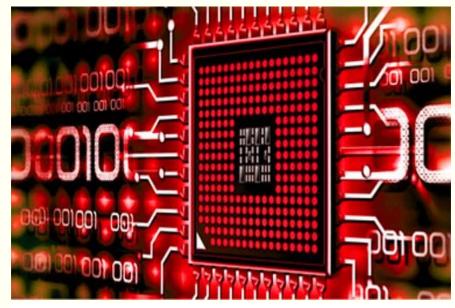
# ЛОГІКА РОБОТИ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ



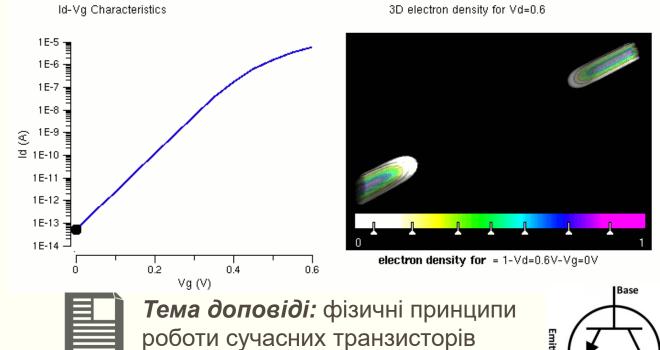
# Сучасна техніка будується на транзисторах



Gate
U<sub>GS</sub>

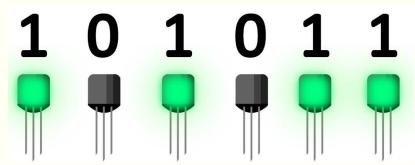
Drain

- Напівпровідникові пристрої призначені для управління електричним струмом.
  - Можуть працювати як перемикачі
  - Здатні посилювати сигнал



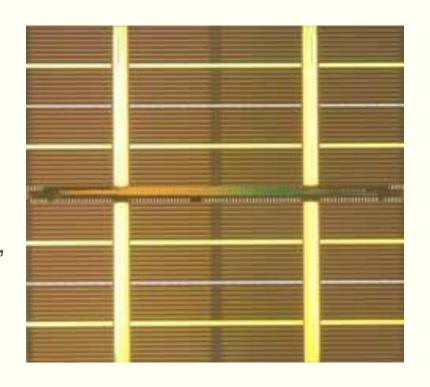
# Мова комп'ютера – 0 і 1

• **«b**inary digit» =  $\text{бit} (0 - \text{струму немає}, 1 - \text{струм } \varepsilon)$ 



- Пам'ять комп'ютера сітка комірок (memory cells), які, в тому числі, включають транзистори.
- Вся інформація кодується нулями та одиницями!
  - Числа
  - Текст
  - Зображення

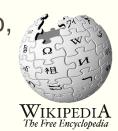
- Аудіо
- Відео



#### Системи числення

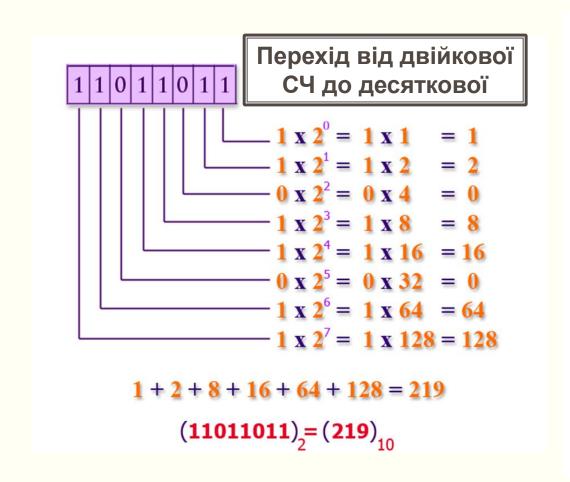
10	2	8	16	
0	0000	0	0	
1	0001	1	1	
2	0010	2	2	
3	0011	3	3	
4	0100	4	4	
5	0101	5	5	
6	0110	6	6	
7	0111	7	7	
8	1000	10	8	
9	1001	11	9	
10	1010	12	A	
11	1011	13	В	
12	1100	14	С	
13	1101	15	D	reen
14	1110	16	E	
15	1111	17	F	

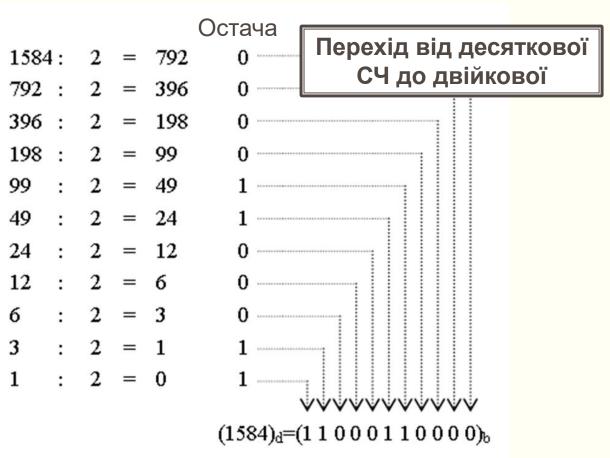
 Системою числення, або нумерацією, називається сукупність правил і знаків, за допомогою яких можна відобразити (кодувати) будь-яке невід'ємне число.



- За кількістю унікальних символів для представлення числа:
  - Двійкова (0, 1)
  - Вісімкова (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
  - Десяткова (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
  - Шістнадцяткова (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F)

# Двійкова система числення





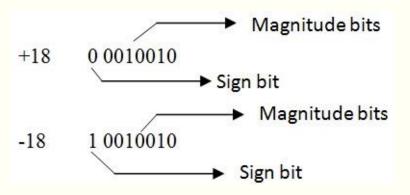
#### Представлення даних. Цілі числа

- 1 байт = 8 послідовних бітів
  - <u>8-бітове ціле беззнакове число може</u> представити діапазон від 0 до 2<sup>8</sup>-1=255

- 8-бітове ціле знакове число виділяє старший біт для знаку
  - діапазон від -2<sup>7</sup>=-128 до 2<sup>7</sup>-1=127

- <u>Байт найменша комірка пам'яті, яку можна адресувати.</u>
  - <u>Комірки пам'яті пронумеровані, порядковий</u> номер комірки це її адреса.

$2^7$	$2^{6}$	$2^{5}$	$2^{4}$	$2^{3}$	$2^2$	$2^1$	$2^{0}$	
0	0	1	1	0	0	0	1	
0	0	32	16	0	0	0	1	49



0-й байт	0	1	0	1	1	0	0	0
1-й байт	1	1	0	0	1	1	0	1
2-й байт	1	0	1	0	1	1	1	1
3-й байт	0	0	1	0	1	0	0	1
•••								

# Межі для представлення цілих чисел

Variety	Bits	Bytes	Minimum	Maximum
unsigned	8	1	0	255
signed	8	1	-128	127
unsigned	16	2	0	65535
signed	16	2	-32768	32767
unsigned	32	4	0	4294967295
signed	32	4	-2147483648	2147483647
unsigned	64	8	0	18446744073709551615
signed	64	8	-9223372036854775808	9223372036854775807

# Порядок байтів. Little-Endian проти Big-Endian



- Байт допускає 256 різних значень.
  - Числа представляються одним або декількома байтами  $A_0, ..., A_n$
  - $A_0$  молодший байт числа
  - lacktriangle  $A_n$  старший байт числа
- Порядок від старшого до молодшого (big-endian  $A_n$ , ...,  $A_0$ ) звичний порядок запису арабських цифр.
- Порядок від молодшого до старшого (little-endian  $A_0, ..., A_n$ ) прийнято для пам'яті в х86-комп'ютерах.
  - Зручніше: при збільшенні розрядності числа розряди дописуються в кінець
  - 3210 → 3210'0000

# Навіщо нулю знак?

- Спеціальні числа в ІЕЕЕ754 (викликають виключення):
  - $\pm \infty$  отримується від ділення числа на 0, проте при діленні 0/0 невизначеність (NaN)
  - NaN (not a number) представляє арифметично беззмістовне значення, NaN ≠ NaN
- Способи отримання NaN:
  - $-\infty + (-\infty)$
  - **■** 0 · ∞
  - $0/0, \infty/\infty$
  - $\sqrt{x}$ , де x < 0
- +0 vs -0
  - +0 = -0, проте знак збережено для максимальної коректності результату обчислень.
  - Наприклад,  $\frac{1}{+\infty} = +0$ ,  $\frac{1}{-\infty} = -0$
  - $(+\infty/0)$  +  $\infty$  =  $+\infty$ , тоді як  $(+\infty/-0)$  +  $\infty$  = NaN

# Дробові числа у двійковій системі



Нормалізоване представлення  $2.5 = 1*2^1+0*2^0+1*2^{-1} = 10.1 = 1.01e1$ Мантисса = 1.01Порядок = 1



# Дробові числа у двійковій системі

```
Python 3.6.5 (v3.6.5:f59c0932b4, Mar 28 2018, 17:00:18) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)] on win32 Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> 0.1+0.1+0.1==0.3
False
>>> 0.1+0.1+0.1
0.3000000000000000000004
>>> 0.25+0.25+0.25=0.75
True
```

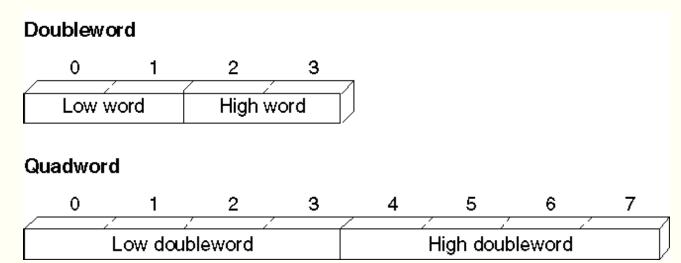
- Записати дробове десяткове число 0,116 у двійковій системі числення.
  - дробову частину множимо на основу **2**, заносячи цілі частини добутку в розряди після коми для шуканого дробового числа:

$$.116 \cdot 2 = 0.232$$
  $.424 \cdot 2 = 0.848$   $.232 \cdot 2 = 0.464$   $.848 \cdot 2 = 1.696$   $.464 \cdot 2 = 0.928$   $.696 \cdot 2 = 1.392$   $.784 \cdot 2 = 0.784$   $.856 \cdot 2 = 1.712$   $i \text{ т. д.}$   $.712 \cdot 2 = 1.424$ 

## Слова та розрядність

- Для конкретних процесорів одиницями інформації виступають машинні слова.
  - Розрядність даних = довжина стандартного машинного слова.
  - 64-розрядний процесор 64-розрядне машинне слово
- Інколи машинне слово приймають як 2 послідовно розташованих байта = 16 біт.
  - 32 біт подвійне слово (doubleword)
  - 64 біт збільшене вчетверо слово (quadword)

Слово									
Старший байт	Младший байт								
15	7 0								



# Представлення тексту у двійковій системі. ASCII

Char	ASCII Code	Binary	Char	ASCII Code	Binary
a	097	01100001	A	065	01000001
b	098	01100010	В	066	01000010
c	099	01100011	C	067	01000011
d	100	01100100	D	068	01000100
e	101	01100101	E	069	01000101
f	102	01100110	F	070	01000110
g	103	01100111	G	071	01000111
h	104	01101000	H	072	01001000
į	105	01101001	I	073	01001001
j	106	01101010	J	074	01001010
k	107	01101011	K	075	01001011
1	108	01101100	L	076	01001100
m	109	01101101	M	077	01001101
n	110	01101110	N	078	01001110
0	111	01101111	0	079	01001111
р	112	01110000	P	080	01010000
q	113	01110001	Q	081	01010001
r	114	01110010	R	082	01010010
S	115	01110011	S	083	01010011
t	116	01110100	T	084	01010100
u	117	01110101	U	085	01010101
v	118	01110110	V	086	01010110
w	119	01110111	W	087	01010111
x	120	01111000	X	088	01011000
y	121	01111001	Y	089	01011001
z	122	01111010	Z	090	01011010

- Текст кодується байтовою послідовністю за допомогою таблиці ASCII (American Standard Code for Information Interchange).
  - Перші 128 кодів зарезервували під стандартні символи.
- Утворилось багато кодувань, решта 128 символів у виробників були власними.
  - MS DOS: кодування 855, 866,
  - Windows: 1251,
  - Mac OS використовує своє кодування,
  - KOI8 та KOI7,
  - ISO 8859-5.

### Представлення тексту у двійковій системі. Unicode

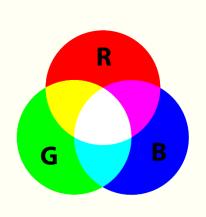
- Кожному символу назавжди присвоюється певний код кодова точка.
  - Перші 256 символів відповідають ASCII-таблиці стандарту <u>ISO 8859-1</u>.
  - UTF-16 кожному символу з <u>базової багатомовної площини</u> встановлюється 16-бітний номер.
  - Решта символів по 4 байта (32 біти).
- Проблема несумісність з ASCII (символи двобайтні, а не однобайтні).
  - UTF-8 включає однобайтні символи ASCII (256 штук)
  - Далі двобайтні символи (більшість європейських алфавітів, іврит, арабський алфавіт)
  - Три байти базова багатомовна площина
  - Чотири байти решта символів
- Робота з UTF-8 складна, проте текст
  - компактний,
  - містить захист від помилок зчитування
  - інтернаціональний: для всіх виглядатиме однаково.

chara	cter	encoding				bits
A		UTF-8				01000001
A		UTF-16			0000000	01000001
A		UTF-32	0000000	0000000	0000000	01000001
あ		UTF-8		11100011	1000001	10000010
あ		UTF-16			00110000	01000010
あ		UTF-32	0000000	0000000	00110000	01000010

# Представлення зображень та відео у двійковій системі

■ Кожен піксель кодується кількома цілими числами.

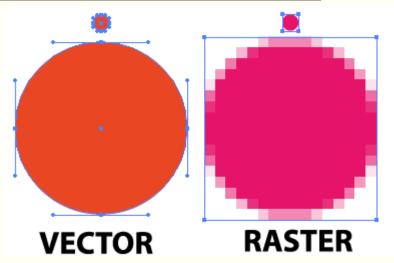






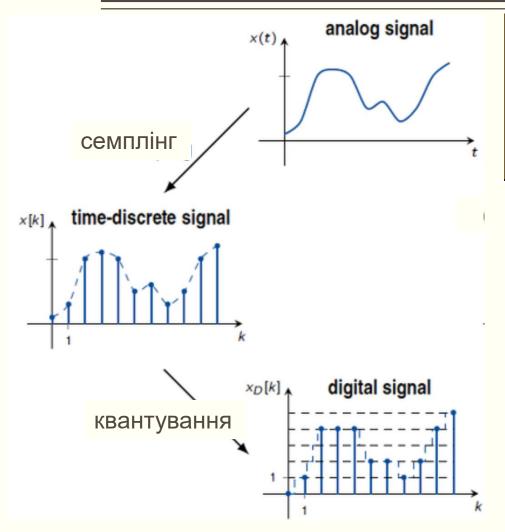
# Представлення зображень та відео у двійковій системі

- Для векторної графіки характерне розбиття зображення на ряд графічних примітивів – точки, прямі, ламані, дуги, полігони.
  - Для відрисовки прямої потрібні координати двох точок, які зв'язуються найкоротшою прямою лінією.
  - Для дуги задається радіус і т. д.
  - Зображення зберігається в пам'яті як база даних описів примітивів.
- Відео набір растрових зображень (кадрів).
  - Растрове зображення набір чисел.





# Представлення аудіо у двійковій системі





Audio

Format : MPEG Audio
Format version : Version 1
Format profile : Layer 3
Duration : 3 min 44 s

Bit rate mode : Constant
Bit rate : 320 kb/s
Channel(s) : 2 channels
Sampling rate : 44 l kHz

 Sampling rate
 : 44.1 kHz

 Frame rate
 : 38.281 FPS (1152 SPF)

Compression mode : Lossy

Stream size : 8.57 MiB (99%)



**Тема доповіді:** аналогово-цифрове та цифро-аналогове перетворення звуку

#### Шістнадцяткова система числення

- Використовується програмістами для опису місця знаходження в пам'яті кожного байту.
  - Замість 8 бітів або трьох десяткових розрядів два шістнадцяткових розряди.
  - Простіша для розуміння, порівнюючи з двійковою системою числення.
  - Зазвичай до шістнадцяткових чисел дописують префікс 0х або суфікс h
- Набагато простіше представляється в пам'яті комп'ютера, порівнюючи з десятковою системою.
  - 4 біти заміняються на одне шістнадцяткове значення.
  - $(1110)_2 = 0Eh$
  - $(10011100)_2 = 0x9C$
- Використовується для короткого запису кольорів (R, G, B)
  - #23A1F2

Бінарна	Шістнадцяткова
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	Α
1011	В
1100	С
1101	D
1110	E
1111	F

# Загалом про системи числення

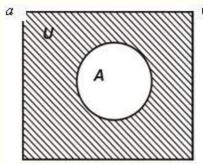
10	2	8	16		
0	0000	0	0		
1	0001	1	1.		
2	0010	2	2		
3	0011	3	3		
4	0100	4	4		
5	0101	5	5		
6	0110	6	6		
7	0111	7	7		
8	1000	10	8		
9	1001	11	9		
10	1010	12	A		
11	1011	13	В		
12	1100	14	C		
13	1101	15	D		
14	1110	16	E		
15	1111	17	F		

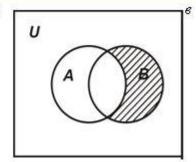
- Яке з чисел більше?
  - 9B<sub>16</sub>
  - **1**0011010<sub>2</sub>
  - **153**
  - **234**<sub>8</sub>

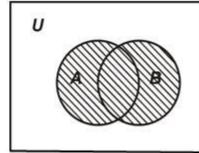
Base	Readable	Converts easily into bytes	Good compression
4	-	7	
8	>		
16	7	7	7
32	<b>~</b>		7
64	<b>~</b>		7
128			1
256		7	1

### Двійкова логіка та логічні елементи

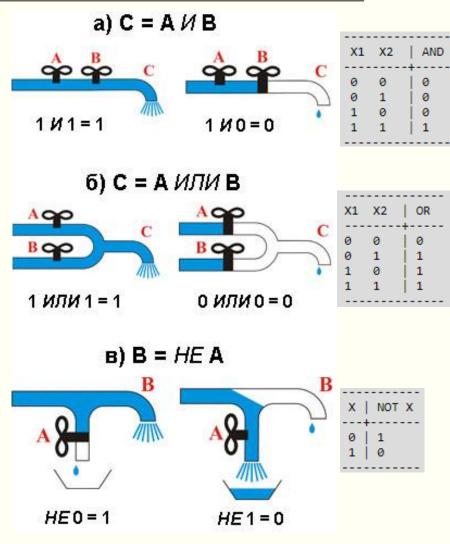
- Основними логічними операціями є:
  - Унарна операція заперечення (інверсія, операція *HE*,  $\bar{A}$ ,  $\neg A$ )
  - Бінарна операція логічного множення (кон'юнкція, операція I,  $A \cdot B$ ,  $A \wedge B$ )
  - Бінарна операція логічного додавання (диз'юнкція, операція A EO,  $A \lor B$ , A + B)







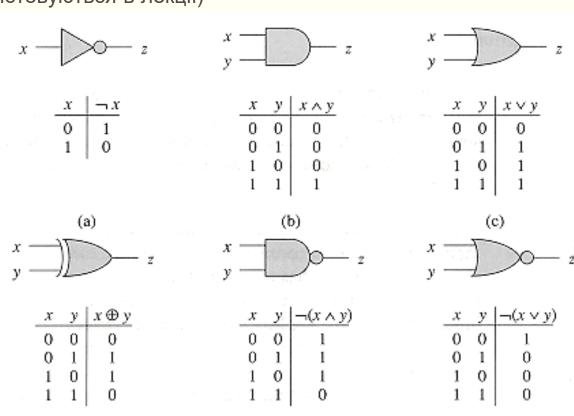
- Операції можуть комбінуватись, наприклад:
  - I-НЕ (логічний елемент Шефера)
  - АБО-НЕ (логічний елемент Пірса)
  - Виключна диз'юнкція ( $\bigoplus$ ) заперечення логічної еквівалентності ( $A \leftrightarrow B$ )



#### Логічні елементи та їх позначення

- Існує кілька видів схемотехнічних позначень логічних елементів:
  - ANSI (американські позначення, використовуються в лекції)
  - DIN (європейські позначення)
- Логічні елементи:
  - a) HE = NOT
  - b) Логічне I = AND
  - с) Логічне АБО = OR
  - d) Виключна диз'юнкція = XOR
  - e) I-HE = NAND
  - f) ABO-HE = NOR

XNOR???

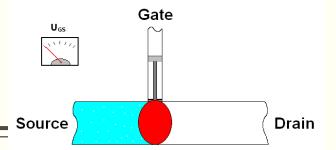


(e)

(d)

(f)





■ **Логічний вентиль** — базовий елемент цифрової схеми, що виконує (обчислює) елементарну логічну операцію, перетворюючи таким чином вхідні логічні сигнали у вихідний логічний сигнал.

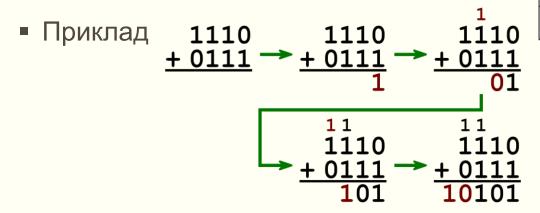


Name	N	TO	10	ANI	)	1	$\frac{\textbf{NAND}}{\overline{AB}}$					NOR			XOR			XNOR																																	
Alg. Expr.		Ā		AB							$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$		$\overline{AB}$ $A+B$		3	$\overline{A+B}$	
Symbol	<u>A</u> x <u>B</u> x										<b>→</b>																																								
Truth	A	X	<b>B</b>	<b>A</b>	X	<b>B</b>	<b>A</b>	X	<b>B</b>	<b>A</b>	X	<b>B</b>	<b>A</b>	X	<b>B</b>	<b>A</b>	X	<b>B</b>	<b>A</b>	X																															
Table	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0																															
		ı	1	0	0	1	0	1 0	1	0	1	1	0	0	1	0	1 0	1	0	0																															

Практична реалізація

# Алгебраїчні операції у двійковій системі. Додавання

- Правила додавання:
  - 0 + 0 = 0
  - -1+0=1
  - 0 + 1 = 1
  - 1 + 1 = 10 (два вентилі, AND і XOR)



INP	UTS	OUTPUT	rs.	a	_	→ \
A	В	Р	S		_	
0	0	0	0	b	J	
0	1	0	1		*	
1	0	0	1			
1	1	1	0		l	$\begin{array}{c} \longrightarrow P \end{array}$

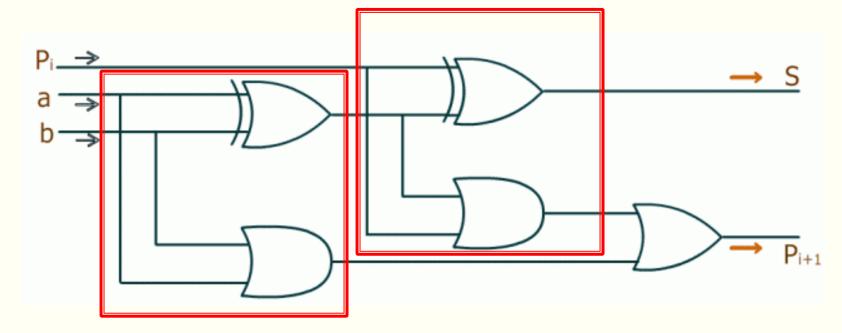
- Р перенесення в наступний розряд
- S сума розряду

- Схема називається напівсуматором (half adder).
  - Значний недолік не враховує можливе перенесення одиниці з *молодшого* розряду

# Додавання у двійковій системі. Суматор (full adder)

 Для врахування переносу з молодшого розряду треба організувати 3 входи та поєднати два напівсуматора:

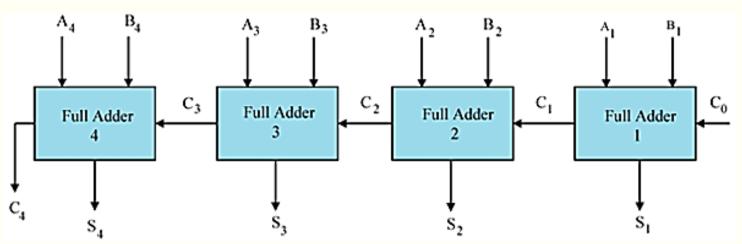
Входы			Выходы	
а	b	Pi	S	P <sub>i+1</sub>
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

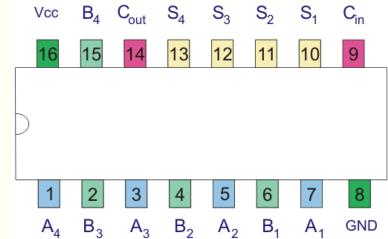


■ Такий суматор називають *однобітним* (One-bit Full Adder).

# Мультибітове додавання

■ Потребує каскад суматорів, з'єднаних в ланцюг за допомогою carry-ліній

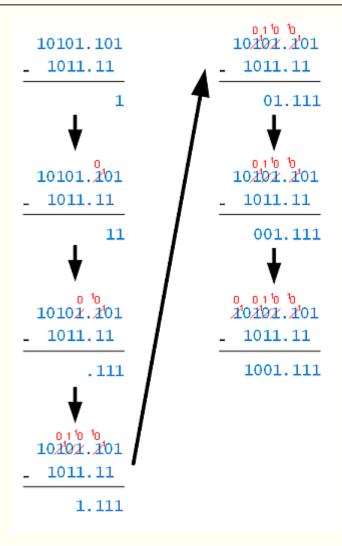




$$Here,\ A_1=1,\ A_2=1,\ A_3=0\ A_4=1.$$
  $B_1=1,\ B_2=0,\ B_3=1\ B_4=1.$ 

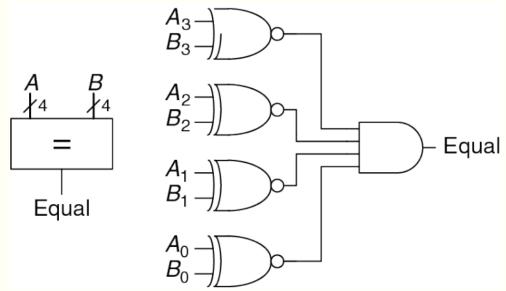
# Віднімання у двійковій системі

- Правила віднімання:
  - -0-0=0
  - 1 0 = 1
  - 0 1 = (займаємо із старшого розряду) 1
  - 1 1 = 0
- x-y = x+(-y)
  - $-y = (\neg y) + 1$
- $x-y = x + (\neg y) + 1$ 
  - Суму може обчислити суматор

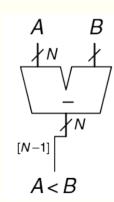


## Компаратори

- Компаратори визначають, чи є два двійкових числа рівними або одне з них більше/менше за інше.
  - Компаратор отримує два N-розрядних двійкових числа A і B.
  - *Компаратор рівності* видає один вихідний сигнал, показуючи, чи рівні А і В (А==В).
  - *Компаратор величини* видає один або більше вихідних сигналів, показуючи відношення величин *А* і *В.*



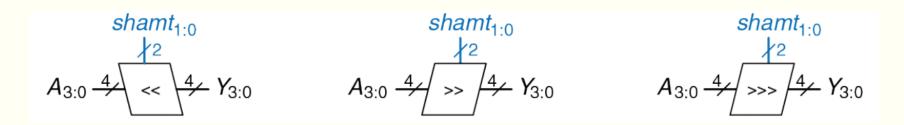
4-розрядний компаратор рівності



**N**-розрядний компаратор величини

# Схеми зсуву і циклічного зсуву

- Переміщають біти (множать або ділять на степінь 2).
  - **Логічні схеми зсуву** зсувають число вліво (LSL) або вправо (LSR) і заповнюють порожні розряди нулями: 11001 LSR 2 = 00110; 11001 LSL 2 = 00100
  - **Арифметичні схеми зсуву** діють так же, проте при зсуві вправо вони заповнюють найбільш значущі розряди значенням знакового біта початкового числа. (необхідно при множенні та діленні знакових чисел): 11001 ASR 2 = 11110; 11001 ASL 2 = 00100
  - Схеми циклічного зсуву зсувають число по колу так, що порожні місця заповнюються розрядами, що зсунуті з іншого кінця: 11001 ROR 2 = 01110; 11001 ROL 2 = 00111.

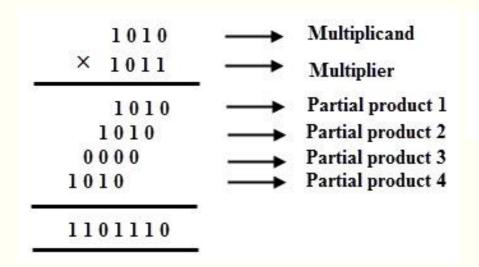


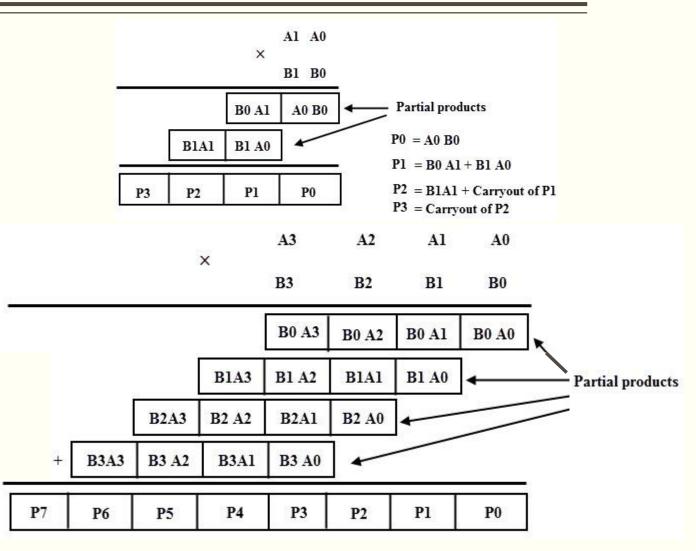
4-розрядні схеми зсуву: (a) зсув уліво, (b) логічний зсув управо, (c) арифметичний зсув вправо

# Множення у двійковій системі

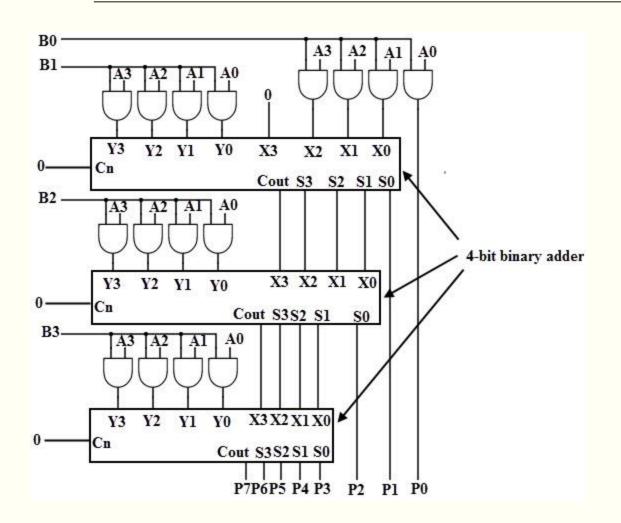


- **■** 0 \* 0 = 0
- 1 \* 0 = 0
- 0 \* 1 = 0
- 1 \* 1 = 1





# Множення у двійковій системі



■ Існують інші алгоритми множення.

<b>nd:</b> 1011
ier: × 1010
0000
<u>+ 0000</u>
00000
<u>+ 1011</u>
010110
+ 0000
0010110
<u>+ 1011</u>
oct: 01101110

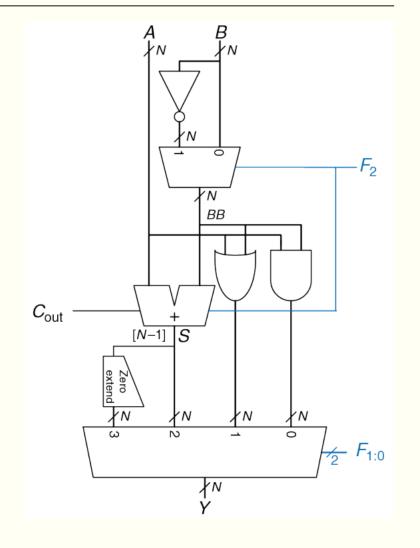
# Ділення в двійковій системі

#### **Dividend:** 00110101 **Divisor D:** 00000101 Zero/Partial Remainder R: 0000000000110101 Shift R and O left. Subtract D. Since the new R 000000000110101 is –, replace with prior R, and append 0 to Q. -00000101 **Quotient** $\downarrow$ 000000000110101**0** Shift R and O left. Subtract D. Since the new R 000000001101010 is –, replace with prior R, and append 0 to Q. -0000010100000000110101**00** Shift R and O left. Subtract D. Since the new R 0000000110101**00** is –, replace with prior R, and append 0 to Q. -000001010000000110101**000** Shift R and O left. Subtract D. Since the new R 000000110101**000** is –, replace with prior R, and append 0 to Q. -00000101000000110101**0000** Shift R and O left. Subtract D. Since the new R 00000110101**0000** is +, append 1 to Q. -0000010100000001101**00001** Shift R and O left, Subtract D. Since the new R 0000001101**00001** is –, replace with prior R, and append 0 to Q. -000001010000001101**000010** Shift R and O left. Subtract D. Since the new R 000001101**000010** is +, append 1 to Q. 000000011**0000101** Shift R and O left. Subtract D. Since the new R 00000011**0000101** is –, replace with prior R, and append 0 to Q. - 00000101 $oldsymbol{Q}$ uotient $oldsymbol{\downarrow}$ **Remainder:** 00000011**00001010**

# Найпростіший АЛУ

F <sub>2:0</sub>	Function	
000	000 A AND B	
001	A OR B	
010	A + B	
011	not used	
100	A AND $\overline{\mathtt{B}}$	
101	A OR $\overline{B}$	
110	A – B	
111	SLT	

- Складається з N-бітного суматора, N двовходових логічних елементів I та двоходових логічних елементів АБО.
  - Также містить інвертори та мультиплексор для інверсії бітів *B*, коли управляючий сигнал *F*2 активний.
  - Мультиплексор з організацією 4:1 обирає необхідну функцію на основі сигналів управління *F*1:0.



#### Quiz

■ Скільки бітів потрібно для представлення числа 1121?

A. 6

D. 11

B. 8

E. 12

C. 10

F. 16

■ <u>Що виведеться в консолі після виконання інструкції 0.125+0.125+0.125==0.375?</u>

A. 0

C. True

B. 0.375

D. False

■ Колір (15, 0, 240) у двійковому коді з порядком little-endian запишеться як

A. 0000111100001111

C. 0000111111111000011110000

B. 000011110000000011110000

D. 11110000000000011110000

# Теми доповідей



**Тема доповіді:** фізичні принципи роботи сучасних транзисторів



**Тема доповіді:** проектування логічних схем



**Тема доповіді:** арифметика з плаваючою крапкою



**Тема доповіді:** алгоритми множення у комп'ютерних системах



**Тема доповіді:** суматори

# ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

Наступне запитання: мова програмування та трансляція програмного коду