(Hf) 1. A def. alapján igazolni, hogy $f(x,y) := x^3 + xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény totálisan deriválható az $a = (2,3)$ pontban! $f'(a) = ?$ Ellenőrizni az eredmény a Jacobi-mátrix kiszámításával!

<u>Megoldás</u>. <u>A deriválhatóság igazolása</u>.

! $a = (2,3)$, $h = (h_1, h_2) \Rightarrow a+h = (2+h_1, 3+h_2)$

$$f(a+h) - f(a) = (2+h_1)^3 + (2+h_1)(3+h_2) - \left[2^3 + 2\cdot 3\right] =$$

$$= \cancel{2^3} + \underline{3\cdot 2^2 \cdot h_1} + 3\cdot 2\cdot h_1^2 + h_1^3 + \cancel{6} + \underline{2h_2} + \underline{3h_1} + h_1h_2 - \cancel{2^3} - \cancel{6} =$$

$$= 15h_1 + 2h_2 + h_1^3 + h_1h_2 + 6h_1^2 = \underbrace{(15 \ \ 2)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}_{Ah} + h_1^3 + h_1h_2 + 6h_1^2$$

Legyen $A := (15 \ \ 2)$. Ezzel

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{\|h\|} = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{|h_1^3 + h_1h_2 + 6h_1^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

hiszen a Rendőr-elv miatt

$$0 \le \frac{|h_1^3 + h_1h_2 + 6h_1^2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{|h_1|\cdot|h_1^2 + h_2 + 6h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\sqrt{h_1^2}\,|h_1^2 + h_2 + 6h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\cdot|h_1^2 + h_2 + 6h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = |\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{h_1^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{h_2} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{6h_1}| \to 0.$$

Ezért a definíció értelmében $f'(a) = A = (15 \ \ 2)$.

<u>Ellenőrzés</u>

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 + y, \qquad \partial_2 f(x,y) = x.$$

Így $\partial_1 f(2,3) = 3\cdot 2^2 + 3 = 15$, $\partial_2 f(2,3) = 2$.

Ezért a Jacobi-mátrix $f'(2,3) = (\partial_1 f(2,3) \ \ \partial_2 f(2,3)) =$
$= (15 \ \ 2)$,

ami megegyezik a kapott A mátrixszal.

(Hf) 2. Írja fel a $z = x^2 e^{xy}$ felület $P_0(1,0)$ pontjához tartozó érintősíkjának egyenletét, és adja meg a sík normálvektorát!

Megoldás. ! $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ $\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

A deriválási szabályok alapján f differenciálható (totálisan) minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, tehát a $P_0(1,0)$ pontban is, és

$$\partial_1 f(x,y) = 2x e^{xy} + x^2 e^{xy} y = (2x + x^2 y) e^{xy},$$

$$\partial_2 f(x,y) = x^2 e^{xy} \cdot x = x^3 e^{xy}.$$

Ezért $\quad \partial_1 f(1,0) = (2 \cdot 1 + 0) e^0 = 2,$

$$\partial_2 f(1,0) = 1^3 \cdot e^0 = 1.$$

Másrészt: $\quad f(1,0) = 1^2 \cdot e^0 = 1.$

A keresett érintősík egyenlete

$$z - f(1,0) = \partial_1 f(1,0) \cdot (x-1) + \partial_2 f(1,0) \cdot (y-0),$$

azaz $\quad z - 1 = 2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) \quad \Rightarrow \quad \underline{2x + y - z = 1}.$

A keresett normálvektor: $\underline{\vec{n}(2, 1, -1)}.$

(Hf) 3. Határozza meg az $f(x,y) := 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. A függvény kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^2$-ön, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel.

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 6x^2 - 6 = 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 3y^2 - 12 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 &= 1 \\ y^2 &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \pm 1 \\ y &= \pm 2 \end{aligned}.$$

A stacionárius pontok: $P_1(1,2)$, $P_2(1,-2)$, $P_3(-1,2)$, $P_4(-1,-2)$.
Lokális szélsőérték csak ezekben a pontokban lehet.

Másodrendű elégséges feltétel.

$$\partial_{11} f(x,y) = 12x, \quad \partial_{12} f(x,y) = 0,$$
$$\partial_{21} f(x,y) = 0, \quad \partial_{22} f(x,y) = 6y.$$

Ebből

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} D_2(x,y) &= \det f''(x,y) = 72xy \\ D_1(x,y) &= \partial_{11} f(x,y) = 12x \end{aligned}$$

Ekkor

- A $P_1(1,2)$ pontban lokális minimum van, mert $D_2(1,2) > 0$ és $D_1(1,2) > 0$.
- A $P_4(-1,-2)$ pontban lokális maximum van, mert $D_2(-1,-2) > 0$ és $D_1(-1,-2) < 0$.
- A $P_2(1,-2)$ és $P_3(-1,2)$ pontban nincs lokális szélsőérték, mert $D_2(1,-2) = D_2(-1,2) < 0$.