# Diszkrét matematika I. feladatok
## Logika
*Első alkalom (2024.02.10-14.)*

### Bemelegítő feladatok

1. Pozitív egészeket tekintve, jelölje $P(x)$, $E(x)$, $O(x)$, illetve $D(x, y)$ rendre azt, hogy $x$ prím, páros, páratlan, illetve hogy $x$ osztója $y$-nak. Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás. Tagadjuk a formulákat formálisan. Tagadjuk a formulákat köznyelvileg. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás tagadása.

   a) $P(7)$; b) $(E(2) \wedge P(2))$; c) $(\forall x(D(2, x) \Rightarrow E(x)))$; d) $(\exists x(E(x) \wedge D(x, 6)))$;
   e) $(\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2, x)))$; f) $(\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x, y) \Rightarrow E(y)))))$;
   g) $(\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(E(y) \wedge D(x, y)))))$; h) $(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y)))))$;
   i) $((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge (\exists y(\neg x = y \wedge E(y) \wedge P(y)))))))$.

### Gyakorló feladatok

2. Az embereket tekintve, jelölje $J(x)$, $B(x)$, $U(x)$, $I(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x, y)$, illetve $T(x, y)$ rendre azt, hogy $x$ jogász, bíró, ügyeskedő, idős, életerős, politikus, képviselő, nő, illetve hogy $x$ házastársa $y$-nak, valamint hogy $x$ tiszteli $y$-t. Formalizáljuk az alábbi állításokat:

   a) minden bíró jogász;
   b) vannak ügyeskedő jogászok;
   c) nincs ügyeskedő bíró;
   d) bizonyos bírók idősek, de életerősek;
   e) $d$ bíró sem nem idős, sem nem életerős;
   f) a bírók kivételével minden jogász ügyeskedő;
   g) néhány jogász, aki politikus, képviselő is;
   h) egyetlen képviselő felesége sem idős;
   i) minden idős képviselő jogász;
   j) van olyan nő, aki jogász és képviselő;
   k) minden olyan nő, aki jogász, tisztel néhány bírót;
   l) bizonyos jogászok csak bírókat tisztelnek.

3. Az embereket tekintve, jelölje $N(x)$ illetve $G(x, y)$ azt, hogy $x$ nő, illetve $x$ gyereke $y$-nak. Definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: $x$ az $y$-nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja, apai nagyapja, anyai nagyapja, apai nagyanyja, anyai nagyanyja, testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, nagynénje, unokaöccse, unokahúga.

## Érdekes feladatok

4. Egy táncmulatságon fiúk és lányok táncolnak. Jelölje $T(L, F)$, hogy az $L$ lány táncolt az $F$ fiúval. Mit jelentenek az alábbi formulák? Döntsük el, hogy melyik következik a másikból. (Egy formulából következik egy másik formula, ha valahányszor az egyik igaz, a másik is.) Melyik a legerősebb, ill. leggyengébb állítás?

   a)
   $$\begin{array}{lll} \exists L \forall F\ T(L,F), & \forall F \exists L\ T(L,F), & \exists F \forall L\ T(L,F), \\ \forall L \exists F\ T(L,F), & \forall L \forall F\ T(L,F), & \exists L \exists F\ T(L,F); \end{array}$$

   b) $\neg \exists L \exists F\ T(L,F)$, $\forall F \exists L\ \neg T(L,F)$, $\forall L \exists F\ \neg T(L,F)$, $\forall L \forall F\ \neg T(L,F)$

5. Legyenek $A, B, C$ predikátumok. Igazolja a következő állításokat igazságtáblázat segítségével:

   a) $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$
   b) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ és $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
   c) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ és $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   d) $A \oplus B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

## Házi feladatok

6. Jelölje $P(p)$, hogy a $p$ egy pont, $L(\ell)$, hogy az $\ell$ egy egyenes, $I(p, \ell)$, hogy a $p$ pont rajta van az $\ell$ egyenesen. Mit jelentenek az alábbi formulák? Döntse el a formulák igazságértékét! Írja le a formulák tagadását! (**részenként 1/3 pont**)

   a) $\forall \ell\, \exists p\, I(p, \ell)$
   b) $\exists \ell\, \forall p\, I(p, \ell)$
   c) $\forall p_1\, \forall p_2\, \exists \ell\, I(p_1, \ell) \wedge I(p_2, \ell)$
   d) $\forall \ell_1\, \forall \ell_2\, \exists p\, I(p, \ell_1) \wedge I(p, \ell_2)$
   e) $\forall \ell\, \exists p\, \neg I(p, \ell)$
   f) $\forall \ell\, \forall p\, (\neg I(p, \ell) \Rightarrow \exists \ell'\, I(p, \ell') \wedge (\forall p' I(p', \ell) \Rightarrow \neg I(p', \ell')))$

7. A 2. feladat jelöléseivel formalizálja az alábbi állításokat! (**részenként 1/3 pont**)

   a) vannak idős képviselők;
   b) minden életerős politikus házas;
   c) vannak idős politikusok;
   d) bizonyos férfiak, akik bírók, életerősek is;
   e) minden ügyeskedő bíró házas;
   f) vannak olyan idős bírók, akiknek politikus férjük van.