

## 2. előadás

### DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 2.

#### Egyoldali pontbeli deriváltak

Vannak olyan esetek, amikor a differenciálhányados létezése a bal és a jobb oldali határértékek egyezését szükséges vizsgálni. Például, az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

abszolút érték függvény az  $a = 0$  pontban nem differenciálható, mert

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = 1.$$

Érdemes tehát az egyoldali pontbeli deriváltakat értelmezni.

**1. Definíció.** Legyen  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \mathcal{D}_f$  olyan pont, hogy  $\exists \delta > 0: [a, a + \delta) \subset \mathcal{D}_f$ . Azt mondjuk, hogy az  **$f$  függvény jobbról differenciálható** (vagy **jobbról deriválható**) **az  $a$  pontban**, ha létezik és véges a

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték. Ezt a határértéket az  $f'_+(a)$  szimbólummal jelöljük, és az  **$f$  függvény  $a$  pontbeli jobb oldali deriváltjának** (vagy **differenciálhányadosának**) nevezzük, azaz

$$f'_+(a) := \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Az  **$f$  függvény bal oldali differenciálhatóságát az  $a$  pontban** hasonlóan értelmezzük, és az  $f'_-(a)$  szimbólummal jelöljük az  **$a$  pontbeli bal oldali deriváltját**.

Az előző jelölés értelmében, ha  $f(x) = |x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), akkor  $f'_-(0) = -1$  és  $f'_+(0) = 1$ .

Az egyoldali függvényhatárértékeknél tanultak szerint világos, hogy

$$f \in D\{a\} \iff \exists f'_-(a), \exists f'_+(a) \text{ és } f'_-(a) = f'_+(a) (= f'(a)).$$

A bal és jobb oldali deriváltak segítséget nyújtanak a következő általános probléma megoldásában. Legyen  $b, j \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  olyan pont, hogy  $\exists \delta > 0: (a - \delta, a) \subset \mathcal{D}_b$ ,  $(a, a + \delta) \subset \mathcal{D}_j$ , és  $A \in \mathbb{R}$ . Milyen legyenek a  $b$  és  $j$  függvények ahhoz, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} b(x) & (x \in \mathcal{D}_b \text{ és } x < a) \\ A & (x = a) \\ j(x) & (x \in \mathcal{D}_j \text{ és } x > a) \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az  $a$  pontban?

Világos, hogy  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ . Ha  $f \in C\{a\}$ , akkor  $\exists \lim_{a-0} f$ ,  $\exists \lim_{a+0} f$  és  $\lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f = f(a) = A$ .  
Ezért

$$\exists \lim_{a-0} b = \lim_{a-0} f = A \quad \text{és} \quad \exists \lim_{a+0} j = \lim_{a+0} f = A,$$

azaz

$$\boxed{\text{I. } \exists \lim_{a-0} b, \exists \lim_{a+0} j \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} b = A = \lim_{a+0} j}.$$

Az I. feltétel azt jelenti, hogy  $f \in C\{a\}$ , ami szükséges ahhoz, hogy  $f \in D\{a\}$  teljesüljön.

Gyakori eset, amikor  $b$  balról,  $j$  jobbról folytonos  $a$ -ban és  $b(a) = j(a) = A$ . Világos, hogy ekkor az I. feltétel teljesül. Fordítva, ha az I. feltétel teljesül, akkor a

$$b(a) := \lim_{a-0} b \quad \text{és} \quad j(a) := \lim_{a+0} j.$$

értékadással (módosítással) elérhetjük, hogy  $b$  balról és  $j$  jobbról folytonos legyen  $a$ -ban, valamint  $b(a) = j(a) = A$ . Ez a módosítás nem befolyásolja az  $f$  függvény értékét, hiszen  $f(a) = A$ .

Ha az I. feltétel teljesül, és  $b(a) = j(a) = A$ , akkor  $f \in D\{a\} \iff f'_-(a) = f'_+(a)$ , ahol

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{b(x) - A}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{b(x) - b(a)}{x - a} = b'_-(a)$$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{j(x) - A}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{j(x) - j(a)}{x - a} = j'_+(a),$$

azaz

$$\boxed{\text{II. } b'_-(a) = j'_+(a)}.$$

Ekkor  $f'(a) = b'_-(a) = j'_+(a)$ . Ha  $b \in D\{a\}$  és  $j \in D\{a\}$ , akkor a II. feltétel ekvivalens, azzal, hogy  $b'(a) = j'(a)$ .

**1. Feladat.** Állapítsa meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az  $a = 0$  pontban!

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & (x \leq 0) \\ e^{-x} & (x > 0). \end{cases}$$

**Megoldás.** Alkalmazzuk a fenti jelöléseket! Ekkor  $A := f(0) = 1 - 0 = 1$ , illetve legyen

$$b(x) := 1 - x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad j(x) := e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A deriválási szabályok alapján  $b, j \in D(\mathbb{R})$  és

$$b'(x) = -1, \quad j'(x) = -e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

- I. teljesül, hiszen  $b, j \in C\{0\}$ , és  $b(0) = j(0) = 1 = A$ .
- II. teljesül, hiszen  $b, j \in D\{0\}$  és  $b'(0) = -1 = j'(0)$ .

Ezért  $f \in D\{0\}$  és  $f'(0) = -1$ .

## Magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük annak újbóli deriválhatóságát, és így eljuthatunk a többször deriválható függvények és a magasabb rendű deriváltak fogalmához. A rekurzió módszerét alkalmazzuk. Először a kétszer deriválhatóság fogalmát definiáljuk.

**2. Definíció.** Legyen  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ . Azt mondjuk, hogy  **$f$  kétszer deriválható az  $a$  pontban** (jelölése:  $f \in D^2\{a\}$ ), ha

- $\exists r > 0: f \in D(K_r(a))$ , és
- az  $f'$  deriváltfüggvény deriválható  $a$ -ban, azaz  $f' \in D\{a\}$ .

Legyen ekkor

$$f''(a) := (f')'(a)$$

az  $f$  függvény  $a$ -beli második deriváltja.

Ha  $H := \{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\} \neq \emptyset$ , akkor  $H \ni x \mapsto f''(x)$  az  $f$  függvény második deriváltfüggvénye, amit röviden az  $f''$  szimbólummal jelölünk.

**Jelölések.** A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(a) &:= f'(a) \quad \text{és} \quad f^{(1)} := f', \\ f^{(2)}(a) &:= f''(a) \quad \text{és} \quad f^{(2)} := f''. \end{aligned}$$

Megállapodunk abban is, hogy  $f^{(0)}(a) := f(a)$  és  $f^{(0)} := f$ .

Indukcióval értelmezzük az  $n$ -szeri deriválhatóságot és az  $n$ -edik deriváltat. Tegyük fel, hogy valamely  $n \in \mathbb{N}$  esetében már értelmeztük azt, hogy valamely  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény mikor deriválható  $(n-1)$ -szer egy  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban (jelölése:  $f \in D^{n-1}\{a\}$ ), továbbá azt is, hogy mikor létezik, és mi az  $(n-1)$ -edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az  $f^{(n-1)}$  szimbólummal.

**3. Definíció.** Legyen  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ , és tegyük fel, hogy valamely  $n = 2, 3, \dots$  esetén létezik az  $f^{(n-1)}$ -gyel jelölt  $(n-1)$ -edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy  **$f$   $n$ -szer deriválható az  $a$  pontban** (jelölése:  $f \in D^n\{a\}$ ), ha

- $\exists r > 0: f \in D^{n-1}(K_r(a))$ , és
- az  $f^{(n-1)}$  deriváltfüggvény deriválható  $a$ -ban, azaz  $f^{(n-1)} \in D\{a\}$ .

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$$

az  $f$  függvény  $a$ -beli  $n$ -edik deriváltja.

Ha  $H := \{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\} \neq \emptyset$ , akkor  $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$  az  $f$  függvény  $n$ -edik deriváltfüggvénye, amit röviden az  $f^{(n)}$  szimbólummal jelölünk.

**Példa.** Ha  $f(x) := x^4$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), akkor

$$f'(x) = 4x^3 \ (x \in \mathbb{R}), \quad f''(x) = 12x^2 \ (x \in \mathbb{R}), \quad f^{(3)}(x) = 24x \ (x \in \mathbb{R}), \quad f^{(4)}(x) = 24 \ (x \in \mathbb{R}).$$

Ha egy  $f$  függvényre valamilyen  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban minden  $n \in \mathbb{N}$  mellett teljesül, hogy  $f \in D^n\{a\}$ , akkor azt mondjuk, hogy **az  $f$  függvény  $a$ -ban végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható. Ennek jelölésére az  $f \in D^\infty\{a\}$  szimbólumot használjuk. Ha ez minden  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban igaz, akkor **az  $f$  függvény végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható, amit röviden így jelölünk:  $f \in D^\infty$ .

Könnyen igazolható, hogy ha a  $p$  függvény egy polinom, akkor  $p \in D^\infty$ . Másrészt  $\exp \in D^\infty$ ,  $\sin \in D^\infty$ ,  $\cos \in D^\infty$ .

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

**1. Tétel.** Ha valamilyen  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $f, g \in D^n\{a\}$ , akkor

a)  $f + g \in D^n\{a\}$  és  $(f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a),$

b)  $f \cdot g \in D^n\{a\}$  és  $(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$  (Leibniz-szabály).

**Bizonyítás.** Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható.

- Az a) bizonyítása szinte triviális.
- A b) belátása némi számolgatást igényel.

## FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTAL 1.

### Lokális szélsőértékek

Korábban már értelmeztük az abszolút szélsőértékek fogalmát. Célszerű bevezetni ezek lokális változatait.

**4. Definíció.** Az  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban **lokális maximuma van**, ha

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f, \forall x \in K(a): f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az  $a$  pontot  **$f$  lokális maximumhelyének** nevezzük, az  $f(a)$  függvényérték pedig a függvény **lokális maximuma**.

Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimum** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen **lokális szélsőértéknek**, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet **lokális szélsőérték helynek** nevezzük.

**Megjegyzés.** Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn.

- Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az  $f(x) = x$  ( $x \in [0, 1]$ ) függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimumhely. Azonban, ha az  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $a \in A$  pontban abszolút szélsőértéke van, és  $A$  tartalmazza az  $a$  pont egy környezetét, akkor  $a$  lokális szélsőértékhely.
- Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az  $f$  függvénynek az  $a$  pont egy környezetében nincs  $f(a)$ -nál nagyobb értéke, a környezeten kívül  $f$  felvehet  $f(a)$ -nál nagyobb értéket. ■

## 2. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel).

Tegyük fel, hogy  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és

- $f \in D\{a\}$  valamilyen  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ -ben,
- $f$ -nek  $a$ -ban lokális szélsőértéke van.

Ekkor  $f'(a) = 0$ .

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pont lokális maximumhelye az  $f \in D\{a\}$  függvénynek. Ekkor

$$\exists r > 0, \forall x \in (a - r, a + r): f(x) \leq f(a).$$

Tekintsük az  $f$  függvény  $a$ -hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$(1) \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}).$$

Ha  $a < x < a + r$ , azaz  $x - a > 0$ , akkor  $f(x) \leq f(a)$  (vagyis  $f(x) - f(a) \leq 0$ ) miatt (1)-ben szereplő különbséghányados nem pozitív. Mivel  $f \in D\{a\}$ , ezért

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Ha  $a - r < x < a$ , azaz  $x - a < 0$ , akkor  $f(x) \leq f(a)$  (vagyis  $f(x) - f(a) \leq 0$ ) miatt (1)-ben szereplő különbséghányados nem negatív. Mivel  $f \in D\{a\}$ , ezért

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

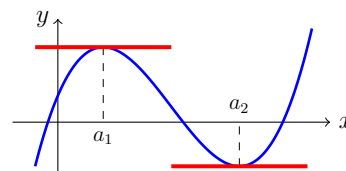
Azt kaptuk tehát, hogy  $f'(a) \leq 0$  és  $f'(a) \geq 0$ , ami csak úgy lehetséges, ha  $f'(a) = 0$ .

A bizonyítás hasonló akkor is, ha az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pont lokális minimumhelye az  $f$  függvénynek.

## Megjegyzések.

1. Deriválható  $f$  függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az  $f'(x) = 0$  egyenletet kell megoldani.

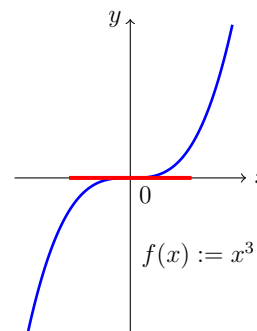
2. A tételnek az a geometriai jelentése, hogy ha a függvény grafikonjának létezik érintője egy lokális szélsőértékponthoz, akkor az érintő vízszintes, vagyis párhuzamos az  $x$  tengellyel.



3. Abból, hogy  $f'(a) = 0$ , nem következik, hogy az  $f$  függvénynek az  $a$  pontban lokális szélsőértékhelye van. Például az  $f(x) := x^3$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) függvény deriváltja

$$f'(x) = 3x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

amiből  $f'(0) = 0$  következik. Azonban  $f$  a 0 pontban nincs lokális szélsőértéke, hiszen szigorúan monoton növekvő az egész számegyenesen.



Ez azt jelenti, hogy ha  $f$  differenciálható egy  $a$  pontban, akkor  $f'(a) = 0$  csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy az  $f$  függvénynek  $a$ -ban lokális szélsőértéke legyen.

A fenti példa motiválja a következő fogalom bevezetését.

**5. Definíció.** Az  $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  **stacionárius pontja**, ha  $f \in D\{a\}$  és  $f'(a) = 0$ .

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel azt állítja, hogy deriválható függvények lokális szélsőérték helyei csak a függvény stacionárius pontjaiban lehetnek. A fenti példa azonban azt mutatja, hogy lehetnek olyan stacionárius pontok, amelyek nem lokális szélsőérték helyek. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőérték hely-e. Erre hamarosan jól használható eredményeket fogunk mutatni.

## A differenciálszámítás középértéktételei

A középértéktételek olyan segédállítások, amelyek egy intervallumon értelmezett függvényről garantálják, hogy mindig van olyan pont az intervallum belsejében, amire bizonyos tulajdonság teljesül. Ilyen típusú állítás például a Bolzano tétele, miszerint ha  $f \in C[a, b]$  és  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , akkor  $\exists \xi \in (a, b): f(\xi) = 0$ . Emlékeztetünk arra, hogy  $f \in C[a, b]$  azt jelenti, hogy  $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$ ,  $f \in C\{x\}$  minden  $x \in (a, b)$  esetén, illetve  $f$  jobbról folytonos  $a$ -ban és balról folytonos  $b$ -ben.

Differenciálszámításnál a középértéktételek olyan pont létezését állítják, amelyben a függvény deriváltja olyan értéket vesz fel, ami a függvényhez kapcsolódik. Három ilyen tételt mutatunk meg: a Rolle-, a Lagrange- és a Cauchy-féle középértéktételt. A középértéktételekkel fontos függvénytulajdonságokat tudunk igazolni.

**3. Tétel (Rolle-féle középértéktétel).** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ . Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \in C[a, b], \\ \bullet f \in D(a, b), \\ \bullet f(a) = f(b) \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = 0.$$

**Bizonyítás.** Mivel  $f \in C[a, b]$ , ezért a Weierstrass-tételből következik, hogy  $f$  felveszi a maximumát és a minimumát az  $[a, b]$  intervallumon, azaz

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b]: \quad f(\alpha) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \quad f(\beta) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

Ekkor két eset lehetséges:

a)  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Ekkor a maximum és a minimum megegyezik, azaz  $f$  állandó az  $[a, b]$  intervallumon. Ezért  $f'(\xi) = 0$  minden  $\xi \in (a, b)$  esetén.

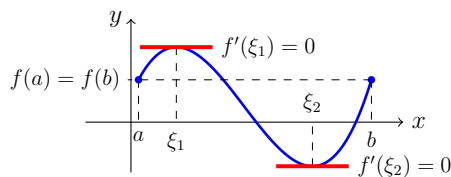
b)  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ . Ekkor

$$f(\alpha) \neq f(a) = f(b) \quad \text{vagy} \quad f(\alpha) = f(a) = f(b) \neq f(\beta).$$

Az első esetben legyen  $\xi := \alpha$ , illetve a második esetben legyen  $\xi := \beta$ . Mindkét esetben  $f(\xi) \neq f(a) = f(b)$  teljesül, ezért  $\xi \neq a$  és  $\xi \neq b$ , azaz  $\xi \in (a, b)$ . Tehát  $\xi$  az  $f$  függvény olyan  $[a, b]$ -beli abszolút szélsőérték helye, ami az intervallum belsejében található. Ekkor  $\xi$  lokális szélsőérték helye lesz az  $f$  függvénynek. Ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel miatt  $f'(\xi) = 0$ .

### Megjegyzések.

1. A Rolle-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: Ha  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n és differenciálható  $(a, b)$ -n, akkor  $f$  grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az  $x$ -tengellyel.



2. A Rolle-féle középértéktételből következik, hogy ha  $f \in C[a, b]$ ,  $f \in D(a, b)$ , illetve tudjuk, hogy  $\forall x \in (a, b): f'(x) \neq 0$ , akkor  $f(a) \neq f(b)$ .

**2. Feladat.** Igazoljuk, hogy az

$$e^x = x + 1$$

egyenletnek egyetlen egy megoldása van!

**Megoldás.** Vegyük észre, hogy az egyenlet megoldása egyben az

$$f(x) := e^x - x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény zérushelye is. Világos, hogy  $a = 0$  megoldása az egyenletnek, azaz  $f(a) = 0$ . Azonban az

$$f'(x) = e^x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

deriváltfüggvény csak az  $x = a = 0$  helyen lehet nulla, mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő. Ezért, ha  $b > a$  tetszőleges szám, akkor

$$f \in C[a, b], \quad f \in D(a, b) \quad \text{és} \quad \forall x \in (a, b): f'(x) \neq 0,$$

amiből a Rolle-tétel alapján következik, hogy  $f(a) \neq f(b)$ , azaz  $f(b) \neq 0$ . Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs pozitív megoldása.

Hasonlóan igazolható, hogy az egyenletnek nincs negatív megoldása.

A Rolle-féle középértéktétel a következő módon általánosítható.

**4. Tétel (Cauchy-féle középértéktétel).** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ . Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f, g \in C[a, b], \\ \bullet f, g \in D(a, b), \\ \bullet \forall x \in (a, b): g'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b): \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Bizonyítás.** Először vegyük észere, hogy a Rolle-tételből következik, hogy  $g(a) \neq g(b)$ . Tekintsük a következő függvényt:

$$F(x) := f(x) - \lambda g(x) \quad (x \in [a, b]), \quad \text{ahol} \quad \lambda := \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Világos, hogy

$$f, g \in C[a, b] \implies F \in C[a, b] \quad \text{és} \quad f, g \in D(a, b) \implies F \in D(a, b).$$

Másrészt

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a) = (\lambda \text{ definíciója szerint}) = f(b) - \lambda g(b) = F(b).$$

Ez azt jelenti, hogy  $F$  eleget tesz a Rolle-tétel feltételeinek, és így  $\exists \xi \in (a, b): F'(\xi) = 0$ . Azonban

$$F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x) \quad (x \in (a, b)),$$

tehát

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = F'(\xi) = 0 \implies \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

A Cauchy-féle középértéktételnek van egy fontos speciális esete.

**5. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel).** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ . Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \in C[a, b], \\ \bullet f \in D(a, b) \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

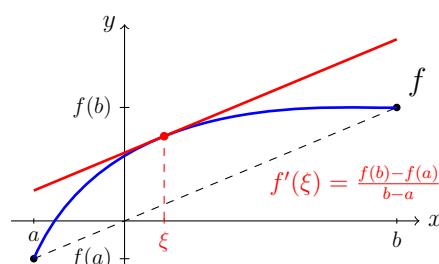
**Bizonyítás.** Legyen  $g(x) := x$  a Cauchy-féle középértéktételben.

**Megjegyzések.**

1. A Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentése: Az  $f$  függvény grafikonjának van olyan pontja, ahol az érintő párhuzamos az  $(a, f(a))$  és  $(b, f(b))$  pontokon átmenő húr meredekségével, ami az

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

értékkel egyenlő.





2. Ha  $f(a) = f(b)$ , akkor a Lagrange-féle középértéktétel állítása azonos a Rolle-féle középértéktétel állításával.

A Lagrange-féle középértéktétel egyszerű, de fontos következményei a következő állítások:

**6. Tétel (A deriváltak egyenlősége).** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és  $a < b$ .

1. Tegyük fel, hogy  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f \in D(a, b)$ . Ekkor

$$f' \equiv 0 \quad (a, b)\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f \equiv \text{állandó} \quad (a, b)\text{-n}.$$

2. Tegyük fel, hogy  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f, g \in D(a, b)$ . Ekkor

$$f' \equiv g' \quad (a, b)\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in (a, b): f(x) = g(x) + c.$$

**Bizonyítás.**

1. Az állítás  $\Leftarrow$  irányát már ismerjük, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0.

A  $\Rightarrow$  irány a Lagrange-féle középértéktétel következménye. Valóban,  $\forall x, y \in (a, b)$ ,  $x < y$  esetén  $f \in C[x, y]$ ,  $f \in D(x, y)$ , és így

$$\exists \xi \in (x, y): \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

2. Alkalmazzuk az 1. állítást az  $F := f - g$  függvényre.

## Monotonitás

Az egyszerűség kedvéért csak intervallumon vizsgáljuk a monotonitást. Az  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  szimbólummal jelölünk egy korlátos vagy nem korlátos nyílt intervallumot, tehát  $a = -\infty$  vagy  $b = +\infty$  is lehetséges.

Egy függvény esetén a „monoton növekvő”, a „monoton csökkenő”, a „szigorúan monoton növekvő”, illetve a „szigorúan monoton csökkenő” kifejezések helyett gyakran a „ $\nearrow$ ”, a „ $\searrow$ ”, a „ $\uparrow$ ”, illetve a „ $\downarrow$ ” jeleket használjuk.

Az első fontos észrevétel az, hogy az első derivált előjeléből következtethetünk a függvény monotonitására. A következő animációban „látjuk”, hogy a lokális szélsőértékeken a függvényhez húzott érintő párhuzamos az  $x$  tengellyel, továbbá a szigorúan monoton növekvő szakaszokon az érintő meredeksége pozitív, illetve a szigorúan monoton csökkenő szakaszokon az érintő meredeksége negatív. Igazolni fogjuk, hogy tetszőleges differenciálható függvényekre ez az állítás „csak majdnem” igaz.

**7. Tétel (A monotonitás és a derivált kapcsolata).** Legyen  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy  $f \in D(a, b)$ . Ekkor

1.  $f \nearrow$  [illetve  $\searrow$ ]  $(a, b)$ -n  $\iff f' \geq 0$  [illetve  $f' \leq 0$ ]  $(a, b)$ -n;
2.  $f' > 0$  [illetve  $f' < 0$ ]  $(a, b)$ -n  $\implies f \uparrow$  [illetve  $\downarrow$ ]  $(a, b)$ -n.

### Bizonyítás.

1.  $\Rightarrow$  Ha  $f \nearrow (a, b)$ -n és  $t \in (a, b)$  egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0 \quad (t < x < b),$$

hiszen  $x - t > 0$  és a monotonitás miatt  $f(x) - f(t) \geq 0$ . Mivel  $f \in D\{t\}$ , így

$$f'(t) = f'_+(t) = \lim_{x \rightarrow t+0} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0.$$

$\Leftarrow$  Ha  $\forall x \in (a, b): f'(x) \geq 0$ , akkor legyen  $x, y \in (a, b)$ ,  $x < y$  két tetszőleges pont. Ekkor  $f \in C[x, y]$ ,  $f \in D(x, y)$ , és így a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi \in (x, y): \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0 \implies f(x) \leq f(y).$$

Ezért  $f \nearrow (a, b)$ -n.

Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetében is.

2. Alkalmazzuk „éles” egyenlőtlenségeket az 1. pont  $\Leftarrow$  irányában.

### Megjegyzések.

1. A tételben lényeges feltétel, hogy intervallumon értelmezett függvényről van szó. Például, ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \text{akkor} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f: f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

de az  $f$  függvény nem szigorúan monoton csökkenő a  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  halmazon, ami **nem intervallum**.

2. Az 1. állítás  $\Rightarrow$  irányában nem tudunk „éles” egyenlőtlenségeket alkalmazni. **A szigorú monotonitásra vonatkozó elégséges feltételek nem is fordíthatók meg.** Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton növekvő az egész valós számok halmazán, de  $f'(0) = 0$ .

3. Nem nehéz igazolni (pl. átviteli elvvel), hogy ha  $f$  monoton az  $(a, b)$  intervallumon, és folytonos az intervallum egyik végpontján, akkor a monotonitás kiterjeszthető a végponttal bővített intervallumra. Ez az állítás szigorú monotonitás esetén is igaz. Így tudjuk az előbbi tételt kiterjeszteni tetszőleges intervallumra. Például,  $f \in C[a, b]$  és  $f \in D(a, b)$  esetén

$$f \nearrow [a, b] - n \iff f' \geq 0 \quad (a, b) - n.$$

## A lokális szélsőértékre vonatkozó elégséges feltételek

Az eddigiek alapján könnyen kaphatunk elégséges feltételeket arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen.

Az egyik azzal kapcsolatos, hogy a deriváltfüggvény **előjelet vált**. Azt mondjuk, hogy a  $g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény a  $t \in \text{int } \mathcal{D}_g$  pontban negatívból pozitívba megy át (röviden:  $(-, +)$  előjelváltása van), ha  $g(t) = 0$  és  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $g < 0$   $(t - \delta, t)$ -n és  $g > 0$   $(t, t + \delta)$ -n. A  $(+, -)$  előjelváltást hasonló módon értelmezzük.

**8. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel).** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  és  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy

- $f \in D(a, b)$ ,
- egy  $c \in (a, b)$  pontban  $f'(c) = 0$  és
- az  $f'$  deriváltfüggvény előjelet vált  $c$ -ben.

Ekkor,

1. ha az  $f'$  függvény a  $c$  pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át, akkor  $c$  az  $f$  függvénynek lokális minimumhelye,
2. ha az  $f'$  függvény a  $c$  pontban pozitív értékből negatív értékbe megy át, akkor a  $c$  pont az  $f$  függvénynek lokális maximumhelye.

**Bizonyítás.** Az állítás azonnal következik a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből, hiszen ha  $f$ -nek  $(-, +)$  előjelváltása van a  $c$  pontban, akkor  $\exists \delta > 0$  úgy, hogy  $f' < 0$   $(c - \delta, c)$ -n és  $f' > 0$   $(c, c + \delta)$ -n. Ezért  $f \downarrow (c - \delta, c]$ -n és  $f \uparrow [c, c + \delta)$ -n. Emiatt  $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : f(x) > f(c)$ , tehát  $c$  az  $f$  függvénynek lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható  $(+, -)$  előjelváltás esetén.

**3. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvény lokális szélsőérték helyeit és monotonitási intervallumait!

**Megoldás.** A tanult tételek felhasználásához meg kell vizsgálnunk az

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

deriváltfüggvény előjeleit. Mivel  $f'$  folytonos minden  $x \neq 0$  pontban, így csak az  $x = 0$  és az  $f'$  zérushelyei lehetnek olyan pontok, ahol  $f'$  előjele eltérhet a pont bal és jobb oldali környezetén. A példában  $f'$ -nek egyetlen zérushelye van:

$$f'(x) = -\frac{x+2}{x^3} = 0 \quad \implies \quad x = -2.$$

Ezzel három részintervallumot kapunk, ahol egységes  $f'$  előjele:  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 0)$  és  $(0, +\infty)$ . Nem nehéz meghatározni  $f'$  előjeleit ezeken az intervallumokon, hiszen ehhez elegendő kiszámolni  $f'$  értékét az intervallumok egyik pontján. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményeit az  $f$  függvényre vonatkozóan.

	$x < -2$	$-2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$f'$	$-$	$0$	$+$	$-$
$f$	$\downarrow$	$-1/4$	$\uparrow$	$\downarrow$
lok.		min		

A táblázatból rögtön leolvashatók  $f$  monotonitási szakaszait, illetve azt, hogy  $f$ -nek lokális minimumhelye van az  $x = -2$  pontban, és lokális minimuma  $f(-2) = -1/4$ .

Kétszer differenciálható függvények esetében van egy alternatív módszer, amivel nem szükséges előjelvizsgálatot végezni, ha a függvényt kétszer deriváljuk.

### 9. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel).

Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  és  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy

- $f$  kétszer deriválható egy  $c \in (a, b)$  pontban, azaz  $f \in D^2\{c\}$ ,
- $f'(c) = 0$  és
- $f''(c) \neq 0$ .

Ekkor  $c$  lokális szélsőérték helye az  $f$  függvénynek, és

1. ha  $f''(c) > 0$ , akkor  $f$ -nek  $c$ -ben lokális minimuma van,
2. ha  $f''(c) < 0$ , akkor  $f$ -nek  $c$ -ben lokális maximuma van.

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy  $f''(c) > 0$ . Mivel

$$0 < f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c},$$

így a  $c$  pontnak van olyan bal oldali környezete, ahol  $f' < 0$ , és van olyan jobb oldali környezete, ahol  $f' > 0$ . Tehát  $f'$ -nek  $(-, +)$  előjelváltása van, ami azt jelenti, hogy  $f$ -nek  $c$ -ben lokális minimuma van.

Az állítás hasonlóan igazolható  $f''(c) < 0$  esetén.

### Megjegyzések.

1. A 3. Feladatban  $f \in D^2\{x\}$  minden  $x \neq 0$  esetén, és

$$f''(x) = \left(-\frac{x+2}{x^3}\right)' = -\frac{1 \cdot x^3 - (x+2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x+6}{x^4} \implies f(-2) > 0.$$

Ezért  $x = -2$  valóban lokális minimumhely.

2. Ha  $f'(c) = 0$  és  $f''(c) = 0$ , akkor  $c$  lehet lokális szélsőérték hely, de lehet, hogy nem. A különböző lehetőségeket mutatják például az  $f(x) := x^3$ ,  $f(x) := x^4$  és az  $f(x) := -x^4$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) függvények a  $c = 0$  helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek.