adjunk hibakorlátot! A becslések kiszámításakor kizárólag a négy alapműveletet szabad használni.

4. Feladat. Milyen $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens az

$$\sum_{n=0} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

hatványsor, és mi az összegfüggvénye?

5. Feladat. Adjuk meg az k a

$$f(x) := \sin^2 x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény 0 pont körüli Taylor-sorát! Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

■ Házi feladatok

1. Feladat. Írja fel az

$$f(x) := \sqrt{1+2x} \qquad \left(x \in (-\tfrac{1}{2}, +\infty)\right)$$

függvény 0 pont körüli második Taylor-polinomját, $T_{2,0}f(x)$-et! Adjon becslést az

$$\left|f(x) - T_{2,0}f(x)\right|$$

hibára a $\left[-\frac{5}{18}, \frac{1}{4}\right]$ intervallumon.

2. Feladat. Adja meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát!

$$a)\quad f(x) := 2^x \;\; (x \in \mathbb{R}), \quad a = 1, \qquad b)\quad f(x) := \ln(x^2+1) \;\; (x \in \mathbb{R}), \quad a = 0.$$

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Határozza meg a következő függvények a ponthoz tartozó n-edfokú Taylor-polinomját!

$a)$ $f(x) = x^5,\ a = 1,\ n = 3,$

$b)$ $f(x) = e^{-x},\ a = 0,\ n = 5,$

$c)$ $f(x) = \cos x,\ a = 0,\ n = 5,$

$d)$ $f(x) = \operatorname{sh} x,\ a = 0,\ n = 5,$

$e)$ $f(x) = \ln(1-x)^3,\ a = 0,\ n = 4,$

$f)$ $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4,\ n = 4,$

$g)$ $f(x) = \operatorname{tg} x,\ a = \dfrac{\pi}{4},\ n = 3,$

$h)$ $f(x) = \sin^2 x,\ a = \pi,\ n = 3,$

$i)$ $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x,\ a = 0,\ n = 4,$

$j)$ $f(x) = \operatorname{ar\,th} x,\ a = 0,\ n = 4,$

$k)$ $f(x) = \sqrt[3]{8-x},\ a = 0,\ n = 3,$

$l)$ $f(x) = \dfrac{1}{2+x},\ a = -1,\ n = 3.$

2. Feladat. A megadott f függvények adott a pontban húzott érintőegyenes egyenletével becsülje meg a következő értékeket, és az értékbecslések hibáit!

$a)$ $f(x) = \sqrt{x+1},\quad a = 8,\quad \sqrt{9,1} \approx ?,$

$b)$ $f(x) = \sqrt[3]{x},\quad a = 8,\quad \sqrt[3]{8,4} \approx ?,$

$c)$ $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\quad a = 1,\quad \dfrac{13}{23} \approx ?,$

$d)$ $f(x) = e^x,\quad a = 0,\quad \dfrac{1}{e^{0,01}} \approx ?,$

$e)$ $f(x) = \sin x,\quad a = 0,\quad \sin\dfrac{\pi}{16} \approx ?,$

$f)$ $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x,\quad a = 1,\quad \operatorname{arc\,tg} 1,01 \approx ?.$

Határozzuk meg az előző értékbecsléseket másod- és harmadfokú közelítéssel és becsüljük meg a kapott becslések hibáját!

3. Feladat. A megadott f függvények esetén adjon becslést az a ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinommal történő közelítés hibájára az adott I intervallumon!

$a)$ $f(x) = x^5, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad I = [0, 1],$

$b)$ $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad a = 2, \quad n = 2, \quad I = \left[\frac{7}{4}, 3\right],$

$c)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad I = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right],$

$d)$ $f(x) = xe^x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$

$e)$ $f(x) = \ln(x+1), \quad a = 0, \quad n = 2, \quad I = \left[-\frac{7}{8}, 1\right],$

$f)$ $f(x) = \cos x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad I = \left[0, \frac{\pi}{6}\right].$

4. Feladat. Becsülje meg a következő értékeket 5 tizedesjegy pontossággal! Végezze el a közelítést a megadott függvény adott a ponthoz tartozó Taylor-polinomjával .

$a)$ $(0,2)^{12}, \quad f(x) = x^{12}, \quad a = 0,$

$b)$ $(2,1)^{10}, \quad f(x) = x^{10}, \quad a = 2,$

$c)$ $\sqrt{5}, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4,$

$d)$ $\sqrt[5]{2}, \quad f(x) = \sqrt[5]{x}, \quad a = 1,$

$e)$ $\dfrac{1}{0,99}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1,$

$f)$ $\sin\dfrac{\pi}{12}, \quad f(x) = \sin x, \quad a = 0,$

$g)$ $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = 0,$

$h)$ $e^{-1}, \quad f(x) = e^{-x}, \quad a = 0,$

$i)$ $e^{0,1}, \quad f(x) = e^x, \quad a = 0,$

$j)$ $\ln 0,8, \ f(x) = \ln(1+x), \ a = 0,$

$k)$ $\ln 2, \quad f(x) = \ln x, \quad a = 1,$

$l)$ $\operatorname{arc\,tg} 2, \ f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \ a = 1.$

5. Feladat. Írja fel a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot $(x+1)$ hatványai szerint!

6. Feladat. Adja meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát! Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

$a)$ $f(x) := \dfrac{1}{x+2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\big), \qquad a = 0,$

$b)$ $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad a = 3,$

$c)$ $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}\big), \qquad a = 0,$

$d)$ $f(x) := \dfrac{1}{x^3} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad a = 2,$

$e)$ $f(x) := 3^x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a = -1,$

$f)$ $f(x) := x^2 e^{x^3} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a = 0,$

$g)$ $f(x) := \ln x \quad (x > 0), \qquad a = 2,$

$h)$ $f(x) := \ln\dfrac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1), \qquad a = 0,$

$i)$ $f(x) := \cos x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad a = \pi.$

■ További feladatok

1. Feladat. Adja meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát! Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

$$\begin{aligned}
&a)\quad f(x) := \sqrt{1+x} \quad (x > -1), \qquad a = 0,\\
&b)\quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (x > -1), \qquad a = 0,\\
&c)\quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1), \qquad a = 0,\\
&d)\quad f(x) := \arcsin x \quad (-1 < x < 1), \qquad a = 0.
\end{aligned}$$

2. Feladat. Számítsuk ki $\sin 1$ értékét 5 tizedesjegy pontossággal!

Megoldás. Az, hogy egy számot 5 tizedesjegyre pontosan adunk meg, azt jelenti, hogy a közelítő érték és a valódi érték eltérése nem nagyobb, mint $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

A sin függvényt egy 0 középpontú hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük, ezért ennek részletösszegei a sin függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-polinomjai. Így az $f(x) = \sin x$ függvény $a = 0$ ponthoz tartozó $2n + 1$-edik Taylor polinomja

$$T_{2n+1,0}f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A Taylor-formula szerint, ha $x = 1$, akkor $\exists \xi \in (0, x)$, hogy

$$(*) \qquad \left|\sin x - T_{2n+1,0}f(x)\right| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2}\right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)!},$$

hiszen a sin függvény deriváltjai egynél kisebb abszolút értékű függvények.

Most azt a legkisebb $n \in \mathbb{N}$ számot kell megválasztanunk, amelyre fennáll az

$$\frac{1}{(2n+2)!} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 200\,000 \le (2n+2)!$$

egyenlőtlenség. Mivel $8! = 40\,320$ és $10! = 3\,628\,800$, ezért $n = 4$. Így $(*)$-ból az adódik, hogy

$$\left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}\right)\right| \le \frac{1}{10!} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} = 0{,}000005.$$

Tehát $\sin 1$ közelítő értéke 5 tizedesjegy pontossággal

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 0{,}841471.$$

3. Feladat.

a) Mutassuk meg, hogy bármely P polinomot bármely $a \in \mathbb{R}$ ponthoz tartozó Taylor-sora mindenütt előállítja, azaz ha P tetszőleges legfeljebb n-edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$ egy tetszőlegesen megadott középpont, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

b) Írjuk fel az x^5 polinomot $(x-1)$ hatványai szerint, és számítsuk ki vele $1{,}1^5$ pontos értékét!

Megoldás.

a) Tekintsünk egy tetszőleges, legfeljebb n-edfokú P polinomot, és egy adott $a \in \mathbb{R}$ számot. A Taylor-formula szerint $\forall x \in \mathbb{R}$-hez $\exists \xi$ szám a és x között, hogy

$$P(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{P^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0,$$

hiszen $P^{(n+1)}(\xi) = 0$, mert $P^{(m)} \equiv 0$ minden $m > n$ esetén. Így igaz az állítás.

b) Legyen $f(x) := x^5$ $(x \in \mathbb{R})$. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 20x^3, \quad f'''(x) = 60x^2, \quad f^{(4)}(x) = 120x, \quad f^{(5)}(x) = 120.$$

Mivel $f(1) = 1$, $f'(1) = 5$, $f''(1) = 20$, $f'''(1) = 60$, $f^{(4)}(1) = 120$, $f^{(5)}(1) = 120$, így a függvény $a = 1$ ponthoz tartozó ötödfokú Taylor polinomja:

$$T_{5,1}f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 +$$

$$+ \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5.$$

Az előző pont állítása szerint f és $T_{5,1}f$ minden pontban megegyeznek, így

$$x^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $x = 1,1$, akkor könnyen megkapjuk a keresett szám pontos értékét:

$$\begin{aligned} 1,1^5 = 1 & \\ +0,5 & \\ +0,1 & \\ +0,01 & \\ +0,0005 & \\ +0,00001 & \\ \hline = 1,61051 & \end{aligned}$$

4. Feladat. Számítsuk ki az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény deriváltjait a 0 pontban!

Megoldás. Az első két derivált

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{arc\,tg}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért $\operatorname{arc\,tg}'(0) = 1$ és $\operatorname{arc\,tg}''(0) = 0$. A további deriváltak meghatározása így hosszadalmas számolást igényel.

Az előadáson azonban láttuk, hogy az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt a 0 pont körüli Taylor-sora előállítja $[-1,1]$-en:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (x \in [-1,1]).$$

Így minden $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén $\operatorname{arc\,tg}^{(2k)}(0) = 0$ és

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{arc\,tg}^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!.$$

5. Feladat. Egy alkalmas függvény sorfejtése segítségével határozza meg a következő sorok összegét!

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \qquad b)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}, \qquad c)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}, \qquad d)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!},$$

6. Feladat. Adjuk meg a következő függvények a pont körüli Taylor-sorát!

$$a)\quad f(x) := \sin^3 x \ (x \in \mathbb{R}), \quad a = 0, \qquad b)\quad f(x) := \frac{1}{x^3} \ (x \in \mathbb{R}), \quad a = 1.$$

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

Megoldás.

a) Először a tanult trigonometrikus azonosságokkal fogjuk a $\sin^3 x$ függvényt „linearizálni”. Ha egymásból kivonjuk a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \text{és} \qquad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

azonosságokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Ekkor

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x.$$

Tudjuk, hogy két szinusz, illetve koszinusz összege és különbsége szorzattá alakítható, vagy éppen fordítva, ha ezt a másik irányból nézzük. Az erre vonatkozó négy összefüggésből tekintsük a

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

azonosságot. Ha $y = 3x$, akkor

$$\sin x - \sin 3x = 2\sin(-x)\cos(2x) = -2\sin x \cos 2x.$$

Ezért

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}(\sin x - \sin 3x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Tudjuk, hogy a sin függvényt a 0 pont körüli Taylor-sora előállítja:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így azonnal felírhatjuk a $g(x) := \sin 3x \ (x \in \mathbb{R})$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorát. Ez a sor is az egész $\mathbb{R}$-en állítja elő g-t, ezért

$$\sin 3x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A fentiek alapján *egyszerűen* megkapjuk a kérdezett Taylor-sort. Elegendő megszorozni a $\sin x$ sor tagjait 3/4-gyel, a $\sin 3x$ sor tagjait $-1/4$-gyel, és az így kapott két sort tagonként összeadni:

$$\sin^3 x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - 9^n) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Már igazoltuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

Ha x helyett $1-x$-et írünk, akkor

$$\frac{1}{x^2} = \underline{\frac{1}{(1-(1-x))^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(1-x)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n \quad (\underbrace{-1 < 1-x < 1}_{0<x<2}).$$

A hatványsorok deriváltjáról szóló tétel alapján, ha $0 < x < 2$, akkor

$$\frac{-2}{x^3} = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n(n+1)(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)(x-1)^n.$$

Így

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{n+2}{2}(x-1)^n \qquad (0 < x < 2).$$

A sor divergens az $x=0$ és $x=2$ pontokban, mert ekkor a kapott sorok általános tagja nem tart nullához.

7. gyakorlat

Integrálszámítás 1.

Szükséges ismeretek

- A határozatlan integrál fogalma.
- Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása.
- Az első helyettesítési szabály.
- A parciális integrálás szabálya.

Feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

c) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$

d) $\displaystyle\int \frac{3\cos^2 x + 2}{\cos 2x - 1}\,dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big).$

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big)\Big),$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot \ln x}\,dx \quad \big(x \in (1,+\infty)\big),$

d) $\displaystyle\int \cos(5x-3)\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

f) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\,dx \quad \Big(x \in \big(0,\tfrac{\pi}{2}\big)\Big),$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int x\cdot \sin x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $\displaystyle\int (x^2+3x)\cdot e^{2x}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \ln x\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$

b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} 3x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int e^{2x}\cdot \cos x\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

■ Házi feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0),$ *b)* $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx \quad \big(x\in(0,2\pi)\big),$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *d)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *f)* $\displaystyle\int x^2\cdot\sqrt[3]{6x^3+4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

g) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{2x-3}\,dx \quad \left(x>\tfrac{3}{2}\right),$ *h)* $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

i) $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx \quad (x>0),$ *j)* $\displaystyle\int e^x\sin(3x+1)\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\,dx \quad (x>0),$ *b)* $\displaystyle\int \frac{2x^2-2}{x}+3(1-x^2)^{-1/2}\,dx \quad (0<x<1),$

c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx \quad \left(x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\right),$ *d)* $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x-5}{1+\cos 2x}\,dx \quad ,\left(x\in\left(-\tfrac{\pi}{2}\tfrac{\pi}{2}\right)\right),$

e) $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2\,dx \quad \left(x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)\right),$ *f)* $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

g) $\displaystyle\int \sin 3x\cdot\sin 9x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *h)* $\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *j)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad (-2<x<2),$

k) $\displaystyle\int 4^{2x-3}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *l)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0),$

m) $\displaystyle\int \frac{(e^{2x}-1)^2}{e^{3x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *n)* $\displaystyle\int e^x(1-e^x)^2\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

o) $\displaystyle\int x^2\,(4-2x^3)^{2021}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *p)* $\displaystyle\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

q) $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *r)* $\displaystyle\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

s) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{ar\,sh} x}{1+x^2}}\,dx \quad (x>0),$ *t)* $\displaystyle\int \frac{1}{(\cos^2 x)\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,dx \quad \left(x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\right),$

u) $\displaystyle\int \frac{x\cdot\sqrt[3]{\ln(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *v)* $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

w) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx \quad \left(x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)\right),$ *x)* $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx \quad (x>0),$

y) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \quad (-1<x<1),$ *z)* $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx \quad \left(x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$

2. Feladat. Parciális integrálással számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *b)* $\displaystyle\int x\cdot e^{3x+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

c) $\displaystyle\int (x^2+1)\sin 3x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *d)* $\displaystyle\int (2x+1)\cos(3x+\pi)\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int e^{3x}\sin 2x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *f)* $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

g) $\displaystyle\int \operatorname{ar\,sh} 2x\,dx \quad \left(-\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{1}{2}\right),$ *h)* $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{arc\,tg} x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

i) $\displaystyle\int x^2\cdot\ln x\,dx \quad (x>0),$ *j)* $\displaystyle\int \ln\sqrt{1+x^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

k) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx \quad (x>0),$ *l)* $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\,dx(x\in\mathbb{R}) \quad .$

■ További feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int x\sqrt{2-8x}\,dx \quad \left(x<\tfrac{1}{4}\right),$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x^5}{2x^2+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

c) $\displaystyle\int \frac{x^7}{\sqrt{1+x^4}}(x\in\mathbb{R})\,dx \quad ,$ *d)* $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{x}+1}{2x(\sqrt{x}+1)}\,dx \quad (x>0).$

2. Feladat. Van-e primitív függvénye az alábbi függvénynek? Ha igen adja meg az összeset!

$$f(x):=x\cdot|2x-1| \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

3. Feladat. Parciális integrálással számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big),$ *b)* $\displaystyle\int x^5\cdot e^{x^3}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$

Megoldás

a) Ha $x\in(-1,1)$, akkor

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx=\int (x)'\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx=x\sqrt{1-x^2}-\int x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\,dx=$$
$$=x\sqrt{1-x^2}-\int x\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$
$$=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}\,dx+\arcsin x.$$

Az előző egyenlet rendezése után ki tudjuk fejezni a keresett integrált.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}+c \qquad (x\in(-1,1)).$$

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az előadáson ezt a feladatot az $x=\sin t$ helyettesítéssel oldottuk meg.

b) Most az $f(x) = x^5$, $g'(x) = e^{x^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ választás *nem megfelelő*, mert az e^{x^3} $(x \in \mathbb{R})$ függvény g primitív függvényét nem ismerjük. Alkalmazzuk a következő *ötletet*: az integrandust írjuk fel az

$$x^5 \cdot e^{x^3} = x^3 \cdot \left(x^2 \cdot e^{x^3}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{alakban, és legyen}$$

$$f(x) := x^3 \quad \text{és} \quad g'(x) = x^2 \cdot e^{x^3} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Itt a g függvényt már meg tudjuk határozni, ti.

$$g(x) = \frac{e^{x^3}}{3} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A parciális integrálás szabályát ezzel a szereposztással alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int x^5 \cdot e^{x^3}\, dx = \int x^3 \cdot \left(x^2 \cdot e^{x^3}\right) dx = \int x^3 \cdot \left(\frac{e^{x^3}}{3}\right)' dx =$$

$$= x^3 \cdot \frac{e^{x^3}}{3} - \int (x^3)' \cdot \frac{e^{x^3}}{3}\, dx = \frac{x^3\, e^{x^3}}{3} - \int x^2 \cdot e^{x^3}\, dx =$$

$$= \frac{x^3\, e^{x^3}}{3} - \frac{e^{x^3}}{3} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Feladat. Igazolja a követező rekurziós formulákat!

1. $\displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$

2. $\displaystyle\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx,$

3. $\displaystyle\int \sin^n x\, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx,$

4. $\displaystyle\int x^\alpha \ln^n x\, dx = \frac{x^{\alpha+1} \ln^n x}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} \int x^\alpha \ln^{n-1} x\, dx \qquad (\alpha \neq -1),$

5. $\displaystyle\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx,$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

8. gyakorlat

Integrálszámítás 2.

Szükséges ismeretek

- Alapintegrálok, a határozatlan integrál linearitása.
- Az első helyettesítési szabály és speciális esetei.

Feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx \quad \big(x \in (2,4)\big),$

b) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx \quad \big(x \in (-1,+\infty)\big),$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big),$

d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$

Házi feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+x-2}\,dx \quad (x > 1),$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2(x+1)}\,dx \quad (0 < x < 1),$

c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+3x+4}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx \quad (x > 0).$

Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{3}{2x+1}\,dx \quad \big(x < -\tfrac{1}{2}\big),$

b) $\displaystyle\int \frac{5}{(2x-1)^3}\,dx \quad \big(x < \tfrac{1}{2}\big),$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx \quad (-2 < x < 2),$

d) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2+1)^4}, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+13}, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

f) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+13}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx \quad (x > 2),$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx \quad (1 < x < 2),$

i) $\displaystyle\int \frac{5x+9}{x^2+5x-6}\,dx \quad (x > 1),$

j) $\displaystyle\int \frac{2}{x(x+2)}\,dx \quad (x > 0).$

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2(x+2)}\,dx \quad (x<-2),$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x-1)(x+2)^2}\,dx \quad (x>1),$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)^3}\,dx \quad (x<1),$ *d)* $\displaystyle\int \frac{2x^3+13x^2+26x+16}{(x+3)^2}\,dx \quad (x>-3),$

e) $\displaystyle\int \frac{5x^4+2x-4}{x^3-5x^2-4}\,dx \quad (x<0),$ *f)* $\displaystyle\int \frac{x(x+7)}{(x-1)(x+1)^2}\,dx \quad (-1<x<1),$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-8}{x^3+8}\,dx \quad (x>-2),$ *h)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\,dx \quad (x>-2),$

i) $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{5x^3+x}\,dx \quad (x>0),$ *j)* $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-2x+4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *l)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

m) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4+x^2+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *n)* $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx \quad (x>1),$

o) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx \quad (x<-1),$ *p)* $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{(x^2+4x-5)^2}\,dx \quad (x>1),$

q) $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^2+4x+5}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *r)* $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^2+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

s) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^3(x^2+4)}\,dx \quad (x>0),$ *t)* $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx \quad (x>1).$

■ További feladatok

1. Feladat. Számítsa ki a következő integrált!

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Ötlet: Alkalmazza a

$$2\,\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}+\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'$$

átalakítást!

2. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $n=1,2,\ldots$ esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx=\frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *b)* $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx \quad (x>0),$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ *d)* $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2+x+1)^2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+9)}\,dx \quad (x>0),$ *f)* $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$

4. Feladat. Igazolja, hogy

$$\int |x|\,dx = \frac{x|x|}{2} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

9. gyakorlat

Integrálszámítás 3.

Szükséges ismeretek

- Racionális törtfüggvények integrálása.
- A második helyettesítési szabály.
- A Newton–Leibniz-formula.
- Síkidomok területének, síkbeli görbék ívhosszának, forgástest térfogatának kiszámítása.

Feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a)\quad \int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad\qquad b)\quad \int \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

2. Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\,dx$$

határozott integrált!

3. Feladat. Számoljuk ki az $y=x-1$ egyenletű egyenes és az $y^2=2x+6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét!

4. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x):=\frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \qquad (2\le x\le 5)$$

függvény grafikonjának a hosszát!

5. Feladat. Számítsuk ki az

$$f(x):=\sin x \qquad \big(x\in[0,\pi]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

Házi feladatok

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$a)\quad \int_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx, \qquad\qquad b)\quad \int \frac{\sqrt{3x-1}}{x}\,dx \quad \big(x>\tfrac{1}{3}\big).$$

2. Feladat. Számítsa ki az $y=x^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$ és az $y=2x$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

3. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x} \qquad \big(x \in [0,1]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

4. Feladat. Számítsa ki az

$$f(x) := x^{3/2} \qquad \big(0 \le x \le 4\big)$$

függvény grafikonjának a hosszát!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$a)\quad \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx \quad (x>0),$ $\qquad b)\quad \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx \quad (x>-1),$

$c)\quad \displaystyle\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx,$ $\qquad d)\quad \displaystyle\int_4^{12} \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,dx,$

$e)\quad \displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x+1}}\,dx \quad (x>0),$ $\qquad f)\quad \displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx \quad (x<0),$

$g)\quad \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x-1}+2x}\,dx \quad (x>\tfrac{1}{5}),$ $\qquad h)\quad \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx \quad (x>0),$

$i)\quad \displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ $\qquad j)\quad \displaystyle\int \frac{1}{2^x+3}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

$k)\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{3x}}\,dx,$ $\qquad l)\quad \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x+4}{e^x+2}\,dx,$

$m)\quad \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$ $\qquad n)\quad \displaystyle\int \frac{e^{4x}}{1+e^x}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$

2. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat!

$a)\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 3x\,dx,$ $\qquad b)\quad \displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx,$

$c)\quad \displaystyle\int_1^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,$ $\qquad d)\quad \displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx,$

$e)\quad \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx,$ $\qquad f)\quad \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx.$

3. Feladat. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \qquad (x\in\mathbb{R})$$

határozatlan integrált

a) az $x = \operatorname{sh} t \;\; (t\in\mathbb{R})$ helyettesítéssel,

b) parciális integrálással!

4. Feladat. A megadott helyettesítéssel számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a)\quad \int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx \quad (x>0), \qquad t=\ln x,$$

$$b)\quad \int \frac{\ln x+1}{x\ln^2 x+x}\,dx \quad (x>0), \qquad t=\ln x,$$

$$c)\quad \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx \quad \left(-\tfrac{\pi}{2}<x<\tfrac{\pi}{2}\right), \qquad t=\sin x,$$

$$d)\quad \int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad t=e^{2x},$$

$$e)\quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx \quad (x>0), \qquad t=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$f)\quad \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad t=\sqrt{e^x+1}.$$

5. Feladat. Számítsa ki az $x=1,\quad x=4,\ y=\dfrac{1}{x}$ és az $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $(x>0)$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

6. Feladat. Milyen arányú részekre osztja az $y^2=2x$ egyenletű parabola az $x^2+y^2=8$ egyenletű kör által határolt síkrész területét?

7. Feladat. Határozza meg a következő görbék által közrezárt korlátos síkidomok területét!

$$a)\quad y=x^2-6x+5,\quad y=2x-7,$$

$$b)\quad y=2-x^2,\quad y=|x|,$$

$$c)\quad y^2=2x,\quad x^2+y^2=8,$$

$$d)\quad y=x^2,\quad y=\frac{x^2}{2},\quad y=3x,$$

$$e)\quad y^3=x,\quad y=1,\quad x=8,$$

$$f)\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\quad x=4,$$

$$g)\quad y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad x=0.$$

8. Feladat. Határozza meg a következő függvények adott I intervallumon keletkezett görbeívének hosszát!

$$a)\quad f(x)=x^2,\quad I:=[0,4] \qquad b)\quad f(x)=\frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}-1,\quad I:=[0,1],$$

$$c)\quad f(x)=\sqrt{x},\quad I:=[1,4], \qquad d)\quad f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x},\quad I:=[1,3],$$

$$e)\quad f(x)=\ln x,\quad I:=[1,e], \qquad f)\quad f(x)=\ln\cos x,\quad I:=\left[0,\tfrac{\pi}{4}\right],$$

$$g)\quad f(x)=\ln(1-x^2),\quad I:=\left[0,\tfrac{1}{4}\right], \qquad h)\quad f(x)=\operatorname{ch} x,\quad I:=[0,\ln 2].$$

9. Feladat. Határozza meg a következő függvények adott I intervallumon x tengely körüli forgatásával keletkezett forgástest térfogatát!

$a)$ $f(x) = x^2 - 2x, \quad I := [0,2]$,

$b)$ $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad I := [1,8]$,

$c)$ $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad I := [0,4]$,

$d)$ $f(x) = \dfrac{1}{2-x}, \quad I := [0,1]$,

$e)$ $f(x) = x\sqrt[4]{x^3+1}, \quad I := [0,2]$,

$f)$ $f(x) = \sin x, \quad I := \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$g)$ $f(x) = \log_2 x, \quad I := [1,8]$,

$h)$ $f(x) = xe^x, \quad I := [0,3]$,

$i)$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3+e^x}}, \quad I := [0,1]$,

$j)$ $f(x) = \operatorname{tg} 2x, \quad I := \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$.

10. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x \, dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

■ További feladatok

1. Feladat. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx \qquad \big(x \in (-1,1)\big)$$

határozatlan integrált

a) a $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ helyettesítéssel,

b) az integrandus $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x}} = 1$-gyel megszorzásával].!

A végeredmény:

a)

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big),$$

b)

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

A *Mathematica* programcsomag a következő eredményt adja:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1+x}{2}} - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

Megjegyzés. Határozatlan integrálokra különböző módszerekkel kaphatunk (formai szempontból) különböző képleteket. Az így kapott két függvényhalmaz egyenlő, ha a generáló elemeik különbségének a deriváltja a megadott intervallumon azonosan nulla.

Még két olyan integrandus-típust mutatunk be, amelyeket alkalmas helyettesítésekkel racionális törtfüggvények integrálására vezethetünk vissza.

3. típus: ***$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ alakú integrálok***, ahol $R(u,v)$ két változós racionális törtfüggvény. Ebben az esetben a

$$\boxed{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

helyettesítés lesz célravezető. Ekkor

$$\sin x = \sin\Big(2 \cdot \tfrac{x}{2}\Big) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos\Big(2 \cdot \tfrac{x}{2}\Big) = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Másrészt

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} t = g(t) \qquad \Longrightarrow \qquad g'(t) = \frac{2}{1+t^2} > 0.$$

Példa. Számítsuk ki az

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\, dx \qquad \Big(-\tfrac{\pi}{2} < x < \pi\Big)$$

határozatlan integrált!

A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel az előző összefüggések alapján, ha $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$, akkor

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{1 + t^2 + 2t + 1 - t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{t+1}\, dt = \ln(1+t) + c \Big|_{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln\Big(1 + \operatorname{tg} \tfrac{x}{2}\Big) + c$$

4. típus: ***$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$, $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\, dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$ alakú integrálok***, ahol $R(u,v)$ két változós racionális törtfüggvény. Ezekben az esetekben rendre a

$$\boxed{t = \sin t} \qquad \boxed{t = \operatorname{sh} t} \qquad \boxed{t = \operatorname{ch} t}$$

helyettesítésekkel érdemes próbálkozni.

2. Feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx \quad (0 < x < \pi)$, *b)* $\displaystyle\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\, dx \quad (0 < x < \pi)$,

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx \quad \Big(0 < x < \tfrac{\pi}{2}\Big)$, *d)* $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}\, dx \quad (-\pi < x < \pi)$,

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}\, dx \quad (x > 0)$, *f)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx \quad (x > 0)$,

g) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - x}\, dx \quad (x > 1)$, *h)* $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (-1 < x < 1)$.

3. Feladat. Határozza meg az

$$f(x) := \sin^2 x \qquad \Big(x \in [0, \pi]\Big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Útmutatás. Használja fel a

$$\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) = \sin^2 x - \frac{\left(\sin 2x\right)^2}{4} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$$

azonosságot.

Improprius integrálok

Emlékeztető. Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in R[t, b]$ minden $t \in (a, b)$ esetén. Tekintsük a következő határértéket:

$$\lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)\, dx.$$

- Ha a fenti határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy ***az f függvény impropriusan integrálható $[a, b]$-n*** (vagy ***az f függvény $[a, b]$-beli improprius integrálja létezik és konvergens***). Ekkor az
$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)\, dx$$
számot ***az f függvény $[a, b]$-beli improprius integráljának*** nevezzük.
- Ha a fenti határérték $+\infty$ (vagy $-\infty$), akkor azt mondjuk, hogy ***az f függvény $[a, b]$-beli improprius integrálja létezik, de divergens***, és ekkor ***az f függvény $[a, b]$-beli improprius integrálja***
$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)\, dx = +\infty \qquad (\text{illetve } -\infty).$$
- Ha a fenti határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy ***az f függvény $[a, b]$-beli improprius integrálja divergens***.

Ha $f \in R[a, b]$, akkor az improprius integrál megegyezik a szokásos határozott integrállal.

Az improprius integrált analóg módon értelmezhető az $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre, ahol $-\infty < a < b \leq +\infty$, és $f \in R[a, t]$ minden $t \in (a, b)$ esetén. Ebben az esetben

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\, dx := \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in R[x, y]$ minden $a < x < y < b$ esetén. Azt mondjuk, hogy ***az f függvény impropriusan integrálható $[a, b]$-n***, ha minden $c \in (a, b)$ esetén f egyszerre impropriusan integrálható $[a, c]$-n és $[c, b]$-n. Ekkor

$$\int\limits_a^b f := \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy a c értéke nem befolyásolja az $\int_a^b f$ eredményét.

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!*

$$a) \quad \int\limits_0^{+\infty} x e^{-2x}\, dx, \qquad\qquad b) \quad \int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\, dx.$$

Megoldás.

a) Parciális integrálással

$$\int xe^{-2x}\,dx = \int x\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'\,dx = x\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - \int (x)'\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)\,dx =$$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ezért

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-2x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^t =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{2e^{2t}} + \frac{1}{4e^{2t}} - \left(\frac{1}{4}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}},$$

hiszen

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{2e^{2t}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{4e^{2t}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

b) Ha $0 < x < 2$, akkor

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1) + c.$$

Ezért

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to0+0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to0+0}\Big[\arcsin(x-1)\Big]_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to0+0}\Big(0 - \arcsin(t-1)\Big) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to2-0}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to2-0}\Big[\arcsin(x-1)\Big]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to2-0}\Big(\arcsin(t-1) - 0\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Így

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat!

$a)\quad \int\limits_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,$

$b)\quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx,$

$c)\quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx,$

$d)\quad \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} e^{-3x}\,dx,$

$e)\quad \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x}$

$f)\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2}\,dx.$

10. gyakorlat

Többváltozós analízis 1.

Szükséges ismeretek

- Többváltozós függvények folytonossága, átviteli elv.
- Többváltozós függvények pontbeli határértéke, átviteli elv.
- A parciális deriváltak fogalma.
- Az iránymenti derivált, és kapcsolata a parciális deriváltakkal.

Feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban!

3. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0,0)\}$.

4. Feladat. Lássuk be, hogy

$$a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

$$b) \quad \text{a} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \text{ határérték nem létezik!}$$

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^3}{xy} \qquad (x,y>0).$$

6. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$a = (a_1, a_2) = (1,1)$ és v az x-tengely pozitív ágával $3\pi/4$ szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor. Határozzuk meg a $\partial_v f(a)$ iránymenti deriváltat!

7. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pontban a $u = (1,2)$ vektor által meghatározott irány mentén!

■ Házi feladatok

1. Feladat. Bizonyítsa be, hogy

a) Az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{3x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

b) A

$$g(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban!

2. Feladat. Számolja ki az

$$f(x,y) := xe^{yx} - xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban a $v = (3,4)$ vektor által meghatározott irány mentén!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény *folytonos* az $a := (0,0)$ pontban!

2. Feladat. A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a = (0,0)$ pontban!

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+3y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Feladat. Folytonos-e az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény az origóban?

4. Feladat. Mutassa meg, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

5. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq -y\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

$$a)\quad \exists \lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big), \qquad b)\quad \exists \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big), \qquad c)\quad \nexists \lim_{(0,0)} f.$$

6. Feladat. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket!

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2},$$

$$c)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \qquad d)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|+|y|}.$$

7. Feladat. Számítsa ki az alábbi függvények x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

a) $f(x,y) := y^2\ln(xy) \quad (x,y>0)$, *b)* $f(x,y) := e^{x^2y} - 2x^2y^7\sin(x+y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$,

c) $f(x,y) := e^x\cos y - x\ln y \quad (x,y>0)$, *d)* $f(x,y) := \dfrac{\sin y}{e^{xy}} \quad (x,y\in\mathbb{R})$.

8. Feladat. Igazolja, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } xy = 0,\\ 1, & \text{ha } xy\neq 0,\end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban, de ott léteznek a parciális deriváltjai!

9. Feladat. Határozza meg az

$$f(x,y) := 5x+3y+x^2y^3 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

v irány szerinti deriváltját a megadott a pontban!

a) $v=(1,0)$ és $a=(3,2)$.

b) $v=(4,3)$ és $a=(1,2)$.

c) v az x tengellyel 60-fokos szöget bezáró egységvektor.

■ További feladatok

1. Feladat. Határozza meg és szemléltesse az $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvénynek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit és szintvonalait. Milyen felülettel szemléltethető a függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

$$a)\quad f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2\leq 1\big),$$

$$b)\quad f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

2. Feladat. Az $f(x,y) := x^2+y^2 \ \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$ függvény grafikonja egy forgásparaboloid. Milyen felülettel szemléltethető a

$$g(x,y) := x^2+y^2-2x+4y+1 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

3. Feladat. Vizsgálja meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket!

$$a)\quad f(x,y) := \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$b)\quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$c)\quad f(x,y) := \begin{cases} (1+x^2y^2)^{\frac{-1}{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$d)\quad f(x,y) := \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & \text{ha } y\neq 0,\\ 0, & \text{ha } y=0.\end{cases}$$

4. Feladat. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket!

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2(2x)}{x^2+3y^2}, \qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2},$$

$$c)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), \qquad d)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \begin{cases} x+y, & \text{ha } x+y \text{ racionális},\\ x^2+y^2, & \text{ha } x+y \text{ irracionális}.\end{cases}$$

5. Feladat. Lássuk be, hogy

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$$

Megoldás. A definíció alapján fogjuk a határértékeket igazolni.

a) Azt kell megmutatni, hogy

$$(\#)\qquad \begin{aligned} &\forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists\delta>0, \text{hogy } \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\\ &0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \ \text{ esetén } \ \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Rögzítsük az $\varepsilon>0$ valós számot. Ekkor $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ pontban

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \left(|xy|\le\frac{x^2+y^2}{2}\ \text{miatt}\right) \le$$

$$\le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{1}{2}\|(x,y)\|<\varepsilon}_{\|(x,y)\|<2\varepsilon}.$$

Így, ha $\delta := 2\varepsilon$, akkor (#) teljesül.

Megjegyzés. A számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

b) Azt kell megmutatni, hogy

$$\text{(\#\#)} \qquad \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \ \text{ esetén } \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2 \right| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pontban

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2 \right| &= \frac{\left|(x^2+y^2+1) - 2\sqrt{x^2+y^2+1} + 1\right|}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1} - 1 = \left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \\ &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor (##) teljesül.

6. Feladat. Melyik $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek?

$$\partial_x f(x,y) = x^2 y, \quad \partial_y f(x,y) = 1 + \frac{x^3}{3} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

11. gyakorlat

Többváltozós analízis 2.

Szükséges ismeretek

- A totális derivált fogalma és kapcsolata a parciális deriváltakkal.
- Az érintősík egyenlete.
- Valós értékű függvények (feltétel nélküli) szélsőértékeinek fogalma.
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeire vonatkozó elsőrendű szükséges, és másodrendű elégséges feltétel.

Feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

2. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az f függvény a $(0,0)$ pontban

a) folytonos,

b) minden irány mentén deriválható,

c) totálisan nem deriválható!

3. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\big).$$

a) Számítsa ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

b) Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.

4. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

5. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

■ Házi feladatok

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := x^3 + xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (2,3)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

2. Feladat. Írja fel a $z = x^2e^{xy}$ egyenletű felület $P_0(1,0)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

3. Feladat. Határozza meg az

$$f(x,y) := 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Vizsgálja meg a definíció szerint az alábbi függvények differenciálhatóságát a megadott pontokban!

$$a) \quad f(x,y) := x^2 + xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a = (2,1),$$

$$b) \quad f(x,y) := (x+y)^3 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a = (1,2),$$

$$c) \quad f(x,y) := \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a = (0,0),$$

$$d) \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad a = (0,0).$$

2. Feladat. Írja fel a $z = xy+x+y$ egyenletű felület $P_0(1,-1)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

3. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mutassa meg, hogy $f \in C\big\{(0,0)\big\}$!

b) Határozza meg a $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ függvényeket $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

c) Bizonyítsa be, hogy $f \notin D\big\{(0,0)\big\}$!

4. Feladat. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 e^{y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját az $(x_0, y_0) := (2,1)$ pontban!

5. Feladat. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

$$
\begin{aligned}
&a) \quad f(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),\\
&b) \quad f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),\\
&c) \quad f(x,y) := x^4 y^2 (4 - x - y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),\\
&d) \quad f(x,y) := x^3 y^2 (4 - x - y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),\\
&e) \quad f(x,y) := e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),\\
&f) \quad f(x,y) := (1 + e^y)\cos x - y e^y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).
\end{aligned}
$$

6. Feladat. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x,y) := x^4 + y^2 \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^3 + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor

a) f-nek az origóban lokális (és abszolút) minimuma van, g-nek ugyanott nincs lokális szélsőértéke,

b) mindegyik függvény origóban vett Hesse-mátrixának a determinánsa nullával egyenlő!

■ További feladatok

1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban!

Megoldás. <u>A folytonosság igazolása.</u> Az $a = (0,0)$ pontbeli folytonosság a definíció szerint azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \big\|(x,y) - (0,0)\big\| < \delta \colon \big|f(x,y) - f(0,0)\big| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot és legyen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
\big|f(x,y) - f(0,0)\big| = \big|f(x,y)\big| = \sqrt{|xy|} \le \ \Big(\sqrt{|xy|} \le \tfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}} \text{ miatt}\Big) \ \le \\
\le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \big\|(x,y)\big\| < \varepsilon}_{\|(x,y)\| < \sqrt{2}\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Így, ha $\delta := \sqrt{2}\varepsilon$, akkor $(*)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\{(0,0)\}$.

$\exists\partial_1 f(0,0)$ és $\exists\partial_2 f(0,0)$ igazolása. $\partial_1 f(0,0)$ értelmezése szerint az f függvényben rögzíteni kell az $y=0$ értéket, és az így keletkezett x-től függő függvényt (parciális függvényt) deriválni kell a 0 pontban. Ha a feladatban szereplő $\sqrt{|xy|}$ képletben $y=0$, akkor a keletkezett parciális függvény azonosan nulla, és így $\exists\partial_1 f(0,0)=0$.

Ugyanígy igazoljuk, hogy $\exists\partial_2 f(0,0)=0$.

Az $f\notin D\{(0,0)\}$ állítás igazolása. Indirekt módon tegyük fel, hogy $f\in D\{(0,0)\}$. Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0)=\begin{pmatrix}\partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},$$

és a totális derivált definíciója szerint

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|f(a+h)-f(a)-\begin{pmatrix}\partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|h_1h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

Könnyű észrevenni, hogy ez az állítás nem igaz. A határértékre vonatkozó átviteli elv alapján elég egy olyan origóhoz tartó pontsorozatot találni, amely mentén a függvényértékek sorozata nem tart 0-hoz. Tekintsük például az $y=x$ egyenletű egyenes mentén az

$$(x_n,y_n):=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\qquad(n=1,2,\ldots)$$

sorozatot. Ekkor $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$, és ezekben a pontokban az értékek

$$\frac{\sqrt{|x_n\,y_n|}}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}=\frac{\sqrt{\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right|}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

sorozata nem tart 0-hoz. Az indirekt feltételből kiindulva tehát ellentmondásra jutottunk, és ez azt jelenti, hogy az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

2. Feladat. Legyen

$$f(x,y):=x^3y+x^2y^2+x+y^2\qquad\big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a függvény másodrendű parciális deriváltjait az $(x,y)=(1,0)$ pontban!

Megoldas. Először kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén:

$$\partial_x f(x,y)=3x^2y+2xy^2+1,$$
$$\partial_y f(x,y)=x^3+2x^2y+2y.$$

Ha a fenti függvényeket tovább deriváljuk x és y szerint, akkor megkapjuk f másodrendű parciális deriváltjait minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx}f(x,y)=\partial_x(\partial_x f)(x,y)=\partial_x(3x^2y+2xy^2+1)=6xy+2y^2,$$
$$\partial_{xy}f(x,y)=\partial_y(\partial_x f)(x,y)=\partial_y(3x^2y+2xy^2+1)=3x^2+4xy,$$
$$\partial_{yx}f(x,y)=\partial_x(\partial_y f)(x,y)=\partial_x(x^3+2x^2y+2y)=3x^2+4xy,$$
$$\partial_{yy}f(x,y)=\partial_y(\partial_y f)(x,y)=\partial_y(x^3+2x^2y+2y)=2x^2+2.$$

Végül az $(x,y)=(1,0)$ behelyettesítéssel megkapjuk a végeredményt:

$$\partial_{xx}f(1,0)=0,\quad \partial_{xy}f(1,0)=3,\quad \partial_{yx}f(1,0)=3,\quad \partial_{yy}f(1,0)=4.$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a vegyes parciális deriváltak megegyeznek!

3. Feladat. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy a $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ és a $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0).$$

Mutassa meg azt is, hogy f nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban!

Megoldás. Először az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket határozzuk meg.

A $(0,0)$ pontban az x változó szerinti parciális derivált a definíció alapján:

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_x f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0\,,$$

az y változó szerinti parciális derivált pedig

$$\partial_2 f(0,0) = \partial_y f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0\,.$$

Ha $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (vagyis $x^2+y^2\neq 0$), akkor

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) = \partial_x f(x,y) &= y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\cdot\frac{2x\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{és} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x,y) = \partial_y f(x,y) &= x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\cdot\frac{-2y\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltakat az origóban a parciális derivált definíciója alapján számítjuk ki:

$$\begin{aligned} \partial_{12} f(0,0) &= \partial_2(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial_1 f(0,t)-\partial_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-t-0}{t} = -1, \\ \partial_{21} f(0,0) &= \partial_1(\partial_2 f)(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial_2 f(t,0)-\partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t} = 1\,. \end{aligned}$$

A $\partial_{12} f(0,0) = \partial_{21} f(0,0)$ egyenlőség tehát valóban nem teljesül. (A parciális deriváltak sorrendjének a képzése nem cserélhető fel.)

Az f függvény nem deriválható kétszer az origóban. Valóban, ha ez igaz lenne, akkor Young tétele szerint a különböző sorrendben vett másodrendű deriváltak megegyeznének, és ez a fentiek alapján *nem igaz.*

4. Feladat. Legyen

$$\begin{aligned} A &:= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2<1 \;\text{ vagy }\; x^2+(y+1)^2<1\Big\}, \\ B &:= \Big\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\Big\}. \end{aligned}$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\chi_{A\cup B}(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (x,y) \in A \cup B \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big(A \cup B\big) \end{cases}$$

függvény (az $A \cup B$ halmaz *karakterisztikus függvénye*) minden irányban deriválható a $(0,0)$ pontban, de nem deriválható (totálisan) a $(0,0)$ pontban!

5. Feladat. Mutassa meg, hogy ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F \in D$ és

$$f(x,y) := y \cdot F(x^2 - y^2) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor

$$y^2 \cdot \partial_x f(x,y) + xy \cdot \partial_y f(x,y) = x \cdot f(x,y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

6. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x,y) := x^3 y^5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-őn, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{lcccc} \partial_x f(x,y) & = & 3x^2y^5 & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 5x^3y^4 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ és } y \in \mathbb{R} \quad \text{vagy} \quad y = 0 \text{ és } x \in \mathbb{R}.$$

Ezért az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek a $P_y(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ pontok (az y-tengely pontjai), illetve a $P_x(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ pontok (az x-tengely pontjai).

Másodrendű elégséges feltétel. Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 6xy^5, \quad \partial_{xy} f(x,y) = 15x^2y^4 = \partial_{yx} f(x,y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = 20x^3y^3,$$

ezért

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^5 & 15x^2y^4 \\ 15x^2y^4 & 20x^3y^3 \end{pmatrix}.$$

Minden stacionárius pontban

$$\det f''(P_x) = \det f''(P_y) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ezért a másodrendű elégséges feltétel nem használható. A lokális szélsőértékhelyek megállapításához további vizsgálatok kellenek.

Világos, hogy a tengelyek minden pontjában a függvényérték 0. Egyszerűen belátható, hogy a tengelyek bármely pontjának minden környezetében a függvény pozitív és negatív értéket is felvesz, ezért az f függvénynek *sehol sincs lokális szélsőértéke.*

12. gyakorlat

Többszörös integrálok

■ Szükséges ismeretek

- Kettős integrálok értelmezése téglalapokon és ennek tulajdonságai.
- Fubini-tétel, szukcesszív integrálás.
- Kettős integrálok értelmezése korlátos halmazokon.
- A kettős integrál kiszámítása normáltartományon.

■ Feladatok

1. Feladat. Tekintsük az $I := [0,1] \times [0,2]$ téglalapot. Kétféle sorrendben számítsuk ki az

$$\iint_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

2. Feladat. Számítsuk ki a következő kettős integrált!

$$\iint_I x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy \qquad \Big(I := \big[1,3\big] \times \big[0, \tfrac{\pi}{2}\big]\Big).$$

3. Feladat. Számítsuk ki a következő kettős integrált:

$$\iint_H (2xy - x^3)\, dx\, dy,$$

ahol H az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész!

4. Feladat. Jelölje H a $(0,2)$, az $(1,1)$ és a $(3,2)$ csúcspontú háromszöglapot. Számítsuk ki az

$$\iint_H y\, e^x\, dx\, dy$$

integrált!

5. Feladat. Számítsuk ki az

$$f(x,y) := e^x\Big(\sqrt{x} + y\Big) \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvény integrálját az $x = 1$ és $y^2 = x$ egyenletű görbék által határolt korlátos és zárt síktartományon!

■ Házi feladatok

1. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint_H \frac{y^2}{x^2+1}\, dx\, dy \qquad \Big(H := [0,1] \times [-2,2]\Big)$$

kettős integrált!

2. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint\limits_H \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$$

kettős integrált, ahol H az $y \geq \frac{1}{x}$, az $y \leq x$ és az $1 \leq x \leq 2$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos és zárt síkrész!

■ Gyakorló feladatok

1. Feladat. Számítsa ki a

$$a)\quad \iint\limits_H (4 - x - y)\, dx\, dy, \qquad H := [0, 2] \times [0, 1],$$

$$b)\quad \iint\limits_H (x^2 y - 2xy)\, dx\, dy, \qquad H := [0, 3] \times [-2, 0],$$

$$c)\quad \iint\limits_H x\sqrt{x^2 + y}\, dx\, dy, \qquad H := [0, 1] \times [0, 3],$$

$$d)\quad \iint\limits_H \frac{y}{1 + xy}\, dx\, dy, \qquad H := [0, 1] \times [0, 1],$$

$$e)\quad \iint\limits_H e^{2x+y}\, dx\, dy, \qquad H := [0, \ln 2] \times [0, \ln 5],$$

$$f)\quad \iint\limits_H xye^x\, dx\, dy, \qquad H := [0, 1] \times [1, 2],$$

$$g)\quad \iint\limits_H \frac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\, dx\, dy, \qquad H := [0, 1] \times [0, 1].$$

kettős integrálokat a megadott H téglalapokon!

2. Feladat. Számítsa ki a $z = x^2 + y^2$ paraboloid alatti és az xy síkban lévő $[-1, 1] \times [-1, 1]$ téglalap feletti test térfogatát!

3. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint\limits_H (x + 6y)\, dy\, dx \qquad \Big(H := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 5x\Big\}\Big)$$

kettős integrált!

4. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint\limits_H \cos(x + y)\, dy\, dx \qquad \Big(H := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq x \leq y\Big\}\Big)$$

kettős integrált!

5. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint_H e^{2x+3y}\,dx\,dy \qquad \Big(H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 1,\ 3y \le x \le 3\big\}\Big)$$

kettős integrált!

6. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint_H xy^2\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol H az $y = x^2$ és $y = \sqrt{8x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos és zárt síkrész!

7. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint_H \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol H az $y^2 \le 8x$, az $y \le 2x$ és az $y + 4x \le 24$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos és zárt síkrész!

8. Feladat. Mekkora a térfogata annak a háromszög alapú egyenes hasábnak, melynek alapja az xy síkban a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ csúcspontú zárt háromszöglap és fedőlapjának síkja a $z = 3 - x - y$ egyenletű sík?

9. Feladat. Mekkora a térfogata annak a háromszög alapú egyenes hasábnak, melynek alapja az xy síkban a $(0,0)$, $(0,2)$ és $(-2,0)$ csúcspontú zárt háromszöglap és fedőlapja a $z = xy$ felület?

10. Feladat. Az integrálás sorrendjének felcserélése után számítsa ki a

$$a)\ \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{x\sin y}{y}\,dy\right) dx, \quad b)\ \int_1^e \left(\int_{1/e}^{1/y} \cos(x - \ln x)\,dx\right) dy, \quad c)\ \int_0^3 \left(\int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3}\,dy\right) dx.$$

szukcesszív integrálokat!

■ További feladatok

1. Feladat. Legyen $H := [0,1] \times [0,1]$ és

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{ha } xy \ne 0, \\ 0, & \text{ha } xy = 0. \end{cases}$$

Igazolja, hogy $f \notin R(H)$, de a szukcesszív integrálás elvégezhető a H téglalapon!

2. Feladat. Számítsa ki a

$$\iint_H \operatorname{sgn}(x - y^2)\,dy\,dx \qquad \Big(H := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 2\big\}\Big)$$

kettős integrált!

3. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$$

integrált, ahol $0 < a < b$ valós paraméterek.

Útmutatás: Az alábbi észrevétellel alakítsuk kettős integrállá a feladatot, hajtsunk végre sorrendcserét és a kapott integrált számítsuk ki.

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b x^y \, dy.$$