

3. gyakorlat

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTAL 1.

Monotonitás és lokális szélsőértékek

Emlékeztető. A monotonitás és a derivált kapcsolata:

Tétel. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Ekkor

- $f \nearrow$ [illetve \searrow] (a, b) -n $\iff f' \geq 0$ [illetve $f' \leq 0$] (a, b) -n,
- ha $f' > 0$ [illetve $f' < 0$] (a, b) -n $\implies f \uparrow$ [illetve \downarrow] (a, b) -n.

Fontos megjegyezni, hogy a tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény.

Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban **lokális maximuma** van, ha

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f, \forall x \in K(a): f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az a pontot **f lokális maximumhelyének** nevezzük, az $f(a)$ függvényérték pedig a függvény **lokális maximuma**.

Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimum** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen **lokális szélsőértéknek**, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet **lokális szélsőértékhelynek** nevezzük.

Tétel. (Elsőrendű szükséges feltétel) Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor $f'(a) = 0$.

Jegyezzük meg, hogy az $f'(a) = 0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy az f függvénynek a -ban lokális szélsőértéke legyen (tekintsük például az $f(x) := x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) függvényt és az $a = 0$ pontot). Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális szélsőértékhelyek csak olyan a pontokban lehetnek, ahol $f'(a) = 0$. Ezek az f függvény **stacionárius pontjai**.

Tétel. (Elsőrendű elégséges feltétel) Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$ és egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$, továbbá az f' deriváltfüggvény előjelet vált c -ben. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely, és

- ha f' -nek c -ben $(-, +)$ előjelváltása van, akkor c az f függvény lokális minimumhelye,
- ha f' -nek c -ben $(+, -)$ előjelváltása van, akkor c az f függvény lokális maximumhelye.

Tétel. (Másodrendű elégséges feltétel) Tegyük fel, hogy egy $c \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban $f \in D^2\{c\}$, $f'(c) = 0$ és $f''(c) \neq 0$. Ekkor c egy lokális szélsőértékhely, és

- ha $f''(c) > 0$, akkor c az f függvény lokális minimumhelye,
- ha $f''(c) < 0$, akkor c az f függvény lokális maximumhelye.

1. Feladat. Határozzuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az alábbi függvények monoton, és számítsa ki a függvények lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

a) $f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \frac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}).$

Megoldás.

a) f polinomfüggvény, ezért $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1)' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = \\ &= 5x^2(x-3)(x-1) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

A monotonitás vizsgálatához előjelvizsgálatot végzünk az f' függvény, amely folytonos, és

$$f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, x = 1 \text{ vagy } x = 3.$$

Így kapunk négy intervallumot, ahol f' nem vált előjelet.

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 3), \quad (3, +\infty).$$

A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f monotonitására vonatkozóan.

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
f'	+	0	+	0	-	0	+
lok.	↑	-	↑	max	↓	min	↑

Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális szélsőérték csak olyan x pontokban lehet, ahol $f'(x) = 0$ teljesül (stacionárius pontok). Ezeket már meghatároztunk, nevezetesen $x = 0$, $x = 1$ vagy $x = 3$. Mivel az $f'(x) = 0$ feltétel nem elégséges, így ezután kétféle módon járhatunk el annak eldöntése, hogy melyik lokális szélsőérték hely, és ez minimum- vagy maximumhely lesz-e.

1. Az elsőrendű elégséges feltétel alapján megvizsgáljuk f' előjelváltását a stacionárius pontokban. Ha nem jelent nehézséget, érdemes megvizsgálni a teljes f' függvény előjelét a monotonitási vizsgálatához hasonlóan, de az előjelváltás egyéb megfontolásokkal is meghatározható. Az előző táblázat már tartalmazta az előjelvizsgálatot, így hozzátettük ennek következményeit az f lokális szélsőértékeire vonatkozóan.
 - A 0 pont nem lokális szélsőérték hely (a függvény szigorúan monoton növekvő a pont egyik környezetében).
 - Az 1 pont lokális maximum hely, és itt a lokális maximum $f(1) = 2$.
 - A 3 pont lokális minimum hely, és itt a lokális minimum $f(3) = -26$.
2. A másodrendű elégséges feltétel alapján megvizsgáljuk f'' értékét a stacionárius pontokban.

$$f''(x) = (5x^4 - 20x^3 + 15x^2)' = 20x^3 - 60x^2 + 30x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- $f''(0) = 0$, ezért a 0 pontról nem derül ki, hogy lokális szélsőérték hely vagy sem. Monotonitási vizsgálat után kiderül, hogy nem lokális szélsőérték hely.
- $f''(1) = -10 < 0$, ezért az 1 pont lokális maximum hely. Itt a lokális maximum $f(1) = 2$.
- $f''(3) = 90 > 0$, ezért a 3 pont lokális minimum hely. Itt a lokális minimum $f(3) = -26$.

- b) Mivel $x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$, ezért a tört valóban értelmezhető a megadott halmazon. Az elemi függvények deriváltjai, valamint a deriválási szabályok alapján azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R} \setminus \{2, 8\})$ és

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 10x + 16) - x(2x - 10)}{(x^2 - 10x + 16)^2} = \frac{16 - x^2}{(x^2 - 10x + 16)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}).$$

Mivel f' folytonos minden $x \neq 2$ és $x \neq 8$ pontban, így csak az $x = 2$, $x = 8$ és az f' zérushelyei olyan pontok, ahol eltérhet f' előjele a pont bal és jobb oldali környezetén. Világos, hogy

$$f'(x) = \frac{(4 - x)(4 + x)}{(x^2 - 10x + 16)^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -4 \text{ vagy } x = 4.$$

Ezzel öt részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele:

$$(-\infty, -4), \quad (-4, 2), \quad (2, 4), \quad (4, 8) \quad \text{és} \quad (8, +\infty).$$

A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményét az f monotonitására vonatkozóan.

	$x < -4$	-4	$-4 < x < 2$	$2 < x < 4$	4	$4 < x < 8$	$x > 8$
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	\downarrow	min	\uparrow	\uparrow	max	\downarrow	\downarrow

Az elsőrendű szükséges feltétel szerint lokális szélsőérték csak olyan x pontokban lehet, ahol $f'(x) = 0$ teljesül, azaz $x = -4$ vagy $x = 4$. A táblázatban látható f' függvény előjelváltása alapján, azaz az elsőrendű elégséges feltétel alapján, rögtön meghatározhatjuk a lokális szélsőértékeket.

- A -4 pont lokális minimumhely, és itt a lokális minimum $f(-4) = -1/18$.
- A 4 pont lokális maximumhely, és itt a lokális maximum $f(4) = -1/2$.

Abszolút szélsőértékek

Emlékeztető. Az Analízis I. kurzuson tanultuk az abszolút szélsőértékek fogalmát.

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek **van abszolút maximuma**, ha van olyan $\alpha \in \mathcal{D}_f$, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ pontban $f(x) \leq f(\alpha)$. Ekkor α az f -nek **abszolút maximumhelye**, az $f(\alpha)$ pedig f **abszolút maximuma**. Hasonlóan értelmezzük az **abszolút minimumhelyet** és **abszolút minimumot**.

Tétel. (Weierstrass-tétel) Korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos f függvénynek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$, hogy $f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ ($x \in [a, b]$).

Abszolút szélsőértékhelyek keresése. Ha f folytonos egy korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon, akkor a Weierstrass-tétel szerint f -nek van legnagyobb és legkisebb értéke. Ha f ezek valamelyikét egy c pontban veszi fel, akkor vagy $c = a$, vagy $c = b$, vagy pedig $c \in (a, b)$. Ez utóbbi esetben lokális szélsőértékről van szó. Ha feltesszük még azt is, hogy $f \in D(a, b)$, akkor $f'(c) = 0$. Ha tehát megkeressük az összes olyan $c \in (a, b)$ pontot, amelyben f' eltűnik, azaz **az (a, b) -n lévő stacionárius pontokat**, akkor biztos, hogy **az abszolút szélsőértékhelyek ezek közül, valamint az a és a b végpontok közül kerülnek ki**. Például az abszolút maximumhelyet úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk f értékeit ezekben a pontokban (nem feledkezve meg az a és b végpontokról sem), és kiválasztjuk azokat, amelyekben f értéke a legnagyobb.

2. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + 1} \quad \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]\right)$$

függvény abszolút szélsőérték helyeit és abszolút szélsőértékeit!

Megoldás. Mivel $f \in C[-1/2, 2]$, ezért Weierstrass tétele szerint f -nek léteznek abszolút szélsőértékei.

A stacionárius pontok meghatározása: a deriválási szabályok szerint $f \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = 1 \text{ vagy } x = -1.$$

f stacionárius pontjai: $x_1 = 1$ vagy $x_2 = -1$. Mivel $-1 \notin [-1/2, 2]$, ezért csak az x_1 pontot tekintjük.

A függvényértékek összehasonlítása: Mivel

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{5}, \quad f(2) = \frac{2}{5},$$

ezért

- f abszolút minimumhelye $-1/2$, és abszolút minimuma $-2/5$.
- f abszolút maximumhelye 1 , és abszolút maximuma $1/2$.

Szöveges szélsőértékfeladatok

Megmutatjuk, hogyan tudunk megoldani konkrét gyakorlati szélsőértékfeladatokat a tanult differenciálszámítási tételekkel. Az a feladat, hogy meg kell találni mikor lesz optimális egy bizonyos mennyiség, melynek értéke folytonosan változik. A megoldás lényege, hogy felírjuk az optimalizálandó mennyiséget egy másik változó mennyiség függvényeként, ami csak egy intervallum belül „mozoghat”, és az így kapott függvény abszolút szélsőértékét megkeressük.

Azonban sok esetben nem korlátos vagy nem zárt intervallumon történő abszolút szélsőérték-keresésről van szó. Ekkor a Weierstrass-tétel nem alkalmazható, és előfordulhat, hogy nincs is abszolút szélsőérték. A feladatot egy összetett monotonitási és lokális szélsőértékvizsgálattal próbálhatjuk megoldani, de vannak olyan esetek, ahol az abszolút szélsőérték könnyebben meghatározható.

Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$, $f' \in C(a, b)$ (pl. ha $f \in D^2(a, b)$) és egyetlen olyan $c \in (a, b)$ létezik, amire $f'(c) = 0$ teljesül. A folytonosság miatt f' csak a c pontban tud előjelet váltani. Ezért f szigorúan monoton az (a, c) és a (c, b) intervallumon. Ha az elégséges feltételek egyikéből kiderül, hogy c lokális szélsőérték hely, akkor f' előjelet vált a c pontban, és így f monotonitása különbözni fog az (a, c) és a (c, b) intervallumon. Így c abszolút szélsőérték hely is.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő!

Megoldás. Jelölje x és y a két pozitív számot, melyek összege az állandó a szám, azaz $x + y = a$. Szeretnénk megtudni, hogy mikor lesz maximális az xy szorzat. Ez x -től és y -től is függ, azaz nem tekinthető egyváltozós függvénynek, de mivel összegük a -val egyenlő, így $y = a - x$, amiből következik, hogy

$$xy = x(a - x) = ax - x^2,$$

ahol $0 < x < a$. Tehát az

$$f(x) = ax - x^2 \quad (0 < x < a)$$

függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $f \in D^2(0, a)$ és

$$f'(x) = a - 2x, \quad f''(x) = -2 \quad (0 < x < a).$$

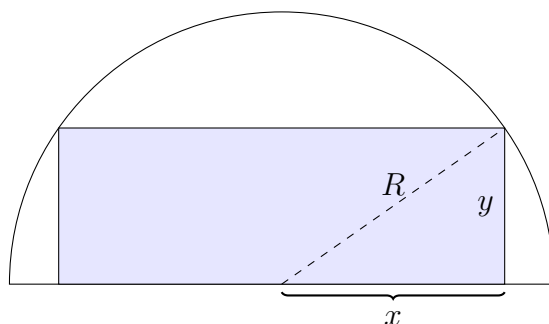
$f'(x) = a - 2x = 0 \iff x = a/2$. Mivel $f''(a/2) = -2 < 0$, így a másodrendű elégséges feltétel szerint $x = a/2$ az f függvény lokális maximumhelye. Ez abszolút maximumhely is, mert $f \in D^2(0, a)$ és az $f'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van.

Az előbbieket szerint xy akkor a legnagyobb, ha $x = a/2$ miközben $y = a - x = a/2$, azaz $x = y$, amivel az állítást igazoltuk.

4. Feladat. Határozzuk meg egy R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű téglalap méreteit, ha a téglalap egyik oldala a félkör átmérőjén fekszik!

Megoldás. A feladatot kétféle módon fogjuk megoldani.

1. Megoldás. Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



A téglalapok területe $T = 2xy$. Nyilvánvaló, hogy elegendő azokat a téglalapokat venni, amelyek belülről érintik a kört. Ekkor

$$x^2 + y^2 = R^2 \implies y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Ezért

$$T = 2xy = 2x\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2x^2 - x^4},$$

ahol $0 < x < R$. Vegyük észre, hogy T akkor is csak akkor a legnagyobb, ha $R^2x^2 - x^4$ a legnagyobb. Emiatt az

$$f(x) = R^2x^2 - x^4 \quad (0 < x < R)$$

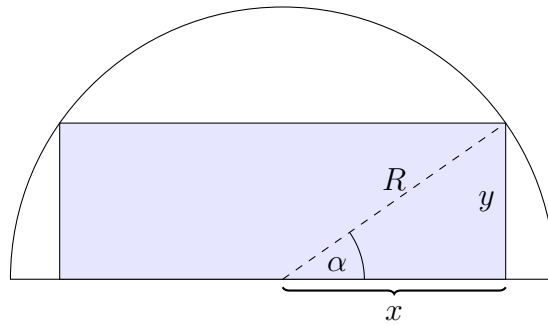
függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $f \in D^2(0, R)$ és

$$f'(x) = 2R^2x - 4x^3, \quad f''(x) = 2R^2 - 12x^2 \quad (0 < x < R).$$

$f'(x) = 2x(R^2 - 2x^2) = 0 \iff x = R/\sqrt{2}$ (a $(0, R)$ -n). Mivel $f''(R/\sqrt{2}) = -4R^2 < 0$, így a másodrendű elégséges feltétel szerint $x = R/\sqrt{2}$ az f függvény lokális maximumhelye. Ez abszolút maximumhely is, mert $f \in D^2(0, R)$ és az $f'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0, R)$ intervallumon.

Az előbbiek szerint T akkor a legnagyobb, ha $x = R/\sqrt{2}$ miközben $y = \sqrt{R^2 - x^2} = R/\sqrt{2}$, azaz $x = y$. Ezért a téglalap területe akkor a legnagyobb, ha a félkör átmérőjén fekvő oldal kétszer akkora, mint a rá merőleges oldal.

2. Megoldás. Alkalmazzuk az ábra jelöléseit!



A téglalapok területe $T = 2xy$. Nyilvánvaló, hogy elegendő azokat a téglalapokat venni, amelyek belülről érintik a kört. Ekkor

$$x = R \cos \alpha \quad \text{és} \quad y = R \sin \alpha.$$

Ezért

$$T = 2xy = 2R \cos \alpha R \sin \alpha = R^2 \sin 2\alpha,$$

ahol $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tehát a

$$T(\alpha) = R^2 \sin 2\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

függvénynek keressük az abszolút maximumhelyét. A deriválási szabályok szerint igaz, hogy $T \in D^2(0, \pi/2)$ és

$$T'(\alpha) = 2R^2 \cos 2\alpha, \quad T''(\alpha) = -4R^2 \sin 2\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

$T'(\alpha) = 2R^2 \cos 2\alpha = 0 \iff \alpha = \pi/4$. Mivel $T''(\pi/4) = -4R^2 < 0$, így a másodrendű elégséges feltétel szerint $\alpha = \pi/4$ a T függvény lokális maximumhelye. Ez abszolút maximumhely is, mert $T \in D^2(0, \pi/2)$ és az $T'(x) = 0$ egyenletnek egyetlen megoldása van a $(0, \pi/2)$ intervallumon.

Az előbbiek szerint T akkor a legnagyobb, ha

$$x = R \cos \alpha = R \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}R}{2} \quad \text{és} \quad y = R \sin \alpha = R \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}R}{2},$$

azaz $x = y$. Ezért a téglalap területe akkor a legnagyobb, ha a félkör átmérőjén fekvő oldal kétszer akkora, mint a rá merőleges oldal.

5. Feladat. Keresse meg a $P(1,4)$ ponthoz legközelebbi pontot az $y^2 = 2x$ egyenletű parabolán!

Megoldás. Készítsünk ábrát!

Egy $Q(x, y)$ pont akkor és csak akkor a parabolán van, ha

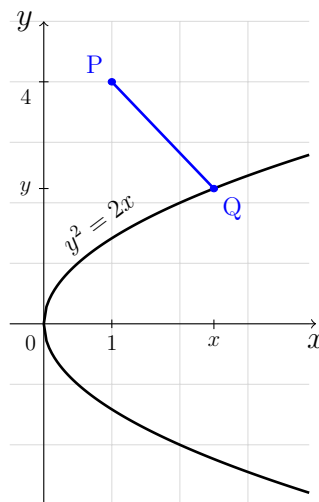
$$y^2 = 2x \quad (x > 0, y \in \mathbb{R}).$$

A két pont távolságát adó összefüggés szerint

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2},$$

ami $x = y^2/2$ figyelembevételével felírható:

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1 \right)^2 + (y-4)^2}.$$



A feladat megoldásához elegendő lenne megkeresni a gyökös kifejezés minimumát, ahol $y \in \mathbb{R}$. Legyen tehát

$$\begin{aligned} f(y) &:= \left(\frac{y^2}{2} - 1 \right)^2 + (y-4)^2 = \frac{y^4}{4} - y^2 + 1 + y^2 - 8y + 16 = \\ &= \frac{y^4}{4} - 8y + 17 \quad (y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ekkor

$$f'(y) = y^3 - 8 = 0 \quad \implies \quad y = 2,$$

ami az egyetlen megoldás. Továbbá

$$f''(y) = 3y^2 = 0 \quad \implies \quad f''(2) > 0.$$

Ezért az f függvénynek abszolút minimuma van az $y = 2$ pontban, és ekkor $x = 2^2/2 = 2$. Összefoglalva, $Q(2, 2)$ az a pont az $y^2 = 2x$ egyenletű parabolán, ami a legközelebb van a $P(1, 4)$ ponthoz.