

4. gyakorlat

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTAL 2.

L'Hospital szabály

Emlékeztető. Tétel. (L'Hospital szabály) Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$, illetve $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f, g \in D(a, b), \\ \bullet \forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0, \\ \bullet \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0, \text{ vagy } \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty, \\ \bullet \exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array} \right\} \implies \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \text{ és } \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

A L'Hospital szabály átfogalmazható **bal oldali és (kétoldali) határértékre**, valamint $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú **határértékre**. A többi típusú **kritikus határértéket** (pl. $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, 0^0 , $1^{+\infty}$) vezessük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

A feladatmegoldások során először döntsük el, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó, ezután ellenőrizzük a L'Hospital-szabály feltételeit.

1. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2},$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2},$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^3 - 8},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$

Megoldás.

a) A feladat az $x - 1$ tényező kiemelésével és egyszerűsítésével is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{15x^2 - 8}{7x^6 + 1} = \frac{15 - 8}{7 + 1} = \frac{7}{8}.$$

b) A feladat az x^7 tényező kiemelésével és egyszerűsítésével is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 8x + 3}{x^7 + x - 2} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^2 - 8}{7x^6 + 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30x}{42x^5} = \\ &= \frac{30}{42} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0. \end{aligned}$$

c) A feladat gyöktelenítéssel is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^3 - 8} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3x\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{6\sqrt{9}} = \frac{1}{18}.$$

d) A feladat a hatványsorok határértékéről szóló tétellel is megoldható. L'Hospital-szabállyal:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} &= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x) \cdot \cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x) \cdot \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1 + 1}{1} = 2 \end{aligned}$$

Megjegyzés. A feladat a L'Hospital-szabály többszörös alkalmazásával is megoldható, azonban ez most hosszú számításokkal járna.

A 4-edik előadáson értelmeztük a tangens függvényt, amelynek deriváltja:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

2. Feladat. L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1/x} - x),$

c) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x),$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x.$

Megoldás.

a) Az összeg egyik tagjának sincs határértéke a 0 pontban. Először alakítsuk át a kifejezést! Mivel

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)},$$

ezért ez már egy $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határérték 0-ban, és a L'Hospital-tétel feltételei is teljesülnek. Így

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + x \cdot e^x} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + 1 \cdot e^x + x e^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Mivel $\exp \in C\{0\}$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} \stackrel{y=1/x}{=} \lim_{y \rightarrow 0+0} e^y = e^0 = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Tehát $(+\infty) - (+\infty)$ típusú határértékről van szó. Ezt $\frac{0}{0}$ típusú határértékre alakítjuk át:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1/x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1.\end{aligned}$$

c) Mivel $\ln \in C\{1\}$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x = \ln 1 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1-x) \stackrel{y=1-x}{=} \lim_{y \rightarrow 0+0} \ln y = -\infty.$$

Tehát $0 \cdot (-\infty)$ típusú határértékről van szó. Ezt $\frac{-\infty}{-\infty}$ típusú határértékre alakítjuk át:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1}{1-x} \cdot (-1)}{-\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{1-x} \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 1-0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x}{1-x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x}{1-x} = \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-1} = (-2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln x}{x} = (-2) \cdot \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

d) Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1 \mp 0} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x = \pm \infty$$

$0 \cdot (\pm \infty)$ típusú határértékről van szó. Az átalakításokban felhasználjuk a tangens értelmezését:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x &= \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(-\sin \frac{\pi}{2} x) \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

3. Feladat. *L'Hospital-szabály segítségével számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

Megoldás. Az $f(x)^{g(x)}$ alakú kifejezésekben az alap és a kitevő is változik. Ebben az esetben is a már ismert

$$f(x)^{g(x)} = \left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \quad (g > 0)$$

átalakítást fogjuk alkalmazni. Ezután meghatározzuk a kitevőben lévő kifejezés határértékét, és az exponenciális függvény folytonossága alapján következtetünk a teljes kifejezés határértékére az összetett függvényre vonatkozó határérték alapján.

a) $1^{+\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó. Az ismert átalakítással:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(e^{\ln(1+\frac{1}{x})}\right)^x = e^{x \cdot \ln(1+\frac{1}{x})} \quad (x > 0).$$

Nézzük először a kitevő határértékét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &\stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

Az exp függvény folytonos az 1 pontban, ezért

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \cdot \ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln(1+\frac{1}{x})} = e^1 = e.$$

A megadott határérték tehát létezik és az e számmal egyenlő.

Megjegyzés. A határértékre vonatkozó átviteli elvet a $(+\infty)$ -hez tartó $x_n = n$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Emlékeztetünk arra, hogy az Analízis I. kurzuson megmutattuk, hogy fenti sorozat konvergencia, és az e számot ennek a határértékével *definiáltuk*.

b) $(+\infty)^0$ típusú kritikus határértékről van szó. Az ismert átalakítással:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \left(e^{\ln(\frac{1}{x})}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\frac{1}{x})} = e^{-\operatorname{tg} x \cdot \ln x} \quad (x > 0).$$

Nézzük először a kitevő határértékét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} (-\operatorname{tg} x \cdot \ln x) &\stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Az exp függvény folytonos a 0 pontban, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} e^{-\operatorname{tg} x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} (-\operatorname{tg} x \cdot \ln x)} = e^0 = 1.$$

A megadott határérték tehát létezik és 1-gyel egyenlő.

Konvex és konkáv függvények

Emlékeztető. A konvexitás a második derivált előjelével jellemezhető:

Tétel. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D^2(a, b)$. Ekkor

1. f konvex [illetve f konkáv] (a, b) -n $\iff f'' \geq 0$ [illetve $f'' \leq 0$] (a, b) -n;
2. $f'' > 0$ [illetve $f'' < 0$] (a, b) -n $\implies f$ szigorúan konvex [illetve f szigorúan konkáv] (a, b) -n.

Ha $f \in D(a, b)$ és $c \in (a, b)$, akkor c az f függvény inflexiós pontja, ha f konvexitása megváltozik a c pontban, azaz

$$\exists \delta > 0: f \text{ konvex } (c - \delta, c] \text{-n és konkáv } [c, c + \delta) \text{-n, vagy fordítva.}$$

Ha $f \in D^2(a, b)$ és $c \in (a, b)$ inflexiós pont, akkor f'' előjele különbözik c egy bal és egy jobb oldali környezetében.

Ha még $f'' \in C\{c\}$, akkor ez csak akkor lehetséges, ha $f''(c) = 0$. Ezt hívjuk **az inflexiós pontra vonatkozó másodrendű szükséges feltételnek**.

4. Feladat. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$a) \quad f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b) \quad f(x) := \ln(x^2 + 2x + 2) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$c) \quad f(x) := \frac{x^3}{4 - x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}), \quad d) \quad f(x) := \frac{e^x}{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}).$$

Megoldás. A konvexitás jellemzésére vonatkozó tétel szerint azokat a legbővebb intervallumokat kell megkeresni, amelyeken az f'' függvény állandó előjelű. Érdekes a monotonitáshoz hasonló táblázatot készíteni, de ennek első sorában most f'' szerepel. A táblázatból rögtön leolvasható, mely intervallumokon lesz konvex (\cup) vagy konkáv (\cap) a függvény, illetve hol van inflexiós pontja és mennyi az inflexiós pontokhoz tartozó érték.

a) A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36 \quad \implies \quad f''(x) = 12x - 42.$$

$$\text{Így } f''(x) = 0 \quad \iff \quad x = 7/2.$$

	$x < 7/2$	$7/2$	$x > 7/2$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap	$-91/2$	\cup
		infl.	

b) A függvény valóban értelmezhető minden x valós számra, hiszen

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$$

vagy másképpen $D = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$ diszkriminánsa negatív.

A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 2x + 2))' = 2 \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2},$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + 2x + 2) - (x + 1) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = -2 \cdot \frac{x(x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$\text{Így } f''(x) = 0 \quad \iff \quad x = -2 \text{ vagy } x = 0.$$

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$x > 0$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	\cap	$\ln 2$	\cup	$\ln 2$	\cap
		infl.		infl.	

c) A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \neq \pm 2$ valós szám esetén

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2} \right)' = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(24x - 4x^3)(4-x^2)^2 - (12x^2 - x^4) \cdot 2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(24x - 4x^3)(4-x^2) - (12x^2 - x^4) \cdot 2(-2x)}{(4-x^2)^3} = \frac{8x(x^2 + 12)}{(4-x^2)^3}$$

Így $f''(x) = 0 \iff x = 0$.

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	$x > 2$
f''	+	-	0	+	-
f	∪	∩	0	∪	∩
			infl.		

d) A deriválási szabályok szerint tetszőleges $x \neq -1$ valós szám esetén

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x+1} \right)' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - xe^x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1) - 2xe^x}{(x+1)^3} = \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x+1)^3}$$

Így $f''(x) \neq 0 \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

	$x < -1$	$x > -1$
f''	-	+
f	∩	∪