2. feladatsor: Relációk

Relációk tulajdonságai, osztályfelbontás, ekvivalenciareláció

1. feladat

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $\rho \subseteq A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $\rho = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

(a) Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

(b) Rajzolja meg a reláció gráfját.

(c) Legyen $H_1 = \{1, 2, 3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a ρ reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

(d) A következő relációk közül melyek lehetnek a ρ reláció kiterjesztései?

$\rho_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\rho_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$\rho_3 = A \times B$

$\rho_4 = B \times A$

(e) Határozza meg a ρ reláció inverzét, $\rho(\{1, 2\})$ képet és $\rho^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

2. feladat

Legyen $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 2b\}$. Határozza meg a ρ reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét, $\rho(\{3, 4, ..., 10\})$ képet és a ρ leszűkítését $\{1, 2, ..., 6\}$-ra.

3. feladat

Az $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra határozza meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazokra lesz $R(A)$, illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?

4. feladat

Legyen $\rho \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

(a) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

(b) $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$

(c) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

(d) $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

(e) $\rho = \{(1, 2)\}$

(f) $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

(g) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

(h) $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$

5. feladat

(a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.

(b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

(c) Bizonyítsuk be, hogy minden nemüres reláció, amely egyszerre irreflexív és szimmetrikus, az nem lehet tranzitív.

6. feladat
Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.
(a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$
(b) $S = \{(a,b) \in B \times B \mid a \text{ vezetékneve rövidebb mint } b\text{-é}\}$ ahol $B = \{\text{budapesti lakosok}\}$
(c) $T_X = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ ahol X adott halmaz
(d) $V = \{(x,y) \in K \times K| \mid x \text{ belülről érinti } y\text{-t}\}$ ahol $K = \{\text{egy adott sík körvonalai}\}$

7. feladat
Tekintsük a következő ρ relációt.
(a) $\rho = \{(1,1),(1,5),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,1),(5,5)\} \subseteq \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$
(b) $\rho = \{(1,1),(1,5),(1,6),(1,8),(2,2),(2,4),(3,3),(3,7),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(5,6),$ $(5,8),(6,1),(6,5),(6,6),(6,8),(7,3),(7,7),(8,1),(8,5),(8,6),(8,8)\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \times$ $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(1) Mutassa meg, hogy ρ ekvivalenciareláció.
(2) Határozza meg az A halmaz ρ ekvivalenciareláció szerinti osztályfelbontását (másképp: Határozza meg az A/ρ hányadoshalmazt).

8. feladat
Írjon fel olyan ekvivalenciarelációt, amely az $\{a,b,c,d,e,f\}$ halmaz következő osztályfelbontását határozza meg.
(a) $\{\{a,b,f\},\{c\},\{d,e\}\}$
(b) $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e,f\}\}$

9. feladat
Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.
(a) $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m+n \text{ páros szám}\}$
(b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2+y^2 \text{ osztható 2-vel}\}$
(c) $R = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a-b \text{ racionális}\}$
(d) $R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m^2-n^2 \text{ osztható 3-mal}\}$
(e) $R = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1+y_1 = x_2+y_2\}$
(f) $R = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2\}$

10. feladat
Legyen $f \subseteq A \times A$ reláció. Bizonyítsuk be, hogy $f = f^{-1}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f \subseteq f^{-1}$.

11. feladat
Konstruáljon az $\{1,2,3,4\}$ halmazon olyan relációt, amely
(a) reflexív és nem irreflexív
(b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
(c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(d) szimmetrikus és antiszimmetrikus
(e) nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
(f) reflexív és trichotóm
(g) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm

Relációk kompozíciója

12. feladat
Legyen $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$ továbbá $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$,
$R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, f), (3, d), (3, e), (3, f)\}$ és $S = \{(a, 2), (a, 4), (c, 6), (c, 8), (d, 2), (d, 4), (d, 6), (f, 8)\}$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.

13. feladat
Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; S, R \subseteq A \times A$. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót.
(a) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ és $S = \{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$
(b) $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6), (6, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 6), (5, 6), (7, 2)\}$
(c) $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4), (5, 3)\}$ és $S = \{(2, 6), (3, 7), (5, 1), (5, 6), (5, 8), (6, 2), (7, 7)\}$
(d) $R = \{(6, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 7)\}$ és $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (7, 1), (7, 2)\}$
Kommutatív-e a kompozíció? Határozza meg például az (a) esetben az $R \circ S$ kompozíciót.

14. feladat
Legyenek $R, S \subseteq A \times A$ szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy $R \circ S$ szimmetrikus akkor és csak akkor, ha $R \circ S = S \circ R$.

15. feladat
Legyen $R, S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.
(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x = y^2 + 6\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 1 = y\}$
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 2y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} = y^2\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x - 2} = 3y\}$
(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 = y\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y \land 2y = x\}$

16. feladat
Tekintsük a következő relációkat:
$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 3\}$, $\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6x - 1 = 4y + 5\}$,
$\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid 2x + 3y\}$, $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1{,}5x - 1{,}5 \leq y\}$
Határozza meg a következő kompozíciókat.

$$\rho \circ \varphi \varphi \circ \lambda \varphi^3 \alpha \circ \rho \rho \circ \alpha$$