1. előadás

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 1.

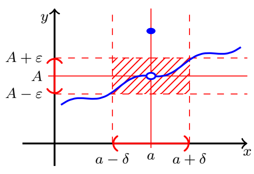
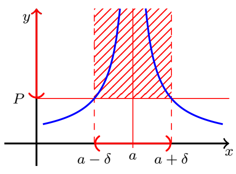
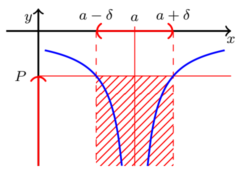
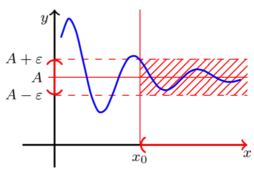
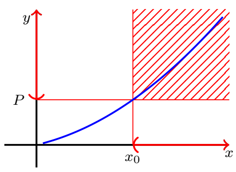
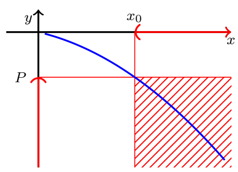
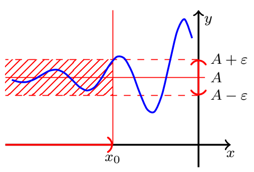
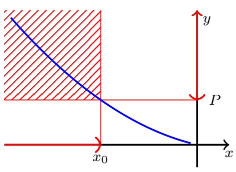
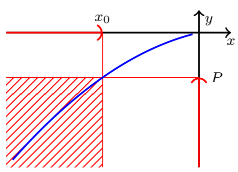
A differenciálszámítás a matematikai analízis alapvető eszköze. Segítségével megvizsgálhatjuk a függvények értékeinek változását, ami egy pontosabb függvénymegismerésre ad lehetőséget. A differenciálszámítás jól használható általános módszert ad függvénytulajdonságok leírásához, mint például a monotonitás, szélsőértékhelyek keresése, konvexitás, a függvénygrafikonhoz húzott érintőegyenesek meredeksége, stb. A függvényvizsgálat a matematikai analízis és alkalmazásainak egyik legfontosabb fejezete.

Az érintőkkel kapcsolatos számításoknak és függvényváltozások sebességeinek a meghatározásának már az ókorban is komoly hagyományai voltak, igaz akkor még végtelen kicsiny mennyiségekkel, ún. infinitezimálisokkal próbáltak számolni. Sőt, még a XVIII. században is olyan módszereket alkalmaztak, melyek mai szemmel nézve nem voltak elég precízek. Csak a határérték fogalmának tisztázása tette lehetővé a pontos számítások elvégzését.

Emlékeztető a függvény határértékéről

Az Analízis I. kurzuson megismertük a matematikai analízis egyik legfontosabb fogalmát, nevezetesen a valós–valós függvények pontbeli határértékének definícióját. Emlékeztetünk arra, hogy ezzel a fogalommal egy függvénynek azt a – szemléletünk alapján eléggé világos – tulajdonságát fogalmaztuk meg matematikai szempontból pontos formában, hogy egy adott a ponthoz „közeli” helyeken a függvényértékek „közel” vannak valamely A értékhez.

Láttuk, hogy a és A nem csak valós szám, hanem $\pm\infty$ is lehet. Környezetek segítségével adtuk meg a függvényhatárérték egységes definícióját, amit kilenc speciális esetben egyenlőtlenségekkel is megfogalmaztunk. A következő ábra ezeket az eseteket tartalmazza.

$A = \lim\limits_{a} f$	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0, \forall \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a\rvert < \delta\colon \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists\delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a\rvert < \delta\colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists\delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a\rvert < \delta\colon x) < P$
$a = +\infty$	 $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon f(x) < P$
$a = -\infty$	 $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0\colon \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0\colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0\colon f(x) < P$

Nézzük azt az esetet, amikor a és A valós számok. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f'$. Azt mondjuk, hogy ***az f függvénynek az a pontban vett határértéke az A szám***, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta \colon \Big|f(x) - A\Big| < \varepsilon.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \text{ ha } x \to a.$$

A függvény határértékének a fogalmát ekvivalens módon is meg lehet adni sorozatok határértékével. Ezt állítja az ***átviteli elv***:

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A.$$

A gyakorlati foglalkozásokon láttuk, hogy határértékek kiszámításában nagy segítséget jelentett ***a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel***, amely lényegében azt mondja ki, hogy az algebrai műveletek és a határértékképzés sorrendje felcserélhető, ha a műveletek elvégezhetők a kibővített valós számok $\overline{\mathbb{R}}$ halmazán. Ezt az állítást nem tudjuk alkalmazni többek között például akkor, ha olyan hányados határértékéről van szó, amelynek számlálójában és nevezőjében szereplő függvények határértéke az adott pontban egyszerre nulla. Ekkor $0/0$ típusú kritikus határértékről beszélünk.

Több nevezetes határértéket is megismertünk az Analízis I. kurzuson. Ezek közül kiemeljük a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

határértékeket. Ezeket nem nehéz igazolni, ti. induljunk ki a szinusz- és az exponenciális függvény hatványsoros definíciójából, és alkalmazzuk ***a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről szóló tételt***. Ez azt mondja ki, hogy egy pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegfüggvényének a konvergenciahalmazának minden pontjában van határértéke, és ez a határérték megegyezik az összegfüggvény pontbeli értékével.

Az előbbi tulajdonság a ***függvény pontbeli folytonosságának*** a fogalmához vezet. Akkor mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, |x-a| < \delta \colon \Big|f(x) - f(a)\Big| < \varepsilon.$$

Jelölés: $f \in C\{a\}$. Két eset lehetséges:

- ha $a \in \mathcal{D}_f$, de $a \notin \mathcal{D}_f'$, azaz a izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in C\{a\}$.
- ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor $\qquad f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_a f \text{ és } \lim_a f = f(a).$

Ezért, ha egy függvény értelmezési tartományának nincsenek izolált pontjai, pl. egy intervallum, akkor a függvény akkor és csak akkor folytonos valamely pontjában, ha ott létezik határértéke, és ez megegyezik a függvény pontbeli értékével. Az előbbiek szerint egy hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciahalmazának minden pontjában. Ezért az exponenciális, a szinusz és a koszinusz függvények folytonosak a valós számok halmazán.

Egyoldali határértékeket is értelmeztünk. Akkor mondjuk, hogy egy f függvénynek van jobb oldali határértéke az a pontban, ha f a $\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)$ halmazra való leszűkítésének van határértéke az a pontban. Bal oldali határérték esetén a $\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)$ halmazra való leszűkítést nézzük. A határértékekre vonatkozó alaptételek az egyoldali határértékekre is érvényesek. Továbbá, ha az a pont bal és jobb oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor

$$\exists \lim_a f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \text{ és } \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f\ (= \lim_a f).$$

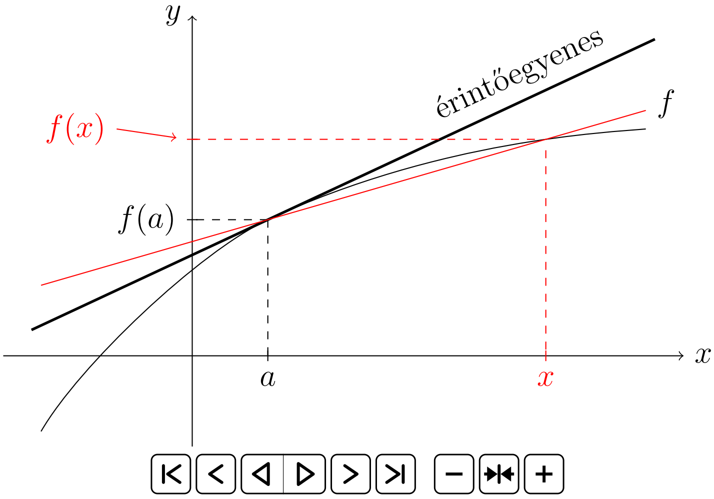
A derivált motivációja

A derivált definíciójának értelmezése előtt két olyan problémát vázolunk, amelyek jól megvilágítják a derivált értelmezésének szükségességét, sőt a definíció célszerű módját is sugallják.

1. ***Az érintőegyenes értelmezése:*** Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ és $a \in I$, ahol I egy nyílt intervallum. Hogyan tudjuk értelmezni és meghatározni az f függvény grafikonjához a abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes (vagy egyszerűen ***érintő***) egyenletét?

A geometriából olyan intuitív fogalmat kapunk az érintőről, amely igazán csak olyan speciális görbéknél alkalmazható, mint a kör vagy egyéb másodrendű görbék. Olyan fogalomra van szükségünk, ami általánosan alkalmazható, egyértelműen eldönthetjük, hogy létezik-e az érintő a megadott a abszcisszájú pontban, és ha igen, akkor meg tudjuk vele határozni az érintő egyenletét.

Tekintsük meg a következő animációt!



Ha x az I intervallumnak egy a-tól különböző pontja, akkor vegyük azt a szelőegyenest, amely az $(a, f(a))$ és az $(x, f(x))$ pontokon megy át (piros színnel ábrázolva). Mivel ismerjük a szelőegyenes két pontját, ezért ki tudjuk számolni a meredekségét. Ez természetesen függ az x érték megválasztásától, így a szelőegyenes meredekségét a következő függvény adja:

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (x \in I,\ x \neq a).$$

Az animációban látható, hogy ha az x érték elég közel van az a értékéhez, akkor a szelőegyenes egy „határegyenes” közelébe kerül, amit majd érintőnek fogjuk nevezni. A határegyenes az $(a, f(a))$ pontban megy át, meredeksége a szelőegyenesek meredekségének határértéke, ha $x \to a$. Ez precízen kifejezhető az F függvény a pontban vett határértékkel:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Célszerűnek tűnik tehát ezzel a határértékkel értelmezni az érintő meredekségét, ha a határérték létezik.

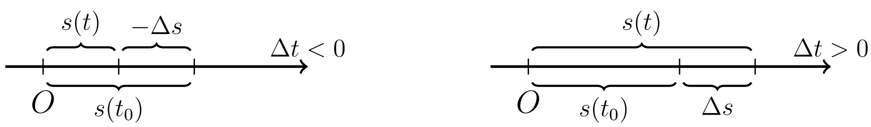
2. ***A pillanatnyi sebesség értelmezése:*** Tekintsük most a következő fizikai problémát. Egy pontszerű test akkor végez egyenletes mozgást egy egyenes pályán, hogy ha bármely megtett szakasz hosszát elosztjuk a szakasz megtételére szükséges idő nagyságával, akkor ugyanazt az értéket kapjuk. Ezt a hányadost a test ***sebességének*** nevezzük. Ha egy test nem mozog egyenletesen, akkor is beszélhetünk a test ***átlagsebességéről*** egy adott szakaszon, ami nem más, mint a szakasz hossza és az ennek megtételéhez szükséges idő hányadosa. Hogyan tudnánk egy test sebességét értelmezni egy adott időpontban?

Ha egy egészen kicsi időintervallumot nézünk, akkor azt várjuk, hogy ez idő alatt a sebesség nem változik jelentősen, így a mozgás közelítőleg egyenletes lesz. Ezért egy test sebességét egy adott időpontban úgy kellene értelmezni, mint egy kellően kis időtartamra vett átlagsebesség, de ez így nem elég precíz. A pontos értelmezéshez ismernünk kell a test mozgását az egyenes pályán a vizsgált I időintervallumban, azaz tudnunk kell milyen távolságban van a test egy, a pályán található O referenciaponttól a t időpillanatban, ahol $t \in I$. Jelölje $s(t)$ ezt a távolságot, de mivel két irány van, meg kell őket különböztetni. Legyen az $s(t)$ értéke pozitív, ha a t időpillanatban a test a referenciapont jobb oldalán, és negatív, ha a bal oldalán van. Ezt a függvényt a test ***elmozdulásfüggvényének*** hívjuk.

Vegyünk egy t_0 időpontot az I intervallum belsejéből! Ha $t \in I$ egy másik időpont, akkor $\Delta t := t - t_0$ a két időpont között eltelt idő előjelesen, azaz pozitív, ha $t > t_0$, és negatív, ha $t < t_0$. Ez idő alatt a test egy $\Delta s := s(t) - s(t_0)$ hosszúságú szakaszt tesz meg, ami szintén előjeles mennyiség. Ezért a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

különbséghányados a két időpont között eltelt időintervallumban megtett szakaszra vonatkozó átlagsebesség. Ez pozitív, ha a test pozitív irányba halad, és negatív, ha az ellenkező irányba.



Az elvárás szerint a test sebessége a t_0 időpontban egy kellően kis Δt időtartamra vett átlagsebesség. Ezért célszerű lenne egy egyenes pályán mozgó test ***pillanatnyi sebességét*** a t_0 időpontban a

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

határértékkel értelmezni, ami „figyel” a test haladási irányára, azaz pozitív, ha a test pozitív irányba halad, és negatív, ha az ellenkező irányba.

Vegyük észre, hogy az érintőegyenes meredekségének a meghatározásához kapott határérték azonos a pillanatnyi sebesség értelmezéséhez kapott határértékkel. A továbbiakban kiemelten foglalkozunk az ilyen típusú határértékekkel.

A pontbeli derivált fogalma

Egy adott függvény pontbeli deriváltját a függvény értelmezési tartományának olyan pontjaiban értelmezzük, amelyek valamely környezete is az értelmezési tartományhoz tartozik. Az ilyen pontokat belső pontoknak fogjuk nevezni.

1. Definíció. *Tegyük fel, hogy* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. *Az* $a \in A$ *pont az* A *halmaz* **belső pontja**, *ha*

$$\exists K(a), \text{ hogy } K(a) \subset A.$$

Az $\boxed{\operatorname{int} A}$ *szimbólummal jelöljük* **az *A* halmaz belső pontjainak a halmazát**.

Példák: a) Ha $A = [0, 1]$, akkor $\operatorname{int} A = (0, 1)$.

b) Ha $A = (5, 6] \cup \{7\}$, akkor $\operatorname{int} A = (5, 6)$.

c) Ha $A = \{2, 3, 4\}$, akkor $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Megjegyzés. Nem nehéz igazolni, hogy
$$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B. \qquad \blacksquare$$

2. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* **differenciálható** (*vagy* **deriválható**), *ha létezik és véges a*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
határérték. Ezt a határértéket az $\boxed{f'(a)}$ szimbólummal jelöljük, és **az f függvény a pontbeli deriváltjának** (*vagy* **differenciálhányadosának**) *nevezzük, azaz*
$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$
Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boxed{f \in D\{a\}}$.

Megjegyzések.

1. A fenti definícióban szereplő határértéket az $h = x - a$ helyettesítéssel gyakran így írjuk fel:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor az
$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$
függvényt ***az f függvény az a ponthoz tartozó különbséghányados-függvényének*** vagy ***differenciahányados-függvényének*** nevezzük.
3. A derivált definíciójában $0/0$-típusú kritikus határértékről van szó. A számláló a következő tétel állítása miatt fog tartani a nullához.

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

1. Tétel (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor*

a) $f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$,

b) Az állítás megfordítása nem igaz.

Bizonyítás.

a) Ha $f \in D\{a\}$, akkor
$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right) =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$
Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

b) Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := |x|$$

abszolút érték függvény az $a = 0$ pontban.

Valóban $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$, hiszen minden $x \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0), \end{cases}$$

és így

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Ezért az f függvény 0 pontbeli differenciálhányadosa nem létezik.

Az érintő fogalma

Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $(a, f(a))$ és az $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelőegyeneseknek van „határegyenese”, ha $x \to a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $(a, f(a))$ pontban, és a meredeksége $f'(a)$.

3. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontban* **van érintője**, *ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $(a, f(a))$ pontbeli* **érintőjén** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

Vegyük észre, hogy a $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték véges, ezért az érintő nem lehet párhuzamos az y-tengellyel.

Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója ekvivalens a középiskolában geometriai úton megadott definícióval. ■

1. Feladat. *A differenciálhányados fogalmának segítségével határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjéhez az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes egyenletét!*

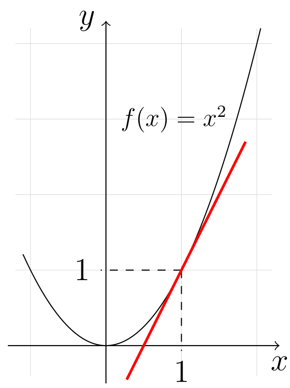
Megoldás. A differenciálhányados fogalma szerint

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

Másrészt $f(1) = 1^2 = 1$, így behelyettesíthetjük ezeket az érintő egyenes egyenletébe:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 2x - 1.$$



Megjegyzés. A pillanatnyi sebességről elmondottak alapján, egy egyenes pályán mozgó test v pillanatnyi sebessége egy t_0 időpontban úgy értelmezzük, mint az s elmozdulásfüggvény differenciálhányadosa ebben az időpontban, azaz

$$v(t_0) := s'(t_0) \qquad (t_0 \in I)$$

feltéve, hogy az s differenciálható a t_0 pontban. ■

Deriválási szabályok

A definíció alapján annak eldöntése, hogy egy adott függvény deriválható-e valamilyen pontban, esetenként szinte reménytelen feladat. Éppen ezért különös jelentőséggel bírnak azok az állítások, amelyek ezt megkönnyítik. Ezek az ún. ***deriválási szabályok***, amelyek segítségével bizonyos függvények differenciálhatóságából és deriváltjának ismeretéből következtetni tudunk további függvények differenciálhatóságára és deriváltjára.

2. Tétel (Algebrai műveletekre vonatkozó deriválási szabályok). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor*

1. *a szorzó konstansokat ki tudjuk emelni a deriválásból, azaz*

$$cf \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (cf)'(a) = cf'(a) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

2. *tagokból álló függvényeket tagonként deriválhatjuk, azaz*

$$f + g \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

3. *egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel, azaz*

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

4. *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás.

1. Nyilván $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{cf}$, hiszen $\mathcal{D}_{cf} = \mathcal{D}_f$. Másrészt

$$(cf)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} c \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a).$$

2. Nyilván $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f+g}$, hiszen $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Másrészt

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

3. Nyilván $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{fg}$, hiszen $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Másrészt

$$
\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(x)+f(a)\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)g(a)+f(a)g'(a),
\end{aligned}
$$

hiszen ha $g \in D\{a\}$, akkor $g \in C\{a\}$, és így $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

4. $\mathcal{D}_{f/g} = \Big\{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\Big\}$. Ha $g \in D\{a\}$, akkor $g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_g,\ \forall x \in K(a)\colon g(x) \neq 0,$$

hiszen a folytonos függvények előjeltartóak. Mivel $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, így feltételezhetjük, hogy $K(a)$ sugara olyan kicsi, hogy a fentiek mellet $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ is teljesül. Ekkor $K(a) \subset \mathcal{D}_{f/g}$, és így $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f/g}$. Másrészt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(a) - f(a)\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a} \right) = \\
&= \frac{1}{g(a)\lim\limits_{x\to a} g(x)} \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) = \\
&= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right).
\end{aligned}
$$

hiszen ha $g \in D\{a\}$, akkor $g \in C\{a\}$, és így $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Az összetett függvényre vonatkozó szabály azt mondja ki, hogy egy összetett függvény deriváltjához először a külső függvényt deriváljuk, miközben belseje érintetlen marad. Ezt utána még megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

3. Tétel (Összetett függvény deriváltja). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. A tétel feltételei alapján

$$f \in D\{g(a)\} \quad\Longrightarrow\quad g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \quad\Longrightarrow\quad \exists \varepsilon > 0\colon K_\varepsilon\big(g(a)\big) \subset \mathcal{D}_f,$$

illetve az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ feltétel miatt

$$g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\} \implies \varepsilon\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_g\colon g(x) \in K_\varepsilon\big(g(a)\big) \subset \mathcal{D}_f.$$

Ebből következik, hogy $K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$, azaz $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f\circ g}$.

Másrészt, jelölje $b := g(a)$ és $\varepsilon_g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$, $\varepsilon_f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ a következő függvényeket:

$$\varepsilon_g(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} - g'(a) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a), \end{cases} \qquad \varepsilon_f(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b} - f'(b) & (y \neq b) \\ 0 & (y = b). \end{cases}$$

Mivel $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{b\}$, így $\varepsilon_g \in C\{a\}$ és $\varepsilon_f \in C\{b\}$. Továbbá a fentiekből

$$g(x) - g(a) = g'(a)(x - a) + \varepsilon_g(x)(x - a) \qquad (x \in \mathcal{D}_g),$$
$$f(y) - f(b) = f'(b)(y - b) + \varepsilon_f(y)(y - b) \qquad (y \in \mathcal{D}_f).$$

Ezért, ha $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ és $y = g(x)$, akkor $y - b = g(x) - g(a)$ és

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big) &= f(y) - f(b) = f'(b)(y - b) + \varepsilon_f(y)(y - b) = \\ &= f'\big(g(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\big(g(x) - g(a)\big) = \\ &= f'\big(g(a)\big)\big(g'(a)(x - a) + \varepsilon_g(x)(x - a)\big) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\big(g'(a)(x - a) + \varepsilon_g(x)(x - a)\big) = \\ &= f'\big(g(a)\big)g'(a)(x - a) + \Big(f'(b)\varepsilon_g(x) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)g'(a) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\varepsilon_g(x)\Big)\,(x - a). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$\varepsilon_g \in C\{a\} \qquad\Longrightarrow\qquad \lim_{x\to a} \varepsilon_g(x) = \varepsilon_g(a) = 0.$$

Mivel $\varepsilon_f \in C\{b\}$, így alkalmazható az összetett függvény határértékére vonatkozó tételt:

$$\lim_{x\to a} \varepsilon_f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to b} \varepsilon_f(y) = \varepsilon_f(b) = 0.$$

Így

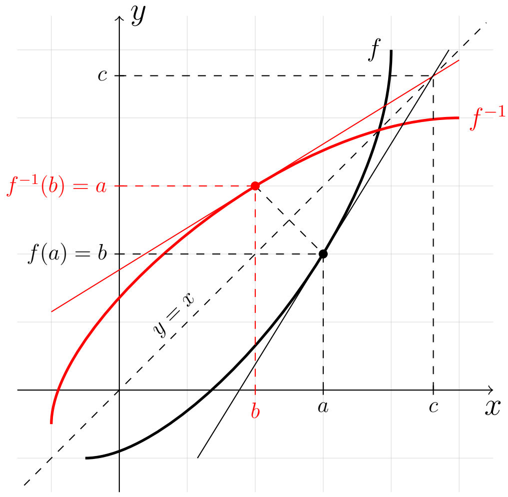
$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x - a} = \\ &= f'\big(g(a)\big)g'(a) + \lim_{x\to a} \Big(f'(b)\varepsilon_g(x) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)g'(a) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\varepsilon_g(x)\Big) = \\ &= f'\big(g(a)\big)g'(a) + f'(b)\cdot 0 + 0 \cdot g'(a) + 0 \cdot 0 = f'\big(g(a)\big)g'(a). \end{aligned}$$

Ezután foglalkozunk az inverz függvény differenciálhatóságával. Tegyük fel, hogy az f függvény invertálható. Emlékeztetünk arra, hogy az f és az f^{-1} függvények grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei.

Tekintsük az f függvény grafikonjának egy $(a, f(a)) = (a, b)$ pontját. Ennek tükörképe az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre a (b, a) pont. Mivel $a = f^{-1}(b)$, ezért a (b, a) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján.

Az f függvény grafikonjának $(a, f(a)) = (a, b)$ pontbeli érintőegyenesének tükörképe az f^{-1} függvény grafikonjának az $(f(a), a) = (b, a)$ pontbeli érintője. Ha az f-hez húzott érintő nem párhuzamos az x-tengellyel (vagyis $f^{-1}(a) \neq 0$), akkor a tükörképe nem párhuzamos az y-tengellyel. Ekkor a meredekségeik egymás reciprokai, vagyis

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$



$$f'(a) = \frac{c-b}{c-a}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{c-a}{c-b}.$$

4. Tétel (Inverz függvény deriváltja). *Legyen I egy nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) f szigorúan monoton és folytonos az I intervallumon,

b) valamilyen $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} függvény deriválható a $b = f(a)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha f szigorúan monoton, akkor invertálható és inverze is szigorúan monoton. Mivel $\mathcal{D}_f = I$ egy nyílt intervallum, illetve f szigorúan monoton és folytonos függvény, így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ is egy nyílt intervallum, ezért $b \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f^{-1}}$, illetve f^{-1} folytonos ennek az $\mathcal{R}_f$ nyílt intervallum minden pontjában.

Legyen $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$. Tudjuk, hogy $b = f(a)$ és $a = f^{-1}(b)$. Mivel f^{-1} egy-egyértelmű, ezért alkalmazhatjuk az $x = f^{-1}(y)$ helyettesítést az alábbi határértékben, ahol $x \to f^{-1}(b) = a$, ha $y \to b$ (f^{-1} folytonossága miatt), illetve $y = f(x)$:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)},$$

hiszen $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

5. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének deriváltja). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.

A deriváltfüggvény

Látni fogjuk, hogy a derivált a leghatékonyabb segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez lokálisan és globálisan is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke az f függvény a-beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket. (Egy ilyen kapcsolatot már találtunk, amikor beláttuk, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság.)

Ha viszont f egy A halmaz (például intervallum) minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. Erre azt mondjuk, hogy ***f* az *A* halmazon deriválható** vagy ***differenciálható***, és az $\boldsymbol{f \in D(A)}$ jelölést alkalmazzuk (vagy egyszerűen $\boldsymbol{f \in D(a,b)}$, ha $A = (a,b)$ egy intervallum).

Az alkalmazásokban legtöbbször olyan f függvények szerepelnek, amelyek valamely A halmazon (például intervallumon) deriválhatók. Célszerű tehát a deriválást olyan operációként felfogni, amely függvényekhez rendel függvényeket.

4. Definíció. *Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\left\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \;\middle|\; f \in D\{x\}\right\} \neq \emptyset$, akkor az*

$$\left\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \;\middle|\; f \in D\{x\}\right\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f **deriváltfüggvényének** *(vagy* **differenciálhányados-függvényének***) nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük.*

Néhány speciális függvény deriváltja

`Ebben a táblázatban` felsoroltuk azokat a nevezetes elemi függvényeket, amelyek deriváltjait meg kell jegyezni. Ezek közül néhánynak a bizonyítását most megmutatjuk.

$\boxed{1.}$ ***Konstans függvények.*** Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

konstans függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és deriváltja

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})} \qquad \text{vagyis} \qquad \boxed{\left(c\right)' = 0 \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, és

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0. \quad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ ***Hatványfüggvények.*** Tetszőleges n természetes szám esetén az

$$f(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványfüggvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és deriváltja

$$\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, és

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\Big[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\Big]}{h} = nx^{n-1}$$

a hatványfüggvény folytonossága alapján. Az előző határérték kiszámításában a következő azonosságot alkalmaztuk:

$$a^n - b^n = (a-b)\Big(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\Big). \quad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ ***A természetes alapú exponenciális függvény*** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\exp'(x) = (e^x)' = e^x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}.$$

Bizonyítás. Az exp függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp \in D\{x\}$, és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} = (\ k := n-1\ ) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\, x^k = \exp(x) = e^x. \qquad \blacksquare$$

Megjegyzés. Az állítás úgy is megfogalmazható, hogy az **exp *függvény deriváltfüggvénye önmaga***. Tulajdonképpen ez az összefüggés indokolja, hogy az e számot tekintjük az analízis (és általában a matematika) egyik legfontosabb állandójának.

$\boxed{4.}$ ***A természetes alapú logaritmusfüggvény*** minden $x \in (0, +\infty)$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy az ln függvényt az exp függvény inverzeként értelmeztük:

$$\ln := \exp^{-1}.$$

Az exp függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty) = \mathcal{D}_{\ln}$ pontban $\ln \in D\{x\}$, és

$$\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{\exp'\big(\ln x\big)} = \frac{1}{\exp\big(\ln x\big)} = \frac{1}{x}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{5.}$ ***Exponenciális függvények.*** Ha $a > 0$ valós szám, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\exp_a'(x) = (a^x)' = a^x \ln a \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a > 0$ valós szám esetén az a alapú exponenciális függvényt így értelmeztük:

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \ln a) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $f := \exp$ és $g(x) := x \ln a$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor

$$\exp_a = f \circ g.$$

Az exp és az összetett függvény deriválására vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy az $\exp_a$ függvény minden $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\exp_a}$ pontban deriválható, és

$$\exp_a'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a. \quad \blacksquare$$

$\boxed{6.}$ ***Logaritmusfüggvények.*** Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor $\forall x \in (0, +\infty)$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ esetén az a alapú logaritmusfüggvényt így értelmeztük:

$$\log_a := \big(\exp_a\big)^{-1}.$$

Az $\exp_a$ függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty) = \mathcal{D}_{\log_a}$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{\exp_a'\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot \exp_a\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{x \ln a}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{7.}$ ***Általánosított hatványfüggvények.*** Ha α tetszőleges valós szám, akkor a

$$h_\alpha : (0,+\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$$

általánosított hatványfüggvény minden $x \in (0,+\infty) = \mathcal{D}_{h_\alpha}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \Big(x \in (0,+\infty)\Big)}\,.$$

Megjegyzünk, hogy ha felírjuk az $x > 0$ alapot e-hatványként, akkor $x = e^{\ln x}$. Ekkor

$$x^\alpha = \Big(e^{\ln x}\Big)^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad (x > 0).$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot. Alkalmazzuk az összetett függvény deriválására vonatkozó szabályt! Azt kapjuk, hogy minden $x > 0$ esetén $h_\alpha \in D\{x\}$, és

$$h_\alpha'(x) = (x^\alpha)' = \Big(e^{\alpha \ln x}\Big)' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{8.}$ ***A szinuszfüggvény*** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\sin' x = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R})}\,.$$

Bizonyítás. A szinuszfüggvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\sin \in D\{x\}$, és

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot (2n+1)\, \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x). \quad \blacksquare$$

$\boxed{9.}$ ***A koszinuszfüggvény*** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\cos' x = -\sin x \qquad (x \in \mathbb{R})}\,.$$

Bizonyítás. A koszinuszfüggvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\cos \in D\{x\}$, és

$$\cos'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 2n\, \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot 2n\, \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = (\ k := n-1\ ) = -\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x). \quad \blacksquare$$