

Diszkrét matematika I. feladatok

Halmazok

Második alkalom (2024.02.19-123.)

1. Keressen olyan A, B, C halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

2. Bizonyítsa be, hogy $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$.

3. Legyenek $x = \{\text{alma, szilva}\}$ és $y = \{\text{kutya, macska}\}$ halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy x eleme, x részhalmaza, x se nem eleme, se nem részhalmaza: $\{\{x\}, y\}$, x , $\{\emptyset\} \cap x$, $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$, $\{x\} \cup x$, $\{x\} \cup \{\emptyset\}$?

4. Legyen $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ és

$$A = \{\mathbf{v} : M\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad B = \{\mathbf{v} : M^2\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad C = \left\{ \mathbf{v} : M\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Adja meg a következő halmazokat

$$A \cup B; \quad A \cap B; \quad A \triangle B \quad A \cup C, \quad A \cap C \quad A \triangle C.$$

5. Igazolja, hogy

$$\text{a) } A \triangle \emptyset = A; \quad \text{b) } A \triangle A = \emptyset; \quad \text{c) } A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C; \quad \text{d) } A \triangle (A \triangle B) = B.$$

6. Fejezze ki a \triangle és \cap segítségével a következő halmazokat: $A \setminus B$ és $A \cup B$.

7. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.

8. Bizonyítsa be, hogy

$$\text{a) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

$$\text{e) } A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C;$$

$$\text{b) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$

$$\text{f) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\text{c) } A \setminus B = A \cap \overline{B};$$

$$\text{g) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{d) } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

9. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazokra:

$$(A \cup B) \setminus A = B; \quad (A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C); \quad (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

10. Bizonyítsa be a következő összefüggéseket: $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C)} \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

11. Egyszerűsítse amennyire lehet a következőket: $\overline{A \cup (B \cap (C \cup \overline{D}))}$, $\overline{(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})}$.

12. Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ és $C = \{2, 3, 4\}$. Határozza meg a következő halmazokat

$$\text{a) } A \times A;$$

$$\text{f) } (A \times A) \times B;$$

$$\text{b) } A \times B;$$

$$\text{g) } A \triangle B;$$

$$\text{c) } A \times A \times B;$$

$$\text{h) } A \triangle C;$$

$$\text{d) } B \times A;$$

$$\text{i) } (A \times B) \triangle (C \times B)$$

$$\text{e) } (A \times A) \times B;$$