Principio de Hamilton -Dinámica Lagrangiana y Hamiltoniana-

José Augusto de la Fuente León,

David Pavél Juárez López

Profesor:
Dr. Delepine

Julio 8, 2013

Introducción

- Experiencias han mostrado que el movimiento de una partícula, en un marco de referencia inercial, es correctamente descrita por la ecuación de Newton $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$.
- Tal método es contenido en el principio de Hamilton y la ecuación de movimiento resulta de la aplicación del principio llamado ecuaciones de Lagrange

Principio de Hamilton

De todos los posibles caminos a lo largo del cual un sistema dinámico puede moverse de un punto a otro con un intervalo de tiempo especifico (consistente con cualquier restricción), el actual camino seguido es en el cual minimiza la integral temporal de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial

En términos de calculo de variaciones, el principio de Hamilton se expresa como,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \tag{1}$$

donde el símbolo δ es una abreviatura para describir la variación. Ahora

$$T = T(\dot{x}_i), \qquad U = U(x_i) \tag{2}$$

Si definimos la diferencia de estas cantidades, como

$$L \equiv T - U = L(x_i,\, \dot{x}_i) \tag{3}$$

Entonces la Ec. 1 se transforma como,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i,\ \dot{x}_i)dt = 0 \tag{4}$$

o, efectuando la variación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x dt = 0 \tag{5}$$

Consecuentemente se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{6}$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula, y la cantidad L es llamada la función Lagrangiana o el lagrangiano de la partícula.

Coordenadas Generalizadas

- Para determinar la posición de un sistema de n puntos materiales en el espacio, hace falta dar n vectores de posición, es decir, $3n$ coordenadas.

- Si existen m ecuaciones de constricción que relaciona alguna de esta coordenada con otra, entonces $3n - m$ coordenadas son independientes, y se dice que el sistema posee $3n - m = s$ grados de libertad.

- Damos el nombre de coordenadas generalizadas a cualquier conjunto de cantidades que defina completamente la posición de un sistema.
- Las coordenadas generalizadas se acostumbra a escribirlas como $q_1,\ q_2, \ldots,$ o simplemente como q_j. Las derivadas $\dot{q}_j$ sus velocidades generalizadas.

Ecuaciones de Movimiento de Lagrange en Coordenadas Generalizadas

- La lagrangiana para un sistema es definida a ser la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.
- Pero energía es una cantidad escalar y por lo tanto la Lagrangiana es una función escalar.
- Por lo que la Lagrangiana es invariante con respecto a transformación de coordenadas.

Expresamos la lagrangiana en terminos de q_j y $\dot{q}_j$:

$$\begin{aligned} L &= T(q_j,\, \dot{q}_j,\, t) - U(q_j,\, t) \\ &= L(q_j,\, \dot{q}_j,\, t) \end{aligned} \tag{7}$$

Entonces el principio de Hamilton se expresa,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j,\ \dot{q}_j)dt = 0 \tag{8}$$

Efectuando la variación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \tag{9}$$

y consecuentemente se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{10}$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange del sistema.