Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Курс лекцій

Рівняння математичної фізики

для студентів освітнього напрямку Прикладна математика

Кузьмін Анатолій Володимирович

Київ 2010

Зміст

ВСТУП **10**

ЛЕКЦІЯ 1 **14**

§0. Предмет і методи математичної фізики **14**

ГЛАВА 1 ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ **16**

Основні поняття 16

§ 1. Метод послідовних наближень. **18**

Метод послідовних наближень для неперервного ядра 18

Повторні ядра. 20

Резольвента інтегрального оператора 22

ЛЕКЦІЯ 2 **24**

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром 24

§2. Теореми Фредгольма. **29**

Інтегральні рівняння з виродженим ядром 29

ЛЕКЦІЯ 3 **35**

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром. 35

Альтернатива Фредгольма 36

Наслідки з теорем Фредгольма 38

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром. 39

§3. Інтегральні рівняння з ермітовим ядром **40**

ЛЕКЦІЯ 4 **45**

Характеристичні числа ермітового неперервного ядра 45

§4. Теорема Гілберта - Шмідта та її наслідки **47**

Білінійний розвинення ермітового неперервного ядра 47

Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$ 49

Теорема Гілберта – Шмідта 50

Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром 53

ЛЕКЦІЯ 5 **55**

Додатньо визначені ядра. 55

§5. Задача Штурма - Ліувіля. Теорема Стеклова. **58**

Функція Гріна оператора *L* 58

Властивості функції Гріна 61

Зведення граничної задачі з оператором Штурма - Ліувілля до інтегрального рівняння 62

ЛЕКЦІЯ 6 **67**

Властивості власних чисел задачі Штурма – Ліувіля 67

Задача Штурма - Ліувіля з ваговим множником 69

§6 Інтегральні рівняння першого роду. **70**

Ядра Шмідта 70

Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром 72

Несиметричні ядра. 73

Питання до першого розділу 75

ЛЕКЦІЯ 7 **77**

ГЛАВА 2 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БАЗОВИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ **77**

§ 1. Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини **77**

Закон збереження теплової енергії 77

Частинні випадки рівняння теплопровідності 80

Рівняння дифузії речовини 81

Задача Стефана *(задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)* 83

ЛЕКЦІЯ 8 **87**

§ 2. Математичні моделі теорії пружності **87**

Закони рівноваги елемента поверхні 89

Закон рівноваги елемента об’єму 90

Тензор напружень, головні вісі тензора напружень 91

Тензор деформацій і закони його перетворення 94

Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат 95

ЛЕКЦІЯ 9 **98**

Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень 98

Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності 102

Спрощення системи рівнянь теорії пружності. 103

Математична модель поздовжних коливань стриженя. 104

Математична модель поперечних коливання струни 105

ЛЕКЦІЯ 10 **109**

§ 3. Математичні моделі руху ідеальної рідини. **109**

Закон збереження маси 109

Закон збереження імпульсу 110

Закон збереження енергії 112

Інші термодинамічні функції та закон збереження ентропії 114

Додаткові умови математичної моделі руху ідеальної рідини 114

Задача обтікання тіл 115

Задача про поршень 115

Задача про вільну поверхню 116

Задача руху рідини в каналах 117

ЛЕКЦІЯ 11 **119**

Ізоентропічні течії (течії з постійною ентропією) 119

Потенціальні течії. 121

Модель акустичного руху рідини 124

Потенційне обтікання тонких тіл 126

ЛЕКЦІЯ 12 **128**

§ 4. Моделі руху в'язкої рідини **128**

Закон збереження імпульсу 129

Закон збереження енергії 130

Додаткові умови 131

Умови на поверхні розділу двох середовищ. 132

Граничні умови на вільній поверхні. 132

§5 Математичні моделі електростатики **133**

Електричне поле. Напруженість електричного поля 134

Суперпозиція полів 135

Потік векторного поля . Теорема Гауса 135
Робота сил електростатичного поля. Потенціал електростатичного поля 137

ЛЕКЦІЯ 13 140

Електростатичне поле диполя 140
Електричне поле в діелектриках 141
Постановка основних граничних задач електростатики 142

§ 6 Математичні моделі магнітостатики 144

Закон Біо – Савара 146
Циркуляція вектора напруженості магнітного поля 147
Магнітне поле в середовище 149
Граничні умови для магнітного поля 151
Векторний потенціал 153

ЛЕКЦІЯ 14 154

§ 7 Класифікація рівнянь в частинних похідних 154

Класифікація рівнянь з двома незалежними змінними 154
Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними 157
Загальні принципи класифікації рівнянь довільного порядку і систем диференціальних рівнянь 161

ЛЕКЦІЯ 15 166

§8. Постановка основних граничних задач для лінійних диференційних рівнянь 2-го порядку, коректність, класичні та узагальнені розв'язки 166

Гранична задача для еліптичного рівняння 166
Постановка змішаних задач для рівняння гіперболічного типу Задача Коші для гіперболічного рівняння 167
Задача Коші 168
Постановка змішаних задач для рівняння параболічного типу 169
Коректність задач математичної фізики 169
Приклад Адамара некоректно поставленої задачі. 171
Класичний і узагальнений розв'язки. 171
Формально спряжені оператори. Друга формула Гріна 173

ЛЕКЦІЯ 16 176

9. Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння Плоскі хвилі 176

Характеристичні поверхні 176
Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни 177
Узагальнена задача Коші для n - вимірного хвильового рівняння 180
Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль 183
Теоретичні питання другого модуля 189

ЛЕКЦІЯ 17 191

ГЛАВА 3 ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ТА МЕТОДІВ ПО ПОБУДОВИ ЇХ РОЗВ'ЯЗКІВ 191

§ 1 Поняття узагальнених функцій та дії над ними 191
Узагальнені функції та фізичні розподіли 194
Дії над узагальненими функціями 195
Носій та порядок узагальнених функцій 198
Згортка та регуляризація узагальнених функцій. 199

ЛЕКЦІЯ 18 202

§2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів 202
Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца 203
Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца 205
Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца 207
Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності 208
Фундаментальний розв'язок хвильового оператора 209

ЛЕКЦІЯ 19 211

§ 3 Використання фундаментальних розв'язків та функцій Гріна для знаходження розв'язків задач Коші та граничних задач 211
Задача Коші для рівняння теплопровідності 211
Задача Коші для рівняння коливання струни (Формула Даламбера) 212
Задача Коші для рівняння коливання мембрани та коливання необмеженого об'єму Формула Пуассона та Кіргофа 215
Функція Гріна граничних задач оператора Гельмгольца 216

ЛЕКЦІЯ 20 221
Функція Гріна граничних задач оператора теплопровідності 221

Функція Гріна граничних задач хвильового оператора 224

§4 Методи побудови функції Гріна для канонічних областей 226

Побудова функції Гріна методом відображення зарядів для граничних задач оператора Лапласа 226

Задача Дірихле для півпростору 227

Задача Неймана для півпростору 230

ЛЕКЦІЯ №21 232

Функція Гріна задачі Дірихле для кулі 232

Функція Гріна для областей на площині 234

§ 5 Гармонічні функції та їх властивості 240

Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$ 240

ЛЕКЦІЯ 22 243

Принцип максимуму гармонічних функцій 243

Перетворення Кельвіна гармонічних функцій. 245

Гармонічність в нескінченно віддаленій точці та поведінка гармонічних функцій на нескінченості. 247

Єдиність гармонічних функцій 248

§ 6 Рівняння Гельмгольца, деякі властивості його розв'язків 251

ЛЕКЦІЯ 23 255

Задача на власні значення для оператора Лапласа 255

§ 7 Функції Бесселя та їх властивості 258

ЛЕКЦІЯ 24 266

§ 8 Потенціали операторів Лапласа та Гельмгольца, їх властивості 266

Властивості потенціалів поза областю інтеграції 268

Поверхня Ляпунова 273

Місцева система координат на поверхні Ляпунова 274

Тілесний кут спостереження поверхні 276

ЛЕКЦІЯ 25 278

Потенціал подвійного шару та його пряме значення 278

Інтеграл Гауса 279

Потенціал простого шару та його властивості 283

Нормальна похідна потенціалу простого шару 285

ЛЕКЦІЯ 26 288

§ 9 Дослідження існування розв'язків основних граничних задач рівняння Лапласа та Гельмгольца 288

Дослідження внутрішньої задачі Дірихле та зовнішньої задачі Неймана. 290

Дослідження зовнішньої задачі Дірихле та внутрішньої задачі Неймана. 291

Третя гранична задача для рівняння Лапласа 294

Дослідження існування розв'язків граничних задач рівняння Гельмгольца. 295

ЛЕКЦІЯ 27 299

Граничні задачі рівняння Лапласа на площині 299

§10 Теплові потенціали та їх застосування для дослідження граничних задач рівняння теплопровідності 303

Теоретичні питання третього модуля 308

ГЛАВА 4 УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ 310

ЛЕКЦІЯ 28 310

§ 1 Математичний апарат дослідження узагальнених розв'язків граничних задач 310

Допоміжні результати 310

Матричне представлення лінійного обмеженого оператора 312

Стискаючий лінійний оператор 313

Представлення операторного рівняння з цілком неперервним оператором у скінчено вимірному вигляді 314

Теореми Фредгольма для операторного рівняння 316

Простір $W_2^k(\Omega)$ та його властивості 319

ЛЕКЦІЯ 29 322

Нерівність Пуанкаре – Фрідріхса 322

Еквівалентні нормування у просторах $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ та $W_2^1(\Omega)$ 323

§ 2 Узагальнені розв'язки задачі Діріхле еліптичних рівнянь в просторі $W_2^1(\Omega)$ 326

Дослідження існування розв'язку граничної задачі Діріхле 329

Дослідження існування розв'язку граничної задачі Діріхле з параметром 332

ЛЕКЦІЯ 30 **335**

Узагальнена задача на власні значення Розвинення функцій в ряд по власних функціях симетричного оператора 337

§3 Узагальнені розв'язки другої та третьої граничних задач **339**

Дослідження узагальнених розв'язків другої та третьої задачі 342

ЛЕКЦІЯ 31 **347**

§4Узагальнені розв'язки граничних задач для гіперболічного рівняння **347**

Єдиність узагальненого розв'язку 348

Існування узагальненого розв'язку 352

ЛЕКЦІЯ 32 **358**

§5 Узагальнені розв'язки граничних задач для параболічного рівняння **358**

Єдиність узагальненого розв'язку 359

Існування узагальненого розв'язку 362

ЛЕКЦІЯ 33 **368**

§ 6 Метод Гальоркіна дослідження узагальнених розв'язків **368**

Теоретичні питання четвертого модуля 375

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА **377**

Вступ

Навчальна дисципліна Рівняння математичної фізики є базовою нормативною дисципліною спеціальності Прикладна математика, що викладається на третьому курсі в I та II семестрах в обсязі 8 кредитів - 288 годин, з них 68 години лекційних, 68 годин практичних занять і 152 години самостійної роботи. Після першого семестру складається залік, після другого семестру складається іспит.

Метою і завданням навчальної дисципліни Рівняння математичної фізики є опанування методів побудови математичних моделей різноманітних фізичних процесів у вигляді граничних задач для рівнянь в частинних похідних та інтегральних рівнянь, знаходження в аналітичному вигляді розв'язків окремих типів граничних задач та задач Коші, дослідження коректності основних граничних задач як в класичній так і в узагальненій постановці.

Предмет навчальної дисципліни Рівняння математичної фізики включає в себе вивчення різноманітних фізичних процесів та їх математичний опис за допомогою граничних задач для рівнянь в частинних похідних, класифікацію диференційних рівнянь другого порядку в частинних похідних, методи розв'язання початково-крайових задач та задач Коші, для диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних. Дослідження коректності узагальненої та класичної постановки граничних задач.

Розглядаються також загальна теорія інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та їх зв'язок з задачею Штурма – Ліувілля та граничними задачами математичної фізики.

Вимоги до знань та вмінь.

Студент повинен знати для вивчення курсу Рівняння математичної фізики глави математичного аналізу, лінійної алгебри, диференційних рівнянь,

функціонального аналізу та фізики в обсязі шкільної програми.

Студент повинен вміти обчислювати похідні (частинні, за напрямом, неявної функції), володіти поняттям інтегралу (об'ємного, поверхневого, криволінійного, невласного), досліджувати збіжність та рівномірну збіжність рядів, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з параметрами, розв'язувати звичайні диференційні рівняння та їх системи, користуватись основними законами фізики, володіти основними поняттями математичної теорії поля.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Нормативна навчальна дисципліна Рівняння математичної фізики є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Навчальна дисципліна Рівняння математичної фізики є базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін як Чисельні методи математичної фізики, Чисельні методи прикладної математики, спеціальних курсів, що викладаються на четвертому, п'ятому та шостому курсах при підготовці бакалаврів, спеціалістів та магістрів.

Система контролю знань та умови складання заліку.

Контроль знань студентів здійснюється за модульно-рейтинговою системою. Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за шкалою в 100 балів в кожному семестрі. Робота в кожному семестрі поділяється на два змістових модуля. При виставленні балів у кожному семестрі враховуються: оцінки за три контрольні роботи – по 10 балів за кожну контрольну, робота студента на семінарах – 10 балів, написання колоквіуму – 15 балів, самостійна робота студента - 5 балів. Загальна кількість балів за навчальну роботу у кожному семестрі дорівнює 60 балам. Підсумковий контроль у першому семестрі проводиться у формі заліку з розрахунку 40 балів Для отримання заліку студенту необхідно набрати 60 відсотків від загальної кількості балів першого семестру.

Підсумковий контроль по закінченню курсу відбувається у формі іспиту з максимальною кількістю балів – 40 балів.

При виставлені підсумкової оцінки, для приведення її до 100 бальної шкали, бали набрані в першому семестрі враховуються з вагою 0.45, а бали набрані в другому семестрі з вагою 0.55.

Якщо студент з поважних причин, які підтверджено документально, був відсутній при написанні контрольної роботи або колоквіуму він має право на одне перескладання з можливістю отримання максимальної кількості балів. Термін перескладання визначається викладачем.

Якщо впродовж семестру студент пропустив значну кількість занять (не залежно від причин), не має модульних оцінок, у відповідних графах „Відомості обліку успішності КМСОНП" виставляються „0", а у графі іспиту – відмітка про недопуск.

Студент допускається до складання заліку, якщо кількість набраних ним балів за семестр становить не менше 30 балів.

Залік вважається не зданим, якщо сумарна кількість балів з дисципліни складає менше 60 відсотків.

Шкала відповідності

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою		
90 – 100	5	відмінно	*зараховано*
85 – 89	4	добре	
75 – 84			
65 – 74	3	задовільно	
60 – 64			
35 – 59	2	незадовільно	*не зараховано*
1 – 34			

Структура курсу лекцій Рівняння математичної фізики

Курс лекцій Рівняння математичної фізики складається з чотирьох глав, зміст яких відповідає чотирьом змістовним навчальним модулям:

Глава 1 Інтегральні рівняння;

Глава 2 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів;

Глава 3 Дослідження граничних задач математичної фізики та методів побудови розв’язків;

Глава 4 Дослідження узагальнених розв’язків граничних задач.

Кожна глава курсу лекцій складається з відповідної кількості параграфів, подвійна нумерація формул містить номер параграфу та поточний номер самої формули. Для більш чіткого структурування курсу, кожний параграф, як правило, розділений на декілька *пунктів*. Для більш чіткої ідентифікації основних теоретичних відомостей курсу лекцій, усі теореми виділені та містять назву, яка відображає її сутність. Також в курсі лекцій виділеними є усі допоміжні результати (леми) та основні означення.

Кожна глава (змістовний модуль) закінчується переліком теоретичних питань, які виносяться на колоквіум для перевірки рівня теоретичних знань студентів.

Увесь матеріал курсу лекцій розділений на 33 лекції, з об’ємом навчального матеріалу, який повинен бути викладений викладачем на протязі 2 академічних годин та засвоєний студентами протягом навчального тижня.

Лекція 1

§0. Предмет і методи математичної фізики

Сучасні технології дослідження реального світу доволі інтенсивно використовують методи математичного моделювання, зокрема ці методи широко використовуються тоді, коли дослідження реального (фізичного) об'єкту є неможливими, або надто дорогими. Вже традиційними стали моделювання властивостей таких фізичних об'єктів:

температурні поля і теплові потоки;

електричні, магнітні та електромагнітні поля;

концентрація речовини в розчинах, розплавах або сумішах;

напруження і деформації в пружних твердих тілах;

параметри рідини або газу, який рухається (обтікає) деяке тіла ;

перенос різних субстанцій потоками рідин або газу та інші.

Характерною особливістю усіх математичних моделей, що описують перелічені та багато інших процесів є те, що параметри, які представляють інтерес для дослідника є функціями точки простору $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ та часу t, а самі співвідношення з яких ці характеристики обчислюються є диференціальними рівняннями в частинних похідних зі спеціальними додатковими умовами (крайовими умовами), які дозволяють виділяти однозначний розв'язок.

Таким чином можна сказати, що основними об'єктами дослідження предмету математична фізика є крайові задачі для рівнянь в частинних похідних, які моделюють певні фізичні процеси.

Процес дослідження реального об'єкту фізичного світу можна представити за наступною схемою:

Побудова математичної моделі реального процесу у вигляді диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь в частинних

похідних, доповнення диференціального рівняння в частинних похідних граничними умовами.

Дослідження властивостей сформульованої крайової задачі з точки зору її коректності. Коректність постановки задачі передбачає виконання наступних умов:

Розв’язок крайової задачі існує;

Розв’язок єдиний;

Розв’язок неперервним чином залежить від вхідних даних задачі.

Знаходження розв’язку крайової задачі: точного для найбільш простих задач, або наближеного для переважної більшості задач.

Треба відмітити, що усі перелічені пункти дослідження окрім побудови наближених методів знаходження розв’язків відносяться до предмету дисципліни Математична фізика.

Для дослідження задач математичної фізики використовуються математичний апарат наступних розділів математики:

математичний аналіз;

лінійна алгебра;

диференціальні рівняння;

теорія функцій комплексної змінної;

функціональний аналіз;

При побудові математичних моделей використовуються знання з елементарної фізики.

Наведемо приклад доволі простої і в той же час цілком реальної математичної моделі розповсюдження тепла в стрижні.

Нехай ми маємо однорідний стрижень з теплоізольованою боковою поверхнею і наступними фізичними параметрами:

ρ - густина матеріалу;

S - площа поперечного перерізу;

k - коефіцієнт теплопровідності ;

c - коефіцієнт теплоємності;

L - довжина стрижня.

Позначимо $u(x,t)$ – температуру стрижня в точці x в момент часу t, $u_0(x)$ - температуру стрижня у точці x в початковий момент часу $t=0$.

Припустимо, що на лівому кінці стрижня температура змінюється за заданим законом $\varphi(t)$, а правий кінець стрижня теплоізольований.

В таких припущеннях математична модель може бути записана у вигляді наступної граничної задачі:

$$c\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<L,\ t>0 \qquad (1)$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\ \ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(t) \qquad (3)$$

Математична модель містить диференціальне рівняння (1), яке виконується для вказаних значень аргументу, граничні умови на кінцях стрижня (2) та початкову умови (3).

Глава 1 Інтегральні рівняння

Основні поняття

[1, стор. 270-271]

Інтегральні рівняння – рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтегралу.

Багато задач математичної фізики зводяться до лінійних інтегральних рівнянь виду:

$$\varphi(x)=\lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)dy+f(x)$$

(*.1) - інтегральне рівняння *Фредгольма II роду.*

$$\int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}\,y = f(x)$$

(*.2) - інтегральне рівняння *Фредгольма I роду.*

$K(x,y)$ – ядро інтегрального рівняння, $K(x,y)\in C(\overline{G}\times\overline{G})$, $f(x)$ – вільний член інтегрального рівняння, $f(x)\in C(\overline{G})$, λ – комплексний параметр, $\lambda\in C$ (відомий або невідомий), G – область інтегрування, $G\subseteq R^n$, $\overline{G}$ – замкнена та обмежена.

Інтегральне рівняння (*.1) при $f(x)\equiv 0$ називається *однорідним* інтегральним рівнянням Фредгольма II роду

$$\varphi(x)=\lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)dy \qquad (*.\ 3)$$

$\mathbf{K}$ – *інтегральний оператор*: $(\mathbf{K}\varphi)(x)$.

Будемо записувати інтегральні рівняння (*.1), (*.2) та (*.3) скорочено в операторній формі:

$$\varphi=\lambda\mathbf{K}\varphi+f \qquad (*.1')$$

$$\mathbf{K}\varphi=f \qquad (*.2')$$

$$\varphi=\lambda\mathbf{K}\varphi \qquad (*.3')$$

$$K^*(x,y)=\overline{K(y,x)} \qquad (*.4)$$

називають спряжене (союзне) ядро.

Інтегральне рівняння

$$\psi(x)=\overline{\lambda}\int_G K^*(x,y)\psi(y)dy+g(x) \qquad (*.5)$$

називається *спряженим (союзним)* до інтегрального рівняння (*.1).

Операторна форма:

$$\psi=\overline{\lambda}\mathbf{K}^*\psi+g \qquad (*.5')$$

$$\psi=\overline{\lambda}\mathbf{K}^*\psi \qquad (*.6)$$

Означення *Комплексні значення λ, при яких однорідне інтегральне рівняння Фредгольма (*.3) має нетривіальні розв'язки, називаються характеристичними числами ядра $K(x,y)$. Розв'язки, які відповідають власним числам, називаються власними функціями. Кількість лінійно - незалежних власних функцій називається кратністю характеристичного числа.*

§ 1. Метод послідовних наближень.

Метод послідовних наближень для неперервного ядра

[1, стор. 271 - 274].

Нагадаємо означення норм в банаховому просторі неперервних функцій $C(\overline{G})$ та гільбертовому просторі інтегрованих з квадратом функцій $L_2(G)$ та означення скалярного добутку в просторі $L_2(G)$:

$$\|f\|_{C(\overline{G})} = \max_{x\in\overline{G}} |f(x)|, \qquad \|f\|_{L_2(G)} = \left(\int_G |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(f,g)_{L_2(G)} = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx.$$

<u>Лема 1</u> Інтегральний оператор **K** з неперервним ядром $K(x,y)$ петворює $C(\overline{G}) \xrightarrow{\mathrm{K}} C(\overline{G})$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathrm{K}} L_2(G)$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathrm{K}} C(\overline{G})$, обмежений та мають місце нерівності:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le \mathrm{MV}\|\varphi\|_{C(G)}, \tag{1.1}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \le \mathrm{MV}\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{1.2}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le \mathrm{M}\sqrt{\mathrm{V}}\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{1.3}$$

де $$\mathrm{M} = \max_{x,y\in GxG} |K(x,y)| \tag{1.4}$$

$$\mathrm{V} = \int_G dy \tag{1.5}$$

Доведення: Нехай $\varphi \in L_2(G)$. Тоді φ – абсолютно інтегрована функція на G і, оскільки ядро $K(x,y)$ неперервне на $\overline{G}\times\overline{G}$, функція $(\mathbf{K}\varphi)(x)$ неперервна на $\overline{G}$. Тому оператор **K** переводить $L_2(G)$ в $C(\overline{G})$ і, а з врахуванням нерівності Коші - Буняковського, обмежений. Доведемо нерівності:

1. $$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} = \max_{x\in\overline{G}}\left|\int_G K(x,y)\varphi(y)dy\right| \le \max_{x\in\overline{G}}\int_G |K(x,y)||\varphi(y)|dy \le$$

$$\le \max_{x\in\overline{G}}\left(\max_{y\in\overline{G}}|K(x,y)|\max_{y\in\overline{G}}|\varphi(y)|\int_G dy\right) \le \max_{x,y\in\overline{G}\,\mathrm{x}\,\overline{G}}|K(x,y)|\max_{y\in\overline{G}}|\varphi(y)|\int_G dy = \mathrm{MV}\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$$

2. $$\left(\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)}\right)^2 = \int_G\left|\int_G K(x,y)\varphi(y)dy\right|^2 dx \le \int_G\left|\max_{y\in\overline{G}}|K(x,y)|\int_G \varphi(y)dy\right|^2 dx \le$$

$$\le\left(\max_{x,y\in\overline{G}\,\mathrm{x}\,\overline{G}}|K(x,y)|\right)^2\left|\int_G\varphi(y)dy\right|^2\int_G dx \le \left(\mathrm{M}\|\varphi\|_{L_2(G)}\mathrm{V}\right)^2$$

3. $$\|\mathrm{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} = \max_{x\in\overline{G}}|(\mathrm{K}\varphi)(x)| = \max_{x\in\overline{G}}\left|\int_G K(x,y)\varphi(y)dy\right| \le$$

$$\le \max_{x\in\overline{G}}\sqrt{\int_G |K(x,y)|^2 dy}\sqrt{\int_G|\varphi(y)|^2 dy} \le M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}.$$

Розв’язок інтегрального рівняння другого роду (*.1’) будемо шукати методом послідовних наближень:

$$\varphi_0 = f\,,\ \varphi_1 = \lambda\mathbf{K}\varphi_0 + f\,,\ \varphi_2 = \lambda\mathbf{K}\varphi_1 + f\,,\ \dots\,,\ \varphi_{n+1} = \lambda\mathbf{K}\varphi_n + f \quad (1.10)$$

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\lambda^i\mathbf{K}^i f,\quad \mathbf{K}^{i+1} = \mathbf{K}(\mathbf{K})^i \quad (1.11)$$

$$\varphi_\infty = \lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{n}+1} = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathbf{K}^i f \quad (1.12),$$

ряд Неймана.

Дослідимо збіжність ряду Неймана (1.12)

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{\mathrm{i}}\mathbf{K}^i f\right\|_{C(\overline{G})} \le \sum_{i=0}^{\infty}|\lambda^{\mathrm{i}}|\|\mathbf{K}^i f\|_{C(\overline{G})} \le \sum_{i=0}^{\infty}|\lambda|^i(\mathrm{MV})^i\|f\|_{C(\overline{G})} = \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1-|\lambda|M\,\mathrm{V}} \quad (1.13)$$

(оскільки: $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \le \mathrm{MV}\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$, $\|\mathbf{K}^2\varphi\|_{C(\bar{G})} \le (\mathrm{MV})^2\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$ $\|\mathbf{K}^i\varphi\|_{C(\bar{G})} \le (\mathrm{MV})^i\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$).

Отже ряд Неймана збігається рівномірно при $|\lambda| < \dfrac{1}{\mathrm{MV}}$ (1.14), умова збіжності методу послідовних наближень.

Покажемо, що при виконанні умови (1.14) інтегральне рівняння (*.1) має єдиний розв'язок. Дійсно припустимо, що їх два:

$$\begin{matrix} \varphi^{(1)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(1)} + f \\ \varphi^{(2)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(2)} + f \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(0)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(0)} \end{matrix}$$

Обчислимо норму Чебишева :

$$|\lambda|\|\mathbf{K}\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} = \|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} \quad \|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} \le |\lambda|\mathrm{MV}\|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} \Rightarrow (1-|\lambda|M\,\mathrm{V})\|\varphi^0\|_{C(\bar{G})} \le 0.$$

Звідси маємо, що $\|\varphi^0\|_{C(\bar{G})} = 0$ Таким чином доведена теорема

<u>Теорема 1</u> *(Про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значень параметру)* Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $\varphi(x) = \lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$ з неперервним ядром $K(x,y)$ при умові (1.14): має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C(\bar{G})$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді ряду Неймана $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathbf{K}^i f$.

Повторні ядра.

[1, стор. 275 - 276]

$\forall\, f, g \in \bar{G}$ має місце рівність $(\mathbf{K}f, g)_{L_2(G)} = (f, \mathbf{K}^* g)_{L_2(G)}$

(1.15).

Дійсно, якщо $f, g \in L_2(G)$, то за лемою 1 $\mathbf{K}f, \mathbf{K}^* g \in L_2(G)$ тому

$$(\mathbf{K}f, g) = \int_G (\mathbf{K}f)\overline{g}dx = \int_G \left[\int_G K(x,y) f(y)dy\right]\overline{g(x)}dx = \int_G f(y)\left[\int_G K(x,y)\overline{g(x)}dx\right]dy =$$

$$= \int_G f(y)\left(\mathbf{K}^* g\right)(y)dy = \left(f, \mathbf{K}^* g\right).$$

<u>Лема 2</u> Якщо $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ – інтегральні оператори з неперервними ядрами $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ відповідно, то оператор $\mathrm{K}_3 = \mathrm{K}_2\mathrm{K}_1$ також інтегральний оператор з неперервним ядром $K_3(x,z) = \int_G K_2(x,y)K_1(y,z)dy$. При цьому справедлива формула: $(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1)^* = \mathbf{K}_1^* \cdot \mathbf{K}_2^*$

Доведення:

Нехай $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ – ядра інтегральних операторів **$\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$**. Розглянемо $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$:

$$(\mathbf{K}_3 f)(x) = (\mathrm{K}_2\mathrm{K}_1 f)(x) = \int_G K_2(x,y)\left(\int_G K_1(y,z) f(z)dz\right)dy =$$

$$\int_G \left(\int_G K_2(x,y)K_1(y,z)dy\right) f(z)dz = \int_G K_3(x,z) f(z)dz$$

$\Rightarrow K_3(x,z) = \int_G K_2(x,y)K_1(y,z)dy$ – ядро оператора $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$.

З рівності (1.15) для всіх $f, g \in L_2(G)$ отримуємо $\left(f, \mathbf{K}_3^* g - \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^* g\right) = 0$, звідки випливає, що $\mathbf{K}_3^* = \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*$.

Із доведеної леми випливає, що оператори $\mathbf{K}^n = \mathbf{K}\left(\mathbf{K}^{n-1}\right) = \left(\mathbf{K}^{n-1}\right)\mathbf{K}$, $n = 2,3,\ldots$ – інтегральні та їх ядра $K_{(n)}(x,y)$ – неперервні та задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$K_{(1)}(x,y) = K(x,y),\ K_{(n)}(x,y) = \int_G K(x,\xi)K_{(n-1)}(\xi,y)d\xi$$

$$\mathbf{K}f = \int_G K(x,y) f(y)dy, \ldots, \mathbf{K}^n f = \int_G K_{(n)}(x,y) f(y)dy,$$

де $K_{(n)}(x,y) = \int_G K(x,\xi)K_{(n-1)}(\xi,y)d\xi$ (1.16)

– повторні (ітеровані) ядра.

Резольвента інтегрального оператора

[1, стор. 276 - 278]

Пригадаємо представлення розв'язку інтегрального рівняння (*.1) у вигляді ряду Неймана $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \mathbf{K}^i f$. Виконаємо перетворення

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}(\mathbf{K}^i f)(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\int_G K_{(i)}(x,y)f(y)dy=$$

$$=f(x)+\lambda\int_G(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{(i)}(x,y))f(y)dy=f(x)+\lambda\int_G\Re(x,y;\lambda)f(y)dy,\text{ при } |\lambda|<\frac{1}{\mathrm{MV}}.$$

$$\Re(x,y,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{(i)}(x,y) \qquad (1.17)$$

– резольвента інтегрального оператора.

Операторна форма запису розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту ядра має вигляд:

$$\varphi=f+\lambda\Re f \qquad (1.18)$$

Мають місце операторні рівності:

$\varphi=(\mathrm{E}+\lambda\mathbf{R})f,\quad (\mathrm{E}-\lambda\mathbf{K})\varphi=f,\quad \varphi=(\mathrm{E}-\lambda\mathbf{K})^{-1}f$ таким чином маємо

$$\mathrm{E}+\lambda\mathbf{R}=(\mathrm{E}-\lambda\mathbf{K})^{-1},\ |\lambda|<\frac{1}{\mathrm{MV}} \qquad (1.19)$$

Зважуючи на формулу (1.18) має місце теорема

<u>Теорема 2</u> *(Про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значенням параметру)* Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $\varphi(x)=\lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)dy+f(x)$ з неперервним ядром $K(x,y)$ при умові (1.14) має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C(\overline{G})$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді (1.18) за допомогою резольвенти (1.17).

<u>Приклад 1</u> Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt)^2 \varphi(t) dt$.

<u>Розв'язок</u> $M = 1,\ V = 1$

Побудуємо повторні ядра $K_{(1)}(x,t) = x^2 t^2$, $K_{(2)}(x,t) = \int_0^1 x^2 z^4 t^2 dz = \frac{1}{5} x^2 t^2$,

$$K_{(p)}(x,t) = \frac{1}{5^{p-2}} \int_0^1 x^2 z^4 t^2 dz = \frac{1}{5^{p-1}} x^2 t^2$$

Резольвента має вигляд $R(x,t,;\lambda) = x^2 t^2 (1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots \frac{1}{5^p} + \ldots.) = x^2 t^2 \frac{5}{5-\lambda}$

$|\lambda| < 5$ Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) + x + \int_0^1 x^2 t^3 \frac{5}{5-\lambda} dt = x + x^2 \frac{5}{4 \cdot (5-\lambda)}$$

Лекція 2

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром

[1, стор. 280 - 283], [2, стор. 170 - 173], [3, стор. 54 - 56]

Ядро $K(x,y)$ називається полярним, якщо воно представляється у вигляді:

$$K(x,y)=\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} \qquad (1.20),$$

де $A\in C(\overline{G}\times\overline{G})$,$|x-y|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$, $\alpha<n$ (n – розмірність евклідового простору).

Ядро називається слабо полярним , якщо $\alpha<n/2$.

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з неперервним ядром мав вигляд:

$$\varphi(x)=\lambda\int_G K(x,y)\varphi(x,y)dy+f(x);\ \ \varphi_0=f,\varphi_1=f+\lambda\mathbf{K}\varphi_0,\ldots,\varphi_{n+1}=f+\lambda\mathbf{K}\varphi_n.$$

Оцінки, що застосовувались для неперервних ядер не працюють для полярних ядер, тому що максимум полярного ядра рівний нескінченності (ядро необмежене в рівномірній метриці), отже, сформулюємо лему аналогічну лемі 1 для полярних ядер.

<u>Лема 3</u> Інтегральний оператор K з полярним ядром $K(x,y)$ переводить $C(\overline{G})\xrightarrow{\mathrm{K}}C(\overline{G})$ і при цьому має місце оцінка: $\|K\varphi\|_{C(\overline{G})}\le N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$ (1.21),

де $N=\max\limits_{x\in\overline{G}}\int_G|K(x,y)dy|$ (1.22)

Доведення: Спочатку доведемо, що функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0.

Оцінимо при умові $|x-x_0|<\eta/2$ вираз:

$$\left|\int_G K(x,y)\varphi(y)dy-\int_G K(x_0,y)\varphi(y)dy\right|=\left|\int_G \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}\varphi(y)dy-\int_G \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\alpha}}\varphi(y)dy\right|\le$$

$$\le\int_G\left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\alpha}}\right||\varphi(y)|dy\le(*)$$

винесемо $\max\varphi(y)$ у вигляді $\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$, а інтеграл розіб'ємо на два інтеграли: інтеграл по $U(x_0,\eta)$ - кулі з центром в т. x_0 і радіусом η; інтеграл по залишку $G/U(x_0,\eta)$.

$$(*)\le\|\varphi\|_{C(\overline{G})}\left(\int_{U(x_0,\eta)}\left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\alpha}}\right|dy+\int_{G/U(x_0,\eta)}\left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\alpha}}\right|dy\right).$$

Оцінимо тепер кожний з інтегралів:

$\int_{U(x_0,\eta)}\left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}-\frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^{\alpha}}\right|dy\le A_0\left(\int_{U(x_0,\eta)}\frac{dy}{|x-y|^{\alpha}}+\int_{U(x_0,\eta)}\frac{dy}{|x_0-y|^{\alpha}}\right)$, де A_0 max функції $A(x\ ,y)$.

Введемо узагальнені сферичні координати з центром у точці x_0 в просторі R^n:

$y_1=x_{0,1}+\rho\cos\nu_1;$

$y_2=x_{0,2}+\rho\sin\nu_1\cos\nu_2;$

……;

$y_{n-1}=x_{0,n-1}+\rho\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{n-2}\cos\nu_{n-1};$

$y_n=x_{0,n}+\rho\sin\nu_1\ldots\sin\nu_{n-1}$

Якобіан переходу має вигляд:

$$\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(\rho,\nu_1,\ldots,\nu_{n-1})}=\rho^{n-1}\Phi(\sin\nu_1,\ldots,\sin\nu_{n-1},\cos\nu_1,\ldots,\cos\nu_{n-1})$$

$0 \le \rho \le \eta, \quad 0 \le \nu_i \le \pi, \ i = \overline{1, n-2}; \ 0 \le \nu_{n-1} \le 2\pi$

Отримаємо $\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{dy}{|x_0 - y|^\alpha} = \sigma_n \int\limits_0^\eta \frac{\rho^{n-1} d\rho}{\rho^\alpha} = \sigma_n \left. \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-a} \right|_0^\eta = \frac{\sigma_n}{n-a} \eta^{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4}$, де σ_n- площа поверхні одиничної сфери в n-вимірному просторі R^n.

Оскільки $|x - x_0| < \eta/2$, то $\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \le \int\limits_{U\left(x, \frac{3\eta}{2}\right)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = \frac{\sigma_n}{n-\alpha} \left(3\eta/2 \right)^{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4}$

Оскільки $\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \in C\left(\overline{U}\left(x_0, \eta/2 \right) \times \overline{G/U}(x_0, \eta) \right)$ то

$$\int\limits_{G/U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| dy \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Таким чином ми довели, що $\left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)dy - \int\limits_G K(x_0,y)\varphi(y)dy \right| \le \varepsilon$, тобто функція $\mathrm{K}\varphi$ неперервна точці x_0

Доведемо оцінку: $\|\mathrm{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \le N \|\varphi\|_{C(\overline{G})}$, $N = \max\limits_{x \in \overline{G}} \int\limits_G |K(x,y)| dy$

$$\left| \int\limits_G \mathrm{K}(x,y)\varphi(y)dy \right| \le \int\limits_G |\mathrm{K}(x,y)||\varphi(y)|dy \le \int\limits_G |\mathrm{K}(x,y)|dy \cdot \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \le$$

$\le \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \cdot \max\limits_{x \in \overline{G}} \int\limits_G |K(x,y)| dy = N \|\varphi\|_{C(\overline{G})}$, отже $\|\mathrm{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \le N \|\varphi\|_{C(\overline{G})}$

Покажемо скінченність $N = \max\limits_{x \in \overline{G}} \int\limits_G |K(x,y)| dy$ Розглянемо

$$\int\limits_G |K(x,y)| dy \le A_0 \int\limits_G \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \le (*)$$

Для будь-якої точки x, існує радіус (рівний максимальному діаметру області G такий, що в кулю з цим радіусом попадає будь – яка точка y: $D = \mathrm{diam} G$

$$(*) \le A_0 \int\limits_{U(x,D)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = A_0 \frac{\sigma_n}{n-\alpha} D^{n-\alpha}$$

<u>Теорема 3</u> *(про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з полярним ядром для малих значень параметру)* Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з полярним ядром $K(x,y)$ має єдиний розв'язок в класі неперервних функцій для будь – якого неперервного вільного члена f при умові $|\lambda| < \frac{1}{N}$ (1.23),

і цей розв'язок може бути представлений рядом Неймана, який збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення: Сформулюємо умову збіжності ряду Неймана $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f$,

отже $\|\varphi\|_{C(\overline{G})} \le \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^i N^i \|f\|_{C(\overline{G})}$ Останній ряд – геометрична прогресія і збігається при умові $|\lambda| < \frac{1}{N}$

<u>Лема 4</u> Нехай маємо два полярних ядра $K_i(x,y) = \frac{A_i(x,y)}{|x-y|^{\alpha_i}}$, $\alpha_i < n$, $i = 1,2$,а область G обмежена, тоді ядро $K_3(x,y) = \int_G K_2(x,\xi) K_1(\xi,y) d\xi$ – також полярне, причому має місце співвідношення:

$$K_3(x,y) = \begin{cases} \frac{A_3(x,y)}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}}, & \alpha_1+\alpha_2-n > 0 \\ A_3(x,y)\left|\ln|x-y|\right| + B_3(x,y), & \alpha_1+\alpha_2-n = 0 \\ A_3(x,y) \quad \alpha_1+\alpha_2-n < 0 & \end{cases} \qquad (1.24)$$

де A_3, B_3 неперервні функції.

Без доведення

З леми 4 випливає, що всі повторні ядра $K_{(p)}(x,y)$ полярного ядра $K(x,y)$ задовольняють оцінкам:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$K_{(2)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_2(x,y)}{|x-y|^{2\alpha-n}}, & 2\alpha - n > 0 \\ A_2(x,y)\left|\ln|x-y|\right| + B_2(x,y), & 2\alpha - n = 0 \\ A_2(x,y), & 2\alpha - n < 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

$$K_{(3)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_3(x,y)}{|x-y|^{3\alpha-2n}}, & 3\alpha - 2n > 0 \\ A_3(x,y)\left|\ln|x-y|\right| + B_3(x,y), & 3\alpha - 2n = 0 \\ A_3(x,y), & 3\alpha - 2n < 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

$$K_{(p)}(x,y) \begin{cases} \dfrac{A_p(x,y)}{|x-y|^{p\alpha-(p-1)n}}, & p\alpha - (p-1)n > 0 \\ A_p(x,y)\left|\ln|x-y|\right| + B_p(x,y), & p\alpha - (p-1)n = 0 \\ A_p(x,y), & p\alpha - (p-1)n < 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

Легко бачити, що для $\forall \alpha, n$ існує p_0 таке, що починаючи з нього всі повторні ядра є неперервні:

$$p\alpha - (p-1)n < 0 \Rightarrow (n-\alpha)p > n \Rightarrow p > \frac{n}{n-\alpha} \Rightarrow p_0 = \left[\frac{n}{n-\alpha}\right] + 1 \tag{1.28}$$

Звідси маємо, що *резольвента* $\Re(x,y;\lambda)$ полярного ядра $K(x,y)$ складається з двох частин полярної складової $\Re_1(x,y;\lambda)$ і неперервної складової $\Re_2(x,y;\lambda)$:

$$\Re(x,y;\lambda) = \Re_1(x,y;\lambda) + \Re_2(x,y;\lambda) =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) = \sum_{i=1}^{p_0-1} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) + \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \tag{1.29}$$

Для доведення збіжності резольвенти, потрібно дослідити збіжність ряду

$\Re_2(x,y;\lambda)$. Він сходиться рівномірно при $x,y\in\overline{G}$; $|\lambda|\le\frac{1}{N}-\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$, визначаючи неперервну функцію $\Re_2$ при $x,y\in\overline{G}$; $|\lambda|<\frac{1}{N}$ і аналітичну по λ в крузі $|\lambda|<\frac{1}{N}$. (1.30)

Дійсно $\Re_2(x,y;\lambda)=\sum_{i=p_0}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{(i)}(x,y)$. $\left|\lambda^{p_0+s-1}K_{(p_0+s)}(x,y)\right|\le|\lambda|^{p_0+s-1}M_{p_0}N^s$ де $M_{p_0}=\max_{x,y\in\overline{G}\times\overline{G}}\left|K_{p_0}(x,y)\right|$. Таким чином ряд $\Re_2(x,y;\lambda)$ мажорується геометричною прогресією, яка збігається при умові (1.30).

§2. Теореми Фредгольма.

Інтегральні рівняння з виродженим ядром

[1, стор. 286 - 292]

Означення *Неперервне ядро* $K(x,y)$ *називається виродженим , якщо представляється у вигляді* $K(x,y)=\sum_{i=1}^{N}f_i(x)g_i(y)$ *(2.1)*

$\{f_i\}_{i=\overline{1,N}},\{g_i\}_{i=\overline{1,N}}\subset C(\overline{G})$ $\{f_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *та* $\{g_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *- лінійно незалежні системи функцій.*

Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$\varphi(x)=\lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)dy+f(x) \qquad (2.2)$$

Підставимо вигляд ядра з (2.1) отримаємо:

$$\varphi(x)=\lambda\int_G\sum_{i=1}^{N}f_i(x)g_i(y)\varphi(y)dy+f(x)=$$
$$\lambda\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\int_G g_i(y)\varphi(y)dy+f(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{N}c_i f_i(x) \qquad (2.3)$$

Де $c_j=\int_G g_j(y)\varphi(y)dy$. (2.4)

В (2.4) підставимо значення $\varphi(x)$ з (2.3):

$$c_j = \int_G g_j(y)\varphi(y)dy = \int_G g_j(y)\left(f(y) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(y) \right)dy =$$

$$\int_G g_j(y) f(y)dy + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \int_G g_j(y) f_i(y)dy$$

В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c_j = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ji} c_i + a_j, \ j = \overline{1, N} \qquad (2.5)$$

Де $\alpha_{ji} = \int_G g_j(y) f_i(y)dy$, $a_j = \int_G g_j(y) f(y)dy$ (2.6)

Отримаємо систему рівнянь для спряженого ядра:

$$K^*(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \overline{f_i(y)}\,\overline{g_i(x)} \qquad (2.1^/)$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G K^*(x, y)\psi(y)dy + g(x) \qquad (2.2^/)$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \overline{g_i(x)} \int_G \overline{f_i(y)}\psi(y)dy + g(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \overline{g_i(x)} + g(x) \qquad (2.3^/)$$

$$d_i = \int_G \overline{f_i(y)}\psi(y)dy \qquad d_j = \int_G \overline{f_j(y)} \left[g(y) + \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \overline{g_i(y)} \right] dy \qquad (2.4^/)$$

$$d_j = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ji} d_i + b_j, \ i = \overline{1, N} \qquad (2.5^/)$$

$$\beta_{ji} = \int_G \overline{f_j}(y)\overline{g_i}(y)dy, \quad b_j = \int_G \overline{f_j}(y) g(y)dy \qquad (2.6^/)$$

$$\beta_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \qquad (2.7)$$

Тобто отримуємо системи лінійних рівнянь які в матричному вигляді запишуться так:

$$\vec{c} = \lambda \mathrm{A} \vec{c} + \vec{a} \qquad (2.8) \qquad\qquad \vec{d} = \lambda \mathrm{A}^* \vec{d} + \vec{b} \qquad (2.8^/)$$

з матрицями $\mathrm{E} - \lambda \mathrm{A}$ та $\mathrm{E} - \overline{\lambda} \mathrm{A}^*$ відповідно і визначником $D(\lambda) = |\mathrm{E} - \lambda \mathrm{A}| = |\mathrm{E} - \overline{\lambda} \mathrm{A}^*|$

Дослідимо питання існування та єдиності розв’язку систем ЛАР (2.8) та (2.8’).

Нехай $D(\lambda)\neq 0$, $\operatorname{rang}\left|\mathrm{E}-\lambda\,\mathrm{A}\right| = \operatorname{rang}\left|\mathrm{E}-\overline{\lambda}\,\mathrm{A}^{*}\right| = N$, тоді СЛР (2.8) і (2.8’) мають єдиний розв’язок для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно, а тому інтегральні рівняння Фредгольма (2.2), (2.2/) мають єдині розв’язки при будь-яких f та g відповідно, і ці розв’язки записуються за формулами (2.3), (2.3/).

Нехай $D(\lambda)=0$, $\operatorname{rang}\left|E-\lambda\,\mathrm{A}\right| = \operatorname{rang}\left|E-\overline{\lambda}\,\mathrm{A}^{*}\right| = q < N$, тоді однорідні СЛР

$$\vec{c} = \lambda\,\mathrm{A}\vec{c} \qquad (2.9)$$

та $$\vec{d} = \overline{\lambda}\,\mathrm{A}^{*}\vec{d} \qquad (2.9^{/})$$

мають $N-q$ лінійно незалежних розв’язків $\vec{c}_s$, $\vec{d}_s$, $s=\overline{1,N-q}$, де $\vec{c}_s=\left(c_{s1},\ldots c_{sN}\right)$, $\vec{d}_s=\left(d_{s1},\ldots d_{sN}\right)$, таким чином відповідні однорідні інтегральні рівняння Фредгольма до рівнянням (2.2), (2.2’) мають $N-q$ лінійно незалежних розв’язків які записуються за такими формулами :

$$\varphi_s(x)=\lambda\sum_{i=1}^{N}c_{si}\,f_i(x) \qquad s=\overline{1,N-q} \qquad (2.10)$$

$$\psi_s(x)=\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{N}d_{si}\,\overline{g}_i(x) \qquad s=\overline{1,N-q} \qquad (2.10')$$

$\varphi_s(x)$, $\psi_s(x)$ - власні функції, а число $N-q$ - кратність характеристичного числа λ та $\overline{\lambda}$. Кожна з систем функцій φ_s , ψ_s , $s=\overline{1,N-q}$ лінійно незалежна, оскільки лінійно незалежними є системи функцій f_i та g_i і лінійно незалежні вектори $\vec{c}_s$ i $\vec{d}_s$ $s=\overline{1,N-q}$.

Нагадаємо одне з формулювань теореми Кронекера - Капеллі. Для існування розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо що би вільний член рівняння був ортогональним всім розв’язкам спряженого однорідного рівняння.

Для нашого випадку цю умову можна записати у вигляді

$$\left(\vec{a},\vec{d}_s\right)=\sum_{i=1}^{N}a_i\,\overline{d}_{si}=0 \quad \forall\ s=\overline{1,N-q} \qquad (2.11)$$

Покажемо, що для виконання умови $\left(\vec{a},\vec{d}_s\right)=0, s=\overline{1,N-q}$ необхідно і достатньо, щоб вільний член інтегрального рівняння Фредгольма (2.2) був ортогональним розв'язкам спряженого однорідного рівняння тобто $\left(f,\psi_s\right)=0$, $s=\overline{1,N-q}$ (2.12)

Дійсно, з (2.10') та (2.4) маємо:

$$\left(f,\psi_s\right)=\int_G f(x)\overline{\psi}_s(x)\mathrm{d}x=\lambda\sum_{i=1}^{N}\overline{d}_{si}\int_G f(x)g_i(x)\mathrm{d}x=$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{N}a_i\overline{d}_{si}=\lambda\left(\vec{a},\vec{d}_s\right)=0,\quad s=\overline{1,N-q}$$

В цьому випадку розв'язок системи ЛАР не єдиний, і визначається з точністю до довільного розв'язку однорідної системи рівнянь, тобто з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних векторів характеристичного числа λ :

$$\vec{c}=\vec{c}_0+\sum_{i=1}^{N-q}\gamma_i\vec{c}_i \qquad (2.13),$$

де γ_i - довільні константи, $\vec{c}_0$ - будь-який розв'язок неоднорідної системи рівнянь $\vec{c}_0=\lambda\mathrm{A}\vec{c}_0+\vec{a}$, тоді розв'язок інтегрального рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{N-q}\gamma_i\varphi_i(x) \qquad (2.14),$$

φ_0 - довільний розв'язок неоднорідного рівняння $\varphi_0=\lambda\mathrm{K}\varphi_0+f$.

Отже доведені такі теореми:

<u>Теорема 1</u> *(Перша теорема Фредгольма для вироджених ядер)* Якщо $D(\lambda)\neq 0$, то інтегральне рівняння (2.2) та спряжене до нього (2.2') мають єдині розв'язки для довільних вільних членів f та g з класу неперервних функцій.

<u>Теорема 2</u> *(Друга теорема Фредгольма для вироджених ядер)* Якщо $D(\lambda)=0$, то однорідне рівняння Фредгольма другого роду (2.2) ($f\equiv 0$) і спряжене до нього

(2.2’) ($g \equiv 0$) мають однакову кількість лінійно незалежних розв’язків рівну $N - q$, де $q = rang(\mathrm{E} - \lambda \mathrm{A})$

<u>Теорема 3</u> *(Третя теорема Фредгольма для вироджених ядер)* Якщо $D(\lambda) = 0$, то для існування розв’язків рівняння (2.2) необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним усім розв’язкам однорідного спряженого рівняння (2.12). При виконанні цієї умови розв’язок існує та не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа λ.

<u>Наслідок 1</u> Характеристичні числа виродженого ядра $K(x, y)$ співпадають з коренями поліному $D(\lambda) = 0$,а їх кількість не перевищує N.

<u>Приклад 1:</u> Знайти розв’язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x - y)\varphi(y)dy + \cos(x)$$

<u>Розв’язок</u>: $\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int_0^{\pi} \cos(y)\varphi(y)dy - \lambda \cos(x) \int_0^{\pi} \sin(y)\varphi(y)dy + \cos(x)$

Позначимо $c_1 = \int_0^{\pi} \cos(y)\varphi(y)dy \quad c_2 = \int_0^{\pi} \sin(y)\varphi(y)dy$

$\varphi(x) = \lambda(c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x)) + \cos(x)$. Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^{\pi} \cos(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))dy \\ c_2 = \int_0^{\pi} \sin(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))dy \end{cases}$$

Після обчислення інтегралів:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{\lambda\pi}{2} c_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi\lambda}{2} c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$ Визначник цієї системи $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\pi\lambda}{2} \\ -\dfrac{\pi\lambda}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2 \neq 0$

За правилом Крамера маємо $c_1 = \dfrac{2\pi}{4 + (\pi\lambda)^2}$ $c_2 = \dfrac{\pi^2\lambda}{4 + (\pi\lambda)^2}$

Таким чином розв’язок має вигляд $\varphi(x) = 2\dfrac{\pi\lambda\sin(x) + 2\cos(x)}{4 + (\pi\lambda)^2}$

Лекція 3

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром.

[1, стор. 293 - 297]

Будемо розглядати рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x,y)\varphi(y)dy + f(x) \qquad (2.2)$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G K^*(x,y)\psi(y)dy + g(x) \qquad (2.2^{/})$$

Ядро $K(x,y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, отже його можна наблизити поліномом (Теорема Вейєрштраса).

Тобто, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $P_N(x,y) = \sum_{|\alpha+\beta| \le N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ (2.14)

де $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, такий що $|K(x,y) - P_N(x,y)| < \varepsilon$, $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$

тобто $K(x,y) = P_N(x,y) + Q_N(x,y)$ (2.15)

де $P_N(x,y)$ - вироджене ядро (поліном), $|Q_N(x,y)| < \varepsilon$, $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$

Виходячи з (2.15), інтегральне рівняння Фредгольма приймає вигляд

$$\varphi = \lambda \mathrm{P}_N \varphi + \lambda \mathrm{Q}_N \varphi + f \qquad (2.16)$$

де P_N та Q_N інтегральні оператори з ядрами $P_N(x,y)$ та $Q_N(x,y)$ відповідно. ($\mathrm{P}_N + \mathrm{Q}_N = \mathrm{K}$)

Для спряженого рівняння маємо:

$$K^*(x,y) = P_N^*(x,y) + Q_N^*(x,y) \qquad (2.15^{/})$$

$$\psi = \overline{\lambda} \mathrm{P}_N^* \psi + \overline{\lambda} \mathrm{Q}_N^* \psi + g \qquad (2.16^{/})$$

Покажемо, що в класі $C(G)$ рівняння (2.16), (2.16’) еквівалентні рівнянням з виродженим ядром:

Введемо нову функцію $\Phi = \varphi - \lambda \mathrm{Q}_N \varphi$ (2.17)

З (2.16) випливає що $\Phi = \lambda \mathrm{P}_N \varphi + f$ з (1.19) випливає що $\forall \lambda$ такого що $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$ $\left(\mathrm{E} - \lambda \mathrm{Q}_N\right)^{-1} = \left(\mathrm{E} + \lambda \mathrm{R}_N\right)$, де R_N - резольвента для Q_N. Отже $\varphi = \left(\mathrm{E} - \lambda \mathrm{Q}_N\right)^{-1} \Phi = \left(\mathrm{E} + \lambda \mathrm{R}_N\right)\Phi$.

Отже, рівняння (2.2) перетворюється на

$$\Phi = \lambda \mathrm{P}_N \left(\mathrm{E} + \lambda \mathrm{R}_N\right)\Phi + f \qquad (2.18)$$

Для спряженого рівняння (2.2/) маємо:

$\psi = \overline{\lambda}\left(\mathrm{E} + \overline{\lambda}\mathrm{R}_N^*\right)\mathrm{P}_N^* \psi + \left(\mathrm{E} + \overline{\lambda}\mathrm{R}_N^*\right) g$ Позначимо $g_1 = \left(\mathrm{E} + \overline{\lambda}\mathrm{R}_N^*\right) g$

Маємо: $\psi = \overline{\lambda}\left(\mathrm{E} + \overline{\lambda}\mathrm{R}_N^*\right)\mathrm{P}_N^* \psi + g_1$ (2.18/)

Оскільки $(\mathrm{P}_N \mathrm{R}_N)^* = \mathrm{R}_N^* \mathrm{P}_N^*$ то рівняння (2.18) та (2.18’) спряжені.

Позначимо $\mathrm{T}_N = \mathrm{P}_N \left(\mathrm{E} + \lambda \mathrm{R}_N\right)$ (2.19)

$$\mathrm{T}_N^* = \left(\mathrm{E} + \overline{\lambda}\mathrm{R}_N^*\right)\mathrm{P}_N^* \qquad (2.19/)$$

тоді рівняння Фредгольма з неперервним ядром можна записати у вигляді:

$$\Phi = \lambda \mathrm{T}_N \Phi + f \qquad (2.20)$$

$\Psi = \overline{\lambda}\mathrm{T}_N^* \Psi + g_1$, де (2.20/)

$T_N(x, y, \lambda) = P_N(x, y) + \lambda \int_G P_N(x, \xi) R_N(\xi, y; \lambda) d\xi$ – вироджене, оскільки є сумою двох вироджених, поліному $P_N\left(x, y\right)$ та інтегрального доданку. Покажемо що другий доданок в T_N - вироджений дійсно:

$$\int_G \sum_{|\alpha+\beta| \le N} a_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta R_N(\xi, y) d\xi = \sum_{|\alpha+\beta| < N} a_{\alpha\beta} x^\alpha \int_G \xi^\beta R_N(\xi, y) d\xi$$

Альтернатива Фредгольма

Сукупність теорем Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром називається *альтернативою Фредгольма.*

<u>Теорема 1</u> *(Перша теорема Фредгольма для неперервних ядер)* Якщо інтегральне

рівняння (2.2) з неперервним ядром $K(x,y)$ має розв'язок $\forall f \in C(\bar{G})$ то і спряжене рівняння (2.2/) має розв'язок для $\forall g \in C(\bar{G})$ і ці розв'язки єдині.

<u>Теорема 2</u> *(Друга теорема Фредгольма для непевних ядер)* Якщо інтегральне рівняння (2.2) має розв'язки не для будь – якого вільного члена f то однорідні рівняння $\varphi = \lambda \mathrm{K} \varphi$ (*) та $\psi = \bar{\lambda} \mathrm{K}^* \psi$ (**) мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків.

<u>Теорема 3</u> *(Третя теорема Фредгольма для неперервних ядер)* Якщо інтегральне рівняння (2.2) має розв'язок не для $\forall$ вільного члена f, то для існування розв'язку інтегрального рівняння (2.2) в $C(\bar{G})$ необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння (**). Розв'язок не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки, натягнутої на систему власних функцій оператора K.

Доведення теорем:

Для будь – якого фіксованого значення λ виберемо ε, таке щоби $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon V}$.

Теорема 1. Нехай (2.2) має розв'язок в $C(\bar{G})$ для $\forall$ вільного члена f тоді еквівалентне йому рівняння (2.20): $\Phi = \lambda \mathrm{T}_N \Phi + f$ має такі ж властивості і згідно з першою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) \neq 0$, а спряжене до нього рівняння (2.20'): $\Psi = \bar{\lambda} \mathrm{T}_N^* \Psi + g_1$ теж має єдиний розв'язок $\forall$ вільного члена g_1, еквівалентне до нього рівняння (2.2/) має розв'язок $\forall g$. Таким чином перша теорема доведена.

Теорема 2. Нехай (2.2) має розв'язок не $\forall$ вільного члена f, тоді, рівняння з виродженим ядром (2.20) має таку ж властивість. Згідно з теоремами

Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda)=0$ (для виродженого ядра T_N). Однорідні рівняння які відповідають (2.20) і (2.20’) мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв’язків, еквівалентні до них однорідні рівняння (*), (**) теж мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв’язків. Таким чином друга теорема Фредгольма доведена.

Теорема 3. Нехай неоднорідне рівняння (2.2) має розв’язок не для будь-якого вільного члена f, тоді еквівалентне рівняння з виродженим ядром (2.20) має таку ж властивість, і за третьою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda)=0$ (для виродженого ядра T_N). Розв’язок (2.20) існує тоді і тільки тоді коли f ортогональний до розв’язків спряженого однорідного рівняння до (2.20’). Але легко бачити, що вільний член (2.2) і (2.20) співпадають, так само співпадають розв’язки однорідного рівняння ($2.2^{/}$) і ($2.20^{/}$). Таким чином доведена третя теорема Фредгольма.

<u>Теорема 4</u> (*Четверта теорема Фредгольма*) Для будь-якого як завгодно великого числа $R>0$ в крузі $|\lambda|<R$ лежить лише скінчена кількість характеристичних чисел неперервного ядра $K(x,y)$.

Наслідки з теорем Фредгольма

Наслідок 1 З четвертої теореми Фредгольма випливає, що множина характеристичних чисел неперервного ядра не має скінчених граничних точок і не більш ніж злічена $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_{\mathrm{n}}|=\infty$.

Наслідок 2 З другої теореми Фредгольма випливає, що кратність кожного характеристичного числа скінчена, їх можна занумерувати у порядку зростання модулів $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots\le|\lambda_k|\le|\lambda_{k+1}|\le\ldots$, кожне число зустрічається стільки разів, яка його кратність. Також можна занумерувати послідовність власних функцій ядра $K(x,y)$ $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k,\varphi_{k+1},\ldots$ і спряженого ядра $K^*(x,y)$ $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_k,\psi_{k+1},\ldots$.

Наслідок 3 Власні функції неперервного ядра $K(x,y)$ неперервні в області G.

Наслідок 4 Якщо $\lambda_k \neq \lambda_j \Rightarrow (\varphi_k, \psi_j) = 0$

Наслідок 4 довести самостійно.

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром.

[1, стор. 299 - 301]

Розповсюдимо Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром:

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}},\ \alpha < n \tag{2.21}$$

Покажемо що $\forall \varepsilon > 0$ існує таке вироджене ядро $P_N(x,y)$ що,

$$\max_{x \in G} \int_G \left| K(x,y) - P_N(x,y) \right| \mathrm{d}\, y < \varepsilon \tag{2.22}$$

$$\max_{x \in G} \int_G \left| K^*(x,y) - P_N^*(x,y) \right| \mathrm{d}\, y < \varepsilon \tag{2.22/}$$

Розглянемо неперервне ядро

$$L_M(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & |x-y| \geq \dfrac{1}{M} \\ A(x,y)M^{\alpha}, & |x-y| < \dfrac{1}{M} \end{cases} \tag{2.23}$$

Покажемо, що при достатньо великому M має місце оцінка

$$\int_G \left| K(x,y) - L_M(x,y) \right| \mathrm{d}\, y \leq \varepsilon .$$

Дійсно:

$$\int_G \left| K(x,y) - L_M(x,y) \right| \mathrm{d}\, y = \int_{|x-y| < \frac{1}{M}} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} - A(x,y)M^{\alpha} \right| \mathrm{d}\, y =$$

$$= \int\limits_{|x-y|<\frac{1}{M}} |A(x,y)| \left| \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} - M^{\alpha} \right| \mathrm{d}\, y \le A_0 \int\limits_{|x-y|<\frac{1}{M}} \left| \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} - M^{\alpha} \right| \mathrm{d}\, y \le A_0 \int\limits_{|x-y|<\frac{1}{M}} \frac{\mathrm{d}\, y}{|x-y|^{\alpha}} =$$

$$= A_0 \sigma_{\mathrm{n}} \int\limits_0^{\frac{1}{M}} \xi^{n-1-\alpha}\, \mathrm{d}\, \xi = A_0 \sigma_n \left. \frac{\xi^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_0^{\frac{1}{M}} = \frac{A_0 \sigma_n}{(n-\alpha) M^{n-\alpha}} \le \frac{\varepsilon}{2},$$ де σ_n - площа поверхні одиничної сфери.

Завжди можна підібрати вироджене ядро $P_N(x,y)$ таке що

$|L_M(x,y) - P_N(x,y)| \le \dfrac{\varepsilon}{2V}$, де V - об'єм області G.

$$\int\limits_G |K(x,y) - P_N(x,y)| \mathrm{d}\, y = \int\limits_G |K(x,y) - L_M(x,y) + L_M(x,y) - P_N(x,y)| \mathrm{d}\, y \le$$

$$\le \int\limits_G |K(x,y) - L_M(x,y)| \mathrm{d}\, y + \int\limits_G |P_N(x,y) - L_M(x,y)| \mathrm{d}\, y \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2v} \int\limits_G \mathrm{d}\, y = \varepsilon$$

Використавши попередню техніку (для неперервного ядра) інтегральне рівняння з полярним ядром зводиться до еквівалентного рівняння з виродженим ядром. Тобто теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром з тим же самим формулюванням.

Теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром на обмеженій кусково-гладкій поверхні S та контурі C:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_S K(x,y) \varphi(y)\, \mathrm{d}\, y + f(x) \qquad \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}},\ \alpha < \dim(S)$$

§3. Інтегральні рівняння з ермітовим ядром

[1, стор. 301 - 304]

Розглядатимемо ядро $K(x,y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ таке що $K(x,y) = K^{*}(x,y)$.

Неперервне ядро – будемо називати *ермітовим*, якщо виконується

$$K(x,y) = K^{*}(x,y) \tag{3.1}$$

Ермітовому ядру відповідає *ермітовий оператор* тобто $\mathrm{K} = \mathrm{K}^{*}$

<u>Лема 1</u> Для того, щоб лінійний оператор був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб для довільної комплексно значної функції $f \in L_2(\overline{G})$ білінійна форма $(\mathrm{K}\, f, f)$ приймала лише дійсні значення.

<u>Лема 2</u> Характеристичні числа ермітового оператора дійсні.

Означення *Множина функцій* $M \subset C(\overline{G})$ *- компактна в рівномірній метриці, якщо з будь-якої нескінченної множини функцій з M можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність.*

Означення *Нескінченна множина* $M \subset C(\overline{G})$ *- рівномірно обмежена, якщо для будь-якого елемента* $f \in M$ *має місце* $\|f\|_{C(G)} \le a$*, де* a *єдина константа для* M*.*

Означення *Множина* $M \subset C(\overline{G})$ *- одностайно неперервна якщо* $\forall \varepsilon > 0$*,* $\exists \delta(\varepsilon)$*:* $\forall f \in M$*,* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$*,* $\forall x_1, x_2$ *як тільки* $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$*.*

<u>Теорема 1</u> (Арчела – Асколі) (*критерій компактності в рівномірній метриці*).Для того, щоб множина $M \subset C(\overline{G})$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона складалась з рівномірно-обмеженої і одностайно-неперервної множини функцій.

Означення *Назвемо оператор* K *– цілком неперервним з* $L_2(G)$ *у* $C(\overline{G})$*, якщо він переводить обмежену множину в* $L_2(G)$ *у компактну множину в* $C(\overline{G})$ *(в рівномірній метриці).*

<u>Лема 3</u> Інтегральний оператор K з неперервним ядром $K(x, y)$ є цілком неперервний з $L_2(G)$ *у* $C(\overline{G})$.

<u>Доведення:</u> Нехай $f \in M \subset L_2(G)$ та $\forall f \in M$, $\|f\|_{L_2(G)} \le A$. Але $\|\mathrm{K}\, f\|_{c(\overline{G})} \le M\sqrt{V}\,\|f\|_{L_2(G)} \le M\sqrt{V}\,A$, тобто множина функцій є рівномірно

обмеженою.

Покажемо що множина $\{\mathrm{K}\, f(x)\}$ - одностайно неперервна.

Ядро $K \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ а отже є рівномірно неперервним, бо неперервне на компакті, тобто $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x', x'' \in \overline{G}$: $\|x' - x''\| < \delta \Rightarrow (|\mathrm{K}\, f)(x') - (\mathrm{K}\, f)(x'')| \le \varepsilon$. Дійсно :

$$|(\mathrm{K}\, f)(x') - (\mathrm{K}\, f)(x'')| = \left| \int_G K(x', y) f(y) \mathrm{d}\, y - \int_G K(x'', y) f(y) \mathrm{d}\, y \right| \le$$

$$\int_G |K(x', y) - K(x'', y)| |f(y)| \mathrm{d}\, y \le \frac{\varepsilon \sqrt{V}}{A\sqrt{V}} \|f\|_{L_2(\overline{G})} \le \varepsilon$$

Приклад 1 Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{2}{5}} \right) \varphi(t) dt$

Розв'язок $\varphi(x) = \lambda x^{\frac{2}{5}} \int_0^1 t^{-\frac{2}{5}} \varphi(t) dt + \lambda x^{-\frac{2}{5}} \int_0^1 t^{\frac{2}{5}} \varphi(t) dt$

Позначимо $c_1 = \int_0^1 t^{-\frac{2}{5}} \varphi(t) dt$ $\qquad c_2 = \int_0^1 t^{\frac{2}{5}} \varphi(t) dt$

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x^{\frac{2}{5}} + \lambda c_2 x^{-\frac{2}{5}} \qquad \begin{cases} c_1 = \int_0^1 t^{-\frac{2}{5}} \left(\lambda c_1 t^{\frac{2}{5}} + \lambda c_2 t^{-\frac{2}{5}} \right) dt \\ c_2 = \int_0^1 t^{\frac{2}{5}} \left(\lambda c_1 t^{\frac{2}{5}} + \lambda c_2 t^{-\frac{2}{5}} \right) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda) c_1 - 5\lambda c_2 = 0 \\ -\frac{5}{9} \lambda c_1 + (1-\lambda) c_2 = 0 \end{cases} \qquad D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5\lambda \\ -\frac{5}{9}\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{25}{9}\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{8} \qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}$$

З системи однорідних рівнянь при $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{8}$ маємо $c_1 = 3c_2$

Тоді маємо власну функцію $\varphi_1(x) = 3x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{2}{5}}$

при $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$ маємо $c_1 = -3c_2$ Маємо другу власну функцію $\varphi_2(x) = -3x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{2}{5}}$

Приклад 2 Знайти розв'язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів λ, a, b, c

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$$

Розв'язок: Запишемо рівняння у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}\int_{-1}^{1}\varphi(y)dy + \lambda\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{y}\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$$

Введемо позначення: $c_1 = \int_{-1}^{1}\varphi(y)dy,\ \ c_2 = \int_{-1}^{1}\sqrt[3]{y}\varphi(y)dy$ та запишемо розв'язок у вигляді : $\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}c_1 + \lambda c_2 + ax^2 + bx + c$

Для визначення констант отримаємо систему ЛАР:

$$\begin{cases} c_1 - 2\lambda c_2 = \frac{2}{3}a + 2c \\ -\frac{6}{5}\lambda c_1 + c_2 = \frac{6}{7}b \end{cases}$$ Визначник системи дорівнює $\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{6}{5}\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12}{5}\lambda^2$

Характеристичні числа ядра $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}},\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Нехай $\lambda \neq \lambda_1, \lambda \neq \lambda_2$. Тоді розв'язок існує та єдиний для будь – якого вільного члена і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)}\sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 84\lambda c + 30b}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx + c$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$ Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2}{3}a + 2c \\ c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b \end{cases}$$ Друге рівняння було помножено на $-\sqrt{\frac{5}{3}}$

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність $\frac{2}{3}a + 2c = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b$ (*)

При виконанні цієї умови розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2}{3}a + 2c$

Таким чином розв'язок можна записати

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}(\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2}{3}a + 2c) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c$$

Якщо $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, а умова (*) не виконується, то розв'язків не існує.

Нехай $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Після підстановки цього значення отримаємо систему ЛАР

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2}{3}a + 2c \\ c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b \end{cases}$$ Друге рівняння було помножено на $\sqrt{\frac{5}{3}}$

Остання система має розв'язок при умові, $\frac{2}{3}a + 2c = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b$ (**)

При виконанні ї умови (**) розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2}{3}a + 2c$

Розв'язок інтегрального рівняння можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}(-\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2}{3}a + 2c) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c$$

Лекція 4

Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

[1, стор. 304 - 306]

<u>Теорема 1</u> (*Про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра*). Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем λ_1 задовольняє варіаційному принципу $\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup\limits_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathrm{K}\, f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}}$ (3.2).

Доведення:

Серед усіх $f \in L_2$ оберемо такі, що $\|f\|_{L_2(G)} = 1$. Позначимо $v = \sup\limits_{\substack{f \in L_2(G) \\ \|f\|_{L_2}=1}} \|\mathrm{K}\, f\|_{L_2(G)}$. Оскільки $\|\mathrm{K}\, f\|_{L_2(G)} \le MV \|f\|_{L_2(G)} \le MV$, то $0 \le v \le MV$.

Згідно до визначення точної нижньої межі, $\exists\ \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(G)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathrm{K}\, f_k\|_{L_2(G)} = v$.

Оцінимо $\|\mathrm{K}^2 f\|_{L_2(G)} = \|\mathrm{K}(\mathrm{K}\, f)\|_{L_2(G)} = \left\| \mathrm{K}\left(\frac{\mathrm{K}f}{\|\mathrm{K}f\|}\right)\right\|_{L_2(G)} \|\mathrm{K}\, f\|_{L_2(G)} \le v\|\mathrm{K}\, f\|_{L_2(G)} \le v^2$.

Покажемо, що $\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k \to 0$ в середньому квадратичному. Тобто $\left\|\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k\right\|^2_{L_2(G)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Дійсно:

$$\left\|\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k\right\|^2_{L_2(G)} = \left(\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k, \mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k\right)_{L_2(G)} = \left\|\mathrm{K}^2 f_k\right\|^2_{L_2(G)} + v^4 - v^2(\mathrm{K}^2 f_k, f_k) -$$

$$-v^2(f_k, \mathrm{K}^2 f_k) = \left\|\mathrm{K}^2 f_k\right\|^2_{L_2(G)} + v^4 - 2v^2 \|\mathrm{K}\, f_k\|^2_{L_2(G)} \le v^2(v^2 - \left\|\mathrm{K}^2 f_k\right\|^2_{L_2(G)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Розглянемо послідовність $\{\mathrm{K}\, f_k\} = \{\varphi_k\}$, яка є компактною в рівномірній метриці.

Звідси підпослідовність $\left\{\varphi_{k_i}\right\}_{i=1,\infty}$ збіжна в $C(\overline{G})$, тобто $\exists\varphi\in C(\overline{G})$, така що $\left\|\varphi_{k_i}-\varphi\right\|_{C(\overline{G})}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$.

Покажемо, що $\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi=0$ в кожній точці, тобто $\left\|\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi\right\|_{C(\overline{G})}=0$.

$$\left\|\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi\right\|_{C(\bar{G})}=\left\|\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi+\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}-\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}+v^2\varphi_{k_i}-v^2\varphi_{k_i}\right\|_{C(\overline{G})}\leq$$

$$\leq\left\|\mathrm{K}^2\varphi-\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}\right\|_{C(\overline{G})}+\left\|\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}-v^2\varphi_{k_i}\right\|_{C(\overline{G})}+\left\|v^2\varphi_{k_i}-v^2\varphi\right\|_{C(\overline{G})}\leq$$

$$\leq\left(MV\right)^2\left\|\varphi_{k_i}-\varphi\right\|_{C(\overline{G})}+v^2\left\|\varphi_{k_i}-\varphi\right\|_{C(\overline{G})}+M\sqrt{V}\left\|\mathrm{K}^2 f_{k_i}-v^2 f_{k_i}\right\|_{L_2(G)}\to 0+0+0$$

Таким чином має місце рівність $\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi=0$ (3.3).

Отже маємо: $\left(\mathrm{K}+\mathrm{E}v\right)\left(\mathrm{K}-\mathrm{E}v\right)\varphi=0$. Ця рівність може мати місце у двох випадках:

1) $\left(\mathrm{K}-\mathrm{E}v\right)\varphi\equiv 0$. Тоді $\varphi=\frac{1}{v}\mathrm{K}\varphi$, а отже φ - власна функція, $\frac{1}{v}$ - характеристичне число оператора K.

2) $\left(\mathrm{K}-\mathrm{E}v\right)\varphi\equiv\Phi\neq 0$. Тоді $\left(\mathrm{K}+\mathrm{E}v\right)\Phi\equiv 0$. Тоді $\Phi=-\frac{1}{v}\mathrm{K}\Phi$, а отже Φ - власна функція, $-\frac{1}{v}$ - характеристичне число оператора K.

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем.

Припустимо супротивне:

Нехай $\exists\lambda_0:\left|\lambda_0\right|<\left|\lambda_1\right|$, тоді $\frac{1}{\left|\lambda_1\right|}=\sup\limits_{f\in L_2(G)}\frac{\left\|\mathrm{K}f\right\|}{\left\|f\right\|}\geq\frac{\left\|\mathrm{K}\varphi_0\right\|}{\left\|\varphi_0\right\|}=\frac{1}{\left|\lambda_0\right|}$ => $\left|\lambda_0\right|\geq\left|\lambda_1\right|$

<u>Зауваження</u>

Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер [1, стор. 307 - 308].

Звідси безпосередньо випливають такі властивості характеристичних чисел

та власних функцій ермітового ядра:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.

2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.

3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворять ортонормовану систему. Тобто $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\ldots}$ такі що $(\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(G)} = \delta_{ki}$.

(Зокрема достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта - Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему).

§4. Теорема Гілберта - Шмідта та її наслідки

Білінійний розвинення ермітового неперервного ядра

[1, стор. 308 - 310]

Нехай $K(x,y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ ермітове неперервне ядро, $|\lambda_i| \le |\lambda_{i+1}|, i = 1, 2, \ldots$ його характеристичні числа і $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \infty$ ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

$$K^p(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\overline{\varphi_i}(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}, \; p = 1,2,\ldots \tag{4.1}$$

$$K^p(x,y) = (K^p)^*(x,y) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$$

Дослідимо властивості операторів (4.1).

Покажемо, що будь-яке характеристичне число $\lambda_j, j > p+1$ та відповідна йому власна функція φ_j є характеристичним числом і власною функцією ядра $K^p(x,y)$.

$$\mathbf{K}^p\varphi_j = \mathbf{K}\varphi_j - \sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi_j) = \mathbf{K}\varphi_j = \frac{1}{\lambda_j}\varphi_j \qquad (4.2)$$

Нехай λ_0, φ_0 - характеристичне число та відповідна власна функція $K^p(x,y)$, тобто $\lambda_0\mathbf{K}^p\varphi_0 = \varphi_0$ Покажемо що, : $(\varphi_0,\varphi_j)=0$ для $j=\overline{1,p}$.

$$\varphi_0 = \lambda_0\mathbf{K}\varphi_0 - \lambda_0\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i}{\lambda_i}\left(\varphi_0,\varphi_i\right),$$

$$\left(\varphi_0,\varphi_j\right) = \lambda_0\left(\mathbf{K}\varphi_0,\varphi_j\right) - \lambda_0\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\varphi_0,\varphi_i\right)\left(\varphi_i,\varphi_j\right)}{\lambda_i} = \frac{\lambda_0}{\lambda_j}\left(\varphi_0,\varphi_j\right) - \frac{\lambda_0}{\lambda_j}\left(\varphi_0,\varphi_j\right) = 0.$$

Отже λ_0, φ_0 відповідно характеристичне число і власна функція ядра $K\left(x,y\right)$.

Таким чином φ_0 - ортогональна до усіх власних функцій $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_p$, таким чином, λ_0 співпадає з одним із характеристичних чисел $\lambda_{p+1},\lambda_{p+2},...$ тобто $\varphi_0 = \varphi_k$ для деякого $k \geq p+1$.

Отже у ядра $K^p(x,y)$ множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра *K(x,y)* починаючи з номера $p+1$.

Враховуючи, що λ_{p+1} найменше за модулем характерне число ядра $K^{\mathrm{p}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, має місце нерівність $\dfrac{\left\|\mathbf{K}^{\mathrm{p}} f\right\|_{L_2(G)}}{\left\|f\right\|_{L_2(G)}} \leq \dfrac{1}{\left|\lambda_{p+1}\right|}$.

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність $K^N(x,y) = K(x,y) \quad -\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \equiv 0$.

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченою кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді $K(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}$.

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

$$\left\|K^{(p)} f\right\|_{L_2(G)} = \left\|\mathrm{K}\, f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i\right\|_{L_2(G)} \le \frac{\|f\|_{L_2(G)}}{\left|\lambda_{p+1}\right|} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \qquad (4.3)$$

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в розумінні (4.3) наближається наступним білінійним рядом:

$$K(x,y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \qquad (4.4)$$

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \qquad (4.5)$$

Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$

Розглянемо довільну функцію $f \in L_2(G)$ і деяку ортонормовану систему функцій $\{u_i\}_{i=\overline{1,+\infty}}$, $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$.

Рядом Фур`є функції f із $L_2(G)$ називається ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i \sim f \qquad (4.6),$$

(f, u_i) - називається *коефіцієнтом Фур`є*.

$\forall f \in L_2(G)$ виконується *нерівність Бесселя* :

$$\forall N \quad \sum_{i=1}^{N} \left|(f, u_i)\right|^2 \le \|f\|^2_{L_2(G)} \qquad (4.7)$$

Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур'є в середньоквадратичному, але не обов'язково до функції f.

Означення Ортонормована система функцій $\{u_i\}_{i=\overline{1,+\infty}}$ з $L_2(G)$ називається повною (замкненою), якщо ряд Фур'є для будь – якої функції $f \in L_2(G)$ по цій

системі функцій збігається до цієї функції в просторі $L_2(G)$.

<u>Теорема 2</u> (*Критерій замкненості ортонормованої системи функцій*) Для того щоб система функцій $\{u_i\}_{i=\overline{1,+\infty}}$ була повною в $L_2(G)$ необхідно і достатньо, щоби для будь – якої функції $f \in L_2(G)$ *виконувалось рівність* Парсеваля – Стеклова

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|(f, u_i)\right|^2 = \|f\|^2_{L_2(G)} \qquad (4.8)$$

Теорема Гілберта – Шмідта

[1, стор. 310 - 312]

Функція $f(x)$ називається *джерелувато - зображуваною* через ермітове неперервне ядро $K(x,y) = K^*(x,y)$, $K \in C(G \times G)$, якщо існує функція $h(x) \in L_2(G)$, така що $f(x) = \int_G K(x,y) h(y) \mathrm{d}y$ (4.9)

<u>Теорема 3</u> *(Гільберта – Шмідта*) Довільна джерелувато - зображувана функція f розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур`є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра $K(x,y)$

Доведення: Обчислимо коефіцієнти Фур`є $(f, \varphi_i) = (\mathrm{K}h, \varphi_i) = (h, \mathrm{K}\varphi_i) = \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i}$. Отже ряд Фур'є функції f має вигляд

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \qquad (4.10).$$

Якщо власних чисел скінчена кількість, то з (4.5) випливає, що $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i(x)$, якщо ж власних чисел злічена кількість, то з (4.3) випливає співвідношення:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} = \left\| \mathrm{K}h - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0, \quad h \in L_2(G).$$

Покажемо, що формулу (4.4) можна розглядати як розвинення ядра $K(x,y)$ в ряд Фур'є по системі власних функцій $\varphi_i(x)$. Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур'є $\left(K(\cdot,y),\varphi_i\right)_{L_2(G)} = \int_G K(x,y)\overline{\varphi_i(x)}\,\mathrm{d}x = \int_G \overline{K(y,x)\varphi_i(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}$. Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур'є (4.10) за критерієм Коші і покажемо, що при $n,m\to\infty$, відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші - Буняківського маємо:

$$\left| \sum_{i=n}^{m} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right| \le \sum_{i=n}^{m} \left|(h,\varphi_i)\right| \frac{|\varphi_i|}{|\lambda_i|} \le \left(\sum_{i=n}^{m} \left|(h,\varphi_i)\right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=n}^{m} \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2}.$$

$\sum_{i=n}^{m} \left|(h,\varphi_i)\right|^2 \le \|h\|^2_{L_2(G)}$, тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при $n,m\to\infty$.

$\sum_{i=n}^{m} \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \le \int_G \left|K(x,y)\right|^2 dx \le \mathrm{M}^2 V$, тобто ряд збігається.

Отже $\left(\sum_{i=n}^{m} \left|(h,\varphi_i)\right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=n}^{m} \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

а отже $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i$ збігається абсолютно і рівномірно.

Наслідок 1 Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно.

$K_{(p)}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i^p}$, $p=2,3,...$ де коефіцієнти Фур'є $\frac{\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i^p}$.

Повторне ядро $K_{(p)}(x,y)=\int_G K(x,\xi)K_{p-1}(\xi,y)\mathrm{d}\xi$ є джерелувато-зображувана функція і таким чином для цього має місце теорема Гільберта – Шмідта.

Доведемо деякі важливі нерівності:

$$K_{(2)}(x,x)=\int_G K(x,\xi)K(\xi,x)\mathrm{d}\xi=$$

$$\int_G K(x,\xi)\overline{K(x,\xi)}\mathrm{d}\xi=\int_G\left|K(x,\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_i(x)\right|^2}{\lambda_i^2} \qquad (4.11)$$

Рівність (4.11) випливає з наслідку 1. Проінтегруємо (4.11), отримаємо

$$\iint_{G\times G}\left|K(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2} \qquad (4.12).$$

<u>Теорема</u> 4 *(Про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра)* Ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд $K(x,y)\square\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}$ по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі $L_2(G)$ по аргументу x рівномірно для кожного $y\in\overline{G}$, тобто $\left\|K(x,y)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}\right\|_{L_2(x\in G)}\xrightarrow[p\to\infty]{y\in\overline{G}}0$.

Доведення:

$$\left\|K(x,y)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}\right\|^2_{L_2(x\in G)}=\int_G\left|K(x,y)\right|^2\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{p}\frac{\left|\varphi_i(y)\right|^2}{\lambda_i^2}\xrightarrow[p\to\infty]{y\in\overline{G}}0$$

Додатково інтегруючи по аргументу $y\in G$ отримаємо збіжність білінійного ряду(4.4) в середньоквадратичному.

$$\iint_G \left(K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i} \right)^2 dxdy \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \qquad (4.13)$$

Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

[1, стор. 315 - 317]

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду $\varphi = \lambda \mathbf{K}\varphi + f$, з ермітовим неперервним ядром $K(x,y) = K^*(x,y)$ (4.14)

$\varphi_1,\ldots,\varphi_p,\ldots$
$\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\ldots$ - множина характеристичних чисел та - ортонормована система власних функцій ядра.

Розкладемо розв'язок рівняння φ по системі власних функцій ядра $K(x,y)$.

$\varphi = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}\varphi, \varphi_i)\varphi_i + f = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, K\varphi_i)\varphi_i + f = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i + f$, обчислимо коефіцієнти Фур'є $(\varphi,\varphi_k) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi_k) + (f,\varphi_k) = \lambda \frac{(\varphi,\varphi_k)}{\lambda_k} + (f,\varphi_k)$

Отже, $(\varphi,\varphi_k)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = (f,\varphi_k)$, тому $(\varphi,\varphi_k) = (f,\varphi_k)\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}$, $k = 1,2,\ldots$

Таким чином має місце формулу Шмідта:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i - \lambda}\varphi_i(x) + f(x) \qquad (4.15)$$

Розглянемо усі можливі значення λ:

1. Якщо $\lambda \neq \{\lambda_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$,тоді існує єдиний розв'язок для довільного вільного члена f і цей розв'язок представляється за формулою (4.15).

2. Якщо $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_{k+q-1}$ - співпадає з одним з характеристичних чисел кратності q, та при цьому виконанні умови ортогональності $\left(f, \varphi_k\right) = \left(f, \varphi_{k+1}\right) = ... = \left(f, \varphi_{k+q-1}\right) = 0$ тоді розв'язок існує (не єдиний), і представляється у вигляді, $\varphi\left(x\right) = \lambda_k \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \lambda_k}}^{\infty} \frac{\left(f, \varphi_i\right)}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_i\left(x\right) + f\left(x\right) + \sum\limits_{j=k}^{k+q-1} c_j \varphi_j\left(x\right)$,

(4.16), c_j - довільні константи.

Якщо $\exists\, j : \left(f, \varphi_j\right) \neq 0,\ k \leq j \leq k+q-1$ тоді розв'язків не існує.

Приклад: Знайти ті значення параметрів a, b для яких інтегральне рівняння

$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (xy - \frac{1}{3}) \varphi(y) dy + ax^2 - bx + 1$ має розв'язок для будь – якого значення λ.

Розв'язок: Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x) = \lambda x \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y) dy - \frac{\lambda}{3} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y) dy = \lambda x c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2$$

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y) dy = \int\limits_{-1}^{1} y(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2) dy = \frac{2}{3} \lambda c_1$$

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y) dy = \int\limits_{-1}^{1} (\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2) dy = -\frac{2}{3} \lambda c_2$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2}{3}\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2},\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} \qquad \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = 1.$$

Умови ортогональності:

$$\int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1) x dx = -\frac{2}{3} b = 0$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1) dx = \frac{2}{3} a + 2 = 0$$

$$a = -3,\ b = 0$$

Лекція 5

Додатньо визначені ядра.

[1, стор. 317 - 318], [1, стор. 325 - 327], [4, стор. 52 - 54]

Означення *Неперервне ядро* $K(x,y)$ *називається додатньо визначеним, якщо* $\forall f \in L_2(G)$ $(\mathrm{K}\, f, f) \geq 0$. *Причому* $(\mathrm{K}\, f, f) = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{L_2(G)} = 0.$

Довільне додатньо визначене ядро є ермітовим (його білінійна форма (Kf, f) приймає дійсні значення).

<u>Лема 1</u> Для того, щоб неперервне ядро було додатньо визначеним необхідно і достатньо, щоб його характеристичні числа були додатні.

Доведення: <u>Необхідність:</u> Для довільної власної функції $(\mathrm{K}\varphi_k, \varphi_k) = \dfrac{1}{\lambda_k} > 0$ $\lambda_k > 0$.

<u>Достатність:</u> Розглянемо $\mathrm{K}\, f$ як джерелувато-зображувану функцію, згідно до теореми Гілберта – Шмідта $\mathrm{K}\, f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k$, тоді

$(\mathrm{K}\, f, f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} (\varphi_k, f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k} > 0.$ Отже квадратична форма додатньо визначена.

Таким чином додатність характеристичних чисел є критерієм додатної визначеності ядра.

<u>Лема 2</u> Довільне додатньо визначене неперервне ядро має характеристичні числа і для них має місце варіаційний принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ (f,\varphi_i)=0, i=\overline{1,k-1}}} \frac{(\mathrm{K} f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}},\ k = 1, 2... \qquad (4.16),$$

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le ...$ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3...$- ортонормована система власних функцій.

Доведення: З теореми Гілберта Шмідта функціонал (4.16) можна оцінити $\frac{(\mathrm{K} f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\lambda_i \|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k}$ (перша нерівність виконується оскільки λ_k – найменше характеристичне число в сумі, а друга випливає з нерівності Бесселя) З іншого боку при $f = \varphi_k$ маємо $\frac{(\mathrm{K}\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}$. Тобто існує функція на якій досягається верхня межа цієї нерівності.

<u>Теорема 1</u> *(Мерсера, Про регулярну збіжність білінійного ряду для ермітових ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел)* Якщо ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ має лише скінчену кількість від'ємних характеристичних чисел, то його білінійний ряд $K(x,y) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}$ (4.17)

збігається в $\overline{G} \times \overline{G}$ абсолютно і рівномірно.

Доведення: Покажемо, що якщо ядро $K(x,y)$ - додатньо визначене, то $K(x,x) \ge 0,\ x \in \overline{G}$. Оскільки $K(x,y)$ - ермітове, то $K(x,x) = \overline{K}(x,x)$ і є дійсною функцією. Якщо існує хоча б одна точка, що $K(x_0,x_0) < 0, x_0 \in \overline{G}$, то виходячи з неперервності знайдеться і деякій окіл цієї точки $U(x_0,x_0) \subset G \times G$, що $\mathrm{Re}\, K(x,y) < 0,\ (x,y) \in U(x_0,x_0)$. Оберемо невід'ємну неперервну функцію $\varphi(x)$, яка відміна від нуля лише в $U(x_0,x_0)$ і отримаємо

$$(K\varphi,\varphi) = \int_{U(x_0,x_0)} K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy = \int_{U(x_0,x_0)} \mathrm{Re}\, K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy = < 0$$

Остання нерівність вступає в протиріччя з припущенням додотньої визначеності ядра.

Теорему достатньо довести для додатньо визначених ядер.

Розглянемо ядро $K^p(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\overline{\varphi_i}(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}$, де p - номер останнього від'ємного характеристичного числа, так що усі λ_i, $i = p+1, p+2, \ldots$ є додатніми. Таким чином ядро $K^p(x,y)$ є неперервним та додатньо визначеним. А це означає, що $K^p(x,x) \geq 0,\ x \in \overline{G}$. Таким чином маємо нерівність:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} \leq K(x,x) \leq M,\ x \in \overline{G},\ N = p+1, p+2, \ldots \qquad (4.18)$$

Розглянемо білінійний ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}$ і доведемо його абсолютну і рівномірну збіжність за критерієм Коші. Використовуючи нерівність Коші – Буняківського маємо:

$$\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)\overline{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k} \leq \left[\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k} \right]^{1/2} \qquad (4.19)$$

Але оскільки має місце (4.18), яка гарантує рівномірну збіжність ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i}$, то білінійний ряд (4.17) збігається абсолютно і рівномірно (регулярно) в $\overline{G} \times \overline{G}$.

<u>Зауваження 1</u> Теорема Гілберта - Шмідта і її наслідки, встановлені для ермітового неперервного ядра, залишаються вірними і для ермітового слабо полярного ядра.

<u>Зауваження 2</u> Теорема Гілберта - Шмідта і формула Шмідта у випадку полярного ядра залишаються вірними, але з заміною рівномірної збіжності на середньоквадратичну.

§5. Задача Штурма - Ліувіля. Теорема Стеклова.

[1, стор. 336 - 344], [4, стор. 60 - 67]

Постановка задачі Штурма - Ліувілля:

Нехай L – диференціальний оператор другого порядку:

$$Lu = \left(-p(x)u'\right)' + q(x)u = \lambda u, \quad 0 < x < l \qquad (5.1),$$

$$l_1(u)|_{x=0} = h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0$$

(5.2),

$$l_2(u)|_{x=l} = H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0 \qquad (5.3),$$

$$p \in C^1\left([0,l]\right),\ q \in C\left([0,l]\right),\ q \geq 0,\ p > 0,\ h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0,$$

$$h_1 + h_2 > 0,\ H_1 + H_2 > 0 \qquad (5.4),$$

$$M_L = \left\{u\colon u \in C^2(0,l) \cap C^1([0,l]), u'' \in L_2(0,l), l_1 u(0) = l_2 u(l) = 0\right\}$$

(5.5), область визначення оператора L.

Означення Знайти розв'язки задачі Штурма - Ліувіля означає знайти всі ті значення параметра λ, при яких гранична задача (5.1) – (5.4) має нетривіальний розв'язок. Ці значення називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувіля, а самі розв'язки – *власними функціями*.

Функція Гріна оператора *L*

Будемо припускати, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора L задачі Штурма – Ліувіля.

Розглянемо граничну задачу:

$$\begin{cases} \left(-p(x)u'\right)' + q(x)u = f(x), & 0 < x < l \\ l_1(u)\big|_{x=0} = l_2(u)\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad (5.6).$$

Припустимо що $f \in C(0,l) \cap L_2(0,l)$.

З припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом випливає, що задача (5.6) має

єдиний розв'язок.

Розглянемо функції $v_i(x),\ i=1,2$ - ненульові дійсні розв'язки однорідних задач Коші: $\begin{cases}\left(-p(x)v_i'(x)\right)'+q(x)v_i(x)=0,\ \ i=1,2\\ l_1v_1\big|_{x=0}=0\ \ l_2v_2\big|_{x=l}=0\end{cases}$ (5.7)

З загальної теорії задач Коші випливає, що розв'язки цих задач Коші існують, тому $v_i(x)$ – двічі неперервно диференційовані функції. Покажемо що $v_1(x)$, $v_2(x)$ – лінійно незалежні.

Припустимо що це не так і $v_1(x)=cv_2(x)$, тобто $v_1(x)$ задовольняє одночасно граничним умовам на лівому і правому краях. Тоді $v_1(x)$ – власна функція оператора L, і відповідає власному числу $\lambda=0$, що суперечить припущенню, тому $v_1(x)$, $v_2(x)$ – лінійно незалежні. В цьому випадку визначник Вронського $w(x)=\begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ v'_1 & v'_2\end{vmatrix}\neq 0.$

Будемо шукати розв'язок задачі (5.6) методом варіації довільної сталої у вигляді: $u(x)=c_1(x)v_1(x)+c_2(x)v_2(x).$

Підставимо в рівняння: $\left(-p\left(c'_1v_1+c'_2v_2+c_1v'_1+c_2v'_2\right)\right)'+q\left(c_1v_1+c_2v_2\right)=f$

Накладемо першу умову на коефіцієнти: $c'_1v_1+c'_2v_2=0$, маємо:

$$-p'\left(\underline{c_1v_1'}+\underline{\underline{c_2v_2'}}\right)-p\left(c_1'v_1'+c_2'v_2'+\underline{c_1v_1''}+\underline{\underline{c_2v_2''}}\right)+q\left(\underline{c_1v_1}+\underline{\underline{c_2v_2}}\right)=f$$

Або $c_1Lv_1+c_2Lv_2-p\left(c_1'v_1'+c_2'v_2'\right)=f$, оскільки $c_1Lv_1=0$, $c_2Lv_2=0$, то $-p\left(c_1'v_1'+c_2'v_2'\right)=f$, отже $c_1'v_1'+c_2'v_2'=-\dfrac{f}{p}$.

Таким чином c_1' та c_2' повинні задовольняти системі лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'v_1 + c_2'v_2 = 0 \\ c_1'v_1' + c_2'v_2' = -\dfrac{f}{p} \end{cases},$$ визначник системи $w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Має місце рівність Ліувілля: $w(x)p(x) = w(0)p(0) = const$.

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\dfrac{f}{p} & v_2' \end{vmatrix} = \dfrac{v_2(x) f(x)}{p(0) w(0)} \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -\dfrac{f}{p} \end{vmatrix} = -\dfrac{v_1(x) f(x)}{p(0) w(0)} \end{cases} \tag{5.8}$$

Знайдемо додаткові умови для диференціальних рівнянь (5.8).

$$l_1 u\Big|_{x=0} = h_1\big(c_1(0)v_1(0) + c_2(0)v_2(0)\big) -$$

$h_2\big(c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) + c_1(0)v_1'(0) + c_2(0)v_2'(0)\big) = 0$ враховуючи, що $c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) = 0$ маємо

$$c_1(0)\big[h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0)\big] + c_2(0)\big[h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)\big] = 0$$

Оскільки перший доданок дорівнює нулю, то остання рівність виконується коли $c_2(0) = 0$, аналогічно отримаємо, що $c_1(l) = 0$.

Проінтегруємо (5.8) отримаємо:

$$c_1(x) = -\int_x^l \frac{f(\xi) v_2(\xi)}{p(0) w(0)} \mathrm{d}\xi, \qquad c_2(x) = -\int_0^x \frac{v_1(\xi) f(\xi)}{p(0) w(0)} \mathrm{d}\xi \tag{5.9}$$

Розв'язок граничної задачі (5.6) буде мати вигляд:

$$u(x) = -\int_0^x \frac{v_1(\xi) v_2(x) f(\xi)}{p(0) w(0)} d\xi - \int_x^l \frac{v_1(x) v_2(\xi) f(\xi)}{p(0) w(0)} d\xi \tag{5.10}$$

Визначимо *функцію Гріна*:

$$G(x,\xi)=-\frac{1}{p(0)w(0)}\begin{cases} v_1(\xi)v_2(x), & 0\le\xi\le x\le l \\ v_1(x)v_2(\xi), & 0\le x\le\xi\le l \end{cases} \qquad (5.11)$$

Отже розв'язок граничної задачі (5.6) можна записати у вигляді:

$$u(x)=\int_0^l G(x,\xi)\,f(\xi)d\xi \qquad (5.12)$$

$G(x,\xi)$ (дивись (5.11)) називається ф*ункцією Гріна* оператору Штурма – Ліувіля. Попередні міркування доводять наступну лемму.

<u>Лема 3</u> Якщо $\lambda=0$ не є власним числом задачі Штурма - Ліувіля (5.1) – (5.4), то розв'язок граничної задачі (5.6) існує та єдиний і представляється за формулою (5.12) через функцію Гріна (5.11).

Властивості функції Гріна

1. $G(x,\xi)\in C([0,l]\times[0,l])$, $G(x,\xi)\in C^2(0<x<\xi<l)$,

$G(x,\xi)\in C^2(0<\xi<x<l)$.

2. Симетричність: $G(x,\xi)=G(\xi,x)$, $x,\xi\in[0,l]\times[0,l]$.

3. На діагоналі $x=\xi$ має місце розрив першої похідної:

$$\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x}-\frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x}=-\frac{1}{p(\xi)},\quad \xi\in(0,l).$$

4. Поза діагоналлю $x=\xi$ функція Гріна задовольняє однорідному диференціальному рівнянню $L_xG(x,y)=0$.

5. На бічних сторонах квадрату $[0,l]\times[0,l]$ функція Гріна $G(x,y)$ задовольняє граничним умовам $l_1G\big|_{x=0}=l_2G\big|_{x=l}=0$.

6. Функція $G(x,\xi)$ є розв'язком неоднорідного рівняння: $L_xG(x,\xi)=-\delta(x-\xi)$, де $\delta(x)$ - *дельта-функція Дірака.*

Зведення граничної задачі з оператором Штурма - Ліувілля до інтегрального рівняння

Розглянемо граничну задачу з параметром

$$\begin{cases} Lu = \left(-p(x)u'\right)' + q(x)u = f + \lambda u \\ l_1(u)\big|_{x=0} = 0 \\ l_2(u)\big|_{x=l} = 0 \\ f \in C(0,l) \cap L_2(0,l) \end{cases} \qquad (5.13)$$

і покажемо що вона зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з дійсним, симетричним та неперервним ядром $G(x,\xi)$.

<u>Теорема 2</u> *(Про еквівалентність граничної задачі для рівняння другого порядку інтегральному рівнянню з ермітовим ядром)* Гранична задача (5.13) при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора L, еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду:

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x,\xi)u(\xi)d\xi + \int_0^l G(x,\xi) f(\xi)d\xi, \quad u \in C([0,l])$$

(5.14),

де $G(x,\xi)$ – функція Гріна оператора L.

Доведення: <u>Необхідність</u> Нехай виконується (5.13), тоді з леми 3 із заміною правої частини $f \to f + \lambda u$ розв'язок (5.13) можемо представити у вигляді:

$u(x) = \int_0^l G(x,\xi)\left[\lambda u(\xi) + f(\xi)\right]d\xi$, тобто $u(x)$ задовольняє інтегральному рівнянню (5.14).

<u>Достатність</u>. Нехай має місце рівність (5.14) і $u_0(x)$ її розв'язок. Розглянемо

граничну задачу: $\begin{cases} Lu = f + \lambda u_0 \\ l_1 u\big|_{x=0} = l_2 u\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$

За лемою 3, єдиний розв'язок цієї задачі задається формулою $u(x) = \lambda \int_0^l G(x,\xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^l G(x,\xi) f(\xi) d\xi$, звідки випливає, що u_0 задовольняє рівнянню $Lu_0 = f + \lambda u_0$, таким чином $u(x) = u_0(x)$ тобто u_0 є розв'язком крайової задачі (5.13).

У випадку коли $f \equiv 0$, гранична задача (5.13) перетворюється в задачу Штурма–Ліувіля $\begin{cases} \mathrm{L\,u} = \lambda \mathrm{u}, \ 0 < x < l \\ l_1 \mathrm{u}\,|_{x=0} = l_2 \mathrm{u}\,|_{x=l} = 0 \end{cases}$ (5.13/).

Задача Штурма - Ліувіля еквівалентна задачі про знаходження характеристичних чисел та власних функцій для однорідного інтегрального рівняння Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x,\xi) u(\xi) d\xi \qquad (5.14/)$$

при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора L.

Покажемо як позбавитись цього припущення. Нехай маємо задачу Штурма – Ліувілля:

$$\begin{cases} \mathrm{L\,u} = \lambda \mathrm{u} \\ l_1 \mathrm{u}\,|_{x=0} = l_2 \mathrm{u}\,|_{x=l} = 0 \\ 0 < x < l \end{cases} \qquad (5.15)$$

Легко бачити, що $(Lu,u) \geq 0$, тобто власні числа невід'ємні.

Розглянемо граничну задачу:

$$\begin{cases} L_1 u \equiv \left(-p(x)u'\right)' + \left(q(x)+1\right)u = \mu u \\ l_1 u\,|_{x=0} = l_2 u\,|_{x=l} = 0, \ \mu = \lambda + 1 \end{cases} \qquad (5.16).$$

Задача (5.16) с точністю до позначень співпадає з задачею Штурма – Ліувіля

(5.1) – (5.3) Очевидно, що μ = 0 не є власним числом задачі Штурма - Ліувіля (5.16) (бо тоді λ = -1 могло би бути власним числом задачі Штурма – Ліувілля (5.1) – (5.4)). Введемо диференціальний оператор $L_1 u = \left(-pu'\right)' + q_1 u = \mu u$

Отже, задача (5.16) еквівалентна задачі (5.15) при $\mu = \lambda + 1$, та еквівалентна інтегральному рівнянню $u(x) = (\lambda + 1)\int_0^1 G_1(x,\xi)u(\xi)d\xi$

(5.17),

де $G_1(x,\xi)$ – функція Гріна оператора L_1.

Таким чином, ввівши оператор L_1 і відповідну йому функцію Гріна $G_1(x,\xi)$, можна позбутися припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма – Ліувілля.

Приклад Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy + x \text{ де } K(x,y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(x-1), & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x y(x-1)\varphi(y)dy + \lambda\int_x^1 x(y-1)\varphi(y)dy$$

Продиференціюємо рівняння:

$$\varphi'(x) = \lambda\int_0^x y\varphi(y)dy + \lambda x(x-1)\varphi(x) + \lambda\int_x^1 (y-1)\varphi(y)dy - \lambda x(x-1)\varphi(x).$$

Обчислимо другу похідну:

$\varphi''(x) = \lambda x\varphi(x) - \lambda(x-1)\varphi(x)$ Або після спрощення

$\varphi'' = \lambda\varphi$. Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку граничними умовами вигляду (5.2), (5.3)

Легко бачити що $\varphi(0)=\lambda\int\limits_0^0 y(0-1)\varphi(y)dy+\lambda\int\limits_0^1 0(y-1)\varphi(y)dy=0$

Аналогічно $\varphi(1)=\lambda\int\limits_0^1 y(1-1)\varphi(y)dy+\lambda\int\limits_1^1 1(y-1)\varphi(y)dy=0$

Таким чином отримаємо задачу Штурма - Ліувілля:

$$\begin{cases}\varphi''=\lambda\varphi,\ 0<x<1\\ \varphi(0)=\varphi(1)=0\end{cases}$$

Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру λ.

1. $\lambda>0$, $\varphi(x)=c_1 sh(\sqrt{\lambda}x)+c_2 ch(\sqrt{\lambda}x)$.

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь $\begin{cases}c_1\cdot 0+c_2=0\\ c_1 sh(\sqrt{\lambda})+c_2 ch(\sqrt{\lambda})=0\end{cases}$ Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю.

$D(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ sh\sqrt{\lambda} & ch\sqrt{\lambda}\end{vmatrix}=-sh\sqrt{\lambda}=0$. Єдиним розв'язком цього рівняння є $\lambda=0$, яке не задовольняє, бо $\lambda>0$. Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв'язок і будь – яке $\lambda>0$ не є власним числом.

2. $\lambda=0$, $\varphi(x)=c_1x+c_2$. З граничних умов маємо, що $c_1=c_2=0$. Тобто $\lambda=0$ не є власним числом.

3. $\lambda<0$, $\varphi(x)=c_1\sin(\sqrt{-\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{-\lambda}x)$

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

$\begin{cases}c_1\cdot 0+c_2=0\\ c_1\sin(\sqrt{-\lambda})+c_2\cos(\sqrt{-\lambda})=0\end{cases}$ Визначник цієї системи прирівняємо до нуля

$D(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \sin\sqrt{-\lambda} & \cos\sqrt{-\lambda}\end{vmatrix}=-\sin\sqrt{-\lambda}=0$. Це рівняння має зліченну множину розв'язків $\lambda_k=-(k\pi)^2,\ k=1,2,\ldots$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має

розв'язок $c_2 = 0,\ c_1 = c_1$.

Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма – Ліувілля мають вигляд $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$.

Порахуємо коефіцієнти Фур'є $f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \sqrt{2}\dfrac{(-1)^n}{n\pi}$.

Згідно до формули Шмідта розв'язок рівняння при $\lambda \neq \lambda_k$ має вигляд:

$$\varphi(x) = x - 2\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin(k\pi x)}{((k\pi)^2 + \lambda)k\pi}.$$

При $\lambda = \lambda_k$ розв'язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.

Лекція 6

Властивості власних чисел задачі Штурма – Ліувіля

[1, стор. 341 - 343]

Таким чином, теоремою 2 установлена еквівалентність задачі Штурма - Ліувіля (5.16) і задачі на власні значення для однорідного інтегрального рівняння (5.14’) з ермітовим неперервним ядром $G_1(x,\xi)$. При цьому власні значення λ_k задачі (5.16) пов’язані з характеристичними числами μ_k ядра $G_1(x,\xi)$ співвідношенням $\mu = \lambda + 1$, а відповідні їм власні функції $u_k(x),\ k = 1,2...$співпадають. Тому для задачі Штурма - Ліувіля справедливі всі положення теорії інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром.

А саме:

- множина власних чисел λ_k не порожня та немає скінчених граничних точок;
- всі власні числа λ_k дійсні та мають скінчену кратність;
- власні функції $u_k \in C^2((0,l)) \cap C^1([0,l]), ...(u_k,u_j) = \delta_{k,j}, k,\ j = 1,2...$
- всі $\lambda_k \geq 0$;

Останнє твердження випливає з додатної визначеності диференціального оператора Штурма – Ліувілля з відповідними граничними умовами, для цього оператора *всі власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.*

- множина власних чисел злічена (не може бути скінчена);

Дійсно, якщо б множина була скінченою $\mu_1,...,\mu_N$, то для ядра $G_1(x,\xi)$ було вірним представлення: $G_1(x,\xi) = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\mu_i}$.

Але $u_k \in C^2((0,l)) \cap C^1([0,l])$, і тому таке представлення суперечить властивості функції Гріна $G_1(x,\xi)$ про наявність розриву першої похідної. Ця суперечність і доводить твердження.

- кожне власне число має одиничну кратність;

Справді, нехай u_1 та u_2 – власні функції, які відповідають власному значенню μ_0. З граничної умови запишемо:

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 u_1(0) - h_2 u_1'(0) = 0 \\ h_1 u_2(0) - h_2 u_2'(0) = 0 \end{cases}$$ - розглядатиме ці співвідношення як систему лінійних рівнянь відносно h_1, h_2. Визначник системи співпадає за величиною з визначником Вронського $\begin{vmatrix} u_1(0) & -u_1'(0) \\ u_2(0) & -u_2'(0) \end{vmatrix}$ = -w(0) $\neq$ 0, враховуючи лінійну незалежність власних функцій. Звідси випливає, що розв'язок лінійної системи тривіальний, тобто $h_1 = h_2 = 0$, що суперечить припущенню $h_1 + h_2 > 0$.

Тому ці розв'язки лінійно залежні. Це і означає, що μ_0 має одиничну кратність, тобто просте.

<u>Теорема</u> <u>2</u> (*Стеклова про розвинення в ряд Фур'є*) Будь – яка $f \in M_L$ розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій задачі Штурма –Ліувіля $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x)$ (5.18) І цей ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення: Покажемо, що f – джерелувато зображувана.

$$\begin{cases} L_1 f = Lf + f = h, \ h \in C(0,l) \cap L_2(0,l) \\ l_1 f|_{x=0} = l_2 f|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Функція f є розв'язком цієї граничної задачі, причому, $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора L_1. Позначимо через $G_1(x,\xi)$ функцію Гріна оператора L_1.

Тоді має місце представлення $f(x)=\int_0^l G_1(x,\xi)h(\xi)d\xi$, $f(x)$- джерелувато зображувана. За теоремою Гілберта - Шмідта функція f розкладається в регулярно збіжний ряд Фур'є по власним функціям ядра $G_1(x,\xi)$. Але власні функції ядра $G_1(x,\xi)$ співпадають з власними функціями $\{u_k(x)\}$ оператора L.

Задача Штурма - Ліувіля з ваговим множником

[4, стор. 60 - 67]

$$\begin{cases} Lu=\lambda\rho(x)u, 0<x<l \\ l_1u|_{x=0}=l_2u|_{x=l}=0 \end{cases} \qquad (5.19)$$

$\rho(x)>0, \rho\in C([0,l])$, *$\rho$- ваговий множник.*

З теореми 2 випливає представлення $u(x)=\lambda\int_0^l \rho(\xi)G(x,\xi)u(\xi)d\xi$.

Інтегральне рівняння має неперервне, але не симетричне ядра, для його симетризації домножимо рівняння на $\sqrt{\rho(x)}$ і отримаємо

$$\sqrt{\rho(x)}u(x)=\lambda\int_0^l \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi)\cdot\sqrt{\rho(\xi)}u(\xi)d\xi \qquad (5.20)$$

Позначимо $v(x)=\sqrt{\rho(x)}u(x)$, $G_\rho(x,\xi)=\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi)$, отримаємо інтегральне рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$v(x)=\lambda\int_0^l G_\rho(x,\xi)\cdot v(\xi)d\xi \qquad (5.21)$$

Власні функції задачі Штурма – Ліувіля (5.19) пов'язані з власними функціями інтегрального рівняння (5.21) співвідношенням

$$\sqrt{\rho(x)}u_k(x)=v_k(x) \qquad (5.22).$$

Має місце співвідношення $(v_k,v_i)=\delta_{i,k}=\int_0^l u_k(x)\cdot u_i(x)\rho(x)dx=(u_k,u_i)_\rho$ -

ваговий скалярний добуток.

Таким чином система власних функцій задачі Штурма – Ліувілля з ваговим множником (5.19) є ортонормованою у ваговому скалярному добутку $(u,v)_\rho$.

§6 Інтегральні рівняння першого роду.

[3, стор. 122 - 127]

Будемо розглядати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_G K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \qquad (6.1)$$

Неважко перевірити, що розв'язок інтегрального рівняння (6.1) може існувати не для будь – якої неперервної функції $f(x)$. Дійсно, нехай наприклад $G=[a,b]$, а $K(x,y)=a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1} + ...a_m(y)$, тоді для будь – якої неперервної $\varphi(y)$, $\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ...b_m$. Це означає, що такий самий вигляд повинна мати і функція $f(x)$.

Ядра Шмідта

Будемо розглядати неперервне ядро $K(x,y)$ і спряжене до нього $K^*(x,y)$, яке задовольняє нерівності $\int_G\int_G |K(x,y)|dxdy < \infty$. Відповідні інтегральні оператори Фредгольма позначимо через K, K^*. Введемо інтегральні оператори $\mathsf{K}_1 = \mathsf{K}^*\mathsf{K}$ та $\mathsf{K}_2 = \mathsf{K}\mathsf{K}^*$, які є симетричними і додатними. Цим операторам відповідають ядра

$$K_1(x,y) = \int_G K^*(x,z)K(z,y)dz \quad K_2(x,y) = \int_G K(x,z)K^*(z,y)dz \qquad (6.2),$$

які називаються ядрами Шмідта.

Можна довести, що характеристичні числа ядер Шмідта $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ співпадають, позначимо їх через μ_k^2, $k=1,2,...$. Позначимо через $u_k(x)$ та $v_k(x)$, $(k=1,2,...)$ ортонормовані власні функції ядра $K_1(x,y)$ та

$K_2(x,y)$ відповідно.

Легко бачити, що $v_k = \mu_k \mathbf{K} u_k, \quad u_k = \mu_k \mathbf{K}^* v_k$ (6.3)

Дійсно: $v_k = \mu_k^2 \mathbf{K_2} v_k$, тоді $\mathbf{K}^* v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}^* \mathbf{K_2} v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{K}^* v_k = \mu_k^2 \mathbf{K_1} \mathbf{K}^* v_k$ звідси випливає, що $\mathrm{C}_k \mathbf{K}^* v_k = u_k$. Оберемо константу з умови ортонормованості:

$$(u_k, u_k) = \mathrm{C}_k^2 \left(\mathbf{K}^* v_k, \mathbf{K}^* v_k\right) = \mathrm{C}_k^2 \left(v_k, \mathbf{K}\mathbf{K}^* v_k\right) = \mathrm{C}_k^2 \left(v_k, \mathbf{K_2} v_k\right) = \frac{\mathrm{C}_k^2}{\mu_k^2} = 1,$$ звідси

$\mathrm{C}_k = \mu_k$. І перша рівність (6.3) доведена.

Виходячи з теореми Мерсера про регулярну збіжність білінійного ряду для неперервних ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел, для ядер Шмідта має місце відоме розвинення :

$$K_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k^2} \qquad K_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\overline{v_k(y)}}{\mu_k^2} \qquad (6.4)$$

Ряди (6.4) для неперервних ядер збігається абсолютно і рівномірно, а для ядер, які належать $L_2(G)$ в середньому квадратичному.

Покажемо, що для ядра $K(x,y)$ має місце білінійне розвинення за формулою:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x)\overline{u_i(y)}}{\mu_k} \qquad K^*(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{v_i(y)} u_i(x)}{\mu_k} \qquad (6.5)$$

Дійсно, написане розвинення (6.5) представляє собою ряд Фур'є ядра по ортонормованой системі функцій $\{u_k(x)\}_{i=1,\infty}$, або $\{v_i(x)\}_{i=1,\infty}$ (дивись 6.3) і збігається в середньому по кожній змінній x, y. Тобто

$$\int_G \left| K(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i(x)\overline{u_i(y)}}{\mu_k} \right|^2 dx = \int_G \left| K(x,y) \right|^2 dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left| u_k(y) \right|^2}{\mu_k^2} =$$

$$= K_1(y,y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left| u_k(y) \right|^2}{\mu_k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left| u_k(y) \right|^2}{\mu_k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ При доведенні цього представлення було використане друге співвідношення (6.3).

Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром

Нехай $K(x,y)$ симетричне ядро, а $\lambda_i, u_i(x), i=1,2,...$ характеристичні числа та ортонормована система власних функцій цього ядра.

Означення Будемо називати симетричне ядро повним, якщо система його власних функцій є повною.

Якщо ядро не є повним, то інтегральне рівняння $\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)dy=0$ має розв'язок відмінний від нуля. Інтегральне рівняння з симетричним повним ядром може мати лише єдиний розв'язок.

Будемо шукати розв'язок інтегрального рівняння першого роду (6.1) у вигляді $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i u_i(x)$ (6.6), де c_i невідомі константи. Вільний член рівняння представимо у вигляді ряду Фур'є по системі власних функцій ядра в результаті чого будемо мати рівність:

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_i\int\limits_G K(x,y)u_i(y)dy=\sum_{i=1}^{\infty}(f,u_i)u_i(x) \qquad (6.7),$$ або

після спрощення $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{\lambda_i}u_i(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(f,u_i)u_i(x)$. Враховуючи лінійну незалежність власних функцій $u_i(x)$ отримаємо співвідношення $c_i=(f,u_i)\lambda_i$ (6.8)

<u>Теорема 1</u> *(Пікара про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром)* Нехай $K(x,y)$ повне ермітове ядро, $f\in L_2(G)$. Тоді для існування розв'язку рівняння (6.1) необхідно і достатньо щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left|(f,u_k)\right|^2 \qquad (6.9).$$

Доведення: *Необхідність:* Нехай існує розв'язок $u(x)$ з $L_2(G)$ рівняння (6.1). Нехай c_k - коефіцієнти Фур'є розв'язку по системі власних функцій $\{u_k(x)\}_{k=1,\infty}$. Виходячи з (6.6) маємо, що ряд (6.9) збігається.

Достатність: Нехай ряд (6.9) збігається . Тоді існує єдина функція $u(x) \in L_2(G)$ з коефіцієнтами Фур'є $(f, u_i)\lambda_i$. Вона має вигляд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, u_i) u_i(x)$ і задовольняє інтегральному рівнянню (6.1).

Несиметричні ядра.

Розглянемо рівняння з несиметричним ядром (6.1). Для представлення ядра скористаємось формулою (6.5), а для представлення вільного члена $f(x)$ застосуємо розвинення цієї функції в ряд Фур'є по системі власних функцій ядра $K_2(x, y)$, $v_k(x)$. В результаті будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_G \frac{v_i(x)\overline{u_i(y)}}{\mu_i} \varphi(y) dy = \sum_{i=1}^{\infty} (f, v_i) v_i(x) \qquad (6.10).$$

Ліву чистину можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, u_i) v_i(x)}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{\infty} (f, v_i) v_i(x). \qquad (6.11).$$

З останньої рівності можна записати співвідношення для коефіцієнтів Фур'є розв'язку: $(\varphi, u_i) = (f, v_i)\mu_i$ (6.12).

Таким чином, для існування розв'язку інтегрального рівняння (6.1) з несиметричним ядром необхідно і достатньо щоби вільний член $f \in L_2(G)$ можна було розкласти в ряд Фур'є по системі власних функцій $v_i, i = 1, \infty$ ядра Шмідта $K_2(x, y) = \int_G K\ (x, z) K^*(z, y) dz$, а числовий ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|(f, v_i)\right|^2 \mu_i^2 \qquad (6.13)$$

збігався.

Приклад Звести задачу Штурма – Ліувілля до інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$\begin{cases} Ly \equiv -(1+e^x)y'' - e^x y' = \lambda x^2 y, \ 0 < x < 1 \\ y(0) - 2y'(0) = 0, \ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок Побудуємо функцію Гріна оператора L. Розглянемо задачі Коші:

$$-(1+e^x)v_i'' - e^x v_i' = 0, \ i = 1,2$$
$$v_1(0) - 2v_1'(0) = 0, \quad v_2'(1) = 0$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння $-(1+e^x)y'' - e^x y' = 0$ має вигляд $c_1(x - \ln(1+e^x)) + c_2$. Тоді розв'язок першої задачі Коші

Розв'язки останніх можна записати у вигляді:

$$v_1(x) = a\left(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2\right), \ a = const \qquad v_2(x) = b, \ b = const$$

Обчислимо визначник Вронського $\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = \dfrac{ab}{1+e^x}$

Перевіримо тотожність Ліувілля $p(x)w(x) = ab = const$. Запишемо функцію Гріна за формулою:

$$G(x,\xi) = -\begin{cases} \left(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2\right), 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \left(\xi - \ln(1+e^\xi) + 1 + \ln 2\right), 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

Запишемо інтегральне рівняння $y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi)\xi^2 y(\xi) d\xi$.

Симетризуємо ядро інтегрального рівняння, помножимо обидві частини на x.

$x \cdot y(x) = \lambda \int_0^1 x \cdot G(x,\xi) \cdot \xi \cdot \xi \cdot y(\xi) d\xi$. Введемо позначення: $\omega(x) = xy(x), \ G_1(x,\xi) = xG(x,\xi)\xi$.

Отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром: $\omega(x) = \lambda \int_0^1 G_1(x,\xi)\omega(\xi) d\xi$

Питання до першого розділу

1. Записати інтегральне рівняння Фредгольма першого та другого роду.
2. Дати визначення характеристичних чисел і власних функцій інтегрального рівняння .
3. Що називається союзним інтегральним рівнянням, спряженим ядром?
4. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з неперервним ядром.
5. Записати схему методу послідовних наближень, ряд Неймана.
6. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для неперервних ядер.
7. Дати визначення повторних ядер і резольвенти, записати умова збіжності резольвенти.
8. Дати визначення полярного ядра, сформулювати лему про поводження повторних ядер для полярного ядра.
9. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з полярним ядром.
10. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для інтегральних рівнянь із полярним ядром.
11. Записати резольвенту інтегрального оператора з полярним ядром, сформулювати умови її збіжності.
12. Дати визначення виродженого ядра, записати систему рівнянь для інтегрального рівняння. з виродженим ядром.
13. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння. з виродженим ядром.
14. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння. з виродженим ядром.
15. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння. з виродженим ядром.
16. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для неперервного ядра.
17. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
18. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром..
19. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
20. Сформулювати четверту теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
21. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для полярного ядра.
22. Сформулювати наслідку з теорем Фредгольма.
23. Дати визначення компактної множини в рівномірній метриці. Сформулювати теорему Арцела - Асколі.
24. Дати визначення цілком неперервного оператора, сформулювати лему про цілковиту неперервність оператора з неперервним ядром.
25. Дати визначення ермітового оператора, властивість характеристичних чисел, критерій ермітовості.
26. Ряд Фур’є, нерівність Бесселя, рівність Парсеваля – Стеклова.
27. Визначення джерелуватозображуваної функції. Теорема Гільберта - Шмідта.
28. Представлення виродженого ядра через характеристичні числа та власні функції.
29. Теорема про білінійне розкладання ермітового - неперервного ядра.

30. Наслідок з теореми Гільберта - Шмідта про розкладання повторного ядра для ермітового ядра.
31. Формула Шмідта, особливості її застосування для різних значень параметра.
32. Теорема про існування характеристичних чисел ермітового - неперервного та ермітового - полярного ядра.
33. Додатньо визначені ядра. Лема про властивості характеристичних чисел додатньо визначених ядер.
34. Теорема Мерсера.
35. Постановка задачі Штурма - Ліувілля, визначення власних чисел і власних функцій.
36. Визначення функції Гріна для оператора Штурма – Ліувілля.
37. Властивості функції Гріна.
38. Властивості власних функцій і власних значень задачі Штурма - Ліувілля.
39. Лема про зведення задачі Штурму - Ліувілля до інтегрального рівняння.
40. Задача Штурма – Ліувілля з ваговим множником, зведення її до інтегрального рівняння з ермітовим ядром.
41. Теорема Стеклова про розкладання функцій у ряд Фур'є.
42. Ядра Шмідта та їх властивості, білінійне розвинення ядер Шмідта.
43. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром, теорема існування розв’язку.
44. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з несиметричним ядром, умови існування розв’язку.

Лекція 7

Глава 2 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів

§ 1. Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини

[6, стор. 8 - 11]

Для запису математичної моделі введемо величини:

$x=(x_1,x_2,x_3)\in G\subset E^3$ - об'єм тіла, t – час;

$u(x,t)$ – температура в точці x у момент часу t;

$c(x)$ – теплоємність (кількість тепла, яка необхідна, для підняти температуру одиниці маси тіла на один градус);

$k(x)$ – теплопровідність речовини (здатність проводити тепло);

$\rho(x)$ – щільність речовини;

$f(x,t)$ - інтенсивність джерел теплової енергії в точці x в момент часу t

Закон збереження теплової енергії

Складемо баланс теплової енергії для довільного об'єму тіла G за довільний інтервал часу $t_1<t<t_2$. Для цього обчислимо кількість тепла, яка міститься в нескінченно малому об'ємі dG:

$$\rho(\mathrm{x})dG\cdot c(x)\cdot u(x,t) \qquad (1.1)$$

та в об'ємі G в момент часу t $Q_1(t)=\iiint\limits_G c(x)\rho(\mathrm{x})u(x,t)dG$ (1.2).

Припустимо, що з часом температура змінилася від значення $u(x,t_1)$ до значення $u(x,t_2)$. Обчислимо кількість тепла, витрачену на зміну температури:

$$\Delta Q_1(t_1,t_2)=Q_1(t_2)-Q_1(t_1)=\iiint\limits_G c(x)\rho(x)[u(x,t_2)-u(x,t_1)]dG \qquad (1.3).$$

Температура в об'ємі G може змінюватись за рахунок таких факторів:

1) нерівномірності нагрівання тіла, викликає потік тепла через поверхню S, яка обмежує уявне тіло об'єму G;

2) зміна кількості тепла за рахунок внутрішніх теплових джерел.

Нехай $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні S. Обчислимо кількість тепла, яка поступає всередину об'єму G через елементарну поверхню dS в одиницю часу:

$$dQ(x,t)=k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}dS \qquad (1.4).$$

Формула (1.4) є математичним виразом фізичного закону Фур'є.

Кількість тепла, яка проходить через всю поверхню S за час від t_1 до t_2 обчислюється за формулою $Q_2(t_1,t_2)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_S k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}dSdt$ (1.5).

Кількість тепла за рахунок теплових джерел в об'ємі G можна обчислити у вигляді: $Q_3(t_1,t_2)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_G f(x,t)dGdt$ (1.6)

Таким чином можна записати закон збереження теплової енергії:

$\Delta Q_1(t_1,t_2)=Q_2(t_1,t_2)+Q_3(t_1,t_2)$, або після підстановки усіх величин маємо інтегральний закон збереження теплової енергії:

$$\iiint\limits_G c(x)\rho(x)\left[u(x,t_2)-u(x,t_1)\right]dG=\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_S k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}dSdt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_G f(x,t)dGdt \quad (1.7)$$

Для перетворення першого інтегралу лівої частини (1.7) застосуємо формулу Остроградського Гауса, $\iint\limits_S\langle A,n\rangle ds=\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{A}dG$, де $\vec{A}$ векторне поле. В результаті отримаємо:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_G c(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dGdt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_G \operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)dGdt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_G f(x,t)dGdt \qquad (1.8),$$

де $\operatorname{div}(A)=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$.

Враховуючи, що рівність (1.8) отримана для довільного об'єму G та довільних моментів часу t_1, t_2, можна зробити висновок, що рівність (1.8) має місце тоді і лише тоді, коли має місце рівність підінтегральних виразів:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\mathbf{div}\left(k(x,t)\mathbf{grad}u(x,t)\right)+f(x,t),\ x\in G, t>0 \quad (1.9).$$

Рівняння (1.9) повинно виконуватись для кожної точки x реального фізичного об'єму тіла (збережемо для нього позначення G, а для його поверхні позначення S), та для кожного моменту часу $t>0$.

Для виділення єдиного розв'язку рівняння (1.9) окрім диференціального рівняння (1.9) необхідно задавати додаткові умови на границі просторово – часової області. Будемо використовувати фізичні міркування для задавання таких умов.

а) Якщо на границі області відома температура тіла, тоді на границі тіла задають умову: $u(x,t)|_{x\in S}=v(x,t)$ (1.10).

Умову (1.10) називають граничною умовою першого роду, або умовою Дірихле.

б*)* Якщо на границі області відомий тепловий потік в одиницю часу, який поступає всередину тіла через одиничну площадку, тоді на границі задають граничну умову: $k(x,t)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x\in S}=q(x,t)$ (1.11).

Умову (1.11) називають граничною умовою другого роду, або умовою Неймана.

в) Якщона границі тіла відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем відомої температури згідно до закону Ньютона, тоді на границі

задають граничну умову: $k\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x\in S} = \alpha(x,t)\big(v(x,t)-u(x,t)\big)|_{x\in S}$ (1.12).

Умову (1.12) називають граничною умовою третього роду або умовою Ньютона. $\alpha(x,t)>0$ - коефіцієнт теплообміну, $v(x,t)$ - температура оточуючого середовища.

г) В початковий момент часу задають температура усіх внутрішніх точок тіла.

$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x)$ (1.13),

Умову (1.13) називають початковою умовою, а $u_0(x)$ - початковою температурою тіла.

Частинні випадки рівняння теплопровідності

У випадку, коли коефіцієнт теплопровідності та інтенсивність теплових джерел залежить не лише від точки простору і часу, а і від самої температури $k(u,x,t)$, $f(u,x,t)$, лінійне рівняння (1.9) стає квазілінійним, тобто лінійним відносно старших похідних.

Окрім загального вигляду рівняння теплопровідності, у практичних випадках часто використовуються частинні випадки рівняння.

Зокрема, можна розглядати розповсюдження тепла в одновимірних та двовимірних тілах:

(пластина) $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ (1.14),

(стрижень) $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ (1.15).

Для однорідних тіл усі коефіцієнти рівняння можна вважати константами, зокрема $c=c_0$, $\rho=\rho_0$, $k=k_0$ В результаті рівняння (1.9) буде мати вигляд

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + \frac{1}{c_0\rho_0} f(x,t)$ (1.16)

де $a^2 = \dfrac{k_0}{c_0\rho_0}$, $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ **– оператор Лапласа**.

Зокрема одновимірне рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c_0\rho_0} f(x,t) \qquad (1.17).$$

Рівняння дифузії речовини

Процес дифузії речовини це процес вирівнювання концентрації речовини у розчинах, розплавах або в сумішах. Фізика вирівнювання температури в тілах та концентрації у розчинах чи розплавах має багато схожих рис і з цього приводу навіть процес розповсюдження тепла називають дифузією тепла.

Для отримання моделі дифузії речовини використаємо наступну таблицю аналогії.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$u(x,t)$	$u(x,t)$	Концентрація речовини в розчині, або у розплаві
$c(x)$	$c(x)\rho(x)$	Коефіцієнт пористості, відображає відношення об’єму пор до загального об’єму тіла і вказує на кількість речовини необхідну для зміни концентрації на одну одиницю в одиниці об’єму.
$D\dfrac{\partial u}{\partial n}dS$	$k\dfrac{\partial u}{\partial n}dS$	Закон Нерста, описує кількість речовини, яка поступає всередину тіла через його поверхню в одиницю часу за рахунок нерівномірності концентрації.
$f(x,t)$	$f(x,t)$	Інтенсивність джерела речовини в середині об’єму.
$D\dfrac{\partial u}{\partial n} = \alpha(v-u)\big\|_S$	$k\dfrac{\partial u}{\partial n} = \alpha(v-u)\big\|_S$	Кількість речовини, яка поступає через поверхню S тіла за законом, аналогічним закону Ньютона, ν– відома концентрація речовини в тому чи іншому середовищі; α-коефіцієнт проникності поверхні.

Побудови математичної моделі процесу дифузії відбувається за аналогією згідно до попередньої таблиці.

Кількість речовини, яка витрачена для зміни концентрації від

$u(x,t_1) \to u(x,t_2)$, $t_1 < t_2$ має вигляд:

$$\Delta Q_1(t_1,t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x)\left[u(x,t_2) - u(x,t_1)\right]dG \qquad (1.3').$$

Кількість речовини, яка проходить через всю поверхню S за час від $t_1 \to t_2$:

$$Q_2(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\iint_S D(x,t)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt \qquad (1.5')$$

Кількість речовини, яка поступає за рахунок джерел речовини в об'ємі G за час від t_1 до t_2: $\quad Q_3(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_G f(x,t)dGdt \qquad (1.6')$

Отже, закон збереження маси має вигляд: $\Delta Q_1(t_1,t_2) = Q_2(t_1,t_2) + Q_3(t_1,t_2)$.

Інтегральний закон збереження маси:

$$\iiint_G c(x)\left[u(x,t_2) - u(x,t_1)\right]dG = \int_{t_1}^{t_2}\iint_S D(x,t)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt + \int_{t_1}^{t_2}\iiint_G f(x,t)dGdt \qquad (1.7')$$

Після застосування формули Остроградського – Гауса та прирівнювання підінтегральних виразів отримаємо рівняння дифузії речовини у вигляді:

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D(x,t)\operatorname{grad} u) + f(x,t), \quad x \in G,\ t > 0 \qquad (1.17).$$

Додаткові умови на границі області задають аналогічно умовам для рівняння теплопровідності.

$$u|_S = v(x,t) \qquad (1.18),$$

відома концентрація речовини на поверхні.

$$D\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = g(x,t) \qquad (1.19),$$

на границі відомий потік речовини.

$$D\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(v-u)\big|_S \qquad (1.20),$$

на границі відбувається обмін речовиною з оточуючим середовищем через напівпроникливу мембрану за законом аналогічним закону Ньютона.

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (1.21),$$

в початковий момент часу відома концентрація речовини.

У випадку, коли коефіцієнти рівняння та граничних умов не залежать від часу t, розв'язок рівняння не залежить від часу в результаті отримаємо стаціонарне рівняння теплопровідності та дифузії:

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{k(x)\,gradu}\right) = -\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) \qquad (1.22)$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{D(x)\,gradu}\right) = -\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right) \qquad (1.22')$$

Задача Стефана ***(задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)***

Вертикальний циліндричний посуд заповнений розплавленим металом, який знаходиться при заданій температурі $U_0 > U_{пл.}$. Починаючи з моменту часу t_0 вільна поверхня розплавленого металу підтримується при постійній температурі $U_1 < U_{пл.}$. Поставимо задачу про остудження та затвердіння металу, якщо дно і бокова поверхня посуду теплоізольовані. Термічними деформаціями об'єму будемо нехтувати тобто процес розповсюдження тепла відбувається лише вздовж вісі циліндру. Введемо позначення:

ρ_p, ρ_m - щільність твердої та рідкої фази металу;

c_p, c_m - теплоємність твердої та рідкої фази металу;

k_p, k_m - теплопровідність твердої та рідкої фази металу;

$\xi(t)$ - положення границі розділу твердої та рідкої фаз;

L - висота циліндру, S - площа основи циліндру;

λ - питома теплота плавлення;

$u(x,t)$ - температура в момент часу t в точці x.

Отримаємо рівняння теплового балансу для нескінченно малого об'єму розплавленого металу, який знаходиться між перерізами x та $x+\Delta x$ за проміжок часу від t до $t+\Delta t$.

Обчислимо кількість тепла, яка необхідна для зміни температури у виділеному елементарному об'ємі від значення $u(x,t)$ до значення $u(x,t+\Delta t)$. Кількість тепла, що міститься в виділеному об'ємі в момент часу t можна обчислити за формулою $dQ(t)=c_p\rho_p S\Delta x u(x,t)$. Аналогічно для моменту часу $t+\Delta t$ кількість тепла дорівнює $dQ(t+\Delta t)=c_p\rho_p S\Delta x u(x,t+\Delta t)$. При цьому нехтуємо, зміною температури по просторовій змінній у середині елементарного об'єму. Тоді кількість тепла, необхідна для зміни температури всередині об'єму дорівнює: $\Delta Q(t,t+\Delta t)=c_p\rho_p S\Delta x(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))$.

Ця зміна може відбуватися за рахунок теплових потоків, через перерізи x та $x+\Delta x$. Підрахуємо кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз $x+\Delta x$ за час Δt

$$dQ(x+\Delta x)=k_p\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial n}S\Delta t=k_p\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t$$

Напрям нормалі в цьому перерізі співпадає з напрямом вісі x.

Кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз x за час Δt можна записати у вигляді:

$$dQ(x)=k_p\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}S\Delta t=-k_p\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t$$

Таким чином можна скласти рівняння теплового балансу:

$$\Delta Q(t,t+\Delta t)=dQ(x+\Delta x)+dQ(x)$$

Або після підстановки відповідних значень поділених на $\Delta x\Delta t$ отримаємо:

$$\frac{c_p\rho_p S\cancel{\Delta x}(u(x,t+\Delta t)\quad u(x,t))}{\cancel{\Delta x}\Delta t}=k_p\quad\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\quad\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\quad\frac{S\cancel{\Delta t}}{\Delta x\cancel{\Delta t}}$$

Після граничного переходу коли Δx та Δt прямують до нуля, отримаємо

диференціальне рівняння:

$$c_p\rho_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k_p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ \xi(t) < x < L,\ t > t_0 \qquad (1.23)$$

Аналогічні міркування дозволяють отримати рівняння для твердої фази:

$$c_m\rho_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k_m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 < x < \xi(t),\ t > t_0 \qquad (1.24)$$

Отримаємо співвідношення на границі розділу фаз.

В першу чергу відмітимо, що температура при переході через границю розділу фаз повинна змінюватись неперервно і співпадати з температурою плавлення металу, тобто повинно виконуватись співвідношення :

$$u(\xi(t)-0,t) = u(\xi(t)+0,t) = U_{пл.} \qquad (1.25)$$

Отримаємо рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами $\xi(t)-\Delta x$ та $\xi(t)+\Delta x$

За час Δt затвердіє об'єм металу рівний $(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))S$. При цьому буде виділено кількість тепла рівна $dQ_m = (\xi(t+\Delta t)-\xi(t))S\lambda\rho_m$.

Кількість тепла, яка надійде всередину об'єму за рахунок теплових потоків через відповідні перерізи за час Δt може бути записана у вигляді:

$$\Delta t S\left(k_p \frac{\partial u(\xi(t)+\Delta x)}{\partial x} - k_m \frac{\partial u(\xi(t)-\Delta x)}{\partial x}\right)$$

Оскільки фазовий перехід відбувається при постійній температурі, то в околі границі розділу фаз $\xi(t)$ зміною температури по змінній t можна нехтувати, в зв'язку з чим можна не враховувати кількість тепла, яка витрачається на зміну температури у виділеному елементарному об'ємі.

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами $\xi(t)-\Delta x$ та $\xi(t)+\Delta x$ можна записати у вигляді:

$$(\xi(t+\Delta t)-\xi(t))S\lambda\rho_m = \Delta t S\left(k_p \frac{\partial u(\xi(t)+\Delta x)}{\partial x} - k_m \frac{\partial u(\xi(t)-\Delta x)}{\partial x}\right) \qquad (1.26).$$

Поділивши обидві частини на Δt, скоротивши на S і спрямувавши $\Delta x, \Delta t$ до нуля отримаємо співвідношення:

$$\lambda\rho_m \frac{\partial\xi(t)}{\partial t} = \left(k_p \frac{\partial u(\xi(t)+0)}{\partial x} - k_m \frac{\partial u(\xi(t)-0)}{\partial x} \right) \qquad t > t_0 \qquad (1.27)$$

Умови (1.25), (1.27) називають внутрішніми граничними умовами, або умовами спряження.

Запишемо початкові умови та умови на верхній та нижній основі циліндру:

В початковий момент часу задана температура розплавленого металу:

$$u(x,t_0) = U_0,\ 0 < x < L \qquad (1.28)$$

На верхній основі задана температура:

$$u(0,t) = U_1,\ t > t_0 \qquad (1.29)$$

Нижня основа теплоізольована, тобто тепловий потік, який поступає всередину тіла дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0,\ t > t_0 \qquad (1.30)$$

В початковий момент часу положення границі фазового переходу співпадає з верхньою основою циліндру:

$$\xi(0) = 0 \qquad (1.31)$$

Таким чином до моменту часу, коли весь метал затвердіє постановка задачі Стефана включає в себе рівняння (1.23) та (1.24), умови спряження (1.25) та (1.27), початкові умови (1.28) та (1.31) та граничні умови (1.29) та (1.30).

Після повного затвердіння металу, тобто коли $\xi(t_1) = L$, процес буде описуватись рівнянням (2) для $t > t_1$ з граничними умовами (1.29), (1.30) та початковою температурою $u(x,t_1)$.

Лекція 8

§ 2. Математичні моделі теорії пружності

[5, стор222 - 245]

Відомо, що в природі існують пружні тіла, які можуть змінювати свою форму під дією прикладеної сили, а після припинення дії зовнішньої сили приймати початкову форму. Зовнішня сила викликає в пружних тілах деформації (зміну положення одних точок тіла відносно інших) та напруження (внутрішні сили, які прагнуть повернути тіло в положення рівноваги).

Математична модель теорії пружності – це система диференціальних рівнянь, які описують кількісний зв'язок між зміною форми тіла (деформаціями) і внутрішніми зусиллями (напруженнями).

Введемо позначення:

x, y, z – координати точки у просторі;

$U(x,y,z,t)$, $V(x,y,z,t)$, $W(x,y,z,t)$ – координата вектора зміщень в напрямку вісей Ox, Oy, Oz відповідно (*вектор зміщень показує зміщення точки тіла з координатами* x, y, z *в* напрямку *однієї з координатних вісей в момент часу t від положення рівноваги*);

$F_x(x,y,z,t)$, $F_y(x,y,z,t)$, $F_z(x,y,z,t)$ – компоненти вектора поверхневих сил в напрямку вісей 0x, 0y, 0z відповідно, тобто тих сил, що діють на поверхню тіла;

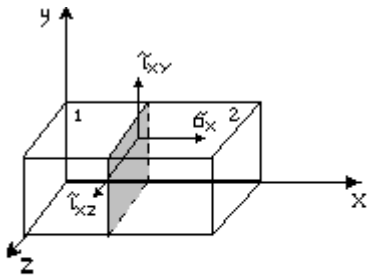
$X(x,y,z,t), Y(x,y,z,t), Z(x,y,z,t)$ – вектори об'ємних сил;

dG – елемент об'єму; dS – елемент поверхні.

Розглянемо просту фізичну модель взаємодії між собою двох частин пружного тіла. Нехай прямокутний паралелепіпед з нескінченно малим поперечним перерізом $dy \times dz$ витягнутий вздовж вісі x та умовно розділений на

дві частини площиною ортогональною вісі x.

Охарактеризуємо силу з якою паралелепіпед 2 діє на паралелепіпед 1 через переріз $dy \times dz$ в площині yOz (на рис. площина взаємодії виділена сірим кольором). Нехай $\mathbf{t}^{(\mathbf{x})} = \left(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\right)$ вектор сили віднесений на одиницю площі перерізу з якою паралелепіпед 2 діє на паралелепіпед 1, при цьому σ_x – компонента, що може стискати, або розтягувати паралелепіпед 1, τ_{xy}, τ_{xz}; - компоненти, що зрізають паралелепіпед в напрямках вісей y та z відповідно.



Аналогічно, для паралелепіпедів витягнутих вздовж вісей Oy та Oz можна розглянути сили, яки діють в двох інших площинах xOz та xOy на одиницю площі цих перерізів та охарактеризувати їх векторами: $\mathbf{t}^{(\mathbf{y})} = \left(\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}\right)$ $\mathbf{t}^{(\mathbf{z})} = \left(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z\right)$.

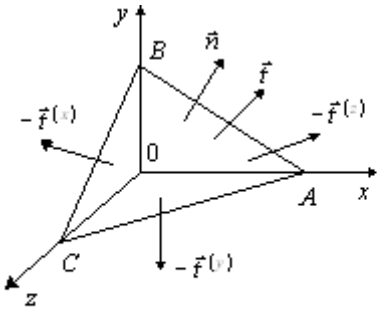
Для будь – якого паралелепіпеда з довжиною ребер dx, dy, dz а тим самим точки простору напружений стан тіла можна охарактеризувати матрицею

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Зауваження. При розгляді моделі взаємодії паралелепіпеда 2 та паралелепіпеда 1 через загальний переріз має місце принцип рівнодії та протидії, тобто сила, з якою паралелепіпед 2 діє на паралелепіпед 1 рівна за величиною та протилежна за напрямком силі з якою паралелепіпед 1 діє на паралелепіпед 2. Сили, що діють на тіло обираються зі знаком плюс, якщо вони діють на переріз, який обмежує тіло з боку зростання значення координатної вісей і зі знаком мінус, якщо вони діють на поверхню, що обмежує тіло з боку спадання значень координатних вісей.

Закони рівноваги елемента поверхні

Розглянемо елементарну модель пружної взаємодії. Нехай всередині пружного тіла ми виділили нескінченно малий тетраедр $OABC$, $\vec{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до грані ABC, а S площа цієї грані.



Нехай $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ – вектор поверхневої сили, що діє на одиницю площі грані ABC.

Вектор нормалі $\vec{\mathbf{n}} = \cos(\vec{n},x), \cos(\vec{n},y), \cos(\vec{n},z)$, а $S\cos(\vec{n},x), S\cos(\vec{n},y), S\cos(\vec{n},z)$ – площі граней тетраедра, ортогональних вісям 0x, 0y, 0z.

Якщо тетраедр знаходиться в стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху, то рівнодіюча сил, що діють на всі чотири грані дорівнює нулю, тобто: $\vec{f}\,S - \vec{t}^{x} S\cos(n,x) - \vec{t}^{y} S\cos(n,y) - \vec{t}^{z} S\cos(n,z) = 0$. Після скорочення на S отримаємо векторну форму закону рівноваги елементу поверхні.

$$\vec{f} = \vec{t}^{x}\cos(n,x) + \vec{t}^{y}\cos(n,y) + \vec{t}^{z}\cos(n,z) \qquad (2.2).$$

Запишемо закон рівноваги елемента поверхні в скалярному вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z) &= f_x \\
\tau_{xy}\cos(n,x) + \sigma_y \cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z) &= f_y \\
\tau_{xz}\cos(n,x) + \tau_{zy}\cos(n,y) + \sigma_z \cos(n,z) &= f_z
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

У випадку, коли елементарний трикутник АВС, є частиною реальної зовнішньої поверхні тіла, то закон рівноваги елемента поверхні приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z) &= F_x \\
\tau_{xy}\cos(n,x) + \sigma_y \cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z) &= F_y \\
\tau_{xz}\cos(n,x) + \tau_{zy}\cos(n,y) + \sigma_z \cos(n,z) &= F_z
\end{aligned} \qquad (2.3')$$

Де (F_x, F_y, F_z) – вектор поверхневих сил.

Закон рівноваги елемента об'єму

Розглянемо будь-який об'єм G та його елементарний об'єм dG.

Об'ємні сили, що діють на тіло об'єму G: можна обчислити у вигляді. $\iiint\limits_G \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dG$ (2.4)

Через будь-яку елементарну поверхню тіла діє поверхнева сила $\vec{f}dS$, а результуюча поверхнева сила, яка діє на тіло через усю поверхню S, що обмежує тіло має вигляд $\iint\limits_S \vec{f}dS$, або в скалярному вигляді:

$$\iint\limits_S \left[t^{(x)} \cos(n,x) + t^{(y)} \cos(n,y) + t^{(z)} \cos(n,z) \right] dS \qquad (2.5).$$

Для того щоб тіло знаходилося в стані спокою або рухалось рівномірно і прямолінійно, рівнодіюча об'ємної та поверхневої сил повинна дорівнювати нулю

$$\iint\limits_S \left[t^{(x)} \cos(n,x) + t^{(y)} \cos(n,y) + t^{(z)} \cos(n,z) \right] dS + \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dG = 0 \qquad (2.6).$$

Рівняння (2.6) є векторним записом закону рівноваги елементу об'єму.

Скалярна форма запису закону має вигляд:

$$\begin{cases} \iint\limits_S \left(\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx} \cos(n,y) + \tau_{zx} \cos(n,z) \right) dS + \iiint\limits_G X dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(\tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y co(n,y) + \tau_{zy} \cos(n,z) \right) dS + \iiint\limits_G Y dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(\tau_{xz} \cos(n,x) + \tau_{yz} \cos(n,y) + \sigma_z \cos(n,z) \right) dS + \iiint\limits_G Z dG = 0 \end{cases} \qquad (2.6^{/}).$$

Додатковою умовою рівноважного положення тіла окрім закону рівноваги елементу об'єму є виконання закону збереження моментів сил з якого випливає симетричність матриці (2.1):

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Враховуючи факт симетрії, (2.6$^{/}$) можна

записати у вигляді $\begin{cases} \iint\limits_S \left(t^{(x)}, n\right) dS + \iiint\limits_G X dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(t^{(y)}, n\right) dS + \iiint\limits_G Y dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(t^{(z)}, n\right) dS + \iiint\limits_G Z dG = 0 \end{cases}$ (2.6//).

$\vec{\mathbf{n}} = \left(\cos(n,x), \cos(n,y), \cos(n,z)\right)$ - вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Враховуючи формулу Остроградського – Гауса, кожен поверхневий інтеграл перетворимо в об'ємний, в результаті отримаємо:

$$\begin{cases} \iiint\limits_G \left(\operatorname{div} t^{(x)} + X\right) dG = 0 \\ \iiint\limits_G \left(\operatorname{div} t^{(y)} + Y\right) dG = 0 \\ \iiint\limits_G \left(\operatorname{div} t^{(z)} + Z\right) dG = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) – диференціальна форма запису закону рівноваги елементу об'єму.

В подальшому симетричну матрицю (2.1) будемо називати тензором напружень.

Тензор напружень, головні вісі тензора напружень

Позначимо через $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}$ орти прямокутної система координат з координатними осями x, y, z.

Введемо нову систему координат з ортами $\mathrm{e}_\xi, \mathrm{e}_\eta, \mathrm{e}_\zeta$. та осями ξ, η, ζ.

З'ясуємо, яким чином пов'язані вектори $\vec{t}^{(x)}, \vec{t}^{(y)}, \vec{t}^{(z)}$, які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у системі координат x, y, z, з векторами $\vec{t}^{(\xi)}, \vec{t}^{(\eta)}, \vec{t}^{(\zeta)}$, які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у новій системі координат ξ, η, ζ.

Згідно до загальних формул переходу від одного ортогонального базису до іншого, можна записати:

$$\begin{cases} \vec{t}^{(\xi)} = \vec{t}^{(x)}\cos(\xi,x) + \vec{t}^{(y)}\cos(\xi,y) + \vec{t}^{(z)}\cos(\xi,z) \\ \vec{t}^{(\eta)} = \vec{t}^{(x)}\cos(\eta,x) + \vec{t}^{(y)}\cos(\eta,y) + \vec{t}^{(z)}\cos(\eta,z) \\ \vec{t}^{(\zeta)} = \vec{t}^{(x)}\cos(\zeta,x) + \vec{t}^{(y)}\cos(\zeta,y) + \vec{t}^{(z)}\cos(\zeta,z) \end{cases} \qquad (2.8)$$

Координати ортів нової системи координат мають значення:

$$e_\xi = (\cos(\xi,x), \cos(\xi,y), \cos(\xi,z))$$

$$e_\eta = (\cos(\eta,x), \cos(\eta,y), \cos(\eta,z))$$

$$e_\zeta = (\cos(\zeta,x), \cos(\zeta,y), \cos(\zeta,z))$$

Для знаходження будь – якої компоненти тензора напружень $\tau_{\alpha\beta}$, необхідно обчислити скалярний добуток $\tau_{\alpha\beta} = \left(t^{(\alpha)}, e_\beta\right)$. Так, наприклад

$$\tau_{\xi\eta} = \left(\sigma_x\cos(\eta,x) + \tau_{xy}\cos(\eta,y) + \tau_{xz}\cos(\eta,z)\right)\cos(\xi,x) +$$
$$+\left(\tau_{yx}\cos(\eta,x) + \sigma_y\cos(\eta,y) + \tau_{yz}\cos(\eta,z)\right)\cos(\xi,y) +$$
$$+\left(\tau_{zx}\cos(\eta,x) + \tau_{zy}\cos(\eta,y) + \sigma_z\cos(\eta,z)\right)\cos(\xi,z) = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}}\tau_{ab}\cos(\xi,a)\cos(\eta,b).$$

Отже, для довільної компоненти тензора напружень має місце формула переходу від однієї до іншої системи координат

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}}\tau_{ab}\cos(\alpha,a)\cos(\beta,b) \qquad (2.9)$$

У формулі (2.9) використані позначення $\tau_{\alpha\alpha} = \sigma_\alpha$, $\tau_{aa} = \sigma_a$.

Таким чином, тензор напружень – це симетрична матриця, $T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$, компоненти якої перетворюються за формулою (2.9) при переході до нової прямокутної системи координат.

Поставимо задачу вибору нової прямокутної системи координат, для якої

тензор напружень має діагональну форму. Нехай e_{ν_i}, $i=1,2,3$ - орти нової прямокутної системи координат. Для того, щоб тензор T мав діагональну форму запису, кожен вектор $t^{(\nu_i)}$, $i=1,2,3$ в новій системі координат повинен бути колінеарним відповідному орту e_{ν_i}, $i=1,2,3$, тобто $t^{(\nu_i)}=\sigma_i \nu_i$.

Скористаємось формулою (2.8) та запишемо співвідношення для пошуку ортів $\overrightarrow{t^{(\nu)}}=\sigma\vec{e}_\nu=\sigma\left[\cos(\nu,x),\cos(\nu,y),\cos(\nu,z)\right]$;

Запишемо останнє співвідношення в координатному вигляді:

$$\begin{cases}\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{yx}\cos(\nu,y)+\tau_{zx}\cos(\nu,z)=\sigma\cos(\nu,x)\\ \tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y)+\tau_{zy}\cos(\nu,z)=\sigma\cos(\nu,y)\\ \tau_{xz}\cos(\nu,x)+\tau_{yz}\cos(\nu,y)+\sigma_z\cos(\nu,z)=\sigma\cos(\nu,z)\end{cases} \qquad (2.10)$$

Для ортонормованого базису $\cos^2(\nu,x)+\cos^2(\nu,y)+\cos^2(\nu,z)=1.$

В матрично – векторній формі (2.10) має вигляд

$$T\vec{e}_\nu=\sigma\vec{e}_\nu. \qquad (2.10')$$

Ця задача на власні значення з симетричною матрицею має три дійсних власних числа, позначимо їх $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, тобто $\begin{vmatrix}(\sigma_x-\sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & (\sigma_y-\sigma) & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z-\sigma)\end{vmatrix}=0$, і три ортонормовані власні вектори $e_{\nu_i}=(\cos(\nu_i,x),\cos(\nu_i,y),\cos(\nu_i,z))$, $i=1,2,3$.

Координатні вісі, для яких тензор напружень має діагональний вигляд, називаються головними вісями тензора напружень.

Відповідні діагональні компоненти тензора напружень σ_i, $i=1,2,3$ називаються головними компонентами тензора напружень.

Використовуючи формулу (2.9), запишемо зв'язок між компонентами тензора напружень в декартових координатах (x,y,z) і головними компонентами тензора напружень:

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cos(\nu_i, a)\cos(\nu_i, b) \qquad (2.11)$$

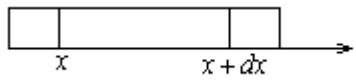
$$\sigma_a = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cos^2(\nu_i, a) \qquad a, b \in \{x, y, z\} \qquad (2.11^{/})$$

Тензор деформацій і закони його перетворення

Раніше були введені характеристики: $\left.\begin{matrix} U(x,y,z,t) \\ V(x,y,z,t) \\ W(x,y,z,t) \end{matrix}\right\}$ --зміщення точки з координатами (x, y, z) від положення рівноваги в напрямку відповідної вісі.

Розглянемо можливі види деформації.

1. Нормальні деформації - (зміна довжини в напрямку координатної вісі) характеризуються відносною зміною довжини відрізків.



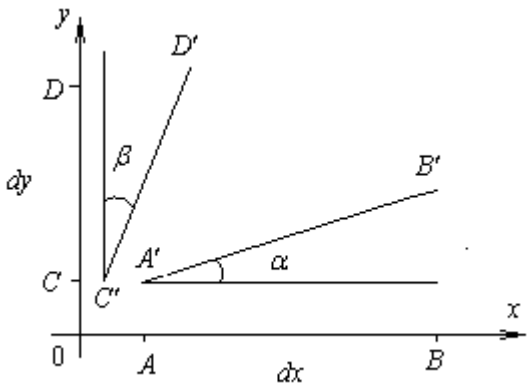
Приклавши силу в напрямку вісі Ox, точка x змістилася і зайняла положення $x + U(x,\cdot,\cdot)$; точка $x + dx$ теж змістилася і зайняла положення $(x + dx) + U(x + dx,\cdot,\cdot)$.

Порахуємо відносне подовження відрізка dx після прикладення до нього напруження:

$$\frac{(x+dx)+U(x+dx,\cdot,\cdot)-x-U(x,\cdot,\cdot)-dx}{dx} = \frac{U(x+dx,\cdot,\cdot)-U(x,\cdot,\cdot)}{dx} \xrightarrow[dx\to 0]{} \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогічно, можна ввести характеристику відносного подовження в напрямку двох інших вісей.

Отже, нормальні деформації характеризуються частинними похідними $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$.



2. Зрізуючи (дотичні) деформації будемо характеризувати абсолютною зміною кутів між відрізками в кожній з трьох

координатних площин, які до початку дії напружень були ортогональними.

Розглянемо наступну фізичну модель. Нехай відрізки AB та CD довжини dx та dy відповідно після дії прикладених сил зайняли положення $A'B'$ та $C'D'$ відповідно. Точка A змістилася на відстань $V(x,...)$, а точка B змістилася на відстань $V(x+dx,...)$.

Тоді $\dfrac{V(x+dx,\cdot,\cdot)-V(x,\cdot,\cdot)}{dx}=tg\,\alpha \xrightarrow[dx\to 0]{} \dfrac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \alpha \approx \dfrac{\partial V}{\partial x}$.

Аналогічно $tg\beta=\dfrac{U(\cdot,y+dy,\cdot)-U(\cdot,y,\cdot)}{dy} \xrightarrow[dy\to 0]{} \dfrac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \beta \approx \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Сумарна зміна кута $\alpha+\beta=\dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial y}$. Позначимо $\gamma_{xy}=\dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\partial U}{\partial y}=\gamma_{yx}$.

Провівши аналогічні міркування щодо інших координатних площин отримаємо:

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}=\gamma_{zx},\ \ \gamma_{yz}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}=\gamma_{zy} \qquad (2.12)$$

Позначимо: $\varepsilon_x=\dfrac{\partial U}{\partial x},\varepsilon_y=\dfrac{\partial V}{\partial y},\varepsilon_z=\dfrac{\partial W}{\partial z},\gamma_{aa}=2\varepsilon_a,$ (2.13).

В результаті повну дуформацію будь – якій точці можна охарактеризувати симетричною матрицею: $\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$, яка називається симетричним тензором деформацій.

Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат

Вивчимо перетворення симетричного тензору деформацій при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Нехай ξ,η,ζ вісі нової системи координат (замість x,y,z), а функції U',V',W' зміщення в напряму нових вісей. Враховуючи формули переходу від одного ортогонального базису до іншого

можемо записати:

$$U' = U\cos(\xi, x) + V\cos(\xi, y) + W\cos(\xi, z)$$

$$V' = U\cos(\eta, x) + V\cos(\eta, y) + W\cos(\eta, z) \qquad (2.12)$$

$$W' = U\cos(\zeta, x) + V\cos(\zeta, y) + W\cos(\zeta, z)$$

$$x = \xi\cos(\xi, x) + \eta\cos(\eta, x) + \zeta\cos(\zeta, x)$$

$$\xi = x\cos(\xi, x) + y\cos(\xi, y) + z\cos(\xi, z)$$

$$y = \xi\cos(\xi, y) + \eta\cos(\eta, y) + \zeta\cos(\zeta, y)$$

$$\eta = x\cos(\eta, x) + y\cos(\eta, y) + z\cos(\eta, z) \qquad (2.13).$$

$$z = \xi\cos(\xi, z) + \eta\cos(\eta, z) + \zeta\cos(\zeta, z)$$

$$\zeta = x\cos(\zeta, x) + y\cos(\zeta, y) + z\cos(\zeta, z)$$

У формулах (2.12), (2.13) $(\cos(\alpha, x), \cos(\alpha, y), \cos(\alpha, z)) = \vec{e}_\alpha$, $\alpha \in (\xi, \eta, \varsigma)$ координати ортів нового базису.

Знайдемо вирази для компонентів тензору у новій системі координатах: $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta, \gamma_{\alpha\beta}$ при $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$.

Зокрема для ε_ξ отримаємо:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial U'}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\cos(\xi, x) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\cos(\xi, y) +$$

$$+\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\cos(\xi, z) =$$

$$\cos(\xi, x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos(\xi, x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\xi, y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(\xi, z)\right) +$$

$$+\cos(\xi, y)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos(\xi, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(\xi, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(\xi, z)\right) +$$

$$+\cos(\xi, z)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\cos(\xi, x) + \frac{\partial W}{\partial y}\cos(\xi, y) + \frac{\partial W}{\partial z}\cos(\xi, z)\right)$$

Розкриваючи дужки і використовуючи відповідні позначення отримаємо

наступну формулу: $\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_{\xi} = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \gamma_{ab} \cos(\xi,a)\cos(\xi,b)$.

Загальна формула перетворення тензора деформацій матиме вигляд:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \gamma_{ab} \cos(\alpha,a)\cos(\beta,b),\ \alpha,\beta \in \{\xi,\eta,\zeta\} \qquad (2.14).$$

Лекція 9

Порівнюючи формули (2.9) та (2.14), бачимо їх ідентичність, тобто перетворення тензора напружень та тензору деформацій відбувається за однаковими формулами. Таким чином існує система координат h_1, h_2, h_3, для якої тензор деформації має діагональний вигляд.

Тобто тензор деформацій має вигляд: $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ називаються головними компонентами тензора деформацій, а h_1, h_2, h_3 головні вісі тензора деформацій.

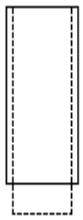
З (2.14) можна отримати зв'язок між компонентами тензору деформацій у прямокутній системі координат (x, y, z) та головними компонентами тензору деформацій.

$$\gamma_{ab} = \sum_{i=1}^{3} 2\varepsilon_i \cos(h_i, a)\cos(h_i, b),\ \varepsilon_a = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \cos^2(h_i, a) \qquad a, b \in \{x, y, z\} \qquad (2.15)$$

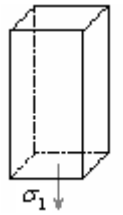
Без доведення приймемо до уваги твердження: для ізотропних тіл (тіл властивості яких в усіх напрямках однакові) головні вісі тензора деформації та тензора напружень співпадають.

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cos(\mathrm{h}_i, a)\cos(\mathrm{h}_i, b),\ \sigma_a = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cos^2(\mathrm{h}_i, a) \quad a, b \in \{x, y, z\} \qquad (2.16)$$

Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень



Розглянемо пружній паралелепіпед до нижньої грані якого прикладене напруження σ_1 у напряму першої головної координатної вісі h_1.



Згідно до спрощеного трактування закону Гука $\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E}$ – (E – Модуль Юнга).

При подовжені паралелепіпеду у напрямку першої координатної вісі h_1, відбувається стиснення паралелепіпеду у напрямах двох інших головних вісей і це стиснення пропорційне прикладеному напруженню σ_1.

Прикладаючи напруження в напряму двох інших головних координатних вісей σ_3 та σ_2, відповідно будемо мати стиснення в напряму h_1. Це від'ємне подовження (стиснення) в напрямку першої координатної вісі, за рахунок напруження σ_2, дорівнює $-\dfrac{\sigma_2}{mE}$, а за рахунок напруження σ_3, дорівнює $-\dfrac{\sigma_3}{mE}$.

Отже, маємо загальний вигляд закону Гука:

$\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_1 - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right) = \dfrac{m+1}{Em}\left(\sigma_1 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m+1}\right)$ – повна величина подовження в напрямку першої головної координатної вісі.

Позначимо $S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ і запишемо закон Гука, (який виражає зв'язок між головними компонентами тензора напружень та тензора деформації):

$$\varepsilon_i = \frac{m+1}{Em}\left(\sigma_i - \frac{S}{m+1}\right),\ i = 1,2,3 \qquad (2.17).$$

Використовуючи формули (2.15), (2.16), (2.17) отримаємо:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} \frac{m+1}{Em}\left(\sigma_i - \frac{S}{m+1}\right)\cos^2\left(h_i, x\right) = \frac{m+1}{Em}\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_i \cos^2\left(h_i, x\right) - \frac{S}{m+1}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\left(h_i, x\right)\right) =$$
$$= \frac{m+1}{Em}\left(\sigma_x - \frac{S}{m+1}\right).$$

Неважко перевірити, що $S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, тобто S - інваріант для різних прямокутних систем координат.

Для поза діагональних елементів, зв'язок між компонентами тензора деформацій і тензора напружень має вигляд:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(m+1)}{Em}\sum_{i=1}^{3}\left(\sigma_i - \frac{S}{m+1}\right)\cos(\mathrm{h}_i, x)\cos(\mathrm{h}_i, y) = \frac{2(m+1)}{Em}\tau_{xy}$$

Позначимо $G = \frac{Em}{2(m+1)}$ та запишемо закон Гука для будь-якої прямокутної системи координат, який виражає залежність між тензором деформацій та тензором напружень у довільній прямокутній системі координат.

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2G}\left(\sigma_a - \frac{S}{m+1}\right),\ \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{G}\tau_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta \in \{x, y, z\} \qquad (2.18)$$

Запишемо обернену залежність тензора напружень від тензора деформації, нехай $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G}\left(S - \frac{3S}{m+1}\right) = \frac{1}{2G}\left(\frac{(m-2)S}{m+1}\right)$, тоді $S = \frac{2\theta(m+1)G}{m-2}$.

Таким чином можна записати

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{S}{m+1} = 2G\varepsilon_x + \frac{2G\theta}{m-2} = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2}\right).$$

В результаті маємо еквівалентну форму закону Гука для довільної прямокутної системи координат:

$$\sigma_\alpha = 2G\left(\varepsilon_\alpha + \frac{\theta}{m-2}\right),\ \tau_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta \in \{x, y, z\} \qquad (2.19).$$

Запишемо замкнену систему диференціальних рівнянь, яка складається з (2.19), закону рівноваги елементу об’єму

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned} \qquad (2.20),$$

виразів які зв’язують компоненти тензору деформацій та вектор переміщень:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \gamma_{zx}\partial, \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \gamma_{zy}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \qquad (2.21)$$

Співвідношення (2.19) – (2.21) складають систему п’ятнадцяти лінійних диференціальних рівнянь з п’ятнадцятьма невідомими функціями.

Найчастіше цю систему перетворюють до вигляду трьох рівнянь з трьома невідомими відносно вектора переміщень. Для здійснення перетворень з (2.19) та (2.21) виключимо тензор деформацій, та підставимо отриманий вираз для напружень через переміщення у рівняння (2.20).

$$\mathrm{G}\left(\Delta\vec{\mathbf{U}} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}-2}\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{U}}\right) + \vec{\mathbf{X}} = 0 \qquad (x, y, z) \in \Omega \qquad (2.21^{/}).$$

Система рівнянь (2.21') називається статичною системою теорії пружності і описує напружено – деформований стан тіла, при умові що останнє знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху.

У випадку, коли одні частини тіла рухаються відносно інших, замість статичних рівнянь теорії пружності мають місце динамічні рівняння теорії пружності:

$$G\left(\Delta\vec{\mathbf{U}} + \frac{m}{m-2}\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{U}}\right) + \vec{\mathbf{X}} = \rho\frac{\partial^2\vec{\mathbf{U}}}{\partial\mathbf{t}^2} \qquad (x, y, z) \in \Omega, .t > 0 \qquad (2.22)$$

Остання система рівнянь може бути отримана, якщо використати більш загальний вигляд закону рівноваги елементу об’єму в якому рівнодіюча поверхневих та об’ємних сил дорівнюють силі інерції (другий закон Ньютона):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y = \rho\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = \rho\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases} - \qquad (2.19^{/}),$$

де права частина формули представляє силу інерції.

Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності

Для нестаціонарної системи теорії пружності в початковий момент часу необхідно задавати вектор переміщень

$$\vec{\mathrm{U}}(x,y,z,0)=\vec{\mathrm{U}}_0(x,y,z) \qquad (2.23)$$

та вектор початкових швидкостей

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{U}}(x,y,z,0)}{\partial \mathrm{t}}=\vec{\mathrm{U}}_1(x,y,z) \qquad (2.24)$$

Якщо на границі області $(x,y,z)\in S=\partial\Omega$ відомий вектор зміщень, то задають граничну умову: $\vec{\mathbf{U}}(x,y,z,t)\Big|_{(x,y,z)\in S}=\overrightarrow{\mathbf{W}}(x,y,z,t)$ (2.25).

Умови (2.25) називають умовами першого роду або умовами Дірихле.

Якщо на поверхні тіла відомий (заданий) вектор поверхневих сил, то в точках границі згідно закону рівноваги елементу поверхні (2.3’) задають умови для напрямку x: $\sum\limits_{a\in\{x,y,z\}}\tau_{x,a}\cos(n,a)\Big|_{(x,y,z)\in S_2}=F_x(x,y,z,t)$. Аналогічно для напрямків y,z. В загальному випадку векторна умова матиме вигляд:

$$\sum_{a\in\{x,y,z\}}\tau_{b,a}\cos(n,a)\Big|_{(x,y,z)\in S_2}=F_b(x,y,z,t),\ b\in\{x,y,z\} \qquad (2.26).$$

Умову (2.26) називають умовою другого роду, або умовою Неймана і вона містить частинні похідні від вектору переміщень.

Якщо точки границі закріплені пружно, наприклад за допомогою пружини, то у цьому випадку на границю діє поверхнева сила пропорційна зміщенню точок тіла і направлена в бік протилежний зміщенню. Таким чином задається гранична умова:

$$\sum_{a\in\{x,y,z\}}\tau_{b,a}\cos(n,a)\Big|_{(x,y,z)\in S}=-K_b\overrightarrow{U_b}(x,y,z,t)\Big|_{(x,y,z)\in S}\quad b\in\{x,y,z\} \qquad (2.27).$$

Умову (2.27) називають умовою третього роду, або умовою Ньютона і вона містить комбінацію невідомого вектора переміщень та його похідних. K_b – коефіцієнт пропорційності (пружного закріплення).

Якщо на тіло закріплено пружно одночасно дії зовнішня сила, то маємо неоднорідну граничну умову третього роду, яка запишеться у вигляді:

$$\sum_{a\in\{x,y,z\}} \tau_{b,a}\cos(n,a)\Big|_{(x,y,z)\in S} = -K_b\left(U_b(x,y,z,t)+F_b(x,y,z,t)\right)\Big|_{(x,y,z)\in S} \qquad (2.27^{/}).$$

Спрощення системи рівнянь теорії пружності.

Відомо, що за теоремою Гельмгольца, векторне поле $\vec{U}$ завжди можна представити у вигляді суми потенціального та соліноїдального векторних полів.

Тобто існують така скалярна функція φ та векторна функція Φ, які називають скалярним та векторним потенціалами відповідно що

$$\mathbf{U} = grad\varphi + rot\mathbf{\Phi} \qquad (2.28)$$

Для вектору масових сил $\vec{X}$ теж застосуємо представлення у вигляді потенціальної та соліноїдальної складових $\vec{\mathbf{X}} = gradf + rot\vec{\mathbf{F}}$ (2.29)

Підставимо представлення (2.28) та (2.29) у (2.22) отримаємо :

$$grad\left[\left(\frac{2G(m-1)}{(m-2)}\right)\Delta\varphi + f - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] + rot\left[G\Delta\vec{\mathbf{\Phi}} + \vec{\mathbf{F}} - \rho\frac{\partial^2\vec{\mathbf{\Phi}}}{\partial t^2}\right] = 0 \qquad (2.30)$$

В результаті маємо рівняння :

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{2G(m-1)}{(m-2)}\right)\Delta\varphi + f \qquad (2.31)$$

$$\rho\frac{\partial^2\vec{\Phi}}{\partial t^2} = G\Delta\vec{\Phi} + \vec{F} \qquad (2.32)$$

(2.31) та (2.32) скалярне та векторне хвильове рівняння.

Математична модель поздовжних коливань стриженя.

Нехай маємо пружній стрижень, який витягнутий вздовж вісі x і має довжину L. Відносно стрижня будемо припускати, що переміщення, деформації та напруження, які можуть виникати в стрижні направлені лише вздовж вісі x і не залежать від інших просторових координат.

Зрозуміло, що в цьому випадку для компонентів тензора напружень можна записати: $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0$, $\sigma_x = \sigma_x(x,t)$.

Будемо нехтувати також змінами поперечного перерізу при деформаціях вздовж вісі x. В цьому випадку закон Гука має вигляд: $\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$ (*).

Спрощений вигляд закону рівноваги елементу об'єму з (2.19') можна записати у вигляді $\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x(x,t) = \rho \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$.

Або враховуючи (2.21), будемо мати рівняння поздовжних коливань стрижня:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F_x(x,t),\ 0 < x < L,\ \ t > 0 \qquad (2.33).$$

В початковий момент часу необхідно задавати початкові змішення та початкові швидкості в напрямку вісі x.

$$U(x,0) = U_0(x),\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = U_1(x) \qquad (2.34).$$

Розглянемо можливі граничні умови на правому кінці стрижня:

а) На правому кінці заданий закон його руху (зміщення).

Виходячи з (2.25) можна записати $U(L,t) = \varphi_2(t)$ (2.35)

б) На правий кінець діє задана сила.

Виходячи з (2.26) і враховуючи, що $\vec{n} = (1,0,0)$, можна записати $\sigma_x(L,t) = \psi_2(t)$, або враховуючи (*) будемо мати

$$E\frac{\partial U(L,t)}{\partial x}=\psi_2(t) \qquad (2.36)$$

в) Правий кінець закріплений пружно.

Враховуючи (2.27) можемо записати $\sigma_x(L,t)+K_xU(L,t)=0$, або враховуючи закон Гука $E\frac{\partial U(L,t)}{\partial x}+K_xU(L,t)=0$ (2.37)

Математична модель поперечних коливання струни

[6,стор. 25 - 27]

Струною будемо називати абсолютно гнучку нитку, нескінченно малого поперечного перерізу, яка не протидії згинанню.

Нехай струна має довжину L і в положенні рівноваги співпадає з відрізком вісі x, лівий кінець співпадає з початком координат.

Будемо вважати, що струна рівномірно натягнута з силою $T_0=const$, і може здійснювати коливання лише в одній площині.

Будемо розглядати лише малі коливання, тобто такі, коли відхилення точок струни від положення рівноваги є величинами першого порядку малості, при цьому величинами більш високого порядку малості будемо нехтувати.

Припущення про абсолютну гнучкість струни означає, що при відхиленні точок струни від положення рівноваги сила натягу весь час направлена по дотичній до миттєвого профілю струни.

Введемо позначення:

ρ - лінійна щільність точок струни (*const*);

$u(x,t)$ - відхилення точок струни від положення рівноваги в точці (x,t);

$f(x,t)$ - інтенсивність зовнішніх сил.

Запишемо рівняння руху для елементарної частини струни $[x,x+\Delta x]$ в проекції на вісь u. Підрахуємо наскільки змінилася довжина частини струни, між перерізами $[x,x+\Delta x]$. Згідно до відомої формули математичного аналізу можемо

записати, що довжина дуги обчислюється

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx \qquad (2.38)$$

Таким чином зміною довжини дуги струни с точністю до членів другого порядку малості можна нехтувати.

Це в свою чергу означає, що за законом Гука сила натягу залишається постійною в кожному перерізі струни, тобто $T(x,t) = T_0$.

Виділимо сили, які діють на елементарну частину струни.

Проекція сили натягу в перерізі $x + \Delta x$ на вісь вздовж якої відбувається рух точок струни (вісь u) дорівнює $T_0 \sin\alpha(x + \Delta x, t)$, а в перерізі x дорівнює $-T_0 \sin\alpha(x,t)$. Де $\sin\alpha(x,t)$ синус кута між дотичною і додатнім напрямом вісі x. Для малих кутів $\sin\alpha = tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Таким чином рівнодіючу сил натягу можна записати у вигляді $T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t))$. (2.39)

Зовнішня сила яка діє на виділений елемент струни дорівнює $f(\xi,t)\Delta x$.

Згідно до другого закону Ньютона рівнодіюча зовнішніх сил повинна дорівнювати силі інерції $F = ma$.

Сила інерції елементарного відрізка струни має вигляд:

$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}$, середня точка $\xi \in (x, x + \Delta x)$.

Таким чином згідно до закону Ньютона можно записати рівняння руху:

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} = T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t)) + f(\xi,t)\Delta x.$$

Поділивши (2.40) на Δx і спрямувавши його до нуля отримаємо рівняння коливання струни

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\ 0<x<L,\ t>0 \qquad (2.40)$$

Додаткові умови для рівняння коливання струни полягають в необхідності задавати початкове відхилення точок струни і початкові швидкості точок струни:

$$u(x,0)=u_0(x)$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=v_0(x),\quad 0<x<L \qquad (2.41)$$

Окрім початкових умов необхідно задавати умови на кінцях струни. Найбільш поширеними умовами є:

a) Кінець струни рухаються за заданим законом;

b) На кінець струни діє задана сила;

c) Кінець струни закріплений пружно.

Запишемо відповідні граничні умови для випадку лівого кінця.

Якщо лівий кінець рухається за заданим законом, то

$$u(0,t)=\varphi_1(t) \qquad (2.42)$$

У випадку, коли на лівому кінці діє задана сила, то для отримання граничної умови можна записати рівняння руху для елементарного відрізку $[0,\Delta x]$ яке матиме вигляд:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}=T_0u_x(\Delta x,t)-\psi_1(t)+f(\xi,t)\Delta x,\ \xi\in(0,\Delta x)$$

Спрямувавши $\Delta x\to 0$ отримаємо граничну умову

$$u_x(0,t)=\frac{\psi_1(t)}{T_0} \qquad (2.43)$$

Для випадку пружного закріплення замість заданої сили $\psi_1(t)$ необхідно розглядати силу реакції пружини, яка пропорційна зміщенню і діє в напрямку протилежному зміщенню. Таким чином рівняння руху буде мати вигляд:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}=T_0u_x(\Delta x,t)+ku(0,t)+f(\xi,t)\Delta x,\ \xi\in(0,\Delta x)$$

Після граничного переходу отримаємо

$$u_x(0,t) + \frac{k}{T_0} u(0,t) = 0 \qquad (2.44),$$

k - коефіцієнт жорсткості пружини.

Лекція 10

§ 3. Математичні моделі руху ідеальної рідини.

[5, стор. 346 - 376]

Будемо розглядати ідеальну рідину, тобто таку рідину для якої можна нехтувати властивостями в'язкості і теплопровідності.

Введемо позначення :

$x = (x_1, x_2, x_3)$ - точка простору;

t - час (скалярна величина);

$\rho(x,t)$ – щільність ідеальної рідини (або газу);

$\vec{\mathbf{V}}(x,t)$ –швидкість в напрямку кожної з трьох вісей;

$p(x,t)$ – тиск

$\varepsilon(x,t)$ – питома внутрішня (теплова) енергія.

Вектор швидкості – віднесемо до динамічних величин, а щільність, тиск та питому внутрішню енергію до термодинамічних величин.

Для запису математичної моделі руху ідеальної рідини можна використовувати також інші термодинамічні величини, але будь яку третю термодинамічну величину можна записати як функцію двох інших. При цьому лише дві з них будуть незалежними.

Закон збереження маси

Візьмемо довільний уявний об'єм G і порахуємо кількість рідини, що міститься в ньому, якщо ρdG - кількість рідини в елементарному об'ємі , то в об'ємі G міститься маса рідини $\iiint\limits_G \rho(x,t)\,dG$ (3.1).

Зміна маси в об'ємі G за проміжок часу від t_1 до t_2 дорівнює

$$\iiint_G \rho(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2} dG \qquad (3.2)$$

Через поверхню *S* вільно циркулює рідина, підрахуємо кількість рідини, що втікає в об'єм G (потік векторного поля через поверхню). Вважаємо, що $\vec{\mathbf{n}}$ - напрям зовнішньої нормалі. Тоді кількість рідини, що проходить за час dt через елемент поверхні dS всередину тіла буде ($-\rho \mathbf{V}_n dSdt$), де $\mathbf{V}_n$ - нормальна складова вектора швидкості ($\mathbf{V}_n = (\mathbf{V}, \mathbf{n})$). Тоді кількість рідини, що втікає в об'єм G за проміжок часу від t_1 до t_2 через усю поверхню дорівнює

$$-\int_{t_1}^{t_1}\iint_S \rho(x,t)V_n(x,t)dSdt \qquad (3.3).$$

Закон збереження маси показує, що зміна маси в об'ємі G за час від t_1 до t_2 дорівнює кількості рідини, що втікає (витікає) через поверхню тіла за обраний інтервал часу і має вигляд:

$$\iiint_G \rho(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2} dG + \int_{t_1}^{t_1}\iint_S \rho(x,t)V_n(x,t)dSdt = 0 \qquad (3.4)$$

З формули Остроградського - Гауса для другого інтегралу:

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \frac{\partial \rho}{\partial t} dGdt + \int_{t_1}^{t_1}\iiint_G div(\rho(x,t)V_n(x,t))dGdt = 0 \qquad (3.4^{/})$$

Ця рівність виконується для будь-якого об'єму G і для будь-якого проміжку часу, таким чином ($3.4^{/}$) вірна тоді і лише тоді, коли рівний нулю відповідний підінтегральний вираз :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho(x,t)\vec{V}(x,t)\right) = 0 \qquad (3.5).$$

Рівняння (3.5) називається рівняння нерозривності і представляє собою диференціальну форму закону збереження маси.

Закон збереження імпульсу

Імпульс - векторна величина. Імпульс для елемента об'єму dG в напрямку

вісі x_i дорівнює $\rho V_i dG$, тоді в об'ємі G кількість руху (складова вектору імпульсу) обчислюється як: $\iiint\limits_G \rho(x,t)V_i(x,t)dG$. Зміна імпульсу за час від t_1 до t_2 має вигляд:

$$\iiint\limits_G \rho(x,t)V_i(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2} dG \qquad (3.6)$$

Імпульс в об'ємі G змінюється за рахунок імпульсу рідини, яка поступає через поверхню за час $dt\ dS$: $\quad -\rho(x,t)V_n(x,t)V_i(x,t)dSdt \quad$ (3.7),

За проміжок часу від t_1 до t_2 через всю поверхню :

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_S \rho(x,t)V_n(x,t)V_i(x,t)dSdt \qquad (3.7')$$

Імпульс змінюється також за рахунок поверхневої сила, яка діє на уявний об'єм з боку оточуючої рідини, в нашому випадку це є сила тиску, яка завжди діє ортогонально до поверхні тіла тому її напрям протилежний вектору нормалі: $d\overline{\mathbf{F}}(x,t) = -p(x,t)\cdot\overline{\mathbf{n}}(x,t)\cdot dS$. Зміна імпульсу за рахунок сили тиску через елементарну поверхню за елементарний проміжок часу в напрямку вісі x_i можна записати у вигляді: $-p(x,t)\vec{n}_i(x,t)dSdt$, де $\vec{n}_i$ - *i* – та складова вектора нормалі. Тоді повна зміна імпульсу в напрямку вісі x_i через поверхню S за час від t_1 до t_2 за рахунок сили тиску можна обчислити:

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_S p(x,t)\vec{n}_i(x,t)dSdt \qquad (3.8)$$

Отже, закон збереження імпульсу вказує, що зміна імпульсу всередині уявного об'єму відбувається за рахунок сили тиску і втікання рідини через поверхню тіла і має вигляд:

$$\iiint\limits_G \rho(x,t)V_i(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2} dG + \int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_S \Big(\rho(x,t)V_n(x,t)V_i(x,t) + p(x,t)\vec{n}_i(x,t)\Big)dSdt, \qquad (3.9).$$

(3.9) – інтегральна форма закону збереження імпульсу.

Перетворимо (3.9) за формулою Остроградського-Гауса :

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} dGdt + \int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \left[\operatorname{div}\left(\rho V V_i\right) + \operatorname{grad}_i\, p\right] dGdt = 0 \qquad (3.9^{/})$$

Оскільки ця рівність виконується для будь-якого об'єму G і для будь-якого проміжку часу, то нулю рівний і відповідний підінтегральний вираз :

$$\frac{\partial \rho(x,t)V(x,t)_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho(x,t)V(x,t)V_i(x,t)\right) + \operatorname{grad}_i\, p(x,t) = 0 \qquad i = 1,2,3 \qquad (3.10)$$

Закон збереження енергії

Кількість енергії в елементі об'єму dG можна обчислити як:

$\rho \frac{|V|^2}{2} dG + \rho\varepsilon\, dG = \rho\left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon\right) dG$, де $\rho \frac{|V|^2}{2} dG$ - кількість кінетичної, $\rho\varepsilon dG$ - кількість внутрішньої (теплової) енергії.

Її зміна за проміжок часу від t_1 до t_2 в довільному об'ємі G обчислюється за формулою: $\iiint_G \rho\left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} dG$ (3.11)

Кількість енергії, що потрапила в середину об'єму G через елементарну поверхню dS за час dt: $-\rho V_n\left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \varepsilon\right) dSdt$, і відповідно за проміжок часу від t_1 до t_2, через усю поверхню S: $-\int_{t_1}^{t_2}\iint_S \rho V_n\left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \varepsilon\right) dSdt$ (3.12)

Енергія в об'ємі G змінюється також за рахунок роботи сил тиску. Величина цієї роботи за елементарний відрізок часу dt обчислюється за відомою формулою фізики : $d\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{V}})dt$, де $\vec{\mathbf{F}}$ - вектор сили, а $\vec{\mathbf{V}}$ - вектор швидкості руху. У випадку сили тиску будемо мати: $-(pdS\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{V}})dt$. Робота сил тиску через поверхню S за час від t_1 до t_2 обчислюється за формулою

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_S pV_n dSdt \qquad (3.13)$$

Отже, інтегральний закон збереження повної енергії вказує на те, що зміна повної енергії в довільному об'ємі відбувається за рахунок її проникнення з масою рідини через поверхню тіла та за рахунок роботи сил тиску і має вигляд:

$$\iiint_G \rho(x,t)\left(\frac{|V(x,t)|^2}{2}+\varepsilon(x,t)\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} dG +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S\left[\rho(x,t)V_n(x,t)\left(\frac{|V(x,t)|^2}{2}+\varepsilon(x,t)\right)+p(x,t)V_n(x,t)\right]dSdt=0$$

(3.14).

Застосування теореми Остроградського – Гауса до поверхневого інтегралу (3.14) приводить до інтегральної рівності:

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \rho\left(\frac{|V|^2}{2}+\varepsilon\right)dGdt+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G \operatorname{div}\left(\rho\left(\varepsilon+\frac{|V|^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\right)dGdt=0 \qquad (3.15),$$

з якої можна отримати диференціальне рівняння:

$$\rho(x,t)\left(\frac{|V(x,t)|^2}{2}+\varepsilon(x,t)\right)+\operatorname{div}\left(\rho(x,t)\left(\varepsilon(x,t)+\frac{|V(x,t)|^2}{2}+\frac{p(x,t)}{\rho(x,t)}\right)\right)=0 \qquad (3.16).$$

Рівняння (3.16) є диференціальною формою запису закону збереження повної енергії.

Сукупність рівнянь (3.5), (3.10), (3.16) будемо розглядати як систему з 5 рівнянь із 6-ма невідомими функціями. Ця система описує загальні закономірності руху ідеальної рідини. Для замикання системи диференціальних рівнянь її треба доповнити рівнянням стану, яке враховує індивідуальні властивості середовища і зв'язує між собою три термодинамічні параметри наприклад це рівняння може мати вигляд:

$$\varepsilon=\varepsilon\left(p,\rho\right) \qquad (3.17).$$

Конкретний вигляд цієї функції залежить від індивідуальних властивостей ідеальної рідини.

Інші термодинамічні функції та закон збереження ентропії

Серед інших термодинамічних функцій найбільш важливими є ентропія S, абсолютна температура T, та повний тепловміст (ентальпія) W. Згідно другого закону термодинаміки зміна ентропії в елементарному об'ємі при ізотермічному процесі дається диференціальним співвідношенням:

$$dS = \frac{1}{T}(d\varepsilon + pd\frac{1}{\rho}) \qquad (3.18),$$

а зміна ентальпії співвідношенням:

$$dW = d\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) \qquad (3.18'),$$ або

з врахуванням (3.18) $dW = TdS + \frac{1}{\rho}dp$ (3.18'').

Для певних режимів руху рідини (малі швидкості, відсутність великих градієнтів параметрів) з системи рівнянь (3.5), (3.10), (3.16) з використанням (3.18) можна отримати ще один закон збереження для ідеальної рідини, який називається закон збереження ентропії

$$\frac{\partial\rho(x,t)S(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(x,t)V(x,t)S(x,t)) = 0$$

(3.19)

Рівняння (3.19) в цьому випадку можна використовувати замість закону збереження енергії (3.16), а рівняння стану доцільно розглядати у вигляді

$$S = S(p,\rho) \qquad (3.20)$$

Додаткові умови математичної моделі руху ідеальної рідини

Як правило систему рівнянь руху ідеальної рідини (3.5), (3.10), (3.16), (3.17) розглядають в області G, яка обмежена деякою поверхнею S та на деякому

проміжку часу $t > t_0$. Для виділення єдиного розв'язку системи рівнянь необхідно задати додаткові умови.

Початкові умови задають значення усіх невідомих параметрів в початковий момент часу, нехай $t_0 = 0$.

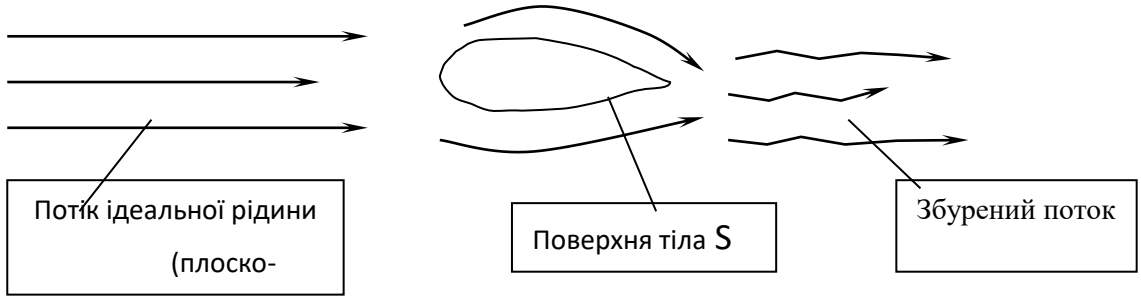
$\rho(x,0) = \rho_0(x)$ - початкова щільність

$\vec{V}(x,0) = V_0(x)$ - початкова вектор-функція швидкості

$p(x,0) = p_0(x)$ - початкова функція тиску (3.21)

На границі області S необхідно задавати граничні умови, вигляд яких залежить від фізичного змісту задачі.

Задача обтікання тіл



Через поверхню тіла потік не протікає це означає, що нормальна складова вектора швидкості дорівнює нормальній складовій вектору швидкості поверхні тіла U_n. $V_n\big|_S = U_n(x,t)$ (3.22).

Якщо тіло нерухоме, а потік набігає на тіло, то умова непротікання приймає вигляд $V_n\big|_S = 0$ (3.23)

Задача про поршень

Поршень – непрониклива для рідини поверхня, яка рухається в просторі, і при цьому може змінювати свою форму. Задача про поршень узагальнює задачу обтікання тіла. Рівняння поверхні поршня запишемо у вигляді:

$h(x,t) = 0$ (3.24).

На поверхні поршня повинна виконуватись умова непротікання (3.22).

Запишемо її з використанням рівняння поверхні поршня (3.24).

Знайдемо складові вектора швидкості поверхні:

$$dh = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial h}{\partial t} dt = 0 \qquad U_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{h'_t}{h'_{x_i}}$$

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} h}{\|\operatorname{grad} h\|} = \frac{1}{\|\operatorname{grad} h\|}\left(h_{x_1}, h_{x_2}, h_{x_3}\right) \qquad U_n = -\frac{h'_t}{\|\operatorname{grad} h\|}$$

$$V_n = (V, \vec{n}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{V_i h_{x_i}}{\|\operatorname{grad} h\|} \qquad -\frac{h'_t}{\|\operatorname{grad} h\|} = \sum_{i=1}^{3} \frac{V_i h_{x_i}}{\|\operatorname{grad} h\|}$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i} V_i = 0\right|_{x \in S} \qquad (3.25)$$

(3.25) - гранична умова на поверхні поршня.

Задача про вільну поверхню

Вільна поверхня – поверхня, яка розділяє дві ідеальні рідини, і форма цієї поверхні знаходиться в процесі розв’язку задачі, нехай $h(x,t)$ - невідома функція, яка описує форму поверхні.

Оскільки через вільну поверхню рідина не протікає то на цій поверхні виконується умова (3.25) з невідомою функцією $h(x,t)$.

$$\left.\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i} V_i = 0\right|_{x \in S} \qquad (3.26).$$

(3.26) - додаткове рівняння для знаходження функції h.

Для знаходження додаткової невідомої функції h на поверхні розділу середовищ задається розподіл тиску:

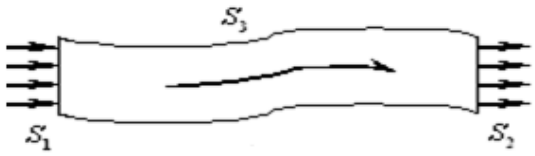
$$p\big|_S = P_a(x,t) \qquad (3.27).$$

Для випадку поршня і для випадку вільної поверхні початковий стан поверхні задається у вигляді:

$$h(x,0) = h_0(x) \qquad (3.28)$$

Задача руху рідини в каналах

Канал – просторова область, яку можна утворити якщо переміщувати вздовж деякого незамкненого контуру в просторі нанизаний на нього замкнений контур змінної форми. В результаті утвориться область обмежена непроникливою для рідини поверхнею S_3, і проникливими для рідини поверхнями S_1, S_2 через які рідина може втікати або витікати



Як правило канали використовують для перетворення потоків.

Постановка граничних умов для течій в каналах має специфіку, яка визначається властивостями рівнянь руху ідеальної рідини (газової динаміки). Граничні умови на непроникливій поверхні S_3 є класичні умови непротікання. Вигляд граничних умов на поверхнях S_1 та S_2 залежить від швидкістю рідина на цих границях, а також від того втікає або витікає рідина з каналу.

Рухи рідини можна розділити на два режими:

$\frac{V_n}{c}$ >1 – надзвуковий режим руху (швидкий рух);

$\frac{V_n}{c}$ <1 – дозвуковий режим руху (повільний рух).

Де c - термодинамічна скалярна величина, яка характеризує швидкість розповсюдження малих збурень (акустичних коливань) в рідині. Для визначення швидкості звуку використовується співвідношення $c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{S=const} > 0$ (3.29).

При цьому рівняння стану зручно вибирати у вигляді (3.20).

а) Розглянемо дозвукове втікання на поверхні S_1: $\frac{V_n}{c}$ <1

В цьому випадку необхідно задавати одну динамічну умову, наприклад потік маси через поверхню $\rho V_n = K(p - p_a)\big|_{x \in S_1}$ (3.30)

p - тиск на поверхні S_1 , p_a - атмосферний тиск, ρV_n – потік маси.

Оскільки рідина втікає, то $p_a > p$.

Друга гранична умова при дозвуковому втіканні потребує завдання однієї термодинамічної функції, наприклад ентропії : $S\big|_{x \in S_1} = S_в$ (3.31)

або питомої внутрішньої енергії $\varepsilon\big|_{x \in S_1} = \varepsilon_в$ (3.31')

б) Розглянемо дозвукове витікання на поверхні S_2: $\frac{V_n}{c}$<1. В цьому випадку достатньо задати лише одну граничну умову:

$$\rho V_n = K\left(p - p_a\right)\Big|_{x \in S_2} \quad (3.32)$$

Оскільки рідина витікає, то $p > p_a$.

в) Розглянемо надзвукове втікання на поверхні S_1: $\frac{V_n}{c} > 1$

При надзвуковому втіканні рідини на границі S_1 необхідно задавати усі п'ять функцій:

$$\vec{V}\big|_{x \in S_1} = \vec{V}_в, \quad \rho\big|_{x \in S_1} = \rho_в, \quad p\big|_{x \in S_1} = p_в \quad (3.33)$$

г) Розглянемо надзвукове витікання через поверхню S_2: $\frac{V_n}{c} > 1$

В цьому випадку ніяких граничних умов на відповідній границі ставити не треба, рідина, яка витікає через S_2 ніяк не впливає на внутрішню течію в каналі.

Лекція 11

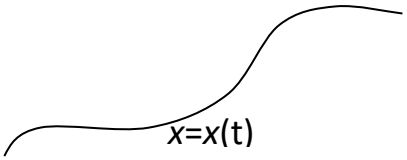
Ізоентропічні течії (течії з постійною ентропією)

Отримаємо спрощену математичну модель руху ідеальної рідини в припущені, що ентропія ідеальної рідини є величиною постійною в будь – який момент часу і в довільній точці області.

Виходячи з закону збереження ентропії (3.19), за відомою формулою $\operatorname{div}\left(f\vec{A}\right)=\left(\vec{A},\operatorname{grad} f\right)+f\operatorname{div}\vec{A}$ отримаємо:

$\rho\dfrac{\partial S}{\partial t}+S\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(V,\operatorname{grad} S\right)+S\operatorname{div}\rho V=0$ або враховуючи рівняння нерозривності маємо не дивергентну форму закону збереження ентропії:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left(V,\operatorname{grad} S\right)=0 \qquad (3.34)$$



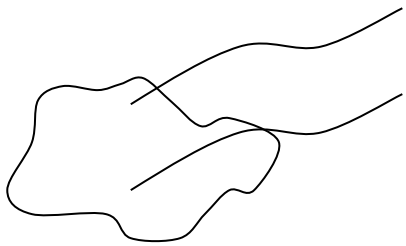
Знайдемо повну похідну деякого параметра f вздовж траєкторії руху $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ частинки рідини, тобто похідну по часу t вздовж контуру $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$.

$$\frac{df\left(\mathbf{x}(t),t\right)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\left(V,\operatorname{grad} f\right) \qquad (3.35).$$

(3.35) будемо називати похідною по часу вздовж траєкторії руху частинки.

З формули (3.34) бачимо, що повна зміна ентропії вздовж траєкторії руху частинки дорівнює нулю, тобто $\dfrac{dS}{dt}=0$ (3.36).

Припустимо що в початковий момент часу $t=0$ ідеальна рідина займає деяку область $\Omega(0)$, а ентропія $S(x,0)=S_0=const$ для $\forall x\in\Omega(0)$.



Тоді згідно (3.36) в будь-який момент часу $t > 0$ ентропія буде залишатися постійною в довільній точці області, яка утворилася при переміщенні усіх її частинок вздовж траєкторій руху частинок, тобто області $\Omega(t)$. Таким чином можливе існування течій з постійним значення ентропії. Використовуючи введену термодинамічну функцію ентальпію, за формулою (3.18$^{//}$) $dW = TdS + \frac{1}{\rho}dp$, при постійному значенні ентропії $S = const$ отримаємо співвідношення

$$dW = \frac{1}{\rho}dp \qquad (3.37)$$

Перетворимо (3.10) з використанням (3.5), продиференціюємо відповідні добутки та отримаємо :

$V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \operatorname{div}(\rho V) + \rho(V, \operatorname{grad} V_i) + \operatorname{grad}_i p = 0$, після скорочення отримаємо закон збереження імпульсу в не дивергентній формі:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + (V, \operatorname{grad} V_i) + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}_i p = 0 \qquad (3.10^{/})$$

Векторна форма якого для ізоентропічних течій має вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \mathbf{grad}\mathbf{V}) + \mathbf{grad}W = 0 \text{ або } \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{grad}W = 0 \qquad (3.10^{//})$$

Скористаємось відомою формулою векторного аналізу

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}|\mathbf{V}|^2 = [\mathbf{V} \times \mathbf{rotV}] + (\mathbf{V}, \mathbf{gradV}) \qquad (3.38),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}=\vec{i}_1\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)-\vec{i}_2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)+\vec{i}_3\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right).$$

Застосовуючи (3.38) до (3.10$^{//}$) отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\operatorname{grad}|V|^2-\left[V\times\operatorname{rot}V\right]+\operatorname{grad}W=0 \qquad (3.39)$$

Подіємо на (3.39) оператором $\mathbf{rot}$, і врахуємо, що для будь – якої скалярної функції f $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=0$, в результаті отримаємо систему рівнянь відносно вектору швидкості: $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}V$ - $\operatorname{rot}\left[V\times\operatorname{rot}V\right]=0$ (3.40).

(3.40) - система рівнянь руху ідеальної рідини для ізоентропічного випадку.

Потенціальні течії.

Потенційні течії є частинним випадком ізоентропічних течій. Покажемо можливість існування потенційних течій.

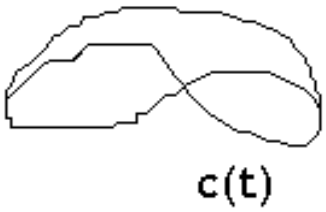
Розглянемо інтеграл $\Gamma(t)=\oint\limits_{c(t)}\vec{V}(t)\cdot d\vec{l}$ (3.41)

$\Gamma(t)$ називається циркуляцією вектора швидкості вздовж контуру $c(t)$ (під знаком інтегралу записано скалярний добуток векторів швидкості $\vec{V}(t)$ та вектору нескінченно малого зміщення вздовж контуру $d\vec{l}$); $c(t)$ – контур, утворений частинами ідеальної рідини, що рухаються вздовж своїх траєкторій.

<u>Теорема 1</u> (*Томсона, про збереження циркуляції векторного поля швидкості*) Для ізоентропічних течій ($S=const$) $\frac{d\Gamma}{dt}=0$, тобто циркуляція векторного поля вздовж рухомого рідкого контуру є величина постійна.

Доведення: $\frac{d\Gamma}{dt}=\oint\limits_{c(t)}\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{d}l+\vec{V}\cdot d\frac{\vec{dl}}{dt}\right)=*$ з рівняння (3.10$^{//}$) маємо

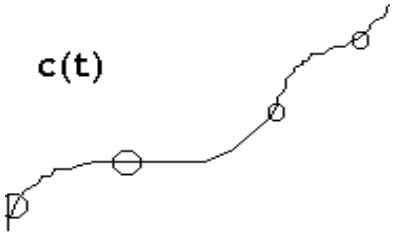
$$* = \oint_{c(t)} \left[-\operatorname{grad} W \cdot dl + \mathbf{V} \cdot \mathbf{dV} \right] = \oint_{c(t)} d\left(-W + \frac{|V|^2}{2} \right) = 0.$$

Використаємо теорему Стокса 

для будь-якої поверхні σ, що спирається на контур $c(t)$.

$$\Gamma(t) = \oint_{c(t)} \vec{V}(t) \cdot d\vec{l} = \iint_{\sigma(t)} \left(rotV \right)_n d\sigma = const.$$

Розглянемо деяку траєкторію руху однієї частинки ідеальної рідини і нескінченно малий контур, який нанизаний на траєкторію руху.



Припускаючи, що при $t = 0$. $rotV = 0$, а таким чином $(rotV)_n = 0$, то згідно теореми Томсона $(rotV)_n = 0$, для $t > 0$.

Якщо розглянути область Ω для якої циркуляція відсутня при $t = 0$ тобто $rotV = 0$ то вздовж будь-якої траєкторії яка починається в області Ω в будь-який момент часу поле залишається безвихровим, тобто $rotV = 0$.

Це свідчить про існування безвихрових або потенційних течій.

Отже потенціальною називається течія, для якої $\forall t \geq t_0, x \in \Omega \ \operatorname{rot} V = 0$.

Звідси випливає, що існує потенціал векторного поля швидкості φ, градієнт якого рівний V, тобто $\operatorname{grad} \varphi = \vec{\mathbf{V}}$. Використовуючи формулу (3.39), де W – тепловміст, закон збереження імпульсу буде мати вигляд:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{|V^2|}{2} + W \right) = 0 \qquad (3.39^{/})$$

Закон збереження маси запишемо в не дивергентному вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}(V) + (V, \mathrm{grad}\ \rho) = 0 \qquad (3.5^{/})$$

Проінтегруємо друге рівняння, та врахуємо, що $V = \mathrm{grad}\,\varphi$, будемо мати: $\mathrm{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V^2|}{2} + W \right) = 0$.

Звідси $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V^2|}{2} + W = \Psi(t)$ де Ψ - довільна функція змінної часу. Враховуючи, що потенціал вектору швидкості визначається з точністю до адитивної функції часу, покладемо $\Psi(t) \equiv 0$. Отже,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V^2|}{2} + W = 0 \qquad (3.42)$$

Рівняння (3.42) має назву **інтеграл Коші-Лагранжа** .

Для стаціонарних течій, що не залежать від часу, цей інтеграл називається **інтегралом Бернуллі** і має вигляд: $\frac{|V|^2}{2} + W = const$ $(3.42^{/})$.

З (3.37) випливає, що $dW = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho = \frac{1}{\rho}c^2 d\rho$, $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$

звідки $c^2 \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dW}{dt}$ (3.43),

Враховуючи $(3.5^{/})$ отримаємо: $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \Delta\varphi = 0$ $(3.5^{//})$.

Система рівнянь (3.42) та $(3.5^{//})$ є системою двох нелінійних рівнянь з двома змінними і описує потенціальний рух ідеальної рідини.

З (3.42) та $(3.5^{//})$ маємо $\frac{1}{c^2}\frac{dW}{dt} + \Delta\varphi = 0$ $(3.43^{/})$;

Диференціюючи (3.42) по t, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{|V^2|}{2}\right)+\frac{dW}{dt}=0$ з урахуванням (3.43/)

отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2}\right)-c^2\Delta\varphi=0 \qquad (3.44)$$

Рівняння (3.44) використовується для дослідження потенціальних течій. Розкриємо це рівняння у тривимірному випадку:

$$\varphi_{tt}+2\sum_{i=1}^{3}V_i\varphi_{x_it}+\sum_{i,k=1}^{3}V_{x_i}V_{x_k}\varphi_{x_ix_k}=c^2\sum_{i=1}^{3}\varphi_{x_i}\varphi_{x_i}$$

(3.44/)

Для стаціонарних течій у три та дво вимірному випадках маємо:

$$\begin{aligned}&\left(c^2-\varphi_x\right)\varphi_{xx}+\left(c^2-\varphi_y\right)\varphi_{yy}+\left(c^2-\varphi_z\right)\varphi_{zz}-\\&-2(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_z\varphi_y\varphi_{zy}+\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz})=0\end{aligned} \qquad (3.45)$$

$$\left(c^2-\varphi_x\right)\varphi_{xx}+\left(c^2-\varphi_y\right)\varphi_{yy}+2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}=0 \qquad (3.45/)$$

Швидкості звуку у (3.45) можна обчислити виходячи з формули Бернулі (3.42/) $W+\frac{|V|^2}{2}=W_0+\frac{|V_0|^2}{2}$. Зокрема для широкого спектру ідеальних газів з рівнянням стану $\varepsilon=\frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ можна отримати $c^2=c_0^2+\frac{\gamma-1}{2}|V_0|^2-\frac{\gamma-1}{2}|V|^2$.

Модель акустичного руху рідини

Акустичними рухами ідеальної рідини будемо називати такі її рухи для яких фізичні характеристики рідини мало відрізняються від деяких постійних значень.

Розглянемо систему рівнянь для ізоентропічного руху ідеальної рідини

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}(V)+(V,\operatorname{grad}\rho)=0$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \left(V, \mathrm{grad} V_i\right) + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}_i\, p = 0 \qquad (3.46)$$

$$S(p,\rho) = S(p_0,\rho_0)$$

Відносно параметрів руху будемо припускати, що $p = p_0 + \tilde{p}$, $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$, $V = V_0 + \tilde{V}$. $p_0 = const,\ \rho_0 = const,\ V_0 = const = 0$ (3.47)

$$\tilde{\rho} << \rho_0,\ \tilde{p} << p_0, \tilde{V} << 1$$

Проведемо лінеаризацію системи рівнянь (3.46) зберігаючи лише величини першого порядку малості.

Для першого рівняння системи (3.46) отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \tilde{\rho}) + (\rho_0 + \tilde{\rho}) div\tilde{V} + (\tilde{V}, grad(\rho_0 + \tilde{\rho})) = 0$$

Зберігаючи члени першого порядку малості отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 div\tilde{V} = 0 \qquad (3.48)$$

Для другого рівняння системи маємо

$$(\rho_0 + \tilde{\rho})(\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \left(\tilde{V}, \mathrm{grad}\tilde{V}_i\right)) + \mathrm{grad}_i(p_0 + \tilde{p}) = 0$$

Розкриваючи дужки та нехтуючи членами другого порядку малості отримаємо $\rho_0 \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \mathrm{grad}_i\, \tilde{p} = 0$ (3.49)

Для лінеаризації третього співвідношення системи, ліву частину співвідношення розкладемо за формулою Тейлора зберігаючи лише члени першого порядку малості

$$S((p_0 + \tilde{p}),(\rho_0 + \tilde{\rho})) = S(p_0,\rho_0) + \frac{\partial S(p_0,\rho_0)}{\partial p}\tilde{p} + \frac{\partial S(p_0,\rho_0)}{\partial \rho}\tilde{\rho} = S(p_0,\rho_0).$$

Таким чином можна записати: $\tilde{p} = \frac{S'_\rho(p_0,\rho_0)}{S'_p(p_0,\rho_0)}\tilde{\rho}$ або

$$\tilde{p} = c_0{}^2\tilde{\rho} \qquad (3.50)$$

Таким чином маємо систему рівнянь акустики (звукових коливань) (3.48), (3.49), (3.50).

З системи рівнянь (3.48), (3.49), (3.50) можна отримати одне рівняння для тиску, або щільності.

Для цього рівняння (3.48) продиференціюємо по часу, а на векторне рівняння (3.49) подіємо операцією дивергенція, в результаті будемо мати:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho_0 div \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = 0$$

$$\rho_0 div(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}) + div(\mathrm{grad}\, \tilde{p}) = 0$$

Віднімаючи від першого рівняння друге і використовуючи (3.50) отримаємо хвильове рівняння: $\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \tilde{\rho}$ (3.49).

Враховуючи потенціальний характер акустичних рухів, вектор швидкості $\tilde{V}$ можна представити у вигляді градієнту потенціалу і отримати хвильове рівняння відносно потенціалу вектора швидкості.

Потенційне обтікання тонких тіл

Розглянемо тонке нерухоме тіло розташоване під малим кутом до плоско паралельного потоку газу, який набігає на це тіло. При певних умовах взаємодії, потік газу навколо тіла можна вважати потенційним, а швидкість газу в околі тіла буде мало відрізняється від вектора швидкості $\vec{V}_0$ потоку, що набігає з нескінченості. Таким чином вектор швидкості збуреного потоку V можна представити як суму $V = V_0 + \tilde{V}$. Де $\frac{|\tilde{V}|}{|V_0|} << 1$, тобто збурення внесені тонким тілом є малі по відношенню до набігаючого потоку.

Виберемо систему координат таким чином, щоби координатна вісь $\boldsymbol{x}$ співпадала з напрямом вектора швидкості потоку, що набігає, тобто $V_0 = (V_0^x, 0, 0)$.

Замість потенціалу φ повної швидкості V введемо потенціал $\tilde{\varphi}$ швидкості $\tilde{V}$, тобто $\tilde{V} = grad\,\tilde{\varphi}$. Зрозуміло, що $\varphi = \tilde{\varphi} + xV_0^x$. (3.52)

Візьмемо за основу нелінійне рівняння (3.45) і підставимо в нього (3.52), проведемо лінеаризацію рівняння, зберігаючи величини лише першого порядку малості.

В результаті отримаємо співвідношення.

$$(1-M_0^2)\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial z^2}=0,\ (x,y,z)\in\Omega' \qquad (3.53)$$

Де $M_0 = \dfrac{V_0^x}{c_0}$ - число Маха потоку що набігає.

Рівняння (3.53) має певну область застосування, зокрема рівняння становиться неприйнятним якщо число M_0 близьке до одиниці (біля звукова течія). В цьому випадку коефіцієнт при першому члені є малим, що вимагає збереження членів більш високого порядку малості. На поверхні тіла задається умова непротікання, яку з використанням процесу лінеаризації можна записати у вигляді:

$$(V_0^x+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x})n_x+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}n_y+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}n_z=0,\ \text{або}\ \left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right|_S=-V_0^x n_x \qquad (3.54)$$

В нескінченно віддаленій точці збурений потік співпадає з потоком, що набігає, тому має місце співвідношення:

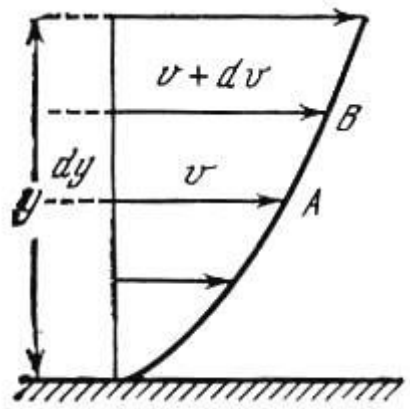
$$\varphi \underset{x,y,z\to\infty}{\to} 0 \qquad (3.55)$$

Лекція 12

§ 4. Моделі руху в'язкої рідини

[5, стор. 437 - 445]

В'язкість рідини - це властивість чинити опір пересуванню її часток, яка характеризує ступінь її плинності та рухливості. Як видно з визначення, в'язкість є властивістю рідини, що рухається, і в стані спокою не виявляється. Наявність сил внутрішнього тертя рідини, що рухається, уперше встановив Ньютон, згодом російський вчений В. Н. Петров у 1888 р. привів математичний вираз для сили тертя.



Нехай шар рідини А рухається зі швидкістю v, *а* шар рідини *В* зі швидкістю $v + dv$, відстань між шарами dy. У введених позначеннях сила тертя *T* між двома шарами рідини задається формулою

$$T = -\mu F \frac{dv}{dy} \qquad (4.1)$$

Де μ - динамічний коефіцієнт в'язкості, F – площа стикання двох шарів рідини. Знак мінус вказує на те , що тертя діє в напряму протилежному рухові.

Закони, що описують процеси руху в'язкої рідини, залишаються тими що і для ідеальної рідини, але при цьому з'являється додатковий механізм передачі імпульсу та енергії.

Закон збереження маси у вигляді рівняння нерозривності залишається незмінним: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) = 0$ (4.2)

Закон збереження імпульсу

Нагадаємо вигляд потоку імпульсу для ідеальної рідини, що проходить через елементарну поверхню dS в одиницю часу:

$$d\mathbf{I} = \left(\rho \mathbf{V_n} \vec{\mathbf{V}} + p\vec{\mathbf{n}}\right) dS \qquad (4.3)$$

Якщо ввести тензорну величину щільності потоку імпульсу:

$$\Pi = \rho \begin{pmatrix} V_1V_1 & V_1V_2 & V_1V_3 \\ V_2V_1 & V_2V_2 & V_2V_3 \\ V_3V_1 & V_3V_2 & V_3V_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p \qquad (4.4),$$

то (4.2) можна записати у вигляді:

$$d\mathbf{I} = (\Pi, \vec{\mathbf{n}}) dS \qquad (4.3^{/}).$$

Закон збереження імпульсу ідеальної рідини з використанням тензору щільності потоку імпульсу Π матиме вигляд:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\Pi = 0 \qquad (4.5).$$

Для в'язкої рідини, у випадку тривимірних рухів додатковий механізм переносу потоку імпульсу має тензорну природу і задається через симетричний тензор в'язких напружень, компоненти якого визначаються:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial V_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial V_l}{\partial x_l}, \qquad (4.6).$$

Де $\xi, \eta > 0$ - коефіцієнти першої та другої в'язкості, δ_{ik} – символ Кронекера, а $\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial V_l}{\partial x_l} = \mathrm{div} V$.

Зауважимо, що рідина ідеальна, коли $\xi, \eta = 0$.

Таким чином для в'язкої рідини симетричний тензор щільності потоку імпульсу приймає вигляд:

$$\Pi_{ik} = \rho V_i V_k + p\delta_{ik} - \sigma_{ik} \qquad (4.7).$$

Використовуючи загальний вигляд тензору потоку імпульсу для в'язкої

рідини, закон збереження імпульсу також можна записати у вигляді (4.4), або в розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho VV\right) + \operatorname{grad} P = \eta \Delta V + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\left(\operatorname{div} V\right) \qquad (4.8)$$

Закон збереження імпульсу для в'язкої рідини у випадку нестисливої рідини, тобто $\rho \equiv const$. Має простіший вигляд.

Рівняння нерозривності (4.2) приймає вигляд $\operatorname{div} V = 0$ (4.2/)

Отже, поле швидкості є соліноїдальним, тобто $\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho VV\right) = \eta \Delta V$ або

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}(VV) = \frac{\eta}{\rho}\Delta V \qquad (4.7/),$$

Закон збереження енергії

Запишемо потік енергії для ідеальної рідини:

$$d\boldsymbol{E} = \left(\rho \mathbf{V}\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \rho\varepsilon\mathbf{V} + p\mathbf{V}\right)\vec{n}dS \qquad (4.9)$$

Або $d\boldsymbol{E} = \rho V_n\left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)dS$ (4.9/).

Замість скалярної величини тиску p для ідеальної рідини введемо тензор напружень для в'язкої рідини $\dot{\boldsymbol{P}}_{ik} = p\delta_{ik} - \sigma_{ik}$ (4.9)

Тоді матимемо $d\boldsymbol{E} = \rho\left(\left(\left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} + \varepsilon\right)I + \dot{\boldsymbol{P}}\right)\vec{\mathbf{V}}, \vec{\mathbf{n}}\right)dS$ (4.10).

I - одинична матриця. Інтегральний закон збереження повної енергії можна записати у вигляді:

$$\iiint_G \rho\left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} dG + \int_{t_1}^{t_2}\iint_S \left[\left(\rho\left(\frac{|V|^2}{2} + \varepsilon\right)I + \dot{\boldsymbol{P}}\right)V, n\right]dSdt = 0 \qquad (4.11)$$

Звідси, закон збереження повної енергії для в'язкої рідини:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{|V|^2}{2}+\varepsilon\right)\right]+\operatorname{div}\left[\left(\rho\left(\frac{|V|^2}{2}+\varepsilon\right)I+\dot{\boldsymbol{P}}\right)\vec{\mathbf{V}}\right]=0 \qquad (4.12)$$

Якщо рідина не тільки в'язка, а й теплопровідна, то з'являється ще один механізм передачі енергії – теплопровідність, тоді другий доданок (4.12) матиме вигляд:

$$\operatorname{div}\left[\left(\rho\left(\frac{|V|^2}{2}+\varepsilon\right)I+\dot{\boldsymbol{P}}\right)V+Q\right]$$

(4.13),

де Q – потік тепла, $\vec{\mathbf{Q}}=\text{-}k\operatorname{grad}\varepsilon$ (4.14),

k – коефіцієнт теплопровідності.

Отже, система рівнянь, яка описує рух в'язкої рідини складається з рівнянь (4.2), (4.8), (4.12), та замикається рівнянням стану $\varepsilon=\varepsilon(p,\rho)$ (4.15)

При переході від моделі ідеальної до моделі в'язкої рідини збільшується порядок рівнянь з першого на другий.

Додаткові умови

Початкові умови: $p,\rho,\varepsilon,V|_{t=0}=p_0,\rho_0,\varepsilon_0,V_0$ (4.16)

В початковий момент часу задаються усі невідомі параметри.

Граничні умови на поверхні тіла

Якщо нерухоме тіло обтікається в'язкою рідиною, то за рахунок молекулярних сил, в'язка рідина прилипає до поверхні тіла, тобто виконується умова: $V|_S=0$ (4.17).

Якщо поверхня тіла рухається зі швидкістю $\vec{U_s}(x,t)$ та на його поверхні для в'язкої рідини виконується умова

$\vec{V}|_{x\in S}=\vec{U}_s(x,t)$ (4.17$^{/}$).

Умови (4.17), (4.17$^{/}$) називаються умовами приліпання.

Умови на поверхні розділу двох середовищ.

У випадку, коли два середовища розділені рухомою поверхнею, (дві рідини, що не змішуються) то на межі розділу двох середовищ, мають бути задані дві умови:

динамічна: $\vec{V}_1\Big|_S = \overrightarrow{V_2}\Big|_S = V_p$ (4.18)

статична: $\dot{P}_1 n_1 + \dot{P}_2 \overrightarrow{n_2} = 0,$ або $\dot{P}_1 \vec{n}_1 = \dot{P}_2 \vec{n}_1,$ (4.19)

Співвідношення (4.18) вказує на те, що вектор швидкості на поверхні розділу двох середовищ є неперервним, а сама поверхня рухається з місцевою швидкістю середовища V_p. Співвідношення (4.19) вказує на те, що рівнодіюча сил на поверхні розділу середовищ дорівнює нулю), $\mathbf{n_j}$, $j = 1, 2$ - вектори зовнішньої нормалі, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$

Граничні умови на вільній поверхні.

Вільною поверхнею будемо називати поверхню утворену частинками в'язкої рідини на яку діє деяка зовнішня сила. Нехай $h(x,t)$ - рівняння вільної поверхні, де h- невідома функція, тоді співвідношення

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left(gradh, \vec{V}\right) = 0\Big|_{x \in S} \qquad (4.20)$$

виражає умову непротікання рідини через поверхню (через вільну поверхню рідина не перетікає), а також вказує на те, що сама вільна поверхня переміщується з місцевою швидкістю руху рідини.

На вільну поверхню також діє зовнішня сила, яка задається тензорним співвідношенням: $\overset{\square}{P}\vec{\mathbf{n}}\Big|_S = \vec{F}(x,t)$ (4.21).

Скалярна форма (4.21) має вигляд:

$$\sum_{k=1}^{3} p\delta_{ik} n_k - \sigma_{ik} n_k \Big|_{x \in S} = F_i(x,t), \quad i = 1, 2, 3 \qquad (4.21^{/})$$

де F_i – компоненти вектора зовнішніх сил, що діють на поверхні S;

§5 Математичні моделі електростатики

[7, стор. 9 - 61], [5, стор. 700 - 710]

З курсу фізики відомо, що при певних умовах окремі тіла (діелектрики) можуть отримувати додаткові електричні заряди (відбувається електризація). Наявність електричних зарядів проявляється у взаємодії заряджених тіл між собою (тіла притягуються або відштовхуються).

Відомо, що існують два види електричних заряді, які умовно поділяються на додатні та від'ємні. Будь – який електричний заряд утворюється як сукупність елементарних неподільних за величиною зарядів. Носієм такого елементарного від'ємного заряду є електрон, носієм елементарного позитивного заряду може бути протон. Величину елементарного заряду традиційно позначають $\mathbf{e}$.

Будь – який електричний заряд утворюється як сукупність елементарних зарядів $q = \pm N\mathbf{e}$.

Якщо заряджені частинки в тілі можуть більш менш вільно пересуватися в межах тіла, то кажуть, що тіло здатне проводити електричний струм. Носіями зарядів можуть бути не тільки електрони, але іони (атоми, що приєднали до себе або згубили один чи декілька електронів).

Будемо розглядати точкові заряди. Тобто заряджені тіла, геометричними розмірами яких можна нехтувати, вважаючи їх точкою. Взаємодія точкових електричних зарядів полягає в виникненні сили тяжіння або відштовхування. Величина цієї сили експериментально встановлена Кулоном у вигляді фізичного закону $f = k\dfrac{q_1 q_2}{|r|^2}$ (5.1).

Де k - коефіцієнт пропорційності, який залежить від середовища в якому відбувається взаємодії, $q_i, i = 1,2$ - величини зарядів, $|r|$ - відстань між зарядами.

Враховуючи векторний характер сили, закон Кулона можна записати в векторному вигляді $\vec{\mathbf{f}} = k\frac{q_1 q_2}{|r|^3}\vec{\mathbf{r}}$ (5.2)

Якщо характеризувати силу, з якою заряд q_1 діє на заряд q_2, то радіус вектор $\vec{\mathbf{r}}$ направлений від q_1 до q_2. При цьому сила з якою заряд q_2 діє на заряд q_1 рівна за величиною та протилежна за напрямом. Закон Кулона в вакуумі має вигляд: $\vec{\mathbf{f}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|r|^3}\vec{\mathbf{r}}$ (5.2'),

ε_0 називають електричною постійною.

Електричне поле. Напруженість електричного поля

Взаємодія між електричними зарядами відбувається через електричне поле. Будь – який заряд змінює властивості оточуючого середовища створюючи в ньому електричне поле. Це поле проявляє себе у тому, що розташований в цьому полі заряд буде знаходитись під дією сили.

Для дослідження поля використовують пробний заряд, який обирають невеликим за величиною і розмірами (точковий заряд). Згідно до закону Кулона сила $\vec{\mathbf{f}}$, що діє на пробний заряд $q_{пр}$ полем точкового заряду величини q записується у вигляді $\vec{\mathbf{f}} = q_{пр}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|r|^3}\vec{\mathbf{r}}\right)$ (5.3).

З формули (5.3) видно, що сила $\vec{\mathbf{f}}$ залежить від $q_{пр.}$, тоді характеристикою електричного поля, яка б не залежала від величини пробного заряду буде

$$E = \frac{\vec{\mathbf{f}}}{q_{пр.}} \quad (5.4).$$

Цю величину називають напруженістю електричного поля і її можна визначити як силу, що діє на одиничний пробний заряд. Таким чином, з (5.3), (5.4)

напруженість електричного поля точкового заряду q визначається за формулою:

$$\vec{\mathrm{E}} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|r|^3} \vec{\mathrm{r}} \right) \qquad (5.5)$$

Де вектор $\vec{\mathrm{r}}$ направлений від точки розташування заряду q до точки знаходження пробного заряду.

Суперпозиція полів

Дослідним шляхом встановлено, що у випадку, коли поле утворюється декількома точковими зарядами, то сумарна сила, яка діє на пробний заряд дорівнює векторній сумі від дії кожної окремої сили, тобто

$$\vec{\mathbf{E}} = \sum_i \overline{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}} \qquad (5.6)$$

Остання формула носить назву принципу суперпозиції електричних полів.

Нехай в точках P_i простору розташовані заряди величиною q_i $i = 1,2,\ldots$, тоді згідно до принципу суперпозиції електричних полів, можна записати:

$$\vec{\mathbf{E}}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|r_i|^3} \vec{\mathbf{r}}_i \qquad (5.7)$$

Де $\vec{\mathbf{r}}_i = \overrightarrow{P_i, P}$, $|r_i|$ - довжина цього вектора.

У випадку, коли в області Ω трьохвимірного простору заряди розташовані щільно і щільність їх розташування задана деякою функцією $q(P)$, то напруженість електричного поля визначається у вигляді інтегралу:

$$\vec{\mathbf{E}}(P_0) = \iiint_{\Omega} \frac{q(P)\overrightarrow{(P, P_0)}}{4\pi\varepsilon_0 |P_0 - P|^3} dP \qquad (5.7').$$

Потік векторного поля . Теорема Гауса

Потоком векторного поля $\vec{\mathbf{E}}$ через поверхню S будемо називати величину

$$\iint_S (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{n}}) ds = \Phi \qquad (5.8)$$

Розглянемо замкнену поверхню S всередині якої знаходиться точковий заряд q, тоді потік векторного поля цього заряду можна розрахувати за формулою (5.8), або враховуючи (5.7’) маємо:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S \frac{(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{n}})}{|r|^3}ds \qquad (5.9),$$

де $\vec{\mathbf{r}}$ - вектор направлений від точки розташування заряду до змінної точки поверхні S.

Неважко перевірити, що $\frac{\vec{\mathrm{r}}}{|r|^3} = -\mathrm{grad}\frac{1}{|r|}$ (5.10)

тоді $\frac{q(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{n}})}{4\pi\varepsilon_0|r|^3} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|r|}$ $\qquad \Phi = -\oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|r|}ds$ (5.10’)

В наступних лекціях, при вивченні гармонічних функцій ми покажемо, що інтеграл (5.10’) дорівнює $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

Таким чином потік напруженості векторного поля одного точкового заряду дорівнює величині цього заряду поділеному на електричну постійну.

Враховуючи принцип суперпозиції електричного поля можна сформулювати наступну теорему:

<u>Теорема 1</u> *(Гауса про значення потоку електричного поля через замкнену поверхню)* Потік напруженості векторного поля через замкнену поверхню S тіла дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що знаходяться всередині цієї поверхні поділеній на діелектричну сталу ε_0

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}_n ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \qquad (5.11)$$

Якщо заряд розподілений всередині замкненого об’єму, обмеженого поверхнею S з об’ємною густиною ρ, то теорема Гауса буде мати вигляд

$$\oiint_S \vec{\mathbf{E}}_n ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\Omega \rho d\Omega \qquad (5.11')$$

Поряд з напруженістю векторного поля $\vec{\mathbf{E}}$, для опису електричного поля вводять величину $\vec{\mathbf{D}}$, яка називається електричним зміщенням. Для вакууму вона визначається $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}$ (5.12).

Формула Гауса приймає вид: $$\oiint_S \mathbf{D}_n ds = \iiint_V \rho dv \qquad (5.13)$$

Робота сил електростатичного поля. Потенціал електростатичного поля

Відомо, що робота в силовому полі, виконана вздовж деякого контуру *C* силою $\vec{\mathbf{F}}$ обчислюється у вигляді криволінійного інтегралу другого роду за формулою

$A = \int_C (\vec{\mathbf{F}}, \overrightarrow{\mathbf{dl}})$. Відповідно, для електричного поля ця робота може бути записана у вигляді $A = \int_C (\vec{\mathbf{E}}, \overrightarrow{\mathbf{dl}})$ (5.14),

інтеграл (5.14) будемо називати циркуляцією векторного поля вздовж контуру C

Введемо величину $u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |r|}$ $\vec{\mathbf{r}} = (x_1, x_2, x_3)$ і назвемо її потенціалом електростатичного поля одиничного точкового заряду, розташованого в точці початку координат. Враховуючи (5.10), легко бачити, що $-\mathbf{grad} u = \vec{\mathbf{E}}$, тобто векторне поле одиничного точкового заряду є потенціальним. Аналогічна властивість має місце і для поля розподілених в об'ємі зарядів.

Легко перевірити, що формула (5.7') може бути переписана у вигляді

$$\vec{\mathrm{E}}(P_0) = -grad_{P_0} \iiint_\Omega \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0 |P_0 - P|} dP \qquad (5.7'')$$

Враховуючи потенційність векторного поля, роботу в такому полі можна обчислити

$$\boldsymbol{A} = \int_{ab} (-gradu, dl) = -\int_{ab} du = u(a) - u(b)$$ (5.15), якщо

$b = \infty$,то $u(\infty) = 0$.

Зрозуміло, що циркуляція електростатичного поля вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю тобто $\oint_C (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{dl}}) = 0$ (5.15')

Виходячи з (5.15) можна визначити фізичний зміст потенціалу електростатичного поля в заданій точці. *Потенціал електростатичного поля – це робота яку необхідно здійснити, щоб перемістити одиничний точковий заряд з нескінченно віддаленої точки простору у задану точку. Ця робота не залежить від шляху переміщення, а залежить лише від положення точки.*

Електричне поле утворене сукупністю точкових зарядів, або розподілених у просторі з деякою щільністю також залишається потенціальним, а значить допускає існування скалярної функції U, такої, що $-grad\Phi = \vec{\mathbf{E}}$. (5.16)

Враховуючі теорему Гауса та формулу Остроградського – Гауса отримаємо рівняння $div\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, або враховуючи (5.16) отримаємо рівняння:

$$div(\mathbf{grad}U) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ або } \Delta\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ (5.17)

(5.17) представляє собою основне рівняння електростатики для вакууму.

Крім теореми Гауса при постановці граничних задач електростатики необхідно враховувати різні граничні режими електростатичного поля, зокрема:

- Всередині провідника електричне поле $\vec{\mathbf{E}}$ завжди дорівнює нулю, таким чином потенціал $U = const$. Ця константа має одне і теж саме значення у системі з'єднаних між собою провідними зв'язками провідників. Якщо провідники відокремлені один від одного, то $const$ для кожного провідника має своє окреме значення.
- Якщо двостороння поверхня S діелектрика заряджена поверхневою

щільністю σ, а в кожній точці поверхні заданий вектор нормалі $\vec{n}$, то з теореми Гауса випливає наслідок

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)\bigg|_{S+} - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)\bigg|_{S-} = -E_n\big|_{S+} + E_n\big|_{S-} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (5.17')$$

В (5.17’) знаком «+» позначені граничні значення нормальної похідної потенціалу зі сторони додатного значення нормалі, знаком «-», граничні значення потенціалу з протилежного боку.

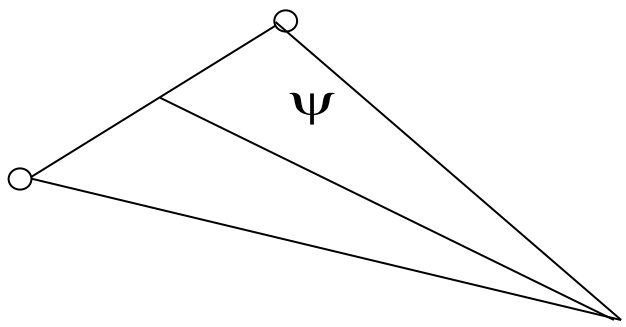
Таким чином нормальна похідна потенціалу електростатичного поля, або нормальна складова напруженості електростатичного поля має розрив при переході через заряджену поверхню.

Лекція 13

Електростатичне поле диполя

В тривимірному просторі розглянемо пару точкових зарядів розташованих на малій відстані, які мають заряди різних знаків і однакову абсолютну величину q. Таку пару зарядів будемо називати диполем.

Для конкретності, нехай точки розташування від'ємного і додатного зарядів знаходяться на відстані 2ε. Відрізок прямої, який з'єднує вказані точки будемо називати віссю диполя. Величину $2\varepsilon q = p$ будемо називати моментом диполя. Підрахуємо потенціал електростатичного поля від такої пари зарядів. Позначимо r відстань від центру диполя (середина відрізку, що з'єднує заряди) до точки вимірювання потенціалу $r = |OP|$. При цьому будемо припускати, що величинами більш високого порядку малості ніж $\frac{\varepsilon}{r}$ можна нехтувати.



$$u(P) = \frac{-q}{4\pi r\varepsilon_0\sqrt{1-2\frac{\varepsilon}{r}\cos\psi+\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1+2\frac{\varepsilon}{r}\cos\psi+\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2}}$$

Нехтуючи членами більш високого порядку малості отримаємо

$$u(P) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}(1+\cos\psi\frac{\varepsilon}{r}) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}(1-\cos\psi\frac{\varepsilon}{r}) = -\frac{2\varepsilon q\cos\psi}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{p\cos\psi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Припустимо, що ми маємо поверхню S на якій розташовані диполі. Нехай

$\mu(P)$ щільність моментів цих диполів. Тоді для кожної елементарної частини поверхні dS момент диполів dp дорівнює $dp = \mu dS$

Враховуючи принцип суперпозиції потенціал електростатичного поля від такої зарядженої поверхні можна обчислити

$$u(P) = -\iint_S \frac{\cos\psi}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dp = -\iint_S \mu(M) \frac{\cos\psi}{4\pi\varepsilon_0 r_{MP}^2} dS_M \ . \qquad (5.18)$$

Оскільки на поверхні тіла орієнтація вісі диполя направлена по нормалі до поверхні, то потенціал електростатичного поля диполів поверхні буде мати вигляд:

$$\iint_S \mu(M) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_{MP}} dS_M \qquad (5.19).$$

Інтеграл (5.19) називається потенціалом подвійного шару.

Електричне поле в діелектриках

Якщо діелектрик внести в електричне поле, то це поле і сам діелектрик змінює свої властивості. Ці зміни відбуваються за рахунок поляризації диполів, які заповнюють діелектрик, тобто під дією електричного поля орієнтуються в певному напрямку (до внесення поля їх розташування було хаотичне) і тим самим вносять зміни в зовнішнє електричне поле. Електрична індукція поля в діелектрику визначається формулою

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} \qquad (5.20)$$

$\vec{\mathbf{P}}$ називають вектором поляризації діелектриків та для широкого класу діелектриків вектор $\vec{\mathbf{P}}$ можна записати у вигляді

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}} \qquad (5.21)$$

χ - діелектрична сприйнятливість діелектрика.

Таким чином електричну індукцію в діелектрику можна обчислити за формулою $\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_a \vec{\mathbf{E}}$ де $\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \chi)$ (5.20’)

Теорема Гауса для вектора електричної індукції записується у вигляді

$$\oiint_S D_n ds = \iiint_\Omega \rho d\Omega \qquad (5.22)$$

Враховуючи (5.20’) та потенціальність вектора напруженості електричного поля будемо мати рівняння електростатики для діелектрика

$$div(\varepsilon_a \mathbf{grad} U) = -\rho \qquad (5.23)$$

Розглянемо деякі наслідки теореми Гауса для граничних режимів:

- Якщо діелектрик з щільністю поверхневих зарядів примикає до провідника, то в провіднику електричне поле відсутнє, тобто потенціал дорівнює константі таким чином з (5.17’) потенціал на поверхні діелектрика задовольняє співвідношення

$$\left.\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)\right|_{S+} = -E_n\big|_{S+} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_+} \qquad (5.24)$$

- Якщо вздовж деякої поверхні S межують два однорідних діелектрика з діелектричними сталими ε_+ ,ε_- відповідно, то згідно моделі Фарадея, поверхня контакту є провідною у продовжному напрямку. З кожного боку на поверхні діелектриків має місце певна щільність зарядів σ_+ ,σ_- відповідно, але сумарне значення цих щільностей дорівнює нулю, тобто

$$-\varepsilon_+ E_{n+} + \varepsilon_- E_{n-} = \varepsilon_+ \left.\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)\right|_{S+} - \varepsilon_- \left.\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)\right|_{S-} = 0 \qquad (5.25)$$

Постановка основних граничних задач електростатики

Нехай у просторі задана деяка система провідників у вигляді заряджених поверхонь $S = \bigcup_{i=\overline{1,N}} S_i$ розміщених в деякому діелектрику. На кожному провіднику (поверхні) заданий потенціал $U\big|_{S_i} = U_i = const$. Необхідно визначити потенціал електростатичного поля в усіх точках простору.

У випадку, якщо у просторі відсутні додаткові заряди окрім заряджених поверхонь, то шуканий потенціал електростатичного поля задовольняє рівнянню Лапласа. Таким чином гранична задача приймає вигляд:

$$\begin{aligned} &\Delta U = 0,\ x \in R^3 \setminus S \\ &U\big|_{S_i} = U_i,\ i = 1, N,\quad \lim_{|x| \to \infty} U = 0 \end{aligned} \qquad (5.24)$$

У випадку, якщо провідники розташовані у неоднорідному діелектрику у якому з щільністю ρ розподілені вільні заряди, то гранична задача буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} &div(\varepsilon_a(x)\mathbf{grad}U) = -\rho(x),\ x \in R^3 \setminus S \\ &U\big|_{S_i} = U_i,\ i = 1, N,\quad \lim_{|x| \to \infty} U = 0 \end{aligned} \qquad (5.25)$$

Гранична задача (5.24) та (5.25) називають першою граничною задачею електростатики.

В електростатиці розглядається і другий тип граничної задачі, коли на поверхні провідника задаються умови другого роду:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S_i} = -\frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} \qquad (5.26).$$

Фізично це означає, що на поверхні S_i задається щільність поверхневих зарядів - σ_i.

Гранична умова другого роду (5.26) не є природною для задач електростатики, оскільки поверхнева щільність важко вимірюється. Більш природна постановка є такою:

Нехай у просторі заповненому діелектриком з діелектричною сталою ε_a задана деяка система провідників у вигляді заряджених поверхонь $S = \bigcup_{i=\overline{1,N}} S_i$. На кожному провіднику (поверхні) відомий повний заряд провідника e_i. Необхідно визначити потенціал електростатичного поля в усіх точках простору, з основного

рівняння електростатики.

$$div(\varepsilon_a(x)\mathbf{grad}U)=0,\ x\in R^3\setminus S \text{ якщо } U\big|_{S_i}=U_i=const \qquad (5.27)$$

де U_i - невідомі величини при виконання умови

$$\oiint_{S_i}\varepsilon_a\frac{\partial U}{\partial n}dS=-e_i \qquad (5.28)$$

та умови затухання потенціалу на нескінченості $\lim\limits_{|x|\to\infty}U=0$ (5.29)

Гранична задача (5.27), (5.28), (5.29) називається другою граничною задачею електростатики.

§ 6 Математичні моделі магнітостатики

[5, стор. 770 - 782], [7, стор. 97 - 138]

Відомо що взаємодіють між собою не тільки електричні заряди але і електричні струми. Так наприклад два паралельних провідники, по яким протікають постійні електричні струми притягуються між собою, якщо струми мають однаковий напрям і відштовхуються, якщо струми мають протилежний напрям. Зокрема Ампером було встановлено, що сила взаємодії провідників розрахована на одиницю довжини провідника пропорційна величинам струмів в них I_1 та I_2 і обернено пропорційна відстані між паралельними провідниками r та дорівнює

$$f=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1I_2}{r} \qquad (6.1)$$

В (6.1) μ_0 - коефіцієнт магнітної проникливості.

Взаємодія струмів відбувається через поле яке називається магнітним, така назва поля виникла у зв’язку з тим, що як винайшов у 1820 році Ерстед, поле провідника постійного струму впливає на орієнтацію магнітної стрілки .

Таким чином можна зробити висновок, що заряди, які рухаються змінюють властивості оточуючого їх простору – створюючи в ньому магнітне поле. Це поле

проявляється в тому, що воно впливає на заряди, що рухаються в цьому полі (струми).

Подібно тому, як пробний точковий заряд використовувався нами для дослідження електричного поля, так для дослідження магнітного поля можна використовувати пробний струм, який циркулює в площинному замкненому контурі дуже малих розмірів.

Орієнтацію контуру в просторі будемо характеризувати за допомогою вектору нормалі до площини контуру, який обирається за правилом правого гвинта. (Якщо обходити контур, так, що область знаходиться ліворуч спостерігача, то нормаль орієнтована від ніг до голови спостерігача). Таку орієнтацію нормалі називають додатною.

Вносячи пробний контур у магнітне поле, ми спостерігаємо, що поле здійснює на контур орієнтуючу дію, встановлюючи її додатню нормаль у певному напрямі. Приймемо цей напрям за напрям поля у цій точці. Якщо повернути контур так, що напрям додатньої нормалі і напрям поля не співпадали, то виникає обертальний момент, який прагне повернути контур в рівноважне положення. Величина моменту у точці залежить від кута α між нормаллю і напрямом поля. І досягає найбільшого значення $M_{\max}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, при $\alpha = 0$ момент дорівнює нулю. Обертальний момент залежить як від властивостей поля в заданій точці так і від властивостей контуру. Так вносячи різноманітні пробні контури можна побачити, що $M_{\max}$ пропорційний силі струму, що циркулює в контурі, і площі, яку охоплює контур і зовсім не залежить від форми контуру. Таким чином дія магнітного поля на площинний контур визначається величиною $p_м = IS$, яку називають абсолютним значенням магнітного моменту контуру. Окрім сили току I та площі S пробний контур характеризується орієнтацією у просторі, тому магнітний момент слід розглядати, як вектор, напрям якого співпадає з напрямом одиничної

нормалі, тому $\vec{\mathbf{p}}_M = IS\vec{\mathbf{n}}$ (6.2).

На пробні контури з різним значенням p_M в даній точці поля діють різні обертальні моменти $M_{\max}$. В той же час відношення $\frac{M_{\max}}{p_M}$ для усіх контурів буде одне і теж саме і може бути прийняте за кількісну характеристику магнітного поля. Фізичну величину B, яка пропорційна цьому відношенню називають магнітною індукцією:

$$B \cong \frac{M_{\max}}{p_M} \qquad (6.3)$$

Магнітна індукція – векторна величина, напрям якої визначається рівноважним положенням нормалі пробного контуру, (6.3) визначає модуль вектору $\vec{\mathbf{B}}$. Поряд з вектором магнітної індукції $\vec{\mathbf{B}}$ розглядається також векторна величина $\vec{\mathbf{H}}$, яку називають напруженістю магнітного поля, для вакууму та інших ізотропних середовищ, які не мають магнітних властивостей зв'язок між вектором магнітної індукції та вектором напруженості магнітного поля має вигляд

$\mathbf{B} = \mu\vec{\mathbf{H}}$ (6.4),

тобто ці вектори колінеарні, а $\mu = const$ - магнітна проникливість середовища, через μ_0 будемо позначати магнітну проникливість вакууму.

Закон Біо – Савара

Біо та Савар у1820 році провели дослідження магнітних полів струмів різної форми та з'ясували, що напруженість магнітного поля в усіх випадках пропорційна силі струму, який створює магнітне поле, і доволі складним чином залежить від відстані до цієї точки. Експериментальні дані Біо Савара проаналізував Лаплас і встановив, що для елементу струму, який направлений вздовж вектора нескінченно малого зміщення $d\vec{\mathbf{l}}$ і має величину I величина напруженості магнітного поля $d\vec{\mathbf{H}}$ визначається за формулою:

$$d\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{\mathbf{l}}\times\vec{\mathbf{r}}\right]}{|r|^3} \qquad (6.5).$$

У (6.5) $\vec{\mathbf{r}}$ - вектор, направлений від елементу току до точки у якій обчислюється напруженість магнітного поля $\left[\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}\right]$ - векторний добуток двох векторів.

Виходячи з формули (6.5) легко обчислити поле прямого струму рис.1.

$$\left|\vec{\mathbf{H}}\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\mathbf{H}}\right| = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I|dl||r|\sin\alpha}{|r|^3} = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{I|r|d\alpha\sin\alpha}{|r|^2\sin\alpha} =$$
$$= \frac{I}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{d\alpha}{|r|} = \frac{I}{4\pi b}\int_{0}^{\pi}\sin\alpha d\alpha = \frac{I}{2\pi b} \qquad (6.6)$$

При цьому вектор $\mathbf{H}$ має напрям по дотичній до концентричних кіл з центром у точці проходження струму і орієнтований за правилом правого гвинта.

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля

Нехай ми маємо магнітне поле з вектором магнітної напруженості $\vec{\mathbf{H}}$, який є функцією точки простору. Циркуляцією векторного поля $\vec{\mathbf{H}}$ будемо називати величину $\oint_C\left(\vec{\mathbf{H}},d\vec{\mathbf{l}}\right)$, де C - замкнений контур в просторі.

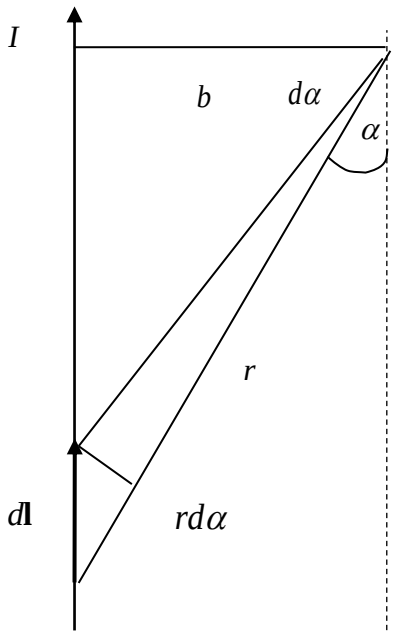


Рисунок 1

Обчислимо циркуляцію вектора магнітної напруженості вздовж будь – якого замкненого плоского контуру, що охоплює деякий прямий струм, ортогональний до площини контуру рис.2.

Враховуючи, формулу (6.6), можна записати, що $(H,dl) = \frac{I}{2\pi R}Rd\alpha$ Таким чином циркуляція

$$\oint_C\left(\vec{\mathbf{H}},d\vec{\mathbf{l}}\right) = \frac{I}{2\pi}\oint_C d\alpha = I \qquad (6.7)$$

У випадку, коли контур охоплює декілька струмів, то формула (6.7) узагальнюється

$$\oint_C \left(\vec{\mathbf{H}}, d\vec{\mathbf{l}}\right) = \sum I$$

(6.8).

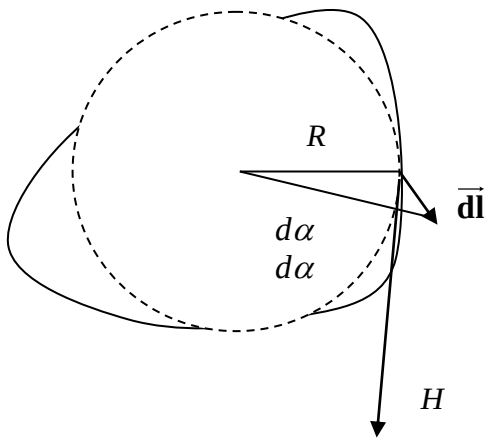


Рисунок 2

У випадку, коли токи розподілені у просторі з деякою щільністю $\vec{\mathbf{j}}$, то величина току, що протікає через довільну поверхню S може бути записаний у вигляді $I = \int_S \mathbf{j}_n dS$

(6.9)

Таким чином маємо закон циркуляції магнітного поля у вигляді:

$$\oint_C \left(\vec{\mathbf{H}}, d\vec{\mathbf{l}}\right) = \iint_S \mathbf{j}_n dS \qquad (6.10)$$

У формулі (6.10) C - довільний контур у просторі, S - довільна поверхня, яка спирається на контур C.

Використовуючи формулу Стокса, отримаємо

$$\iint_S \left(rot\mathbf{H}\right)_n dS = \iint_S \mathbf{j}_n dS \qquad (6.11).$$

Враховуючи, що поверхня S обрана довільним чином можемо записати рівняння магнітостатики, яке є частинним випадком третього рівняння поля:

$$rot\,\mathbf{H} = \mathbf{j} \qquad (6.12)$$

Порівнюючи формулу (6.10) для магнітного поля у вакуумі та формулу $\oint_C \left(\mathbf{E}, dl\right) = 0$

(5.15’) для електричного поля, бачимо між цими полями суттєву різницю. Так циркуляція по замкненому контуру електричного поля дорівнює нулю, а значить це поле потенціальне, магнітне поле не є потенціальним, його називають вихровим.

Другою особливість магнітного поля полягає в тому, що лінії магнітної індукції, а значить і лінії напруженості магнітного поля у вакуумі завжди замкнені, що свідчить про відсутність у природі магнітних зарядів. Замкненість ліній магнітної індукції та ліній напруженості магнітного поля означають, що потік векторного поля магнітної індукції через будь – яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Тобто

$$\oiint_S \mathbf{B}_n dS = 0 \qquad (6.13)$$

З формули Остроградського Гауса для (6.13) отримаємо ще одне рівняння магнітостатики, яке є частинним випадком другого рівняння теорії поля:

$$div\mathbf{B} = 0 \qquad (6.14),$$

або враховуючи (6.4) $div\left(\mu_0 \mathbf{H}\right) = 0$ (6.14’)

Таким чином рівняння магнітостатики для вакууму представляють собою систему рівнянь (6.12), (6.14’).

Магнітне поле в середовище

Деякі речовини мають здатність до намагнічування: тобто під дією прикладеного до них магнітного поля можуть отримувати магнітний момент. Одні речовини намагнічуються сильніше, інші слабкіше, таки речовини називаються магнетиками.

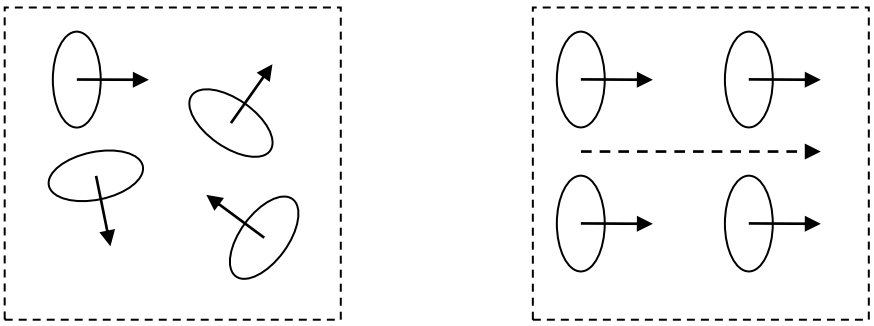
Для магнетиків розміщених у зовнішньому магнітному полі утворюється додаткове магнітне поле і сумарне магнітне поле визначається як

$$B = B_i + B^{/} \qquad (6.15)$$

У (6.15) B_i - зовнішнє магнітне поле обумовлене електричним струмом чи іншим чинником, $B^{'}$ - додаткове магнітне поле середовища здатного до намагнічування.

Для пояснення явища намагнічування середовищ Ампер припустив, що в молекулах тіла циркулюють кругові струми. Кожний струм має магнітний момент і

створює в оточуючому просторі магнітне поле. Якщо зовнішнє магнітне поле відсутнє, то молекули розташовані хаотично і результуюче поле дорівнює нулю. В результаті хаотичної орієнтації магнітних моментів, сумарний магнітний момент тіла також рівний нулю. Під дією зовнішнього поля моменти молекул сприймають переважну орієнтацію в одному напрямку, за рахунок чого магнетик намагнічується і його сумарний магнітний момент становиться відмінним від нуля. Магнітні поля окремих молекулярних струмів вже не компенсують одне одного, а утворюють додаткове магнітне поле B'.



Намагнічування магнетика природно характеризувати магнітним моментом одиниці об'єму. Цю величину називають вектором намагнічування і позначають $\mathbf{J}$. Дослідним шляхом встановлено , що вектор намагнічування $\mathbf{J}$ зв'язаний з напруженістю зовнішнього поля у точці співвідношенням $\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}$ (6.16),

де χ - безрозмірна величина, яку називають магнітною сприйнятливістю речовини. В залежності від знаку і величини магнітної сприйнятливості χ усі магнетики поділяються на класи:

Діамагнетики – для яких χ мала за абсолютною величиною і від'ємна.

Парамагнетики – для яких χ мала за величиною і додатна.

Феромагнетики – для яких χ додатна і досягає дуже великих значень.

Таким чином враховуючи (6.15) та (6.16), можемо записати, що зв'язок між вектором магнітної індукції та вектором напруженості магнітного поля для

магнетиків матиме вигляд $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}$, або $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi\mathbf{H}$, звідки маємо

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1+\chi)} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_a}, \quad \mu_a = \mu_0(1+\chi) \qquad (6.17).$$

Таким чином для магнетиків рівняння магнітостатики приймають вигляд (6.12), (6.14) де вектор магнітної індукції і напруженість магнітного поля зв'язані між собою співвідношенням (6.17).

Граничні умови для магнітного поля

При переході через границю розділу двох магнетиків з різними магнітними проникливостями μ_1 і μ_2 силові лінії магнітного поля відчувають переломлення. Для з'ясування, яким чином відбувається переломлення ліній поля необхідно встановити яким чином переломлюються нормальні та тангенціальні складові на границі. Отримання граничних умов здійснюються за допомогою теореми Гауса для магнітного поля і теореми про циркуляції магнітного поля.

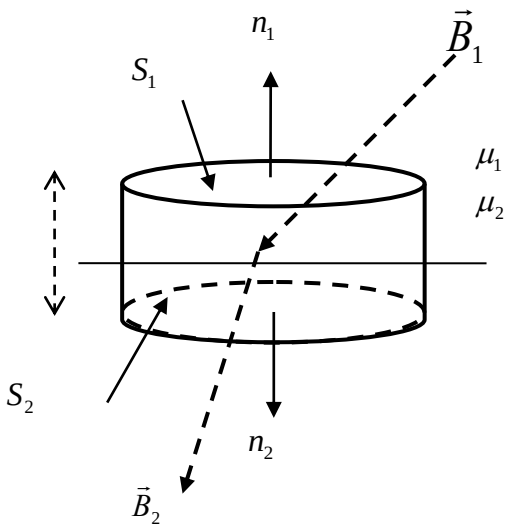


Рисунок 3

Для нормальних складових вектора магнітної індукції $\vec{B}$, теорема Гауса дає $(B_2, n_2)S_2 + (B_1, n_1)S_1 = 0$, де $S_1 = S_2$.рис.3

Потік магнітної індукції B через бокову поверхню циліндру при $h \to 0$ стає нескінченно малим і їм можна нехтувати. Таким чином $(B_1, n_1)\big|_S = (B_2, n_1)\big|_S$ (6.18)

Тобто на границі розділу двох магнетиків виконується умова неперервності нормальної складової вектора магнітної індукції B_n.

Припустимо, що на границі, що розділяє два магнетики не тече поверхневий електричний струм, тоді згідно до теореми про циркуляцію напруженості магнітного поля, будемо мати $(H_1,\boldsymbol{\tau})a_1-(H_2,\boldsymbol{\tau})a_2=0$, де $a_1=a_2$ - горизонтальні елементи контуру інтегрування. Інтеграл по вертикальним складовим контуру при $h\to 0$ прямує до нуля рис.4.

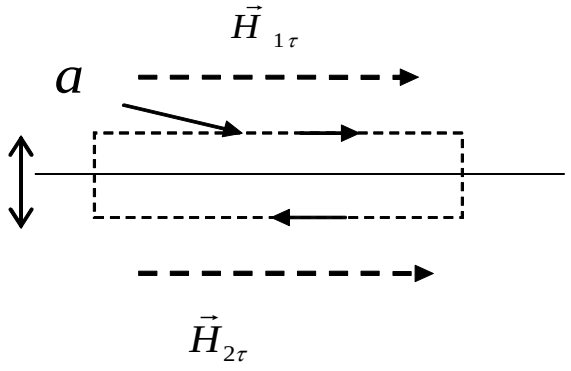


Рисунок 4

Таким чином дотичні (тангенціальні) складові напруженості магнітного поля неперервні при переході через границю двох магнетиків, а відповідна гранична умова приймає вигляд:

$$H_{1\tau}\big|_S=H_{2\tau}\big|_S \qquad (6.19).$$

Якщо врахувати зв'язок між векторами магнітної індукції і вектором напруженості магнітного поля, то можна записати

$$\mu_2 B_{1\tau}\big|_S=\mu_1 B_{2\tau}\big|_S \qquad (6.19')$$

$$\mu_1 H_{1n}\big|_S=\mu_2 H_{2n}\big|_S \qquad (6.18')$$

Якщо на поверхні, що розділяє два магнетики протікає електричний струм з лінійною щільністю $\vec{\mathbf{i}}$, то тоді замкнений контур охоплює поверхневий струм і поверхневий інтеграл обчислюється з використанням (6.11). В результаті будемо мати умову:

$$H_{1\tau}\big|_S-H_{2\tau}\big|_S=\left(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{N}}\right) \qquad (6.20),$$

де $\mathbf{N}=\left[\boldsymbol{\tau},\mathbf{n}\right]$ - векторний добуток дотичного вектора $\boldsymbol{\tau}$ та вектора нормалі $\mathbf{n}$, до поверхні S, що розділяє два магнетики.

Векторний потенціал

Нагадаємо систему рівнянь магніто статики для магнетиків.

$div\mathbf{B} = 0$ $\qquad$ $rot\,\mathbf{H} = \mathbf{j}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$

З другого рівняння випливає, що $div\mathbf{j} = 0$, оскільки $div(rot\,\mathbf{H}) = 0$

Умова соліноїдальності векторного поля $\mathbf{B}$ (перше рівняння) виконано коли

$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$ (6.21),

де $\mathbf{A}$ - векторний потенціал, що залежить від координат точок простору. Оскільки $rot(\mathbf{grad}\,\psi) = 0$, то векторне поле магнітної індукції не зміниться, якщо замість вектора $\mathbf{A}$ узяти $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\,\psi$, де ψ - довільна скалярна функція. Таким чином векторний потенціал для поля магнітної індукції $\mathbf{B}$ не визначається однозначно. Зв'язку з чим векторний потенціал $\mathbf{A}$ можна підпорядкувати додатковій умові

$div\mathbf{A} = 0$ (6.22).

Виконання цієї умови завжди можна забезпечити вибором функції ψ.

Використаємо представлення (6.21), тоді з другого та третього рівняння отримаємо $rot\ rot\mathbf{A} = \mathbf{j}\mu_a$. (6.23).

Врахуємо, що $rotrot\mathbf{A} = graddiv\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mu_a \mathbf{j}$ (6.23').

Використовуючи умову (6.22), отримаємо рівняння для векторного потенціалу

$\Delta\mathbf{A} = -\mu_a \mathbf{j}$ (6.24).

Таким чином система рівнянь магнітостатики зводиться до векторного рівняння Пуассона для векторного потенціалу (6.24).

Лекція 14

§ 7 Класифікація рівнянь в частинних похідних

[1, стор. 55 - 67]

Класифікація рівнянь з двома незалежними змінними

Будемо розглядати загальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними, лінійне відносно старших похідних. Частина рівняння, яка містить похідні другого порядку називають головною частиною рівняння.

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (7.1).$$

Поставимо задачу спростити вигляд головної частини рівняння. Для чого введемо заміну змінних: $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ (7.2).

Для скорочення скористаємося позначеннями $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x$.

Обчислимо вирази для похідних в нових змінних ξ,η:

$$u_x=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x, \quad u_y=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x{}^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x{}^2+u_\xi\cdot\xi_{xx}+u_\eta\cdot\eta_{xx},$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_y{}^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\cdot\eta_y{}^2+u_\xi\cdot\xi_{yy}+u_\eta\cdot\eta_{yy},$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\cdot\xi_x\cdot\xi_y+u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x\cdot\eta_y+u_\xi\cdot\xi_{xy}+u_\eta\cdot\eta_{xy}.$$

Підставимо обчислені похідні в рівняння (7.1):

$$A\left(u_{\xi\xi}\cdot\xi_x{}^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x{}^2\right)+$$

$$+2B\left(u_{\xi\xi}\cdot\xi_x\cdot\xi_y+u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+u_{\eta\eta}\cdot\eta_x\cdot\eta_y\right)+ \qquad (7.3)$$

$$+C\left(u_{\xi\xi}\cdot\xi_y{}^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\cdot\eta_y{}^2\right)+\tilde{F}\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right)=0;$$

Перегрупуємо доданки і отримаємо рівняння у вигляді :

$$\overline{A}\cdot u_{\xi\xi}+2\overline{B}\cdot u_{\xi\eta}+\overline{C}\cdot u_{\eta\eta}+\widetilde{F}\left(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta}\right)=0. \qquad (7.4),$$ де

$\overline{A}=\left(A\cdot\xi_x^{\ 2}+2B\xi_x\xi_y+C\cdot\xi_y^{\ 2}\right)$, $\overline{C}=\left(A\cdot\eta_y^{\ 2}+2B\eta_x\eta_y+C\cdot\eta_y^{\ 2}\right)$

$\overline{B}=\left(A\cdot\xi_x\cdot\eta_x+B\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+C\cdot\xi_y\cdot\eta_y\right)$

Зробимо нульовими коефіцієнти при $u_{\xi\xi}$ та $u_{\eta\eta}$ за рахунок вибору нових змінних:

$$A\xi_x^{\ 2}+2B\xi_x\cdot\xi_y+C\xi_y^{\ 2}=0; \qquad (7.5),$$

$$A\eta_x^{\ 2}+2B\eta_x\cdot\eta_y+C\eta_y^{\ 2}=0 \qquad (7.5').$$

Розв'язком рівняння (7.5) буде функція $\xi\left(x,y\right)$, а рівняння (7.5') - $\eta\left(x,y\right)$.

Для знаходження функцій $\xi\left(x,y\right)$ та $\eta\left(x,y\right)$, зведемо рівняння в частинних похідних до звичайного диференціального рівняння

Розглянемо рівняння (7.5) і розділимо його на ξ_y^2

$$A\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2+2B\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)+C=0 \qquad (7.6)$$

Розглянемо неявно задана функцію $y=y(x)$ у вигляді $\xi\left(x,y\right)=const$, легко бачити $d\xi=\xi_x dx+\xi_y dy=0$; $\frac{\xi_x}{\xi_y}=-\frac{dy}{dx}$. Тобто рівняння в частинних похідних зводиться до звичайного диференціального рівняння:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2B\frac{dy}{dx}+C=0\ . \qquad (7.7).$$

Останнє рівняння називається *характеристичним*, а його розв'язки називаються *характеристиками*. Рівняння розпадається на два лінійних рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\ . \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A} \qquad (7.8)$$

Знак підкореневого виразу визначає тип рівняння і спосіб вибору нових змінних. Розглянемо можливі випадки:

1)рівняння гіперболічного типу $B^2 - AC > 0$

Кожне з рівнянь (7.8) має по одній дійсній характеристиці. Нехай $\varphi(x, y) = const$ та $\psi(x, y) = const$ - загальні інтеграли першого та другого характеристичного рівняння, тоді нові змінні вибираються $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

Після застосування вказаної заміни змінних отримаємо першу канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \qquad (7.9)$$

Якщо використати змінні $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, то можна отримати другу канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

(7.10);

2) рівняння еліптичного типу $B^2 - AC < 0$

В цьому випадку розв’язки характеристичних рівнянь (характеристики) - комплексно спряжені і можуть бути записані у вигляді : $\omega(x, y) = \varphi(x, y) \pm i \cdot \psi(x, y) = const$.

Тоді для змінних $\xi = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$, $\eta = \varphi(x, y) - i \cdot \psi(x, y)$ отримаємо вигляд аналогічний першій канонічній формі гіперболічного рівняння $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Для того щоб позбутися комплексних змінних виберемо нові дійсні змінні $\alpha = \varphi(x, y) = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \psi(x, y) = \dfrac{\xi - \eta}{2i}$. Тоді отримаємо канонічну форму запису рівняння еліптичного вигляду:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad (7.11);$$

3) рівняння параболічного типу $B^2 - AC = 0$

Характеристики в цьому випадку співпадають і нові змінні обирають у вигляді : $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \nu(x, y)$, де $\nu(x, y)$ будь – яка функція незалежна від $\varphi(x, y)$.

Зауваження *Необхідно, щоб визначник Вронського для нових змінних* $W[\ ] \neq 0$*, тобто, щоб заміна змінних* $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \nu(x, y)$ *була не виродженою.*

У випадку параболічного рівняння маємо $AC = B^2$ і таким чином

$$\overline{A} = \left(A \cdot \xi_x{}^2 + 2B\xi_x\xi_y + C \cdot \xi_y{}^2\right) = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)^2 = 0$$

$$\overline{B} = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y) = 0$$

При цьому $\overline{C} \neq 0$. Таким чином після ділення на $\overline{C}$ отримаємо канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу.

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \qquad (7.12).$$

Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними

Будемо розглядати лінійне рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu + F = 0 \qquad (7.13)$$

$A_{i,j} = A_{j,i}$. $A_{i,j}$, B_i, C, F є функціями від $x = x_1, x_2, \ldots. x_n$.

Введемо нові змінні $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots. x_n),\ k = 1, \ldots n$ (7.14)

Обчислимо похідні, що входять в рівняння $u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} \alpha_{i,k}$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{i,k} \alpha_{j,l} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j} \qquad \text{де} \qquad \alpha_{i,k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

Підставляючи вираз для похідних в вихідне рівняння отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{A}_{k,l}u_{\xi_k\xi_l}+\sum_{k=1}^{n}\overline{B}_k u_{\xi_k}+\overline{C}u+\overline{F}=0 \qquad (7.15)$$

Де $\overline{A}_{k,l}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}\alpha_{i,k}\alpha_{j,l}$ $\qquad \overline{B}_k=\sum_{i=1}^{n}B_i\alpha_{i,k}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}(\xi_k)_{x_i x_j}$

(7.16).

Поставимо у відповідність рівнянню квадратичну форму $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}^0 y_i y_j$, де $A_{i,j}^0 = A_{i,j}(x_1^0,.....x_n^0)$, тобто коефіцієнти квадратичної форми співпадають з коефіцієнтами рівняння в деякій точці області.

Здійснимо над змінними y лінійне перетворення $y_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{i,k}\eta_k$.

Будемо мати для квадратичної форми новий вираз:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}^0 y_i y_j=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{A}_{k,l}^0\eta_k\eta_l \quad \text{де} \qquad \overline{A}_{k,l}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{A}_{i,j}^0\alpha_{i,k}\alpha_{j,l}\,. \qquad (7.17)$$

Таким чином можна бачити, що коефіцієнти головної частини рівняння перетворюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми при лінійному перетворені (7.16), (7.17). Відомо, що використовуючи лінійне перетворення можна привести матрицю $\left[A_{i,j}^0\right]_{i,j=1,n}$ квадратичної форми до діагонального вигляду, в якому $\overline{A}_{i,i}^0=1$ або 0, $\overline{A}_{i,j}^0=0,\ i\neq j$.

Згідно до закону інерції квадратичних форм, кількість додатних, від'ємних та нульових діагональних елементів інваріантне відносно лінійного перетворення.

Будемо називати рівняння в точці $(x_1^0,.....x_n^0)$ еліптичним, якщо всі $\overline{A}_{i,i}^0$, $i=1..n$ мають один і той же знак. Гіперболічним, якщо $m<n$ елементів матриці мають один знак, а $n-m$ коефіцієнтів мають протилежний знак. Параболічним, якщо хоча б один з діагональних елементів матриці $\overline{A}_{i,i}^0$ дорівнює нулю.

Обираючи нові незалежні змінні ξ_i таким чином що б у точці $(x_1^0,.....x_n^0)$

виконувалось рівність $\alpha_{i,k} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \alpha_{i,k}^0$, де $\alpha_{i,k}^0$ - коефіцієнти перетворення, яке приводить квадратичну форму до канонічної форми запису. Зокрема, покладаючи $\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}^0 x_i$, отримаємо у точці $(x_1^0, ...x_n^0)$ канонічну форму запису рівняння в залежності від його типу:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{\xi_i \xi_i} + \Phi = 0 \text{ -(еліптичний тип)} \qquad (7.18),$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{\xi_i \xi_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{\xi_i \xi_i} + \Phi = 0 \text{ - (гіперболічний тип)} \qquad (7.19),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \pm u_{\xi_i \xi_i} + \Phi = 0,\ m < n \quad \text{−(параболічний тип)} \qquad (7.20).$$

Приклад 1. Визначити тип рівняння і привести його до канонічної форми запису. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + (xy)^2}}{y^2}. \qquad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{y}.$$

Оскільки обидві характеристики є дійсними, то рівняння має гіперболічний тип. Останнє рівняння можна записати у вигляді:

$ydy = \pm xdx$. Загальні інтеграли цього рівняння мають вигляд:

$y^2 \pm x^2 = const$. Для отримання першої канонічної форми запису необхідно обрати нові змінні $\xi = x^2 + y^2,\ \eta = x^2 - y^2$.

Для отримання другої канонічної форми запису оберемо змінні: $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2} = x^2,\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2} = y^2$, обчислимо похідні:

$$u_x = u_\alpha 2x + u_\beta \cdot 0,\ u_y = u_\alpha \cdot 0 + u_\beta 2y$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha} 4x^2 + 2u_{\alpha\beta} \cdot 0 + u_{\beta\beta} \cdot 0 + u_\alpha 2 + u_\beta \cdot 0$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha} \cdot 0 + 2u_{\alpha\beta} \cdot 0 + u_{\beta\beta} \cdot 4y^2 + u_\alpha \cdot 0 + u_\beta \cdot 2$$

Підставимо знайдені похідні в рівняння:

$$y^2(4x^2 u_{\alpha\alpha} + 2u_\alpha) - x^2(4y^2 u_{\beta\beta} + 2u_\beta) = 0$$

$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \dfrac{1}{2x^2y^2}(u_\alpha - u_\beta) = 0$. Або остаточно маємо:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{2\alpha\beta}(u_\alpha - u_\beta) = 0.$$

Приклад 2. Визначити тип рівняння і привести його до канонічної форми запису $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$.

Поставимо у відповідність головній частині рівняння квадратичну форму:

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2 + 6\lambda_3^2.$$

Методом виділення повних квадратів приведемо квадратичну форму до канонічної форми запису:

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2^2 + 6\lambda_3^2 = (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_2\lambda_3) +$$
$$+\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2) + 4\lambda_3^2 =$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2 + (2\lambda_3)^2$$

Вводимо нові незалежні змінні:

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3$$
$$\mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3$$
$$\mu_3 = 2\lambda_3$$

Отримаємо канонічну форму запису для квадратичної форми: $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$. Оскільки при квадраті кожної змінної коефіцієнт дорівнює 1, то квадратична форма та рівняння мають еліптичний тип.

Запишемо тепер заміну змінних, яка приведе рівняння до канонічної форми запису. Обчислимо матрицю оберненого лінійного перетворення:

$$\lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\lambda} = B\mu$$

$$\lambda_2 = \mu_2 - \frac{\mu_3}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{\mu_3}{2}$$

Обчислимо транспоновану матрицю $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Для диференціального рівняння маємо нові змінні:

$\overline{\xi} = B^t \overline{x}$. Або в координатній формі:

$$\begin{cases} \xi = \boldsymbol{x} \\ \eta = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \\ \varsigma = \boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{z} \end{cases}$$

В новій системі координат головна частина диференціального рівняння буде мати канонічну форму запису еліптичного рівняння $\boldsymbol{u}_{\xi\xi} + \boldsymbol{u}_{\eta\eta} + \boldsymbol{u}_{\varsigma\varsigma} = 0$.

Загальні принципи класифікації рівнянь довільного порядку і систем диференціальних рівнянь

Розглянемо диференціальне рівняння m - го порядку відносно скалярної функції $u(x)$ змінної $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ вигляду:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + f(D^\beta, u, x) = 0 \qquad (7.17).$$

Коефіцієнти a_α залежать лише від x, функція f - від x, u та похідних $D^\beta u$, $|\beta| < m$. При цьому позначення D^α треба розуміти як $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$,

тобто змішану похідну. Зауважимо, що перший доданок (7.17) містить лише старші похідні рівняння і за аналогією з рівняннями другого порядку диференціальний оператор

$$A_0(x,D)u = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u \qquad (7.18).$$

Будемо називати головною частиною рівняння (7.17). З головною частиною (7.18) зв'яжемо характеристичну форму (однорідний поліном):

$$A_0(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = \left(\xi_1^{\alpha_1}.....\xi_m^{\alpha_m}\right) \qquad (7.18')$$

Класифікація рівняння в частинних похідних дуже тісно зв'язана з властивостями характеристичної форми (7.18'). Зрозуміло, що властивості форми (7.18') залежать від точки x і тому рівняння можна класифікувати по різному у різних точках x.

***Означення* 1** Рівняння (7.17) будемо називати параболічним в точці x, якщо можна знайти таке афінне перетворення змінних $\xi_i = \xi_i(\eta_1,...\eta_m),\ i=1,m$, що в результаті застосування перетворення до характеристичної форми (7.18'), вона буде містити лише $l < m$ нових змінних.

Означення 2 Рівняння (7.17) будемо називати еліптичним у точці x, якщо форма $A_0(x,\xi)$, визначена рівністю (7.18') знаковизначена, як функція змінної ξ, тобто приймає значення одного знаку для будь – яких дійсних значень $\xi \in R^n, |\xi| \neq 0$, або якщо алгебраїчне рівняння $A_0(x,\xi) = 0$ не має дійсних коренів окрім $\xi = 0$.

Означення3 Рівняння (7.17) будемо називати гіперболічним в точці x, якщо можна знайти таке афінне перетворення змінних $\xi_i = \xi_i(\eta_1,...\eta_m),\ i=1,m$ що у просторі нових змінних $\eta_1,....\eta_m$ існує такий напрям (нехай це змінна η_1), то алгебраїчне рівняння $A_0(x,\xi(\eta)) = 0$ записане відносно цієї змінної η_1 має рівно m дійсних коренів (простих або кратних) при довільному виборі останніх змінних

$\eta_2, ... \eta_m$.

Розглянемо систему рівнянь в частинних похідних відносно n невідомих функцій $u_1, u_2, ...u_n$ та запишемо її у матричному вигляді:

$$A(x,D)u = f \qquad (7.19).$$

Де $A(x,D) - (n \times n)$ - матриця з елементами $A_{i,j}(x,D)$, які представляють собою диференціальні вирази деякого порядку $\mu_{i,j}$.

В матриці $A(x,D)$ можна виділити головну частину, яка містить диференціальні оператори лише старшого порядку m, тоді головній частині буде відповідати матриця $\left[A_0(x,D)\right]_{i,j} = \sum_{|\alpha|=m} a_{i,j,\alpha}(x) D^{\alpha}$ (7.20).

Будемо розглядати характеристичний детермінант

$$\det\left[\sum_{|\alpha|=m} a_{i,j,\alpha}(x)\xi^{\alpha}\right] \qquad (7.21),$$ який

представляє собою форму порядку $n \times m$ відносно параметрів $\xi_1, ...\xi_m$. Подальша класифікація систем відбувається на основі аналізу характеристичної форми (однорідного поліному) (7.21).

Розглянемо в якості прикладу систему стаціонарних рівнянь теорії пружності: $\left(\Delta\vec{\mathbf{U}} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m\text{-}2}}\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{U}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{G}}\vec{\mathbf{X}}$.

Старший порядок похідних цієї системи дорівнює двом, тоді матриця яка відповідає головній частині системи має вигляд

$$A_0(D) = \begin{bmatrix} \Delta + \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \lambda\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \lambda\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \lambda\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \Delta + \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \lambda\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \\ \lambda\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \lambda\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \Delta + \lambda\frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \qquad (7.22),$$ де

$$\lambda = \frac{m}{m-2}.$$

Тоді характеристична форма, що відповідає цій матриці матиме вигляд:

$$\det\begin{bmatrix} |\xi|^2 + \lambda\xi_1^2 & \lambda\xi_1\xi_2 & \lambda\xi_1\xi_3 \\ \lambda\xi_1\xi_2 & |\xi|^2 + \lambda\xi_2^2 & \lambda\xi_2\xi_3 \\ \lambda\xi_1\xi_3 & \lambda\xi_2\xi_3 & |\xi|^2 + \lambda\xi_3^2 \end{bmatrix} = |\xi|^6 (1+\lambda). \qquad (7.23)$$

Зрозуміло, що вираз (7.23) є додатнім, що гарантує еліптичність системи статичних рівнянь теорії пружності (2.21’).

Розглянемо систему рівнянь гідродинаміки у випадку ізоентропічної течії

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}(V) + (V, \mathrm{grad}\,\rho) = 0$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + (V, \mathrm{grad} V_i) + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}_i\, p = 0 \qquad (7.24)$$

$$p = p(\rho)$$

Порядок системи дорівнює одиниці, тому матриця системи має вигляд:

$$A_0(D) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + (V, grad) & \rho\frac{\partial}{\partial x_1} & \rho\frac{\partial}{\partial x_2} & \rho\frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_1} & `\frac{\partial}{\partial t} + (V, grad) & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + (V, grad) & 0 \\ \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + (V, grad) \end{bmatrix}$$

Відповідна характеристична форма матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} \tau+(V,\xi) & \rho\xi_1 & \rho\xi_2 & \rho\xi_3 \\ \frac{c^2}{\rho}\xi_1 & \tau+(V,\xi) & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho}\xi_2 & 0 & \tau+(V,\xi) & 0 \\ \frac{c^2}{\rho}\xi_3 & 0 & 0 & \tau+(V,\xi) \end{bmatrix} = 0. \qquad (7.25),$$

де $(V,\xi)=\sum_{i=1}^{3} v_i\xi_i$, $c^2=\frac{dp}{d\rho}$ - квадрат швидкості звуку. Розкриваючи визначник (7.25) отримаємо співвідношення $\left[\tau+(V,\xi)\right]^2\left(\left[\tau+(V,\xi)\right]^2-c^2|\xi|^2\right)=0$ (7.26)

Розглядаючи (7.26) як поліном відносно змінної τ, яка відповідає змінній часу t у системі рівнянь, отримаємо для довільних дійсних значень вектора ξ чотири дійсних кореня, а саме $\tau_{1,2}=-(V,\xi),\ \tau_{3,4}=-(V,\xi)\pm c|\xi|$.

Таким чином система рівнянь гідродинаміки (7.24) має гіперболічний тип.

Розглянемо систему рівнянь Нав'є – Стокса для нестисливої рідини

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\mathrm{div}(VV)=\frac{\eta}{\rho}\Delta V \qquad (7.27)$$

Матриця головної частини системи має вигляд:

$$A_0(x,D)=\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}.$$

Характеристична форма запишеться у вигляді:

$\det\begin{bmatrix} |\xi|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\xi|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\xi|^2 \end{bmatrix}=|\xi|^6=0$, де $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. Враховуючи, що характеристична форма містить лише три змінних, а рівняння містить чотири, можемо зробити висновок, що система (7.27) є параболічною.

Лекція 15

§8. Постановка основних граничних задач для лінійних диференційних рівнянь 2-го порядку, коректність, класичні та узагальнені розв'язки

[1, стор.68 - 77]

Серед множини математичних моделей, які були розглянуті в попередніх параграфах можна виділити найтиповіші математичні моделі, які концентрують в собі головні особливості усіх розглянутих вище. Ці моделі представляють собою граничні задачі для рівнянь трьох типів: еліптичних, параболічних та гіперболічних лінійних рівнянь другого порядку.

Розглянемо основний диференціальний оператор другого порядку:

$$Lu = \operatorname{div}\left(p(x)\operatorname{grad}(u)\right) - q(x)u \qquad (8.1).$$

Запишемо основні диференціальні рівняння:

$Lu = -F(x)$, $x \in \Omega \quad \Omega \subset R^n$ - еліптичне рівняння (8.2);

$\rho(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu + F(x,t) \quad x \in \Omega, t > t_0$, - параболічне рівняння (8.3);

$\rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = Lu + F(x,t) \quad x \in \Omega, t > t_0$, - гіперболічне рівняння (8.4).

Гранична задача для еліптичного рівняння

Будемо розділяти внутрішні і зовнішні задачі для еліптичного рівняння, а саме, якщо $x \in \Omega$, то таку задачу будемо називати внутрішньою, якщо $x \in \Omega'$ – задача зовнішня.

В подальшому ми будемо розглядати класичні розв'язки граничних задач. Це означає, що рівняння і усі граничні умови виконуються в кожній точці області або границі.

Введемо обмеження на коефіцієнти рівняння p і q та вільний член F. Зокрема будемо припускати, що $p>0, p\in C^1(\Omega), q\geq 0,\ q\in C(\Omega),\ F(x)\in C(\Omega)$.

Позначимо $\partial\Omega = S$ - поверхню на якій задаються граничні умови загального вигляду $\alpha(x)\dfrac{\partial u}{\partial n}+\beta(x)u\big|_S = V(x)$ (8.5),

$\alpha,\beta\geq 0\ \ \alpha,\beta,V\in C(S)$. З умови (8.5) можна отримати умови 1,2, 3 роду зокрема:

$u\big|_S = \dfrac{V(x)}{\beta(x)}$ - Дірихле (8.6)

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \dfrac{V(x)}{\alpha(x)}$ - Неймана (8.7)

$\dfrac{\partial u}{\partial n}+\dfrac{\beta}{\alpha}u\big|_S = \dfrac{V}{\alpha}$ - Ньютона (8.8)

Таким чином гранична задача для еліптичного рівняння може бути сформульована наступним чином: знайти функцію $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, яка в кожній внутрішній точці області Ω (для внутрішньої задачі) або Ω' (для зовнішньої задачі) задовольняє рівняння (8.2), а кожній точці границі S виконується **одна** з граничних умов (8. 6), (8. 7) або (8. 8).

У випадку зовнішньої граничної задачі в нескінченно віддаленій точці області слід задавати додаткові умови поведінки розв'язку. Такі умови називають умовами регулярності на нескінченості. Як правило вони полягають в завданні характеру спадання розв'язку і мають вигляд: $u(x)=O\left(\dfrac{1}{|x|^{\alpha}}\right),\ |x|\to\infty$ (8.9),

де α - деякий параметр задачі.

Постановка змішаних задач для рівняння гіперболічного типу

Задача Коші для гіперболічного рівняння

Для постановки граничних задач рівняння гіперболічного типу (8.4) введемо просторово – часовий циліндр, як область зміни незалежних змінних x,t:

$$Z(\Omega,T)=\Omega\times(0,T] \qquad (8.11)$$

Для отримання єдиного розв'язку гіперболічного рівняння, на нижній основі просторово – часового циліндру $Z_0(\Omega,T)=\Omega\times(t=0)$ треба задати початкові умови:

$$u(x,0)=u_0(x) \quad x\in\ \Omega \qquad (8.12)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=v_0(x) \quad x\in\ \Omega \qquad (8.13)$$

На боковій поверхні просторово – часового циліндру $Z_S(\Omega,T)=S\times(0,T]$ треба задати граничні умови одного з трьох основних типів:

$u|_S=\varphi(x,t)$ - Дірихле (8.14);

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\varphi(x,t)$ - Неймана (8.15);

$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x,t)u|_S=\varphi(x,t)$ - Ньютона (8.16).

Таким чином постановка граничної задачі для гіперболічного рівняння має вигляд:

Знайти функцію $u(x,t)\in C^{(2,2)}(Z(\Omega,T))\cap C^{(1,1)}(\overline{Z(\Omega,T)})$, яка задовольняє рівнянню (8.4) для $(x,t)\in Z(\Omega,T)$, початковим умовам (8.12), (8.13) для $x,t\in\ Z_0(\Omega,T)$, і в кожній точці $x,t\in Z_S(\Omega,T)$ одній з граничних умов (8.14) – (8.16).

При цьому відносно вхідних даних будемо робити наступні припущення:

$$p>0,\ p\in C^1(\overline{\Omega}),q\geq 0,q\in C(\overline{\Omega}),F(x,t)\in C(\overline{Z(\Omega,T)}) \qquad (8.17),$$

$$u_0,v_0\in\ C(\overline{Z_0(\Omega,T)}),\ \ \alpha,\varphi\in\ C(\overline{Z_S(\Omega,T)}),\ \ \alpha\geq 0 \qquad (8.18).$$

Задача Коші

У випадку, коли область Ω має великі розміри і впливом граничних умов можна знехтувати, область Ω ототожнюється з усім евклідовим простором, тобто $\Omega=R^n$.

У зв'язку з відсутністю границі, граничні умови не задаються. В цьому

випадку гранична задача трансформується в задачу Коші для гіперболічного рівняння яка ставиться наступним чином:

Знайти функцію $u(x,t) \in C^{2,2}(Z(R^n,T)) \cap C^{1,1}(\overline{Z(R^n,T)})$, яка задовольняє рівняння (8.4) для $(x,t) \in Z(R^n,T)$, початковим умовам (8.12), (8.13) $x \in R^n$.

Постановка змішаних задач для рівняння параболічного типу

При постановці граничної задачі і задачі Коші для рівняння параболічного типу треба враховувати, що по часовій змінній рівняння має перший порядок, що і обумовлює деякі відмінності в постановці граничних задач.

Постановка граничної задачі для рівняння параболічного типу (8.3) має вигляд:

Знайти функцію $u(x,t) \in C^{2,1}(Z(\Omega,T)) \cap C^{1,0}(\overline{Z(\Omega,T)})$, яка задовольняє рівняння (8.3) для $(x,t) \in Z(\Omega,T)$, початковим умовам (8.12) для $x,t \in Z_0(\Omega,T)$, і в кожній точці $x,t \in Z_S(\Omega,T)$ одній з граничних умов (8.14) – 8.16).

Аналогічні зміни необхідно запровадити і при постановці задачі Коші для рівняння параболічного типу (записати самостійно постановку задачі Коші для параболічного рівняння (8.3).

Коректність задач математичної фізики

Зважуючи на фізичну природу задач математичної фізики, до них застосовуються наступні природні вимоги.

1. ***Існування розв'язку***. Задача повинна мати розв'язок (задача яка не має розв'язку не представляє інтересу як математична модель).

2. ***Єдиність розв'язку*** Не повинно існувати декілька розв'язків задачі.

3. ***Неперервна залежність від вхідних даних*** Розв'язок задачі повинен мало змінюватись при малій зміні вхідних даних.

Розглянемо математичну модель у вигляді наступної граничної задачі:

$$\begin{cases} Lu = f, \ x \in \Omega \\ lu = \varphi, \ x \in S = \partial\Omega \end{cases} \qquad (8.19).$$

Формулювання диференціального рівняння і граничних умов ще недостатньо що б гранична задача була сформульована однозначно. Необхідно додатково вказати які аналітичні властивості вимагаються від розв'язку, в якому розумінні задовольняється рівняння і граничні умови.

При аналізі граничної задачі виникають наступні питання:

- Чи може існувати розв'язок з відповідними властивостями?
- Які аналітичні властивості треба вимагати від вхідних даних f, φ, коефіцієнтів диференціального оператора і граничних умов?
- Чи існують серед умов задачі такі, що протирічать одне одному ?
- Які умови треба накладати на гладкість границі S.
- Чи достатньо сформульованих умов для однозначного знаходження розв'язку ?
- Чи можна гарантувати, що малі зміни f, φ приведуть до малих змін розв'язку

Перелічені проблеми зручно розв'язувати звівши граничну задачу до операторного рівняння. Застосувавши загальні методи теорії операторів та операторних рівнянь.

В першу чергу виберемо два бананових простора E та F.

Шуканий розв'язок розглядається як елемент E, а сукупність правих частин як елемент F.

Визначимо оператор A, як відображення $u \to \{Lu, \varphi\}$, тоді гранична задача (8.19) зводиться до операторного рівняння

$$Au = g, \ g = \{f, \varphi\} \qquad (8.20)$$

Позначимо $R(A)$ та $D(A)$ - область значень та область визначення оператора A. Коректність операторного рівняння визначають для пари просторів

E та F.

В термінах операторного рівняння (8.20) існування розв'язку означає, що область значень оператора $R(A)$ є не порожня підмножина F.

Єдиність розв'язку означає, що відображення $A: D(A) \to R(A)$ ін'єктивно і на $R(A)$ визначений обернений оператор A^{-1}

Відображення $A: D(A) \to R(A)$ називається ін'єктивним, якщо різні елементи множини $D(A)$ переводяться в різні елементи множини $R(A)$.

Вимога неперервної залежності розв'язку від правої частини або стійкості граничної задачі зводиться до неперервності або обмеженості оператора A^{-1}.

Приклад Адамара некоректно поставленої задачі.

Розглянемо рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi. \tag{8.21}$$

Додаткові умови

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0,\ u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{k}\sin kx. \tag{8.22}$$

Розв'язок $u_k(x,t) = \frac{1}{k^2}\mathrm{sh}(kt)\sin(kx),\ \forall x \quad \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sin(kx) = 0$,

$\forall t > 0, \quad \forall x \in (0,\pi) \quad \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\mathrm{sh}(kt)\sin(kx) = \infty$.

Для прикладу Адамара порушена умова непевної залежності розв'язку від вхідних даних.

Класичний і узагальнений розв'язки.

Класичний розв'язок - це розв'язок, який задовольняє рівнянню, початковим і граничним умовам в кожній точці, області, або границі.

Це означає, що класичний розв'язок повинен мати певну гладкість, яка

визначається порядком похідних рівняння і порядком похідних граничних і початкових умов.

Розглянемо рівняння $\operatorname{div}\left(p(x)\operatorname{grad}u\right)-q(x)u=-F(x), \quad x\in\Omega$

та однорідні умови $\quad u\big|_S=0$ (8.23).

Отримаємо інтегральне співвідношення.

Розглянемо функцію $v(x)$, таку, що $v\big|_S=0$, помножимо рівняння на v та проінтегруємо по Ω:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\left[\operatorname{div}\left(p(x)\operatorname{grad}u\right)-qu\right]d\Omega=-\iiint\limits_{\Omega} Fvd\Omega,$$

Після інтегрування за частинами отримаємо:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[p\left(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v\right)-quv\right]d\Omega+\iint\limits_{S} pv\frac{\partial u}{\partial n}dS=-\iiint\limits_{\Omega} Fvd\Omega.$$

Остаточно, після врахування граничних умов маємо:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[p\left(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v\right)+quv\right]d\Omega=\iiint\limits_{\Omega} Fvd\Omega, \qquad (8.24).$$

Інтегральна тотожність має зміст для більш широкого класу функцій ніж той якому належить класичний розв’язок граничної задачі і коефіцієнти рівняння.

Якщо $u,v\in C^2(\Omega)\bigcap C\left(\bar{\Omega}\right)$, $\quad p\in C^1(\Omega), q\in C(\Omega)$ то з тотожності (8.24), обернена ціпочка перетворень дозволяє отримати граничну задачу (8.23). Але (8.24) має зміст для функцій більш широкого класу, а саме $F,u,v,\mathbf{grad}u,\mathbf{grad}v\in L_2(\Omega)$, $\quad p,q$-обмежені. Це дозволяє використовувати інтегральну тотожність (8.24) для визначення узагальненого розв’язку граничної задачі (8.23).

Для цього введемо множину $N_2=\{u\big|\ u,\operatorname{grad}u\in L_2(\Omega), \quad u\big|_S=0\}$.

Узагальненим розв’язком граничної задачі (8.23) будемо називати довільну функцію $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{N}_2$, таку, що $\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{N}_2$ має місце інтегральна тотожність (8.24).

Формально спряжені оператори. Друга формула Гріна

[1, стор. 328 - 329]

Будемо розглядати лінійний диференціальний оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{N} B_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u \qquad (8.25)$$

Будемо припускати, $A_{i,j} = A_{j,i} \in C^1(\overline{\Omega}),\ B_k \in C(\overline{\Omega}),\ u \in C^2(\overline{\Omega})$

Розглянемо інтеграл:

$$\iiint_{\Omega} vLudx = = \iiint_{\Omega} v\left(\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{N} B_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u \right)dx. \qquad (8.26)$$

Для перетворення першої і другої суми застосуємо формулу інтегрування за частинами: $\iiint_{\Omega} v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}dx = \iint_{S} v(x)u(x)\cos(n,x_i)dx - \iiint_{\Omega} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx$ (8.27)

Після однократного застосування формули інтегрування за частинами отримаємо

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{vLudx} = \iiint_{\Omega}\left(-\sum_{i,j=1}^{N} A_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(B_k(x)v\right)u + C(x)uv \right)dx +$$

$$+\iint_{S} \left(\sum_{i,j=1}^{N}\left(A_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,x_j)v \right) + \sum_{k=1}^{N} B_k(x)uv\cos(n,x_k)\right)ds = \Psi.$$

Продовжимо інтегрування за частинами до першого інтегралу по області Ω, перекидаючи похідну з функції $\boldsymbol{u}$.

$$\Psi = \iiint_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{N} u\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{i,j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}) - \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(B_k(x)v\right)u + C(x)uv \right)dx +$$

$$+\iint_{S} \left(\sum_{i,j=1}^{N} A_{i,j}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v - \frac{\partial v}{\partial x_i}u \right)\cos(n,x_j) + \sum_{k=1}^{N} B_k(x)uv\cos(n,x_k)\right)ds.$$

Введемо наступний оператор

$$Mu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}(B_k(x)u) + C(x)u \qquad (8.28).$$

Враховуючи позначення (8.28), останню формулу можна записати у вигляді:

$$\iiint_{\Omega}(vLu - uMv)dx = \iint_{S}\left(\sum_{i,j=1}^{N} A_{i,j}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v - \frac{\partial v}{\partial x_i}u\right)\cos(n,x_j) + \sum_{k=1}^{N} B_k(x)uv\cos(n,x_k)\right)ds \quad (8.29)$$

Формула (8.29) називається другою формулою Гріна, а оператор (8.28) формально спряженим до оператора L.

Розглянемо основні оператори математичної фізики другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$\boldsymbol{A_1 u} = (\Delta + \boldsymbol{k}^2)\boldsymbol{u}$ -Гельмогольца (8.30)

$\boldsymbol{A_2 u} = (\boldsymbol{a}^2\Delta - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}})\boldsymbol{u}$ -теплопровідності (8.31)

$\boldsymbol{A_3 u} = (\boldsymbol{a}^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{t}^2})\boldsymbol{u}$ - хвильовий (8.32)

Оскільки оператори $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_3$ містять лише похідні другого порядку, то ці оператори є формально самоспряженими. Для оператора $\boldsymbol{A}_2$, згідно до формули (8.28) спряженим буде оператор $A_2^* v = (a^2\Delta + \frac{\partial}{\partial t})v$ (8.31')

Запишемо другу формулу Гріна для кожного з основних операторів.

$$\iiint_{\Omega}[v(\Delta u + k^2 u) - u(\Delta v + k^2 v)]dx = \iint_{S}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds \qquad (8.33)$$

$$\int_{t_0}^{T}\iiint_{\Omega}[v(a^2\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t}) - u(a^2\Delta v + \frac{\partial v}{\partial t})]dxdt =$$
$$= \int_{t_0}^{T}\iint_{S} a^2(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})ds - \iiint_{\Omega} uv\Big|_{t_0}^{T} dx \qquad (8.34)$$

$$\int_{t_0}^{T}\iiint_{\Omega}[v(a^2\Delta u-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})-u(a^2\Delta v-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2})]dxdt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\iint_{S}a^2(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n})dsdt-\iiint_{\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial t})\Big|_{t_0}^{T}dx \qquad (8.35)$$

Лекція 16

§ 9. Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння Плоскі хвилі

Характеристичні поверхні

[1, стор. 71 - 73]

В лекції 14 розглядалися питання класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з $n > 2$ незалежними змінними. Важливу роль при визначені типу рівняння і вибору нової системи координат відіграють характеристичні поверхні, які є аналогами характеристичних кривих (характеристик) для випадку рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай функція $\omega(x) \in C^1,\ x = x_1,....x_n,\ n \geq 2$ є такою що на поверхні $\omega(x) = 0,\ grad\,\omega(x) \neq 0$ та $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} = 0$ (9.1)

Тоді поверхню $\omega(x) = 0$ називають характеристичною поверхнею або характеристикою квазілінійного рівняння $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, gradu) = 0$.

При $n = 2$ характеристична поверхня називається характеристичною лінією.

Оскільки $grad\,\omega(x) \neq 0$, то сімейство характеристик $\omega(x) = const$ заповнює область таким чином, що через кожну точку області проходить одна характеристична поверхня.

Враховуючи закон перетворення коефіцієнтів рівняння $\overline{a_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$ при виборі заміни змінних $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, ...x_n),\ k = 1,...n$, знання однієї чи декількох характеристичних поверхонь дозволяє спростити

рівняння, зокрема, якщо $\xi_1 = \omega(x_1, x_2, ...x_n)$, то $\overline{a_{1,1}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = 0$.

Для хвильового рівняння $u_{tt}(t,x) = a^2\Delta u(t,x) + f(t,x), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ характеристичне рівняння має вигляд $\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0$. Одним з розв'язків цього диференціального рівняння першого порядку є функція $\omega(x,t) = a^2\left(t-t_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right)^2$ Поверхня $a^2\left(t-t_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right)^2 = 0$ (9.2) називається характеристичним конусом з вершиною в точці $\left(x_0, t_0\right)$ є характеристичною поверхнею (характеристикою) хвильового рівняння.

Характеристичний конус є границею конусів $\Gamma^+(x_0,t_0) = \left[a\left(t-t_0\right) > \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\Gamma^-(x_0,t_0) = \left[-a\left(t-t_0\right) > \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, які називають конусами майбутнього та минулого відповідно.

Хвильове рівняння має інше сімейство характеристичних поверхонь

$a(t-t_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})e_i = 0$, де e_i, $i = 1..n$ довільні числа такі, що $\left|\overline{e}\right| = 1$.

Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни

Довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу з двома незалежними змінними

$$a_{11}(\xi,\eta)U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2a_{12}(\xi,\eta)U_{\xi\eta}(\xi,\eta) + a_{22}(\xi,\eta)U_{\eta\eta}(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)$$

може бути зведене до одного із рівнянь:

$$u_{xt}(t,x) = f(x,t,u,u_1,v_x), \qquad (9.3),$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_t,u_x). \qquad (9.4).$$

Коефіцієнти $a_{ij}(\xi,\eta)$ $(i, j = 1,2)$ і права частина $f(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)$ вважаються

неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (9.4) до тепер ми вважали, що носієм початкових умов є пряма $t = 0$.

На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \qquad (9.5)$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива L, яка є відмінною від прямої $t = 0$, причому встановимо, яким умовам повинна задовольняти крива L і який вигляд повинні мати самі початкові умови, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через D обмежену область фазової площини xOt з кусково-гладкою жордановою межею S. Нехай $u(t,x) \in C^2(D) -$ розв'язок рівняння (9.5), який має неперервні частинні похідні 1-го порядку в області $\overline{D} = D \bigcup S$.

Інтегруючи тотожність (9.3) по області D і використовуючи формулу Гріна

$\iint\limits_D (Q_x(x,t) - P_t\ (x,t))dxdt = \int\limits_S Pdx + Qdt$, де криволінійний інтеграл в правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, одержуємо

$$\iint\limits_D (u_{xx} - u_{tt})dx\,dt = \int\limits_S u_x dt + u_t\,dx = \iint\limits_D f(x,t)dxdt \qquad (9.6)$$

Нехай $L -$ розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умовам:

кожна пряма із двох сімей характеристик $x + t = const$, $x - t = const$ рівняння (9.5) перетинає криву L не більше, ніж в одній точці;

напрям дотичної до кривої L в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (9.5).

Іноді таку криву L називають «вільною».

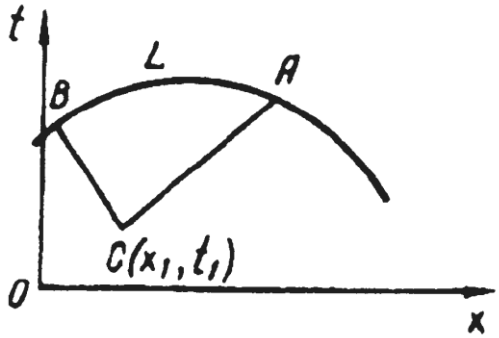


Рисунок 1

Припустимо, що характеристики $x - x_1 = t - t_1$ і $x - x_1 = t_1 - t$, які виходять із точки С, перетинаються із кривою L в точках A і B (рис.1).

Застосовуючи формулу (9.4) в області, яка обмежена дугою AB кривої L і відрізками характеристик $[CA]$ і $[CB]$, одержуємо

$$\int\limits_{AB+[BC]+[CA]} u_x dt + u_t dx = \iint\limits_D f(x,t)dxdt \qquad (9.7)$$

Оскільки вздовж $[BC]$ і $[AC]$ маємо $dx = -dt, \quad dx = dt$ відповідно, то (9.5) запишеться у вигляді $\int\limits_{AB} u_x dt + u_t dx - 2u(C) + u(A) + u(B) = \iint\limits_D f(x,t)dxdt$, звідки знаходимо $u(C) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} u_x dt + u_t dx - \frac{1}{2}\iint\limits_D f(x,t)dxdt$ (9.8)

Якщо розв’язок рівняння (9.3) задовольняє умовам

$$u\big|_L = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_L = \psi(x) \qquad (9.9)$$

де φ і $\psi -$ задані дійсні відповідно два рази і один раз неперервно диференційовні функції, а $l -$заданий на L достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої L. Визначимо u_x і u_t із рівностей $u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad u_x \frac{dx}{dl} + u_t \frac{dt}{dl} = \psi,$

де s – довжина дуги L, і підставляючи відомі значення u, u_x, u_t в праву

частину (9.8), одержуємо розв'язок задачі Коші (9.5), (9.9).

Із наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (9.3), (9.7) є коректною, тобто вона має в розглядуваній області тільки єдиний розв'язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші і у випадку рівняння (9.3).

Для рівняння (9.3) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ($x = \text{const}, \quad t = \text{const}$). Отже, в цьому випадку всяка гладка крива L, яка перетинається не більш, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде «вільною». Нехай рівняння цієї кривої буде $t = g(x)$ (або $x = h(t)$). Вважаємо, що існують похідні $g'(x)$, $h'(t)$, відмінні від нуля. Тоді задача Коші може бути поставлена наступним чином: в області

$$D = \left\{ (t,x) \middle| \; x_0 < x < x_0 + \alpha, \qquad g(x) < t < t_0 + \beta \right\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (9.1), який на кривій L задовольняє умови $u\Big|_{t=g(x)} = \varphi(x), \; u_t\Big|_{t=g(x)} = \psi(x).$ (9.10)

Дані Коші (9.8) дозволяють на кривій $t = g(x)$ знайти значення похідної u_x.

Дійсно, диференціюючи по x першу із умов (9.10), одержуємо

$$u_x\Big|_{t=g(x)} + u_t\Big|_{t=g(x)} g'(x) = \varphi'(x), \text{або } u_x\Big|_{t=g(x)} = \varphi'(x) - \psi(x)\varphi'(x).$$

Узагальнена задача Коші для n- вимірного хвильового рівняння

У випадку хвильового рівняння в n – вимірному просторі

$$u_{tt}(t,x) = a^2 \Delta u(t,x) + f(t,x), \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{9.11}$$

носієм початкових умов може бути будь-яка «вільна» поверхня Σ, тобто гіперповерхня $\Psi(x,t) = 0$, яка задовольняє умовам:

в жодній її точці (x,t) не має місце рівність $\sum_{i=1}^{n} a^2 (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 = 0,$ тобто поверхня Σ не є характеристичною;

при $n \geq 2 \quad \sum_{i=1}^{n} a^2 (\Psi_{x_i})^2 - (\Psi_t)^2 < 0,$ (9.12)

Задача Коші ставиться наступним чином: знайти два рази неперервно диференційовний розв'язок рівняння (9.9), який задовольняє умови

$$u(t,x) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = \psi(x), \qquad (x,t) \in \Sigma, \qquad (9.13),$$

де $\mathbf{n}$ – заданий на Σ одиничний вектор нормалі, а $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - задані на Σ досить гладкі функції. Будемо вважати, що поверхня Σ задана рівнянням $t = \sigma(x)$.

Покажемо, що задачу Коші (9.11), (9.13) можна звести до задачі Коші з початковими умовами заданими на поверхні $\tau = 0$.

Замість змінної t введемо змінну $\tau = t - \sigma(x)$. Для такої заміни змінних отримаємо хвильове рівняння для функції $\tilde{u}(x,\tau) = u(x, \tau + \sigma(x))$.

Підрахуємо похідні, що входять в хвильове рівняння (9.11):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2}.$$

Таким чином хвильове рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2} + \frac{1}{a_0} f(x, \tau + \sigma(x))$$

(9.14), де $a_0 = \left[1 - a^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\right)^2\right] \neq 0$.

Остання нерівність випливає з того, що Σ задана рівнянням $t = \sigma(x)$ не є характеристичною поверхнею.

При обраній заміні змінних поверхня Σ переходить в площину $\tau = 0$.

А умови (9.13) приймають вигляд .

$$\tilde{u}\big|_{\tau=0} = u\big|_{\Sigma} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma} \qquad (9.15).$$

Залишається знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma}$. Для цього диференціюємо першу з умов (9.15).

Врахуємо, що $u\big|_{\Sigma} = \varphi(x) = u(x, \sigma(x)), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2 \ldots n$ (9.16)

Нормаль до поверхні Σ можна записати у вигляді $\mathbf{n} = \frac{1}{\Delta}\left(1, -\mathbf{grad}\,\sigma\right)$.

Диференціюємо $u(x,t)$ по нормалі і використаємо другу умову (9.11).

$$\psi(x) = \left.\frac{\partial u(x, \sigma(x))}{\partial n}\right|_{\Sigma} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \qquad (9.17).$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (9.16), (9.17) має єдиний розв'язок відносно невідомих величин $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2 \ldots n, \frac{\partial u}{\partial t}$ на будь – який поверхні Σ,

оскільки її визначник $\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & \ldots & -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \sigma}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left(-1\right)^n \Delta \neq 0$ (9.18)

Таким чином задача Коші з даними на вільній поверхні Σ є коректною.

Відзначимо, що умова «вільності» поверхні Σ є принциповою для коректної постановки задачі Коші. Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, x, y) = u_{xx}(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y). \qquad (9.19)$$

площина $y = 0$ не є вільною (не виконується умова (9.12)), ні характеристичною поверхнею. Функція $u_m(t, x, y) = \frac{1}{m^2}\operatorname{sh} my \sin\frac{m}{\sqrt{2}}(x + t)$, де m – натуральне число, є розв'язком рівняння (9.11), який задовольняє умови

$$u_m(t,x,y)\big|_{y=0}=0,\ u_y(t,x,0)=\frac{1}{m}\sin\frac{m}{\sqrt{2}}(x+t). \qquad (9.20)$$

Але задача Коші (9.13), (9.14) поставлена некоректно, тому що

$\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{m}{\sqrt{2}}(x+t)=0,$ а сам розв'язок $u_m(t,x,y)$ при $m\to\infty$ є необмеженим.

Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль

Розглянемо однорідне хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u_{tt}(t,x)=a^2\Delta u(t,x)+cu(t,x),\quad x=(x_1,x_2,...x_n). \qquad (9.21)$$

Покладемо $c=0$. Розв'язки рівняння (6.1) шукатимемо у вигляді

$$u(t,x)=f\left(bt+\langle\xi,x\rangle\right), \qquad (9.22),$$

де $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n),\ \langle\xi,x\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i x_i$.

при різних значеннях $t=t_0,t_1$ функція $u(t_1,x)$ відрізняється від $u(t_0,x)$ зсувом на вектор $-\left|\bar{\xi}\right|^{-2}\bar{\xi}b(t_1-t_0)$, дійсно

$$u(t_0,x+\bar{\xi}\left|\bar{\xi}\right|^{-2}b(t_1-t_0))=f(bt_0+<\xi,x+\bar{\xi}\left|\bar{\xi}\right|^{-2}b(t_1-t_0)>)=$$
$$=f(bt_0+<\xi,x>+<\xi,\xi>\left|\bar{\xi}\right|^{-2}b(t_1-t_0))=f(bt_1+<\xi,x>)=u(t_1,x)),$$

Розв'язок вигляду (9.22) прийнято називати *плоскою хвилею,* яка рухається вздовж напряму вектора $-\xi$ зі швидкістю $v=\left|\bar{\xi}\right|^{-1}b$.

Вираз $bt+<\xi,x>$ називається *фазою хвилі* (9.22), а f – *формою хвилі.* Якщо $b=0$, то хвиля (9.22) називається *стоячою*.

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти b і вектор $\bar{\xi}$, щоб функція (9.22) була розв'язком рівняння (6.1) при $c=0$. Підставимо (9.22) в (9.21). Отримаємо: $f''(bt+<\xi,x>)b^2=a^2f''(bt+<\xi,x>)\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$.

Вважаючи, що $f''(Q) \not\equiv 0$, маємо $b^2 = a^2 \left|\bar{\xi}\right|^2$. (9.23)

Розв'язками цього рівняння є вектори $\bar{N} = (\xi, b) \in R_{n+1}$, які лежать на конусі K в R_{n+1}, основою якого є сфера $\left|\bar{\xi}\right| = ba^{-1}$.

Означення 1. *Вектор* $\bar{N} = (\xi, b) \in E_{n+1}$, $\bar{N} \neq 0$, *який задовольняє рівняння (9.23), називається характеристичною нормаллю хвильового рівняння (9.21). Гіперплощина* $N^{\perp} = \left\{(t, x) \in R_{n+1} \mid bt + <\xi, x> = \text{const}\right\}$ *називається характеристичною гіперплощиною хвильового рівняння (9.21)*

Ця площина перпендикулярна до характеристичної нормалі $\bar{N}$.

Означення 2 *Гіперповерхня в* R_{n+1} *називається характеристичною, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.*

Характеристичне рівняння (9.23) свідчить, що швидкість поширення всіх плоских хвиль, які задовольняють рівняння (9.21), дорівнює a:

$$v^2 = \frac{b^2}{\left|\xi\right|^2} = a^2 \quad . \qquad (9.24)$$

Справедливе й обернене твердження. Для довільного $\bar{N} \in R_{n+1}$, який задовольняє (9.23), плоска хвиля (9.24) є розв’язком рівняння (9.21) при довільній функції $f(bt + <\xi, x>)$. В окремому випадку $f(bt + <\xi, x>)$ може бути й розривною (або функцією, яка швидко змінюється) в деякій точці, наприклад при $bt + <\xi, x> = 2$ Тоді розв’язок (9.22) буде мати той самий розрив уздовж всієї гіперплощини в R_{n+1} $(\xi \neq 0)$:

$$bt + <\xi, x> = 2 \quad . \qquad (9.25)$$

При фіксованому t цей розрив розміщений на площині в E_n з рівнянням (9.25). Ця площина рухається із зростанням t у напрямі перпендикулярного їй вектора $-\bar{\xi}$, зі швидкістю $v = a = b\left|\bar{\xi}\right|^{-1}$.

Звідси можна зробити висновок:

1) довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (9.21) при $c = 0$;

2) усі плоскі хвилі й розриви цих хвиль, які задовольняють рівняння (9.21) при $c = 0$, поширюються зі швидкістю a у напрямі вектора $-\bar{\xi}$ без спотворення (хвиля без дисперсії[1]).

Зазначимо, що з формулою (9.24) пов'язане відкриття електромагнітної природи світла і спеціальної теорії відносності. Так, із рівнянь електродинаміки Максвелл вивів, що потенціали електромагнітного поля задовольняють хвильове рівняння $u_{tt}(t,x,y,z) = a^2 \Delta u(t,x,y,z)$, де $a^2 = (\varepsilon\mu)^{-1}$, ε і μ – відповідно діелектрична та магнітна проникність вакууму. Останні величини знаходяться експериментально з чисто електромагнітних вимірювань. Після обчислення Максвеллом швидкості поширення електромагнітних хвиль виявилось, що вона з великою точністю збігається із швидкістю світла: $a = (\varepsilon\mu)^{-1/2} \approx 299976$ км/с. Звідси Максвелл зробив висновок, що світло має електромагнітну природу.

Розглянемо диференціальне рівняння (9.21), коли $c \neq 0$. Якщо

[1] Дисперсія — від латинського dispersio – розсіяння.

$u(t,x) = f(bt + <\xi, x>)$ – плоска хвиля для рівняння (9.21), то ми відразу дістаємо для заданих ξ і b рівняння

$$f''(bt + <\xi, x>)(a^2\left|\overline{\xi}\right|^2 - b^2) + f(bt + <\xi, x>)c = 0 \quad (9.26).$$

Отже, в цьому разі функція $f(bt + <\xi, x>)$ не може бути довільною – вона повинна бути розв'язком рівняння (9.26). Очевидно, що для швидкості $v = a$, тобто для $a^2\left|\overline{\xi}\right|^2 = b^2$, уже не існує біжучої плоскої хвилі. Але для інших швидкостей і для довільного напряму можливі форми хвиль визначаються із рівняння (9.26) і є експоненціальними функціями. У зв'язку з цим напрям руху хвилі і її швидкість, яка відповідає рівнянню (9.21), можуть задаватися довільним чином (за винятком $v = a$), але при цьому можливі тільки спеціальні форми плоских хвиль. З фізичних міркувань виключаються із розгляду розв'язки, які не є рівномірно обмеженими функціями в просторі. Беручи до уваги, що

$$f(bt + <\xi, x>) = f(v\left|\overline{\xi}\right|t - <e, x>\left|\overline{\xi}\right|) = f((vt - <e, x>)\left|\overline{\xi}\right|) = g(vt - <e, x>),$$

де $g(z) = f(z\left|\overline{\xi}\right|); \overline{e} = -\overline{\xi}\left|\overline{\xi}\right|^{-1}, \quad \left|\overline{e}\right| = 1; \quad z = vt - <e, x>$, маємо:

$$g''(z)(a^2\left|\overline{\xi}\right|^2 - b^2) + g(z)c = 0 \quad (9.26')$$

Рівномірно обмежені розв'язки рівняння (9.26') можна записати у вигляді $g(z) = e^{-ikz}$, при виконанні рівності $-(kv)^2 = -a^2k^2 + c$. (9.27)

Позначимо $\omega = kv$ - частота хвилі.

Таким чином, хвиля довільної форми, що задовольняє рівняння (9.21) при виконанні умови (9.27) може бути зображена як суперпозиція гармонічних хвиль вигляду: $u_k(t,x) = e^{-ik(vt - <e,x>)}$, (9.28)

З (9.27) маємо $-\omega^2 = -a^2k^2 + c$,

Тобто $k = \pm\frac{1}{a}\sqrt{c + \omega^2}$ і гармонічні коливання (9.28) матимуть фазову

швидкість $\frac{\omega}{k}$, яка залежатиме від частоти ω, що дорівнює $v = \frac{\omega}{k} = \frac{a\omega}{\sqrt{c+\omega^2}}$.

Отже, $u_k(t,x) = e^{-\frac{i}{a}\sqrt{c+\omega^2}\left(\frac{a\omega}{\sqrt{c+\omega^2}}t - <e,x>\right)}$. (9.29)

Оскільки розв'язок рівняння (9.21) – це суперпозиція хвиль вигляду (9.29), які поширюються в одному й тому самому напрямі, причому всі ці хвилі мають форму, яка задовольняє рівняння (9.26), то різні компоненти поширюються з різними швидкостями; отже, форма складової хвилі $u(t,x)$ змінюватиметься з часом t і хвильовий процес при своєму поширенні буде спотворюватися (хвилі з дисперсією). Кажуть, що якщо фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від частоти, то рівняння (9.21) описує явище дисперсії.

Очевидно, що якщо рівняння (9.21) не допускає розв'язків у вигляді хвиль довільної форми, то має місце дисперсія хвиль. Доданок $cu(t,x)$ в рівнянні (9.21) іноді називають *дисперсійним членом.*

Для прикладу розглянемо телеграфне рівняння, яке описує електричні коливання в провідниках

$$u_{xx}(t,x) - LCu_{tt} - (RC+LG)u_t(t,x) - RGu(t,x) = 0, \qquad (9.30),$$

де C – місткість, R – омічний опір; L – індуктивність; G – втрата ізоляції. Всі ці величини розраховані на одиницю довжини провідника Позначимо $b = RC + LG, \quad d = RG, \quad a^2 = (LG)^{-1}$ і введемо нову невідому функцію

$$v(t,x) = u(t,x)e^{0,5a^2bt}. \qquad (9.31)$$

Тоді рівняння (6.10) запишеться у вигляді

$$a^2 v_{xx}(t,x) - v_{xx}(t,x) + cv(t,x) = 0, \qquad (9.32),$$

де $c = \frac{a^2}{4}(a^2b^2 - 4d) = \frac{a^4}{4}(b^2 - 4\frac{d}{a^2}) = \frac{a^4}{4}(RC - LG)^2$.

Отже, на підставі попередніх міркувань при виконанні умови

$$RC = LG \qquad (9.33),$$

тобто $c = 0$ рівняння (9.32) буде мати хвилі без дисперсії і в силу (9.31), рівняння (9.30) має хвилі без дисперсії із згасанням вигляду

$$u(t,x) = e^{-Kt} f(x - at), \quad u(t,x) = e^{-Kt} f(-x - at)$$, де $K = 0{,}5\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)$.

Коли коефіцієнти рівняння (9.30), які характеризують провідник, задовольняють умову (9.33). то в провіднику хвилі довільної форми поширюються без спотворення і можуть лише затухати. Але це затухання в пункті прийому хвиль - сигналів завжди можна компенсувати за рахунок їх підсилення, тим самим можна точно відновити сигнали, які передаються по провіднику.

Ця обставина має дуже важливе значення в галузі телефонного зв'язку при передаванні сигналів по кабелях на великі віддалі.

Зауважимо нарешті, що рівняння (9.21) при $c = 0$ можуть мати, крім плоских хвиль, хвилі інших форм. Наприклад, якщо $n = 3$, характеристиками для рівняння (9.21) будуть також поверхні

$r - at = \text{const}, \quad -r - a = \text{const}$, де $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{i,0})^2}$, $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ – фіксована точка, а функції $u = \frac{1}{4\pi r} f(r - at)$, $u = \frac{1}{4\pi r} f(-r - at)$ – хвилі без дисперсії із затуханням для рівняння (6.1) при $n = 3$ і $c = 0$. Ці хвилі називаються *сферичними*.

Теоретичні питання другого модуля

1. Закон збереження тепла в просторі, інтегральна форма запису, фізичний зміст.
2. Записати диференціальне рівняння теплопровідності, окремі випадки рівняння, фізичний зміст.
3. Записати основні типи додаткових умов рівняння теплопровідності, основні крайові умови, фізичний зміст.
4. Постановка задачі Стефана, її фізичний зміст.
5. Інтегральний закон збереження маси, для рівняння дифузії.
6. Диференціальне рівняння дифузії, його частинні випадки.
7. Граничні умови рівняння дифузії, фізичний зміст.
8. Закон збереження маси для ідеальної рідини в інтегральній та диференціальній формах.
9. Закон збереження імпульсу для ідеальної рідини в диференціальній та інтегральній формах.
10. Закон збереження повної енергії ідеальної рідини в інтегральній та диференціальній формах, рівняння стану середовища.
11. Ізоентропічні течії рідини, рівняння руху для ізоентропічних течій.
12. Циркуляція векторного поля швидкості, теорема Томсона.
13. Потенціальні течії, рівняння потенційної течії рідини, інтеграл Коші -Лагранжа.
14. Основні типи граничних умов для руху ідеальної рідини на твердих поверхнях, умови на поршні, умови на вільній границі
15. Основні типи граничних умов для руху ідеальної рідини на границях каналу.
16. Принцип лінеаризації, рівняння акустики.
17. Принцип лінеаризації, модель обтікання тонких тіл.
18. Тензор в’язких напружень, закон збереження імпульсу для в’язкої рідини.
19. Закон збереження повної енергії для в’язкої рідини.
20. Основні типи граничних умов для в’язкої рідини.
21. Поняття тензора напружень, закон рівноваги елемента поверхні.
22. Поняття тензора напружень, закон рівноваги елемента об’єму.
23. Перетворення тензора напружень у прямокутній системі координат, головні осі тензора напружень.
24. Поняття тензора деформацій, основні види деформацій,зв’язок з переміщеннями.
25. Перетворення тензора деформацій в прямокутній системі координат, головні осі тензора деформацій.
26. Закон Гука, зв’язок між тензором напружень та тензором деформацій.
27. Статичні та динамічні рівняння теорії пружності.
28. Граничні умови для рівнянь теорії пружності.
29. Постановка граничної задачі про коливання струни.
30. Постановка граничної задачі про коливання стрижня
31. Електростатичні поля точкових та просторово розподілених зарядів, принцип суперпозиції полів.
32. Теорема Гауса для електростатичних полів.
33. Поняття потенційності електростатичного поля, потенціал рівняння електростатики.
34. Поле диполя, поняття потенціалу подвійного шару (поверхня заряджена диполями).
35. Постановка першої та другої граничних задач електростатики, граничні умови, фізичний зміст.
36. Магнітні поля, закон Біо – Савара, магнітне поле прямого струму.

37. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля, закон циркуляції напруженості магнітного поля.
38. Основні рівняння магнітостатики у вакуумі та магнетиках.
39. Граничні умови на границі двох магнетиків.
40. Постановка основних крайових задач для еліптичних рівнянь.
41. Постановка основних крайових завдань для параболічних рівнянь.
42. Постановка основних крайових завдань для гіперболічних рівнянь.
43. Поняття коректності граничних задач математичної фізики.
44. Приклад Адамара некоректної постановки граничних задач.
45. Поняття узагальнених розв'язків граничних задач, принцип його введення, приклад.
46. Друга формула Гріна для диференціального оператора другого порядку, формально спряжений оператор.
47. Друга формула Гріна для основних операторів математичної фізики другого порядку.
48. Принципи класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними, основні типи, канонічні форми запису.
49. Принципи класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з $n > 2$ незалежними змінними, основні типи, канонічні форми запису.
50. Загальні принципи класифікації диференціальних рівнянь і систем диференціальних в частинних похідних довільного порядку.
51. Поняття характеристичних поверхонь для гіперболічних рівнянь.
52. Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни.
53. Узагальнена задача Коші для n – вимірного хвильового рівняння.
54. Плоськи хвилі, дисперсія хвиль.

Лекція 17

Глава 3 Дослідження граничних задач математичної фізики та методів по побудови їх розв'язків

§ 1 Поняття узагальнених функцій та дії над ними

[1,стор. 82 - 146]

Поняття узагальнених функцій виникло як результат природного розширення класичного поняття функції. Так, виконання деяких дій над класичними функціями виводить за межи таких. Вперше узагальнену функцію в математичні дослідження у 1947 році ввів англійський фізик Поль Дірак у своїх квантово-механічних дослідженнях. Така функція отримала назву δ - функція Дірака. Ця функція дозволяє записати просторову щільність фізичної величини (маси, величини заряду, інтенсивності джерела тепла, сили тощо) зосередженої або прикладеної в одній точці.

Розглянемо приклад, який дає уявлення про δ - функцію. Нехай ε- окіл точки $x=0$ прямої є джерелом тепла одиничної інтенсивності. Будемо припускати також, що джерело рівномірно розподілене по довжині ε - околу. Враховуючи припущення, джерело тепла може бути описане наступною функцією

$$\boldsymbol{f}_{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x}>-\varepsilon \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le \boldsymbol{x}\le\varepsilon \\ 0, & \boldsymbol{x}>\varepsilon\end{cases} \qquad (1.1).$$

При цьому важливо, що сумарна кількість тепла, що виділяється ε - околом дорівнює одиниці, тобто $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(x)dx=1$ (1.2).

Припустимо, що фізичний розмір джерела такий малий, що його розмірами можна нехтувати, тобто будемо вважати що джерело є точковим.

В цьому випадку природно визначити функцію

$$\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{f}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, \ \boldsymbol{x} \neq 0 \\ \infty, \boldsymbol{x} = 0 \end{cases} \qquad (1.3).$$

Легко бачити, що інтеграл Лебега функції $f_0(x)$ існує і $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(x)dx = 0$.

Тобто користуючись звичайним граничним переходом (поточковою границею) ми отримуємо функцію, яка не моделює одиничне точкове джерело тепла.

Для коректного визначення граничної функції будемо розглядати замість сильної (поточкової) границі, слабку границю.

Введемо набір пробних функцій $D(R^n) = \overset{0}{C}{}^{\infty}(R^n)$ - множину нескінченно диференційованих в R^n функцій з компактним носієм. Тобто таких функцій, що для кожної існує куля $U_A(0)$ радіусу A, що за межами цієї кулі функція обертається в тотожній нуль з усіма своїми похідними.

Покажемо, що $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ для $\forall\, \varphi \in D(R^1)$.

Дійсно: $\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx =$

$$\frac{1}{2\varepsilon}\eta(\varepsilon) \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = \eta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to \infty}{\to} 0$$

Це означає, що слабка границя дорівнює $\varphi(0)$ для $\forall \varphi \in D(R^1)$.

Таким чином δ - функцію Дірака можна визначити, як слабку границю послідовності функції $f_\varepsilon(x)$ на множині $D(R^1)$, що збігається до числа $\varphi(0)$ при

Можна записати

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx \qquad (1.4).$$

Останню рівність будемо розглядати як лінійний неперервний функціонал, який будь – якій функції $\varphi \in D(R^1)$ ставить у відповідність число $\varphi(0)$.

Означення *Узагальненою функцією* f *будемо називати будь – який лінійний неперервний функціонал* $\langle f, \varphi \rangle$ *заданий на множині основних (пробних) функцій* $\varphi \in D(R^n)$.

Лінійність і неперервність розуміємо в традиційному сенсі:

$$< f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 >= a_1 < f, \varphi_1 > + a_2 < f, \varphi_2 >,$$

$$\lim_{k\to\infty}(f, \varphi_k) = 0 \ \ \forall \left\{\varphi_k\right\}_{k=1,\infty}, \ \ D^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\varphi_k(x) \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} 0. \qquad (1.5)$$

Серед усіх узагальнених функцій виділяють клас регулярних узагальнених функцій , які можуть бути представлені у вигляді

$$\langle f, \varphi \rangle = \iiint\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \qquad (1.6)$$

з функцією $f(x) \in L_1^{loc}(R^n)$ - тобто абсолютно інтегрованою функцією на будь – якому компакті, що належить R^n. При цьому кожна локально інтегрована функція визначає єдину регулярну узагальнену функцію і навпаки, кожна регулярна узагальнена функція визначає єдину локально інтегровану функцію.

При цьому єдність означає, що дві локально інтегровані функції співпадають якщо вони відрізняються між собою на множині нульової міри.

Усі інші лінійні неперервні функціонали визначають сингулярні узагальнені функції. Прикладом останніх може служити δ - функція Дірака. Дуже часто узагальнені функції називають також розподілами.

Хоча сингулярні узагальнені функції є частинним випадком узагальнених функцій, але для їх представлення найчастіше використовується позначення (1.6) таке саме як і для регулярних узагальнених функцій.

Справа в тому, що для будь – якої сингулярної узагальненої функції $< f, \varphi >$ можна побудувати послідовність регулярних узагальнених функцій, яка слабко

збігається до неї. Ця послідовність неєдина.

Тобто, існує $\{f_k\}_{k=1..\infty} \in L_1^{loc}(R^n)$, що $\lim\limits_{k\to\infty} \iiint\limits_{R^n} f_k(x)\varphi(x)dx =< f, \varphi >$.

Зауважимо, що δ - функцію ми побудували як границю $\boldsymbol{f_\varepsilon(x)}$, яку можна було назвати δ - образною послідовністю.

Можна навести і інші приклади δ - образних послідовностей:

$$f_m(x) = \frac{m}{\pi(1+m^2x^2)} \qquad f_m(x) = \frac{\sin mx}{\pi x} \qquad f_m(x) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-m^2x^2}{2}}$$

Узагальнені функції та фізичні розподіли

Узагальнені функції (часто їх називають розподілами) можна інтерпретувати як розподіл електричних, магнітних зарядів або розподіл мас, тощо. Так наприклад функцію Дірака можна трактувати як щільність з якою розподілена маса, що дорівнює одиниці в точці $\boldsymbol{x} = 0$. Аналогічним чином можна ввести і здвигнуту функцію Дірака.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a). \qquad (1.7)$$

Використовуючи (1.7) можна зобразити щільність розподілу зосереджених мас або іншої фізичної величини в точках прямої.

Так, якщо в точках $\boldsymbol{x_i}$ розташовані зосереджені маси $\boldsymbol{m_i}$, $\boldsymbol{i} = 1,2,...$, то щільність такого розподілу мас можна зобразити у вигляді $\rho(x) = \sum\limits_{i=1} m_i \delta(x - x_i)$

При цьому повна маса, зосереджена на прямій можна порахувати $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = \sum\limits_i m_i$.

Аналогічно δ - функції, введеній на прямій, можна ввести δ - функцію для $N-$вимірного евклідова простору.

$$\iiint\limits_{R_N} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a) \qquad (1.8).$$

Тобто щільність розподілу точкових мас у просторі можна також записати у вигляді $\rho(x) = \sum_{i=1} m_i \delta_3(x - x_i)$.

Точковий одиничний електричний заряд розташований в точці $\boldsymbol{x}_0$ створює потенціал рівний $\iiint\limits_{R_3} \delta(y - x_0) \frac{1}{4\pi|x-y|} dy = \frac{1}{4\pi|x - x_0|}$ в точці $x \in R_3$. В цьому випадку $\delta(y - x_0)$ можна сприймати як щільність одиничного точкового заряду.

Якщо щільність зарядів $f(y)$ представляє собою локально інтегровану функцію, то маємо для потенціалу електростатичного поля відому формулу електростатики: $\mathrm{P}(x) = \iiint\limits_{R^3} f(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dy$.

Узагальненням точкової функції Дірака є так звана поверхнева функція Дірака, яку можна визначити як лінійний неперервний функціонал

$$< \delta_S, \varphi >= \iint\limits_S \varphi(x) dx \qquad (1.9).$$

Ця узагальнена функція може бути інтерпретована як щільність розподілу зарядів на поверхні $\boldsymbol{S}$. Потенціал електростатичного поля можна записати у вигляді

$$W(x) =< \mu(y)\delta_S(y), \frac{1}{4\pi|x-y|} >= \iiint\limits_{R_3} \mu(y)\delta_S(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dy =$$

$$= \iint\limits_S \frac{\mu(y)dy}{4\pi|x-y|}. \qquad (1.10).$$

Легко бачити, що $W(x)$ представляє собою потенціал електростатичного поля, утворений зарядженою поверхнею S і називається потенціалом простого шару.

Дії над узагальненими функціями

Головною перевагою узагальнених функцій є те, що будь – яка узагальнена функція має похідні будь – якого порядку.

Для визначення похідної узагальненої функції розглянемо звичайну неперервно диференційовану функцію $f(x)$ і скористаємось наступною формулою інтегрування за частинами:

$$\int_{R^n} D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^n} f(x) D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi(x)dx \qquad (1.11),$$

яка є вірною для будь – якої функції $\varphi \in D(R^n)$. Права частина рівності (1.11) має зміст для будь – якої локально інтегрованої функції. Таким чином похідною $D^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ будь – якої локально інтегрованої функції $\boldsymbol{f}$ будемо називати лінійний неперервний функціонал $< D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} f, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^n} f(x) D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi(x)dx$ (1.12).

Аналогічним чином вводиться похідна і для сингулярних узагальнених функцій. Тобто $D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} f$ визначається як лінійний неперервний функціонал

$$< D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} f, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < f, D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi > \qquad (1.12')$$

Розглянемо приклади обчислення похідних деяких узагальнених функцій.

Приклад 1 Знайти $\theta'(x)$, де $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - функція Хевісайда.

Розглянемо наступні рівності:

$< \theta', \varphi > = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = < \delta, \varphi >$. Таким чином можна записати $\theta'(x) = \delta(x)$.

Приклад 2 Знайти $\delta^{(2)}(\boldsymbol{x})$

$$< \delta^{(2)}, \varphi > = < \delta, \varphi^{(2)} > = \varphi^{(2)}(0).$$

Приклад 3. $f(x)$ - кусково неперервно диференційована функція, яка має в деякій точці $\boldsymbol{x}_0$ розрив першого роду.

$$< f', \varphi > = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$-f(x_0-0)\varphi(x_0)+f(x_0+0)\varphi(x_0)+\int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx+\int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx=$$

$$\varphi(x_0)\left[f(x_0)\right]+\int_{-\infty}^{\infty_0} f(x)\varphi'(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}([f(x_0)]\delta(x-x_0)+\{f'(x)\})\varphi(x)dx$$

Де $[f(x_0)]=f(x_0+0)-f(x_0-0)$. $\{f'(x)\}$ - локально інтегрована функція, яка співпадає з звичайною похідною функції $f(x)$ в усіх точках де вона існує.

Таким чином для функції, яка має скінчену кількість точок розриву першого роду має місце така формула обчислення похідної:

$$f'(x)=\left\{f'(x)\right\}+\sum_i\left[f(x_i)\right]\delta(x-x_i) \qquad (1.13)$$

Приклад 4 Нехай функція $f(x)$ задана в просторі R^3 кусково неперервно-диференційована і має розрив першого роду на кусково–гладкій поверхні S. Будемо припускати, що поверхня S розділяє простір R^3 на два півпростори R^3_+ та R^3_- Зафіксуємо на S напрям нормалі, яка направлена всередину R^3_+.

Визначимо похідну від $f(x)$.

$$<\frac{\partial f}{\partial x_i},\varphi>=-\iiint_{R^3} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx=-\iiint_{R^3_+} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx-$$

$$-\iiint_{R^3_-} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx=\iint_S f(x+0)\varphi(x)\cos(n,x_i)ds-\iint_S f(x-0)\varphi(x)\cos(n,x_i)ds+$$

$$+\iiint_{R^3_-}\varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx+\iiint_{R^3_+}\varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx=\iiint_{R_3}(\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\}+\delta_S(x)[f(x)]_S\cos(n,x_i))\varphi(x)dx$$

Де $\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\}$ - класична похідна функції $f(x)$ в усіх точках, де вона існує. $\left[f(x)\right]_S=\left(f(x+0)-f(x-0)\right)\Big|_{x\in S}$ - стрибок функції $f(x)$ на поверхні S.

Таким чином можна записати, що

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}+\left[f\right]_{S(x)}\cos(n,x_i)\delta_S(x) \qquad (1.14).$$

Носій та порядок узагальнених функцій

Вводячи поняття узагальнених функцій ми використовували множину основних (пробних) функцій $D(R^n) = C_\infty^0(R^n)$. Взагалі кажучи, простір пробних функцій, а таким чином і розподілів можна узагальнити, ввівши простір основних функцій як $D(\Omega) = C_\infty^0(\Omega)$, тобто клас пробних функцій складається з функцій, які нескінченно - диференційовані в Ω і на границі області перетворюються в нуль разом з усіма своїми похідними.

Для побудови функцій такого класу використовуються функція яка називається ε - шапочкою і яка має вигляд:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \le \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \qquad (1.15)$$

Постійну C_ε обираємо так, щоби $\iiint\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1$.

Легко бачити, що $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \iiint\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(x)$. Це фактично означає, що ε - шапочка слабко збігається до $\delta(x),\ \varepsilon \to +0$.

Введемо функцію $\eta(x) = \iiint\limits_{R^n} \chi(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy$. Де $\chi(\boldsymbol{x})$ - характеристична функція множини $\Omega_{2\varepsilon}$. Тобто $\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega_{2\varepsilon} \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \Omega_{2\varepsilon} \end{cases}$. Множина $\Omega_{2\varepsilon}$ утворилася з множини Ω шляхом відступу всередину Ω від границі на полосу ширини 2ε.

Тоді будь – яка функція $\varphi(x) = \eta(x) f(x) \in D(\Omega)$ якщо $f(x) \in C^\infty(R^n)$.

Таким чином можна утворити достатньо широкий клас пробних функцій.

Узагальнені функції взагалі кажучи не мають значень в окремих точках. В той же час можна говорити про обернення узагальненої функції в нуль в деякій області.

Означення 1 *Будемо говорити, що узагальнена функція* f *обертається в нуль в області* Ω*, якщо* $< f,\varphi >= 0,\ \forall \varphi \in D(\Omega)$*. Нульовою множиною узагальненої функції* O_f *будемо називати об'єднання усіх областей у яких узагальнена функція* f *обертається в нуль. Носієм узагальненої функції* f *називають множину* $\operatorname{supp} f = R^n / \mathrm{O}_f$

Означення 2 *Будемо говорити, що узагальнена функція* $\boldsymbol{f}$ *має порядок сингулярності (або просто порядок)* $\leq \boldsymbol{j}$*, якщо*

$$f = \sum_{|\alpha| \leq j} D^\alpha g_\alpha,\ g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega) \qquad (1.16).$$

Якщо число j у формулі (1.16) неможливо зменшити, то говорять що порядок узагальненої функції f дорівнює j.

Нехай $\boldsymbol{f}$ узагальнена функція порядку $\boldsymbol{j}$, а φ довільна пробна функція. За визначенням

$$< f,\varphi >= \sum_{|\alpha| \leq j} < D^\alpha g_\alpha, \varphi > = \sum_{|\alpha| \leq j} (-1)^{|\alpha|} \iiint_\Omega g_\alpha D^\alpha \varphi dx,\ \forall \varphi \in D(\Omega) \qquad (1.17)$$

Неважко бачити, що права частина формули (1.17) зберігає зміст не тільки для функцій с класу $D(\Omega)$, але і для функцій більш широкого класу $D^j(\Omega)$. Таким чином узагальнені функції порядку $\boldsymbol{j}$ можна визначати як лінійні неперервні функціонали на класі основних функцій $D^j(\Omega)$.

Згортка та регуляризація узагальнених функцій.

Нехай $f(x), g(x)$ дві локально інтегровані функції в R^n. При цьому функція $h(x) = \iiint_{R^n} |g(y) f(x-y)| dy$ буде теж локально інтегрована в R^n.

Згорткою $f * g$ цих функцій будемо називати функцію

$$(f * g)(x) = \iiint_{R^n} f(y) g(x-y) dy = \iiint_{R^n} g(y) f(x-y) dy = (g * f)(x) \qquad (1.18)$$

Таким чином згортка є локально інтегровану функцію і тим самим визначає регулярну узагальнену функцію, яка дії на основну функцію за правилом $\iiint\limits_{R^n} (f * g)(\xi)\varphi(\xi)d\xi$

Розглянемо випадок згортки двох функцій f та ψ, де f - узагальнена, а ψ - основна (пробна) функція. Оскільки ψ - фінітна функція, то згортка $f * \psi$ існує, а враховуючи нескінчену гладкість пробної функції, $f * \psi \in C^{\infty}(R^n)$.

Означення 3 *Функцію* $f_{\varepsilon}(x) = (f * \omega_{\varepsilon})(x)$ *будемо називати регулярізацією узагальненої функції* f.

Зрозуміло, що $f_{\varepsilon} \in C^{\infty}(R^n)$, а враховуючи, властивості ε - шапочки, легко бачити, що $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} f_{\varepsilon} = f$ слабко. Тобто будь – яка узагальнена функція є слабка границя своїх регулярізацій.

Приклад Розглянемо узагальнену функцію $P\dfrac{1}{x-a}$, яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\dfrac{1}{x-a}$ за винятком точки $\boldsymbol{a}$ і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$< P\frac{1}{x-a}, \psi >= V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x-a}dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x-a}dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} ...dx\right)$$

Розглянемо узагальнену функцію $P\dfrac{1}{(x-a)^2}$, яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\dfrac{1}{(x-a)^2}$ за винятком точки $\boldsymbol{a}$ і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$< P\frac{1}{(x-a)^2}, \psi >= V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty} ...dx\right)$$

Покажемо, що $\left(P\frac{1}{x-a}\right)' = -P\frac{1}{(x-a)^2}$ з точки зору узагальнених функцій.

Дійсно

$$\left\langle \left(P\frac{1}{x-a}\right)', \psi \right\rangle = -\left\langle \left(P\frac{1}{x-a}\right), \psi' \right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi'(x)}{x-a}dx + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi'(x)}{x-a}dx\right) =$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{d\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{d\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a}\right) =$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a}\right|_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \left.\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a}\right|_{a+\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2} + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}\right) =$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}dx + \int_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}dx\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\psi(a-\varepsilon)-\psi(a)}{-\varepsilon} - \frac{\psi(a+\varepsilon)-\psi(a)}{\varepsilon}\right) =$$

$$-V.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}dx = -\left\langle P\frac{1}{(x-a)^2}, \psi \right\rangle$$

Лекція 18

§2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

[1, стор. 198 - 207]

Нехай L - диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad (2.1).$$

Розглянемо диференціальне рівняння $Lu = f(x)$ (2.2)

Означення 1 *Узагальненим розв'язком рівняння (2.2) будемо називати будь – яку узагальнену функцію u, яка задовольняє рівняння (2.2) в розумінні виконання рівності:* $< Lu, \varphi > = < f, \varphi >, \ \forall \varphi \in D(\Omega)$ *(2.3).*

Рівність (2.3) рівнозначна $< u, L^* \varphi > = < f, \varphi >, \ \forall \varphi \in D(\Omega)$ (2.3')

$L^* \varphi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$ - спряжений оператор (2.4)

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2) q_k(x) = -\delta(x) \qquad (2.5)$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon(x,t) = -\delta(x,t) \qquad (2.6)$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x,t) = -\delta(x,t) \qquad (2.7)$$

Означення 2 *Узагальнені функції $q_k(x), \varepsilon(x,t), \psi(x,t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельмгольца, теплопровідності,*

хвильового відповідно, якщо вони задовольняють рівняння (2.5), (2.6), (2.7) як узагальнені функції.

$$\iiint\limits_{R^n} q_k(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)dx = -\varphi(0) \qquad (2.5')$$

$$\iiint\limits_{R^{n+1}} \varepsilon(x,t)\left(a^2\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x,t)dxdt = -\varphi(0,0) \qquad (2.6')$$

$$\iiint\limits_{R^{n+1}} \theta(x,t)\left(a^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)dxdt = -\varphi(0,0) \qquad (2.7')$$

Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв'язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв'язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв'язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв'язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур'є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів.

Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо оператор Лапласа $\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Покажемо, що для двохвимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}, \text{ де } |x| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.8)$$

Є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція

рівняння $\Delta_2 \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = -\delta(x)$.

Останнє рівняння треба розуміти як співвідношення

$$\iint\limits_{R^2} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\mathbf{\Delta}_2\varphi(x)dx = -\varphi(0),\ \forall\varphi\in D(R^2) \qquad (2.9)$$

Доведемо рівність (2.9).

$$\iint\limits_{R^2} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\mathbf{\Delta}_2\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{U_R/U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\mathbf{\Delta_2}\varphi(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{U_R/U_\varepsilon} \mathbf{\Delta_2}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\varphi(x)dx +$$

$$+\iint\limits_{S_R} .....dS + \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)\right)dS$$

Покажемо, що $\mathbf{\Delta_2}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = 0,\ x\neq 0$.

Дійсно $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} = -\frac{\boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}|^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}$

$\mathbf{\Delta_2}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}\right) = 0$. Таким чином, першій інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)\right)dS =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos(\theta),\varepsilon\sin(\theta))}{\partial n}d\theta - \int_0^{2\pi}\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\cos(\theta),\varepsilon\sin(\theta)d\theta\Big)$$

При обчисленні останнього інтегралу враховано, що

$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\Big|_{x \in S_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \ln \frac{1}{\boldsymbol{r}}\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$. Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційованість функції φ, здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що першій інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0,0)$, що і доводить рівність (2.9).

Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца

$$\Lambda_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2$$

Покажемо, що для тривимірного оператора Гельмгольца функція

$$\boldsymbol{q}_\pm^k(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \tag{2.10}$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню: $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 q_\pm^k(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_\pm^k(x) = -\delta(x)$, яке треба розуміти як

$$\iiint_{R^3} q_\pm^k(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x) dx = -\varphi(0) \tag{2.11}$$

Обчислимо ліву частину рівності (2.11)

$$\iiint_{R^3} q_\pm^k(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \iiint_{U_R / U_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x) \cdot q_\pm^k(x) dx =$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\iiint_{U_R / U_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) q_\pm^k(x) \cdot \varphi(x) dx + \iint_{S_R} \cdots dS + \right.$$

$$\left. + \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} q_\pm^k(x) - \varphi(x) \frac{\partial q_\pm^k(x)}{\partial n} \right) dS \right)$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Покажемо, що $\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)q_{\pm}^k(x)=0,\ x\neq 0$.

Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою:

$$\frac{\partial^2 q_+^k(x)}{\partial x_j^2}=\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)=-\frac{e^{ik|x|}(k^2|x|^2+2ik|x|-2)}{4\pi|x|^3}\qquad\left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2=\frac{x_j^2}{|x|^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right)=\frac{e^{ik|x|}(ik|x|-1)}{4\pi|x|^5}\left(|x^2|-x_j^2\right)\cdot$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)q_{\pm}^k(x)=\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|^3}\left(-k^2|x|^2\right)+k^2\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}=0\cdot$$

Таким чином перший інтеграл дорівнює нулю.

Інтеграл по сфері великого радіусу S_R дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції.

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}q_{\pm}^k(x)dS=\frac{e^{ik|\varepsilon|}}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)}{\partial n}d\psi d\theta\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial q_{\pm}^k(x)(x)}{\partial n}\varphi(x)dS=-\frac{e^{ik\varepsilon}(ik\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}\varphi(x)dS=-\frac{e^{ik\varepsilon}(ik\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\cdot\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\psi d\theta\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}-\varphi(0)$$

Таким чином рівність (2.11) доведена.

Зауважимо, що з формули (2.10) легко отримати фундаментальний розв’язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція

$$\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\qquad(2.12)$$

задовольняє наступному рівнянню.

$$\Delta_3 \frac{1}{4\pi|x|} = -\delta(x),\ x \in R^3 \qquad (2.13).$$

Формально формула (2.12) можна отримати з (2.10) при $k = 0$.

Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца

Покажемо, що $q^k(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|),\ x = (x_1, x_2)$ (2.14)

є фундаментальним розв'язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:

$$\iint_{R^2} q^k(x)\left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x)dx = -\varphi(0) \qquad (2.15)$$

У формулі (2.14) функція $\boldsymbol{K}_\nu(\boldsymbol{x})$ - функція Бесселя другого роду уявного аргументу ν - порядку і є одним з двох лінійно – незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу $x^2Y'' + xY' - (x^2 + \nu^2)Y = 0$.

Доведення (2.15) аналогічне доведенню співвідношення (2.9).

Покажемо, що (2.14) задовольняє рівняння:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2\right)\frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = 0,\ x \neq 0$$

Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = \frac{1}{2\pi}\left(-k^2 K_0''(-ik|x|)\frac{x_j^2}{|x|^2} - ikK_0'(-ik|x|)\frac{|x^2| - x_j^2}{|x|^3}\right)$$

Таким чином

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2\right)\frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = \frac{1}{2\pi}\left(-k^2 K_0''(-ik|x|) - ikK'(-ik|x|)\frac{1}{|x|} + k^2 K_0(-ik|x)|\right) = 0$$

Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|\boldsymbol{x}|^2$

та ввести нову незалежну змінну $\xi = -ik|x|$.

При доведенні рівності (2.15) важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної к околі точки $x = 0$.

Відомо, що $K_0(ix) \square \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|},\ K_0'(ix) \square -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|},\ x \to +0$.

Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Покажемо, що фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}},\ x \in R^n \qquad (2.16).$$

Це означає, що узагальнена функція (2.16) задовольняє інтегральній тотожності :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{R^n} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right)dxdt = -\varphi(0,0),\ \forall\varphi \in D(R^{n+1}) \qquad (2.17).$$

Очевидно, що $\varepsilon(x,t) \in C^\infty(t > 0)$. Покажемо, що ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(x,t) = 0,\ \ t > 0,\ x \in R^n. \qquad (2.18).$$

Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\varepsilon \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2t}\varepsilon$

$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^2t^2} - \frac{1}{2a^2t}\right)\varepsilon$. Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення (2.18).

Покажемо справедливість (2.17).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{R^n} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right)dxdt = \lim_{\tau\to 0, R\to\infty} \int_{\tau}^{\infty} \iiint_{U_R} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right)dxdt =$$

$$= \lim_{\tau\to 0 R\to\infty}\left[\int_{\tau}^{\infty}\iiint_{U_R}\varphi(x,t)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-a^2\Delta\varepsilon\right)dxdt+\int_{\tau}^{\infty}\iint_{S_R}a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon-\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\varphi\right)dS_R dt+\iiint_{U_R}\varepsilon\,\varphi\Big|_{\tau}^{\infty}dx\right]=$$

$= -\lim_{\tau\to 0}\iiint_{R^n}\varphi(x,\tau)\varepsilon(x,\tau)dx$. Можна показати, що $\iiint_{R^3}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}dx=1,\ t>0$.

Покажемо, що $\frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}}{\left(2\boldsymbol{a}\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\xrightarrow[\tau\to+0]{\text{слабко}}\delta(x)$.

Дійсно $\left|\iiint_{R^3}\frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}}{\left(2\boldsymbol{a}\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\left(\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(0)\right)\boldsymbol{dx}\right|\le\frac{\boldsymbol{K}}{\left(2\boldsymbol{a}\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\iiint_{R^3}\boldsymbol{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{A}$, де

$K=\max_x|\varphi'(x)|$ Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi=\frac{r}{2a\sqrt{\tau}}$.

$$A=\frac{K\sigma_n}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\frac{r^2}{4a^2\tau}}r^n dr=\frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{R}{2a\sqrt{\tau}}}e^{-\xi^2}\xi^n d\xi=$$

$$\frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\infty}e^{-\xi^2}\xi^n d\xi=O(\tau^{0.5})\underset{\tau\to+0}{\to}0$$

Фундаментальний розв’язок хвильового оператора

Покажемо, що узагальнена функція

$$\psi_1(x,t)=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|) \tag{2.19}$$

є фундаментальним розв’язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x,t)(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})dxdt=-\varphi(0,0),\quad\forall\varphi\in D(R^2) \tag{2.20}$$

Обчислимо ліву частину виразу (2.20)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x,t)(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})dxdt=-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\frac{|x|}{a}}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dtdx+\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dxdt=$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx+\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi(\text{-}at,t)}{\partial x}\right)dt=$$

$$\frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx+\frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi\left(-x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx+\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi(\text{-}at,t)}{\partial x}\right)dt=$$

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x=at$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial t}dt+\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x}-\frac{\partial\varphi(\text{-}at,t)}{\partial x}\right)dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{d\varphi(at,t)}{dt}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{d\varphi(-at,t)}{dt}dt=-\frac{1}{2}\varphi(0,0)-\frac{1}{2}\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$$

Таким чином формула (2.20) доведена.

Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв’язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x,t)=\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x^2|}},\ \ x\in R^2 \tag{2.21}$$

$$\psi_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\frac{\theta(\boldsymbol{t})}{4\pi\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{t}}\delta_{S_{at}}(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3 \tag{2.22}$$

Лекція 19

§ 3 Використання фундаментальних розв'язків та функцій Гріна для знаходження розв'язків задач Коші та граничних задач

[9, стор. 735 - 803]

Фундаментальні розв'язки оператора теплопровідності та хвильового оператора можна ефективно використовувати для побудови розв'язків задач Коші для рівняння теплопровідності, або хвильового рівняння.

Задача Коші для рівняння теплопровідності

Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності:

$$\begin{aligned} &a^2\Delta u(x,t)-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-F(x,t),\ t>0,\ x\in R^n \\ &u(x,0)=u_0(x) \end{aligned} \qquad (3.1).$$

Для отримання необхідної формули запишемо диференціальне рівняння для фундаментального розв'язку $\varepsilon(x-\xi,t-\tau)$ по парі аргументів ξ,τ.

$$a^2\Delta_\xi\varepsilon(x-\xi,t-\tau)+\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \qquad (3.2)$$

Зауважимо, що оскільки диференціювання ведеться по аргументах ξ,τ, то фундаментальний розв'язок задовольняє спряженому рівнянню теплопровідності. Запишемо рівняння теплопровідності відносно незалежних змінних ξ,τ.

$$a^2\Delta u(\xi,\tau)-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial t}=-F(\xi,\tau) \qquad (3.1')$$

Рівняння (3.1') домножимо на $\varepsilon(x-\xi,t-\tau)$, а рівняння (3.2) на $u(\xi,\tau)$, від першого відніме друге та проінтегруємо результат по змінній $\xi\in U_R$ по змінній $\tau\in[0,t+\alpha],\ \alpha>0$.

$$\int_0^{t+\alpha}\iiint_{U_R} a^2\left(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Delta u(\xi,\tau)-u(\xi,\tau)\Delta\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\right)d\xi d\tau -$$

$$-\int_0^{t+\alpha}\iiint_{U_R}\frac{\partial(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}d\xi d\tau=-\int_0^{t+\alpha}\iiint_{U_R}F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau+$$

$$\int_0^{t+\alpha}\iiint_{U_r}\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Для обчислення першого інтегралу лівої частини застосуємо другу формулу Гріна, другий інтеграл спростимо, обчисливши інтеграл від похідної по змінній τ, другий інтеграл у правій частині рівності обчислимо з використанням властивості δ - функції Дірака. В результаті отримаємо:

$$\int_0^{t+\alpha}\iiint_{U_R} a^2\left(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Delta u(\xi,\tau)-u(\xi,\tau)\Delta\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\right)d\xi d\tau=$$

$$=a^2\int_0^{t+\alpha}\iint_{S_R}\left(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}-u(\xi,\tau)\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}\right)dS_\xi d\tau$$

$$-\int_0^{t+\alpha}\iiint_{U_R}\frac{\partial(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}d\xi d\tau=-\iiint_{U_R}\varepsilon(x-\xi,-\alpha)u(\xi,t+\alpha)d\xi+$$

$$+\iiint_{U_R}\varepsilon(x-\xi,t)u(\xi,0)d\xi$$

Врахуємо, що $\varepsilon(x-\xi,-\alpha)=0,\ \alpha>0$. Спрямуємо радіус кулі $R\to\infty$, та врахуємо поведінку фундаментального розв'язку в нескінченно віддаленій точці, отримаємо, що поверхневі інтеграли обертаються в нуль. В результаті остаточних спрощень отримаємо формулу інтегрального представлення розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності:

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint_{R_n}F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau+\iiint_{R_n}\varepsilon(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi \qquad (3.3)$$

Задача Коші для рівняння коливання струни (Формула Даламбера)

Розглянемо задачу Коші для рівняння коливання струни

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-F(x,t),\ t>0,\ -\infty<x<\infty,$$
$$u(x,0)=u_0(x),\ \ \partial u(x,0)/\partial t=v_0(x) \qquad (3.4)$$

Для знаходження формули інтегрального представлення розв'язку задачі Коші (3.4) запишемо рівняння, якому задовольняє фундаментальний розв'язок:

$$a^2\frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau^2}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \qquad (3.5).$$

Над рівняннями (3.4), (3.5) проведемо наступні дії аналогічні попередньому випадку:

(3.4) умножимо на $\psi_1(x-\xi,t-\tau)$, (3.5) на $u(\xi,\tau)$ (аргументи x,t (3.4) пере позначимо через ξ,τ відповідно) віднімемо від першого рівняння друге та проінтегруємо по $\tau\in(0,t)$ та по $\xi\in(-R,R)$. Будемо мати:

$$\int_0^t\int_{-R}^R a^2\left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}-u(\xi,\tau)\frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi^2}\right)d\xi d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_{-R}^R\left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}-u(\xi,\tau)\frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau^2}\right)d\xi d\tau=$$
$$=-\int_0^t\int_{-R}^R\psi_1(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_{-R}^R\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Застосуємо до першого та другого інтегралів формулу інтегрування за частинами:

$$\int_0^t a^2\left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}-u(\xi,\tau)\frac{\partial\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=-R}^{\xi=R}d\tau-$$
$$-\int_{-R}^R\left(\psi_1(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}-u(\xi,\tau)\frac{\partial\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}d\xi=$$
$$=-\int_0^t\int_{-R}^R\psi_1(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau+u(x,t).$$

Виконаємо необхідні підстановки та спрямуємо $R\to\infty$, отримаємо, що

перший інтеграл в лівій частині тотожньо перетворюється в нуль за рахунок властивостей фундаментального розв'язку. В другому інтегралі у лівій частині верхня підстановка перетворюється в нуль за рахунок властивостей фундаментального розв'язку, а нижню підстановку можна перетворити з використанням початкових умов задачі Коші.

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}u_0(\xi)d\xi+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x-\xi,t)v_0(\xi)d\xi \qquad (3.6)$$

Проміжну формулу (3.6) можна конкретизувати обчисливши відповідні інтеграли, враховуючи конкретний вигляд фундаментального розв'язку $\psi_1(x-\xi,t-\tau)=\dfrac{\theta(a(t-\tau)-|x-\xi)|}{2a}$.

Обчислимо перший інтеграл (3.6)

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Аналогічно попередньому можна записати третій інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x-\xi,t)v_0(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(\xi)d\xi$$

Для обчислення другого інтегралу, обчислимо спочатку похідну від фундаментального розв'язку, яка фігурує під знаком інтегралу.

$$\left.\frac{\partial\psi_1(x-\xi,t)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\theta(a(t-\tau)-|x-\xi)|)}{2a}\right|_{\tau=0}=-\frac{1}{2}\delta(at-|x-\xi)|)$$

Враховуючи вигляд похідної фундаментального розв'язку, запишемо другий інтеграл у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(at-|x-\xi|)u_0(\xi)d\xi=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\delta(at+\xi-x)u_0(\xi)d\xi++\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\delta(at-\xi+x)u_0^{\backslash}(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-(x-at))u_0(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\delta(\xi-(x+at))u_0(\xi)d\xi=\frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2}$$

Таким чином остаточно можемо записати формулу Даламбера, яка дає розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни.

$$u(x,t)=\frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{0}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.7).$$

Задача Коші для рівняння коливання мембрани та коливання необмеженого об'єму Формула Пуассона та Кіргофа

Будемо розглядати задачу Коші для двовимірного або тривимірного хвильового рівняння:

$$\begin{aligned}&a^2\Delta u(x,t)-u_{tt}(x,t)=-F(x,t),\ t>0,\ x\in R^n, n=2,3\\&u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=v_0(x)\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Використовуючи перетворення аналогічні випадку формули Даламбера можемо отримати проміжну формулу для розв'язання двовимірної або тривимірної задач Коші аналогічну (3.6)

$$\begin{aligned}&u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\psi_i(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau-\\&\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial\psi_i(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}u_0(\xi)d\xi+\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\psi_i(x-\xi,t)v_0(\xi)d\xi,\ i=2,3\end{aligned} \qquad (3.9)$$

Використовуючи вигляд фундаментального розв'язку для двовимірного $\psi_2(x,t)=\dfrac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}},\ x\in R^2$ випадку та формулу (3.9) запишемо формулу Пуассона. Обчислимо перший інтеграл (3.9):

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(x-\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau=\frac{1}{2a\pi}\int_0^t\iint_{|\xi-x|<a(t-\tau)}\frac{F(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}$$

Запишемо третій інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(x-\xi,t)v_0(\xi)d\xi=\frac{1}{2a\pi}\iint_{|\xi-x|<at}\frac{v_0(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}$$

Нарешті запишемо другий інтеграл формули (3.9)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial\psi_2(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}u_0(\xi)d\xi=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|\xi-x|<at}\frac{u_0(\xi)d\xi}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}$$

Зводячи усі три інтеграли в одну формулу отримаємо **формулу Пуассона**, яка дає розв'язок задачі Коші коливання мембрани

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\pi}\int_0^t\iint_{|\xi-x|<a(t-\tau)}\frac{F(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}+\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|\xi-x|<at}\frac{u_0(\xi)d\xi}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}$$
$$\frac{1}{2a\pi}\iint_{|\xi-x|<at}\frac{v_0(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}},\ t>0,\ x\in R^2 \qquad (3.10)$$

Без доведення наведемо **формулу Кіргофа** для тривимірної задачі Коші хвильового рівняння.

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{|x-\xi|<at}\frac{F\left(\xi,t-\frac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|}d\xi+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|x-\xi|=at}v_0(\xi)dS_\xi+$$
$$\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\iint_{|x-\xi|=at}u_0(\xi)dS_\xi\right) \qquad (3.11)$$

Функція Гріна граничних задач оператора Гельмгольца

При розв'язанні задач Коші для рівняння теплопровідності та хвильового рівняння ми використовували фундаментальний розв'язок відповідного оператора, який дозволяв врахувати вплив вільного члена рівняння та початкових умов. Для розв'язання граничних задач, для яких розв'язок треба шукати в деякій обмеженій області на границі якої повинні виконуватися деякі граничні умови, треба використовувати спеціальні фундаментальні розв'язки. Крім того ці

спеціальні фундаментальні розв'язки повинні задовольняти однорідним граничним умовам. Такі спеціальні фундаментальні розв'язки отримали назву функцій Гріна граничної задачі певного роду для відповідного диференціального рівняння.

Будемо розглядами граничні задачі для рівняння Гельмгольца:

$$\begin{aligned} &(\Delta + k^2)u(x) = -F(x),\ x \in \Omega \\ &l_i u\big|_{x\in S} = f(x),\ i = 1,2,3 \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Використаємо позначення для граничних операторів:

$$l_1 u\big|_{x\in S} = u\big|_{x\in S},\quad l_2 u\big|_{x\in S} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x\in S},\quad l_3 u\big|_{x\in S} = \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u\bigg|_{x\in S}\ -$$

граничні умови першого, другого або третього роду. Зауважимо, що в найпростішому випадку в кожній точці границі виконується умова першого, другого або третього роду, у зв'язку з чим і граничні задачі називають першою, другою або третьою для рівняння Гельмгольца.

Означення1 *Функцію* $G_i^k(x,\xi)$ *будемо називати функцією Гріна першої другої або третьої граничної задачі в області* Ω *с границею* S *оператора Гельмгольца, якщо ця функція є розв'язком граничної задачі:*

$$\begin{cases} (\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\xi) = -\delta(x-\xi),\ x,\xi \in \Omega \\ l_i G_i^k(x,\xi)\big|_{x\in S} = 0,\ i = 1,2,3 \end{cases} \qquad (3.13)$$

Оскільки функція Гріна задовольняє рівняння з такою ж правою частиною як і фундаментальний розв'язок (лише зі здвигом на ξ), то для визначення функції Гріна можна надати наступне еквівалентне визначення:

Означення2 Функцію $G_i^k(x,\xi)$ будемо називати функцією Гріна першої другої або третьої граничної задачі в області Ω с границею S оператора Гельмгольца, якщо ця функція може бути представлена у вигляді $G_i^k(x,\xi) = q_\pm^k(x-\xi) + g_i^k(x,\xi)$, де $q_\pm^k(x-\xi)$ є фундаментальним розв'язком

оператора Гельмгольца, а функція $g_i^k(x,\xi)$ задовольняє граничній задачі:

$$\begin{cases}(\Delta_x + k^2)g_i^k(x,\xi) = 0, \ x,\xi \in \Omega \\ l_i g_i^k\Big|_{x\in S} = -l_i q_\pm^k\Big|_{x\in S}, \ i = 1,2,3\end{cases} \qquad (3.13')$$

Покажемо, що функція Гріна $G_i^k(x,\xi) = G_i^k(\xi,x), x,\xi \in \Omega, i = 1,2,3,$ тобто є симетричною функцією своїх аргументів

Для цього розглянемо рівняння для функції Гріна з параметром η

$$(\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\eta) = -\delta(x-\eta), \ x,\eta \in \Omega$$

(3.13'')

Рівняння (3.13) помножимо на $G_i^k(x,\eta)$, а рівняння (3.13'') на $G_i^k(x,\xi)$, віднімемо від першого рівняння друге і проинтегруємо па аргументу $x \in \Omega$.

$$\iiint\limits_{\Omega}\Big(G_i^k(x,\eta)(\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\xi) - G_i^k(x,\xi)(\Delta_x + k^2)G_i^k(x,\eta)\Big)dx =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega}\Big(-G_i^k(x,\eta)\delta(x-\xi) + G_i^k(x,\xi)\delta(x-\eta)\Big)dx$$

До лівої частини застосуємо формулу Остроградського – Гауса, а інтеграл в правій частині обчислюється безпосередньо.

$$-G_i^k(\xi,\eta) + G_i^k(\eta,\xi) = \iint\limits_{S}\left(G_i^k(x,\eta)\frac{\partial G_i^k(x,\xi)}{\partial n_x} - G_i^k(x,\xi)\frac{\partial G_i^k(x,\eta)}{\partial n_x}\right)dS_x$$

Поверхневий інтеграл останнього співвідношення дорівнює нулю для кожного $i = 1,2,3$. Дійсно при $i = 1$ $G_1^k(x,\xi)\Big|_{x\in S} = G_1^k(x,\eta)\Big|_{x\in S} \equiv 0$, при $i = 2$

$\dfrac{\partial G_2^k(x,\xi)}{\partial n}\Bigg|_{x\in S} = \dfrac{\partial G_2^k(x,\eta)\Big|}{\partial n}_{x\in S} \equiv 0$, при $\boldsymbol{i} = 3$,

$\dfrac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n} + \alpha(x)G_3^k(x,\xi)\Bigg|_{x\in S} \equiv \dfrac{\partial G_3^k(x,\eta)\Big|}{\partial n} + \alpha(x)G_3^k(x,\eta)\Bigg|_{x\in S} \equiv 0$, що забезпечує

рівність нулю поверхневого інтегралу для граничних умов будь – якого роду.

Таким чином симетричність функції Гріна доведена

$$G_i^k(\xi,\eta) = G_i^k(\eta,\xi),\ \xi,\eta \in \Omega \tag{3.14}$$

Враховуючи симетричність функції Гріна отримаємо формули інтегрального представлення розв'язків трьох основних граничних задач рівняння Гельмгольца.

Для цього запишемо граничну задачу (3.12) відносно аргументу ξ

$$\begin{aligned} &(\Delta + k^2)u(\xi) = -F(\xi),\ \xi \in \Omega \\ &l_i u\big|_{\xi\in S} = f(\xi),\ i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{3.12'}$$

Враховуючи симетрію функції Гріна та парність δ - функції Дірака , запишемо (3.13) у вигляді:

$$\begin{cases} (\Delta_\xi + k^2)G_i^k(x,\xi) = -\delta(x-\xi),\ x,\xi \in \Omega \\ l_i G_i^k(x,\xi)\big|_{\xi\in S} = 0,\ i = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.13'''}$$

Проведемо наступні перетворення: (3.12') помножимо на $G_i^k(x,\xi)$, (3.13''') помножимо на $u(\xi)$, віднімемо від першої рівності другу і проінтегруємо по змінній $\xi \in \Omega$.

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} \Big(G_i^k(x,\xi)(\Delta + k^2)u(\xi) - u(\xi)(\Delta_\xi + k^2)G_i^k(x,\xi) \Big) d\xi = \\ &= \iiint\limits_{\Omega} \Big(-G_i^k(x,\xi)F(\xi) + u(\xi)\delta(x-\xi) \Big) d\xi \end{aligned}$$

Застосуємо до лівої частини рівності другу формулу Гріна, а другий інтеграл в правій частині обчислимо безпосередньо враховуючи властивості δ - функції Дірака.

$$u(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_i^k(x,\xi)F(\xi)d\xi + \iint\limits_{S} \left(G_i^k(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi)\frac{\partial G_i^k(x,\xi)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi \tag{3.15}$$

Проміжну формулу (3.15) можна конкретизувати для кожної з трьох граничних задач:

Нехай $i = 1$, тоді $G_1^k(x,\xi)\big|_{\xi\in S} = 0,\ u\big|_{\xi\in S} = f(\xi)$, тоді формула (3.15) прийме наступний вигляд:

$$u(x)=\iiint\limits_{\Omega} G_1^k(x,\xi)F(\xi)d\xi-\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial G_1^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}f(\xi)\right)dS_\xi \qquad (3.16)$$

Нехай $i=2$, тоді $\left.\frac{\partial G_2^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}\right|_{\xi\in S}=0, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\xi\in S}=f(\xi)$, формула (3.15) приймає вигляд:

$$u(x)=\iiint\limits_{\Omega} G_2^k(x,\xi)F(\xi)d\xi+\iint\limits_{S}\left(G_2^k(x,\xi)f(\xi)\right)dS_\xi \qquad (3.17)$$

У випадку $i=3$, $\left.\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}+\alpha(\xi)G_3^k(x,\xi)\right|_{\xi\in S}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right|_{\xi\in S}=f(\xi)$

Розв’язок має вигляд:

$$u(x)=\iiint\limits_{\Omega} G_3^k(x,\xi)F(\xi)d\xi+\iint\limits_{S}\left(G_3^k(x,\xi)f(\xi)\right)dS_\xi \qquad (3.18)$$

Формулу (3.18) довести самостійно.

Лекція 20

Функція Гріна граничних задач оператора теплопровідності

[9, стор. 735 - 803]

Будемо розглядати граничні задачі для рівняння теплопровідності:

$$\begin{aligned} &a^2\Delta u(x,t)-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-F(x,t),\ x\in\Omega, t>0 \\ &u(x,0)=u_0(x),\ l_i u(x,t)\big|_{x\in S}=f(x,t),\ i=1,2,3 \end{aligned} \qquad (3.19)$$

$l_1 u\big|_{x\in S}=u\big|_{x\in S}$, $l_2 u\big|_{x\in S}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in S}$, $l_3 u\big|_{x\in S}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x,t)u\right|_{x\in S}$ - оператори граничних умов першого, другого, або третього роду.

Означення 3 *Функцію* $\boldsymbol{E_i(x,\xi,t-\tau)}$ *будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності в області* Ω *с границею* $\boldsymbol{S}$ *і* $\boldsymbol{t}>0$*, якщо вона є розв'язком наступної граничної задачі:*

$$\begin{aligned} &a^2\Delta_x E_i(x,\xi,t-\tau)-\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}=-\delta(x-\xi,t-\tau),\ x,\xi\in\Omega,\ t>0 \\ &E_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau\le 0}=0,\quad l_i E_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S}=0,\ i=1,2,3 \end{aligned} \qquad (3.20).$$

Еквівалентне визначення можна надати у вигляді

Означення 4 *Функцію* $E_i(x,\xi,t-\tau)$ *будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності в області* Ω *с границею* $\boldsymbol{S}$ *і* $\boldsymbol{t}>0$*, якщо вона може бути представлена у вигляді* $E_i(x,\xi,t-\tau)=\varepsilon(x-\xi,t-\tau)+\omega_i(x,\xi,t-\tau)$*, де перший доданок є фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності, а другий є розв'язком наступної граничної задачі*

$$a^2\Delta_x\omega_i(x,\xi,t-\tau)-\frac{\partial\omega_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}=0,\ x,\xi\in\Omega,t>0$$
$$\omega_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau\le 0}=0,\ l_i\omega_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S}=-l_i\varepsilon_i(x-\xi,t-\tau)\big|_{x\in S},\ i=1,2,3 \qquad (3.20').$$

Вивчимо властивості функції Гріна оператора теплопровідності.

Легко бачити, що функція Гріна граничних задач рівняння теплопровідності з аргументами $E_i(x,\xi,-t)$ задовольняє спряженому диференціальному рівнянню

$$a^2\Delta_x E_i(x,\xi,-t)+\frac{\partial E_i(x,\xi,-t)}{\partial t}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\ x,\xi\in\Omega,t>0$$

Покажемо, що функція є також симетричною функцією своїх перших двох аргументів. Для цього запишемо співвідношення, яким задовольняє функція Гріна:

$$a^2\Delta_x E_i(x,\xi,t-\tau_1)-\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau_1)}{\partial t}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau_1),\ x,\xi\in\Omega,$$
$$a^2\Delta_x E_i(x,\eta,\tau_2-t)+\frac{\partial E_i(x,\eta,\tau_2-t)}{\partial t}=-\delta(x-\eta)\delta(t-\tau_2),\ x,\xi\in\Omega,$$

Перше рівняння помножимо на $E_i(x,\xi,\tau_2-t)$, друге рівняння помножимо на $E_i(x,\xi,t-\tau_1)$, віднімемо від першого друге і проінтегруємо по $x\in\Omega$ і по $-\infty<t<\tau$

$$a^2\iiint\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left[E_i(x,\eta,\tau_2-t)\Delta_x E_i(x,\xi,t-\tau_1)-E_i(x,\xi,t-\tau_1)\Delta_x E_i(x,\eta,\tau_2-t)\right]dxdt-$$
$$-\iiint\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\big(E_i(x,\xi,t-\tau_1)E_i(x,\eta,\tau_2-t)\big)dtdx=-E_i(\xi,\eta,\tau_2-\tau_1)+E_i(\eta,\xi,\tau_2-\tau_1)$$

В результаті застосування другої формули Гріна до першого інтегралу в лівій частині рівності і обчислення другого інтегралу лівої частини, отримаємо:

$$E_i(\xi,\eta,\tau_2-\tau_1)-E_i(\eta,\xi,\tau_2-\tau_1)=-\iiint\limits_{\Omega}\left[E_i(x,\xi,\tau-\tau_1)E_i(x,\eta,\tau_2-\tau)-\right.$$
$$\left.-E_i(x,\xi,-\infty)E_i(x,\eta,-\infty)\right]d\Omega+a^2\iint\limits_{S}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau_1)}{\partial n}E_i(x,\eta,\tau_2-t)-\right.$$
$$\left.E_i(x,\xi,t-\tau_1)\frac{\partial E_i(x,\eta,\tau_2-t)}{\partial n}\right]dSdt$$

Обираючи $\tau > \tau_2 > \tau_1$, отримаємо з урахування граничних і початкових умов для функції Гріна, що інтеграли в правій частині останньої рівності дорівнює нулю.

Таким чином маємо симетричність функції Гріна $E_i(\xi,\eta,\tau_2-\tau_1) = E_i(\eta,\xi,\tau_2-\tau_1)$

Для отримання інтегрального представлення розв'язків граничних задач, запишемо граничну задачу теплопровідності в змінних ξ, τ

$$a^2\Delta u(\xi,\tau) - \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau} = -F(\xi,\tau),\ \xi\in\Omega, \tau>0$$
$$u(\xi,0) = u_0(\xi),\ l_i u(\xi,\tau)\big|_{x\in S} = f(\xi,\tau),\ i=1,2,3 \qquad (3.19')$$

та рівняння для функції Гріна по змінних ξ, τ

$$a^2\Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau) + \frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),$$
$$x,\xi\in\Omega,\ t>\tau>0 \qquad (3.21).$$

Рівняння (3.19') помножимо на $E_i(x,\xi,t-\tau)$, а рівняння (3.21)помножимо на $u(\xi,\tau)$, віднімемо від першого рівняння друге і про інтегруємо по $0<\tau<t+\varepsilon$ та по $\xi\in\Omega$.

Отримаємо наступне співвідношення:

$$a^2\int_0^{t+\varepsilon}\iiint_\Omega\Big(E_i(x,\xi,t-\tau)\Delta u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau)\Big)d\xi d\tau + \int_0^{t+\varepsilon}\iiint_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$
$$-\iiint_\Omega\int_0^{t+\varepsilon}\frac{\partial\big(\big(E_i(x,\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\big)}{\partial\tau}d\tau d\xi = \int_0^{t+\varepsilon}\iiint_\Omega\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Після застосування другої формули Гріна до першого інтегралу, обчислення третього інтегралу при $\varepsilon\to 0$ отримаємо наступну проміжну формулу:

$$u(x,t) = \int_0^t\iiint_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau + \iiint_\Omega E_i(x,\xi,t)u_0 d\xi +$$
$$a^2\int_0^t\iint_S\left(E_i(x,\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n} - u(\xi,\tau)\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}\right)dS_\xi d\tau$$

Враховуючи відповідні граничні умови, яким задовольняє розв'язок на

границі поверхні S отримаємо для першої граничної задачі:

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint_\Omega E_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau+\iiint_\Omega E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi-$$
$$-a^2\int_0^t\iint_S\left(\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}f(\xi,\tau)\right)dS_\xi d\tau \qquad (3.22)$$

Для другої та третьої граничних задач отримаємо

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau+\iiint_\Omega E_i(x,\xi,t)u_0 d\xi+$$
$$+a^2\int_0^t\iint_S\left(E_i(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\right)dS_\xi d\tau,\ i=2,3 \qquad (3.23)$$

Функція Гріна граничних задач хвильового оператора

Будемо розглядати граничні задачі для хвильового рівняння:

$$\boldsymbol{a}^2\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\frac{\partial^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{t}^2}=-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\boldsymbol{t}>0$$
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}),\frac{\partial\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)}{\partial\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{l}_i\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\big|_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{i}=1,2,3 \qquad (3.24)$$

Означення 5 *Функцію* $\Theta_i(\boldsymbol{x},\xi,\boldsymbol{t}-\tau)$ *будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі хвильового рівняння в області* Ω *з границею* $\boldsymbol{S}$ *і* $\boldsymbol{t}>0$*, якщо вона є розв'язком наступної граничної задачі*

$$a^2\Delta_x\Theta_i(x,\xi,t-\tau)-\frac{\partial^2\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\ x,\xi\in\Omega,t,\tau>0$$
$$\Theta_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau\le0}=0,\ \left.\frac{\partial\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\right|_{t-\tau\le0}=0,\quad l_i\Theta_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S}=0,\ i=1,2,3 \qquad (3.25)$$

Еквівалентне визначення можна надати у вигляді:

Означення 6 *Функцію* $\Theta_i(\boldsymbol{x},\xi,\boldsymbol{t}-\tau)$ *будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі хвильового рівняння в області* Ω *з границею* $\boldsymbol{S}$ *і* $\boldsymbol{t}>0$*, якщо вона може бути представлена у вигляді*

$\Theta_i(\boldsymbol{x},\xi,\boldsymbol{t}-\tau)=\psi(\boldsymbol{x}-\xi,\boldsymbol{t}-\tau)+\theta_i(\boldsymbol{x},\xi,\boldsymbol{t}-\tau)$, *де перший доданок є фундаментальним розв'язком хвильового оператора, а другий є розв'язком наступної граничної задачі*

$$a^2\Delta_x\theta_i(x,\xi,t-\tau)-\frac{\partial\theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}=0,\ x,\xi\in\Omega,t,\tau>0$$

$$\theta_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau\le 0}=0,\frac{\partial\theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\bigg|_{t-\tau\le 0}=0, \qquad (3.25')$$

$$l_i\theta_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S}=-l_i\psi(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S},\ i=1,2,3$$

Використовуючи попередні викладки для рівняння теплопровідності, легко встановити, що функція Гріна хвильового рівняння є симетричною функцією перших двох аргументів і по сукупності аргументів ξ,τ задовольняє рівняння:

$$\boldsymbol{a}^2\Delta_\xi\Theta_i(\boldsymbol{x},\xi,\boldsymbol{t}-\tau)-\frac{\partial^2\Theta_i(\boldsymbol{x},\xi,\boldsymbol{t}-\tau)}{\partial\tau^2}=-\delta(\boldsymbol{x}-\xi)\delta(\boldsymbol{t}-\tau),\ \boldsymbol{x},\xi\in\Omega,\boldsymbol{t},\tau>0$$

Для розв'язку граничних задач хвильового рівняння можна отримати формули інтегрального представлення аналогічні формулам (3.22) і (3.23).

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint_\Omega\Theta_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau+\iiint_\Omega\Theta_1(x,\xi,t)v_0(\zeta)d\xi-$$
$$-\iiint_\Omega\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0}u_0(\zeta)d\xi-a^2\int_0^t\iint_S\left(\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}f(\xi,\tau)\right)dS_\xi d\tau \qquad (3.26)$$

Формула (3.26) дає розв'язок першої граничної задачі для хвильового рівняння.

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint_\Omega\Theta_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau+\iiint_\Omega\Theta_i(x,\xi,t)v_0(\zeta)d\xi-$$
$$-\iiint_\Omega\frac{\partial\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0}u_0(\zeta)d\xi+a^2\int_0^t\iint_S\big(\Theta_i(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\big)dS_\xi d\tau, i=2,3 \qquad (3.27)$$

Формула (3.27) дає розв'язок для другої та третьої граничних задач хвильового рівняння.

Формули (3.26) та (3.27) отримати самостійно.

§4 Методи побудови функції Гріна для канонічних областей

Знаходження розв’язку граничної задачі за допомогою функції Гріна для відповідного оператора, заданої області та типу граничних умов фактично зводиться до необхідності розв’язання граничної задачі еквівалентної вихідній з спеціальними граничними умовами (дивись (3.13’) (3.20’), (3,25’)) Побудова функції Гріна для довільних областей є задачею такого ж рівня складності як і безпосереднє знаходження розв’язку, в той же час існують так звані канонічні області для яких можна в явному вигляді записати функцію Гріна, а значить побудувати розв’язок граничної задачі.

До канонічних областей будемо відносити паралелепіпед в прямокутній системі координат, а також області які в ортогональних криволінійних координатах є паралелепіпедами. Зокрема, півпростір, четверта частина простору, двогранний кут величини π/n, шар, що міститься між двома паралельними площинами, куля та її канонічні частини, циліндр прямокутного та кругового перерізу, паралелепіпед та інші.

Побудова функції Гріна методом відображення зарядів для граничних задач оператора Лапласа

[5, стор. 84 - 96]

Для побудови функції Гріна оператора Лапласа використовується фізична інтерпретація фундаментального розв’язку тривимірного та двовимірного евклідового простору. Нагадаємо, що фундаментальний розв’язок оператора Лапласа має вигляд: $q_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|x|}, \ x \in R3 \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, \ x \in R^2 \end{cases}$ (4.1)

Для тривимірного простору фізичний зміст фундаментально розв’язку нам

відомий і представляє потенціал електростатичного поля в точці $\boldsymbol{x}$ одиничного точкового заряду, який розташований в початку координат. Для двовимірного випадку ми визначимо фізичний зміст фундаментального розв'язку трохи нижче.

Таким чином функцію Гріна для деякої просторової області можна шукати у вигляді потенціалу електростатичного поля сукупності точкових або розподілених зарядів, один з яких є одиничним позитивним і знаходиться в довільній внутрішній точці області Ω, а усі інші лежать поза областю Ω, місце розташування і величина зарядів підбираються таким чином, щоби задовільними однорідним граничним умовам на поверхні області.

Тобто функція Гріна для канонічних областей дуже часто може бути знайдена у вигляді:

$$G_i(P,P_0)=\frac{1}{4\pi\left|P-P_0\right|}+\sum_{j=1}\frac{\gamma_j}{4\pi\left|P-P_j\right|} \tag{4.2}$$

У формулі (4.2) перший доданок є фундаментальним розв'язком і одночасно моделює потенціал в точці P одиничного точкового заряду розташованого в точці $P_0\in\Omega$. Сума - другий регулярний доданок, який фігурує в означенні 2 функції Гріна представляє функцію $g_i^k(x,\xi)$, γ_j - константи, які моделюють величину точкового заряду, $P_j\notin\Omega$ - точки розташування зарядів, які лежать поза областю Ω.

Оскільки має місце рівність $\Delta_{\boldsymbol{P}}\dfrac{1}{4\pi\left|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P_j}\right|}=0,\ \boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{P_j}$, то сума $\sum\limits_{j=1}\dfrac{\gamma_j}{4\pi\left|P-P_j\right|}$ в рівності (4.2) дійсно задовольняє рівняння Лапласа коли $P\in\Omega,\ \ P_j\notin\Omega$.

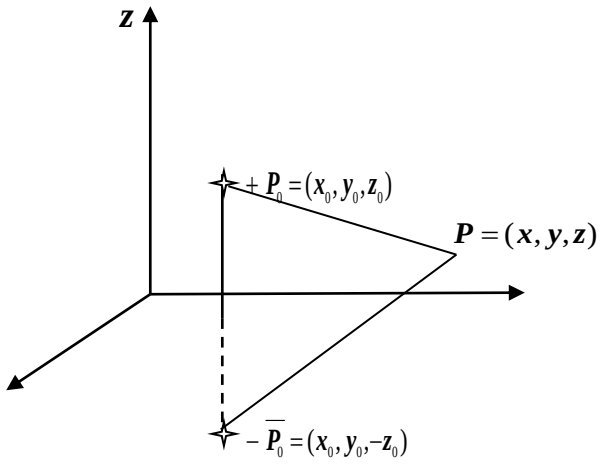
Задача Дірихле для півпростору

Розглянемо граничну задачу :

$$\begin{aligned}&\Delta U(P)=-F(P),\ \ P\in\Omega=\{x,y,z,z>0,-\infty<x,y<\infty\}\\&U(P)\big|_{P\in S}=f(P),\ \ S=\{x,y,z,z=0,-\infty<x,y<\infty\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

Для знаходження розв’язку цієї задачі побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа у півпросторі $z > 0$.

В довільній точці P_0 верхнього півпростору розташуємо одиничний точковий заряд, потенціал якого обчислюється $\frac{1}{4\pi|P - P_0|}$, в нижньому півпросторі $z < 0$, розташуємо компенсуючи заряди, так що би в кожній точці поверхні (площині $z = 0$) сумарний потенціал електростатичного поля дорівнював нулю.



Користуючись принципом суперпозиції електростатичних полів, легко зрозуміти, що компенсація потенціалу заряду в точці P_0 відбудеться у випадку, коли компенсуючий заряд розташувати дзеркально існуючому відносно площини $z = 0$, а величину заряду обрати одиничну зі знаком мінус.

В результаті отримаємо сумарний потенціал електростатичного поля

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi|P - P_0|} - \frac{1}{4\pi|P - \overline{P_0}|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \tag{4.4}$$

Легко перевірити, що

$$\Pi(P)\Big|_{p\in S} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z_0)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z_0)^2}} \equiv 0$$

Таким чином побудована функція (4.4) представляє собою функцію Гріна

першої граничної задачі (Дірихле) оператора Лапласа для півпростору.

$$G_1(P,P_0)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} \qquad (4.4')$$

Для знаходження розв’язку задачі Діріхле скористаємося формулою інтегрального представлення (3.16)

$$U(P_0)=\iiint\limits_{\Omega} G_1(P,P_0)F(P)dP-\iint\limits_{S}\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}f(P)dS_P$$

Обчислимо

$$\left.\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S}=-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]=$$

$$=-\left[\frac{z-z_0}{4\pi\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{z+z_0}{4\pi\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_{z=0}=$$

$$=\frac{-z_0}{2\pi\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Таким чином, використовуючи формулу інтегрального представлення, можемо записати розв’язок задачі Дірихле для рівняння Пуассона:

$$U(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\iint_{R^2}\left[\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]F(x,y,z)dxdydz+ \qquad (4.5)$$

$$\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)dxdy}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

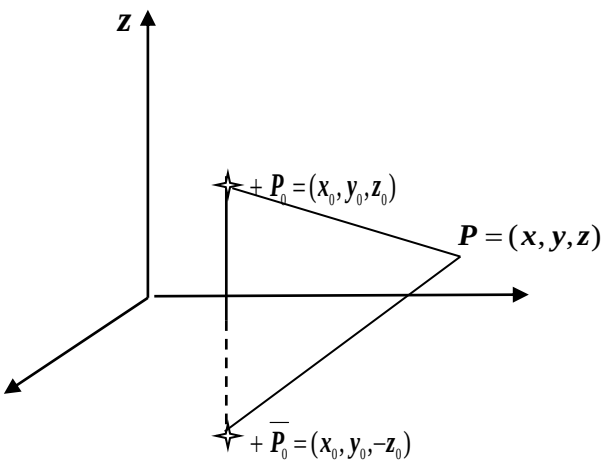
Задача Неймана для півпростору

Будемо розглядати граничну задачу

$$\Delta U(P)=-F(P),\ P\in\Omega=\{x,y,z,z>0,-\infty<x,y<\infty\}$$

$$-\frac{\partial U(P)}{\partial z}\bigg|_{P\in S}=f(P),\ S=\{x,y,z,z=0,-\infty<x,y<\infty\} \qquad (4.6)$$

Для розв’язання цієї задачі побудуємо функцію Гріна другої граничної задачі оператора Лапласа для півпростору.



Для випадку умови другого роду тобто коли на площині $z=0$ виконується умова $\frac{\partial G_2(P,P_0)}{\partial n_P}\bigg|_{P\in S}=0$, її можна інтерпретувати як рівність нулю потоку електростатичного поля крізь площину $z=0$.

Це означає, що поле внутрішнього одиничного заряду треба компенсувати полем зовнішніх зарядів. Це можна зробити, якщо дзеркально одиничному позитивному заряду в точці P_0 розташувати заряд додатного знаку в симетричній точці $\overline{P_0}$. Таким чином сумарний потенціал двох зарядів, а значить і функцію Гріна можна записати у вигляді:

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi|P - P_0|} + \frac{1}{4\pi|P - \overline{P_0}|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} = G_2(P,P_0) \quad (4.7)$$

Перевіримо, що побудована функція Гріна задовольняє граничній умові

$$\left.\frac{\partial G_2(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]_{z=0} =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{z-z_0}{4\pi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z+z_0}{4\pi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{z=0} = 0$$

Враховуючи формулу інтегрального представлення розв’язку другої граничної задачі (3.17), отримаємо формулу для розв’язку задачі Неймана рівняння Пуассона в півпросторі:

$$U(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\iiint_{R^2}\left[\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]F(x,y,z)dxdydz + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)dxdy}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.8)$$

Лекція №21

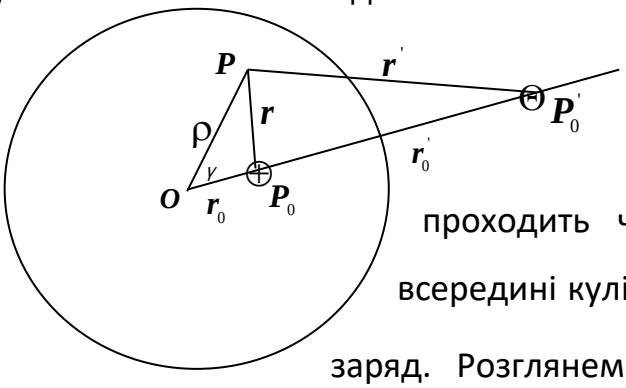
Функція Гріна задачі Дірихле для кулі

[6, стор. 84 - 96]

Будемо розглядати граничну задачу

$$\begin{cases} \Delta U(P) = 0, \ |P| < R \\ U(P)\big|_{|P|=R} = f(P) \end{cases} \qquad (4.9)$$

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі. Введемо позначення $|\boldsymbol{OP}_0| = \boldsymbol{r}_0$, $|\boldsymbol{OP}_0^{'}| = \boldsymbol{r}_0^{'}$



$$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}_0|, \ \boldsymbol{r}^{'} = |\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}_0^{'}|$$

На довільному проміні, який проходить через центр кулі точку О розмістимо всередині кулі у точці $\boldsymbol{P}_0$ одиничний точковий додатній заряд. Розглянемо точку $\boldsymbol{P}_0^{'}$ симетричну точці $\boldsymbol{P}_0$ відносно сфери.

Це означає, що обидві точки лежать на одному проміні, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню $\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0^{'} = \boldsymbol{R}^2$. В $\boldsymbol{P}_0^{'}$ точці розмістимо від'ємний заряд величини $\boldsymbol{e}$, яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів

$$\Pi(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{4\pi\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{e}}{4\pi\boldsymbol{r}^{'}} \qquad (4.10)$$

Обчислимо величину $\boldsymbol{e}$ використовуючи теорему косинусів

$$\Pi(P)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\left(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{0.5}}-\frac{e}{\left(\rho^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2\rho\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma\right)^{0.5}}\right]_{\rho=R}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{0.5}}-\frac{e}{\left(R^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2R\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma\right)^{0.5}}\right]=$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-e\frac{r_0}{R}}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{0.5}}\right]=0$$

Остання рівність буде вірною, якщо $e=R/r_0$.

Таким чином функцію Гріна задачі Дірихле для кулі можна записати у вигляді (4.10) при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

$$G_1(P,P_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{-0.5}-\right.$$
$$\left.-\left(R^2+\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2}-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{-0.5}\right] \qquad (4.11)$$

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо

$$\left.\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S}=\left.\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}=\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\rho-r_0\cos\gamma}{\left(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{\rho r_0^2}{R^2}-r_0\cos\gamma}{\left(\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2}+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_{\rho=R}=-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-r_0^2}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути

$$\cos\gamma=\frac{\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP_0}\right)}{\rho r_0}=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \qquad (4.12)$$

Тут ρ,φ,θ - сферичні координати точки $\boldsymbol{P}$, а $\boldsymbol{r}_0,\varphi_0,\theta_0$ - сферичні координати точки $\boldsymbol{P}_0$.

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв’язок задачі Дірихле:

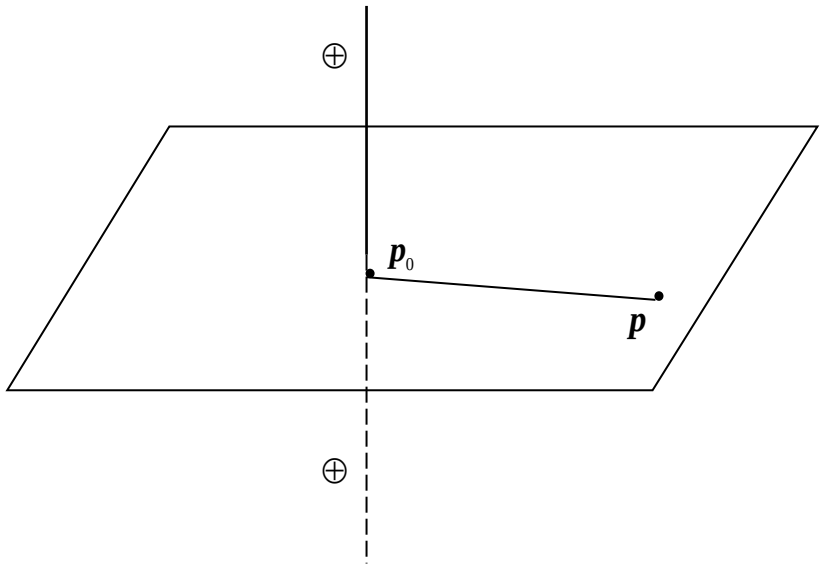
$$U(r_0,\varphi_0,\theta_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(R^2-r_0^2\right)\sin\theta\, f(\varphi,\theta)d\theta d\varphi}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4.13)$$

Формула (4.13) дає розв’язок задачі Дірихле для рівняння Лапласа і називається формулою Пуассона для кулі.

Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв’язку для $\boldsymbol{R}^2$, що приводить до наступного вигляду функції Гріна

$$G_i(p,p_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|p-p_0|}+g_i(p,p_0),\;\; p,p_0\in D\subset R^2 \qquad (4.14)$$



Фізичний зміст фундаментального розв'язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці $\boldsymbol{p}$ рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченої нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку $\boldsymbol{p}_0$. Точки $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_0$ належать площині.

Аналогічно кулі , можна отримати функцію Гріна задачі Дірихле для кола, яка має вигляд:

$$G_1(p, p_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos\gamma}} - \ln\frac{R}{r_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{r_0}\right)^2 + \rho^2 - 2\rho\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma}}\right] \qquad (4.15)$$

Або через комплексні змінні $z = \rho e^{i\varphi}$, $\quad \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{e}^{i\varphi_0}$, $\quad z_0^* = \frac{R^2}{\overline{z_0}}$

$$G_1(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_0\left|z - z_0^*\right|}{R\left|z - z_0\right|} \qquad (4.15')$$

Таким чином розв'язок задачі Дірихле для кола може бути записана у вигляді :

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)} f(\varphi)d\varphi \qquad (4.16).$$

Або через точки комплексної площини, $\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)} = \mathrm{Re}\frac{z + z_0}{z - z_0}$,

$d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$ Тоді, формула (4.16) має вигляд:

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} f(z)\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z} \qquad (4.15')$$

Нехай необхідно побудувати функцію Гріна першої граничної задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in D \\ u(x,y)\big|_C = f(x,y) \end{cases} \qquad (4.17)$$

для довільної однозв'язної області $\boldsymbol{D}$ з жордановою границею $\boldsymbol{C}$. Припустимо, що відома функція $\omega(\boldsymbol{z})$, яка здійснює конформне відображення області $\boldsymbol{D}$ на одиничний круг $|\omega| < 1$, тоді з (4.15') функція Гріна першої граничної задачі для області $\boldsymbol{D}$ буде мати вигляд : $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}_0) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\left|\dfrac{1-\overline{\omega(\boldsymbol{z}_0)}\omega(\boldsymbol{z})}{\omega(\boldsymbol{z})-\omega(\boldsymbol{z}_0)}\right|$ (4.18)

А розв'язок задачі Дірихле (4.17) можна записати у вигляді:

$$u(\varsigma_0) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(\varsigma)\frac{\omega(\varsigma)+\omega(\varsigma_0)}{\omega(\varsigma)-\omega(\varsigma_0)}\frac{\omega'(\varsigma)}{\omega(\varsigma)}d\varsigma \qquad (4.19)$$

Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої

[6, 207 - 214]

Ми покажемо, як за допомогою функції Гріна можна знайти розв'язок першої та другої граничних задач рівняння теплопровідності для напівпрямої $\boldsymbol{x} > 0$.

Нехай ми розглядаємо граничні задачі :

$$\begin{aligned} & a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -f(x,t),\ t>0, x>0 \\ & u(0,t) = \varphi(t),\ u(x,0) = u_0(x) \end{aligned} \qquad (4.20)$$

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-f(x,t),\ t>0, x>0$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\varphi(t),\ u(x,0)=u_0(x) \qquad (4.21)$$

Для побудови функції Гріна використаємо фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності в одновимірному евклідовому просторі. Як відомо від має вигляд: $\varepsilon(x,t)=\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{2a^2 t}}$

Оскільки при побудові функції Гріна використовується фізична інтерпретація фундаментального розв'язку, то з'ясуємо її знайшовши розв'язок наступної задачі:

В нескінченому стрижні з теплоізольованою боковою поверхнею і нульовою початковою температурою в початковий момент часу $t=0$ ***в точці*** $x=0$ ***миттєво виділилося*** Q ***одиниць тепла. Необхідно визначити температуру стрижня в довільний момент часу в довільній його точці.***

Розв'язання.

Запишемо математичну постановку задачі.

Розповсюдження тепла у однорідному стрижні задається рівнянням теплопровідності з постійними коефіцієнтами:

$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\frac{f(x,t)}{c\rho S},\ t>0,-\infty<x<\infty,$ де $a^2=\frac{k}{c\rho}$, $f(x,t)$ - потужність теплових джерел. За умовою задачі теплове джерело є таким, що виділяє миттєво Q одиниць тепла *в точці* $x=0$ *в* початковий момент часу*, тому* функція $f(x,t)=Q\delta(t)\delta(x)$. Тобто сумарна кількість тепла дорівнює

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q\delta(t)\delta(x)dxdt=Q$$

Оскільки до моменту дії теплових джерел початкова температура дорівнювала нулю, то початкова умова повинна мати вигляд: $u(x,0)=0$.

Таким чином ми маємо задачу Коші для рівняння теплопровідності з однорідною початковою умовою.

Розв'язок такої задачі (температуру стрижня в точці $\boldsymbol{x}$ в момент часу $\boldsymbol{t}$) можна записати за формулою:

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint_{R_n}F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau+\iiint_{R_n}\varepsilon(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi \qquad (4.22)$$

Використовуючи її для цієї задачі будемо мати:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q}{c\rho S}\delta(\tau)\delta(\xi)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau=\frac{Q}{c\rho S}\varepsilon(x,t)=\frac{Q}{c\rho S}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{2a^2t}}$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності представляє собою функцію, що моделює температуру стрижня в точці x в момент часу t за рахунок дії миттєвого точкового джерела інтенсивності $Q=c\rho S$ яке діє в початковий момент часу в точці $x=0$.

Для побудови функції Гріна граничних задач (4.20), (4.21) на півпрямій використаємо метод відображення теплових джерел.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $c\rho S$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $-c\rho S$, то з фізичних міркувань можна очікувати , що в точці $x=0$, яка лежить посередині між точками $x=\xi$ та $x=-\xi$, вплив теплових джерел дає нульову температуру. Дійсно, виходячи з фізичного змісту фундаментального розв'язку, отримаємо, що температура від дії двох точкових джерел дорівнює

$$E_1(x,\xi,t-\tau)=\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}}-\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}} \qquad (4.23)$$

Легко перевірити, що $E_1(0,\xi,t-\tau)=0$, $E_1(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau<0}=0$, а другий

додаток $\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}}$ задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності при $\boldsymbol{x}>0, \boldsymbol{t}-\tau>0$. Таким чином $E_1(x,\xi,t-\tau)$ є функція Гріна першої граничної задачі рівняння теплопровідності для півпрямої.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $\boldsymbol{c}\rho\boldsymbol{S}$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $\boldsymbol{c}\rho\boldsymbol{S}$, то з фізичних міркувань можна очікувати , що в точці $\boldsymbol{x}=0$, яка лежить посередині між точками $\boldsymbol{x}=\xi$ та $\boldsymbol{x}=-\xi$, тепловий потік буде дорівнювати нулю.

Запишемо температуру в цьому випадку

$$E_2(x,\xi,t-\tau)=\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}}+\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}} \qquad (4.24)$$

Легко перевірити, що $\left.\frac{\partial E_2(x,\xi,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{\theta(t-\tau)}{2a^3\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\left[\xi e^{-\frac{\xi^2}{2a^2t}}-\xi e^{-\frac{\xi^2}{2a^2t}}\right]=0$,

Таким чином $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x},\xi,\boldsymbol{t}-\tau)$ є функцією Гріна другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої.

Для запису розв'язку граничних задач (4.20), (4.21) будемо використовувати формули (3.22) та (3.23) , які треба записати для випадку пів прямої

Для першої граничної задачі будемо мати:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty E_1(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^\infty E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+$$
$$+a^2\int_0^t\left(\left.\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\varphi_0(\tau)\right)d\tau \qquad (4.25)$$

Для другої граничної задачі отримаємо

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty E_2(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^\infty E_2(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi-$$
$$-a^2\int_0^t\left(E_2(x,0,t-\tau)\varphi(\tau)\right)d\xi d\tau, \qquad (4.26)$$

Продемонстрований метод це лише один з прийомів, який використовується для побудови функції Гріна.

Метод відображення дозволяє будувати функції Гріна для одновимірного хвильового рівняння.

§ 5 Гармонічні функції та їх властивості

[6, стор. 97 - 111]

Означення 1 Функцію $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ називають гармонічною в деякій відкритій області Ω, якщо $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^2(\Omega)$ і $\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega$., тобто функція є двічі неперервно диференційованим розв'язком рівняння Лапласа.

Означення 2 Функцію $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ називають гармонічною в деякій точці, якщо ця функція гармонічна в деякому околі цієї точки.

Означення 3 Функцію $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ називають гармонічною в деякій замкненій області, якщо вона гармонічна в деякій більш широкій відкритій області.

З гармонічними функціями у тривимірних і двовимірних областях ми вже зустрічалися, а саме нам відомо, що

$$\Delta\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}=0, x\neq\xi,\ x,\xi\in R^2 \qquad (5.1)$$

$$\Delta\frac{1}{4\pi|x-\xi|}=0,\ x\neq\xi,\ \ x,\xi\in R^3 \qquad (5.2)$$

Інтегральне представлення функцій класу $\boldsymbol{C}^2(\Omega)$

Для отримання інтегрального представлення функцій класу $\boldsymbol{C}^2(\Omega)$ будемо використовувати другу формулу Гріна для оператора Лапласа.

$$\iiint_{\Omega}\left[v(x)\Delta u(x)-u(x)\Delta v(x)\right]dx=\iint_{S}\left[v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}-u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right]dS \qquad (5.3)$$

В якості функції $\boldsymbol{u}(\xi)$ оберемо довільну функцію $\boldsymbol{C}^2(\Omega)$, а у якості $\boldsymbol{v}$, фундаментальний розв'язок оператора Лапласа для тривимірного евклідового простору $\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$

В результаті підстановки цих величин в (5.3) отримаємо

$$\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi)+u(\xi)\delta(x-\xi)\right]d\xi=\iint_{S}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_{\xi}$$

Після обчислення другого доданку в лівій частині можемо записати формулу інтегрального представлення функцій класу $\boldsymbol{C}^2(\Omega)$.

$$u(x)=-\iiint_{\Omega}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi)d\xi+\iint_{S}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_{\xi}$$

(5.4)

У випадку коли функція $\boldsymbol{u}$ є гармонічною в області Ω то формула (5.4) прийме вигляд:

$$u(x)=\iint_{S}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_{\xi}$$

(5.5)

З формули (5.5) та (5.3) можна отримати деякі властивості гармонічних функцій:

Властивість 1 Гармонічна в області Ω функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ має в кожній внутрішній точці області Ω неперервні похідні будь – якого порядку. Дійсно, оскільки $x\in\Omega,\ \xi\in S,\ x\neq\xi$, то для обчислення будь – якої похідної необхідно диференціювати підінтегральну функцію, яка має похідні будь - якого порядку:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}=\iint\limits_S\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_\xi$$

Властивість 2 Якщо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ гармонічна функція в скінченій області Ω с границею $\boldsymbol{S}$ то має місце співвідношення $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=0$ (5.6)

Дійсно, у формулі (5.3) оберемо $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\equiv 1$, тоді інтеграл в лівій частині і другий інтеграл правої частини перетворюється в нуль. В результаті чого отримаємо рівність (5.6).

Теорема 1 *(про середнє значення гармонічної функції)* Якщо $\boldsymbol{u}$ гармонічна функція в кулі і неперервна в замиканні цієї кулі, то значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері, що обмежує кулю.

Доведення Використаємо формулу (5.5) в якій в якості поверхні $\boldsymbol{S}$ візьмемо сферу радіусу $\boldsymbol{R}$ з центром у точці x_0, і обчислимо значення функції $\boldsymbol{u}$ в точці $\boldsymbol{x}_0$

$$u(x_0)=\iint\limits_{S(x_0,R)}\left[\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\right]dS_\xi$$

Оскільки $\xi\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{R})$, то $\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}_0-\xi|}=\frac{1}{4\pi\boldsymbol{R}}$, а $\left.\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\right|_{S(x_0,R)}=\frac{1}{4\pi R^2}$.

Таким чином $u(x_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{S(x_0,R)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}dS_\xi+\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S(x_0,R)}u(\xi)dS_\xi$

Оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, то остаточно маємо

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{4\pi\boldsymbol{R}^2}\iint\limits_{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{R})}\boldsymbol{u}(\xi)\boldsymbol{dS}_\xi \qquad (5.7)$$

Лекція 22

Принцип максимуму гармонічних функцій

[6, стор. 97 - 111]

Теорема *(принцип максимуму гармонічних функцій)* Якщо гармонічна в скінченій області функція досягає у внутрішній точці цієї області свого максимального або мінімального значення , то ця функція є тотожна константа.

Доведення Нехай $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ гармонічна функція в обмеженій області Ω і досягає в точці $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ свого максимального значення. Розглянемо кулю $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}_0) \in \Omega$ максимально великого радіусу.

Оскільки $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, то значення функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, коли $x \in S(x_0, R_0)$ задовольняє нерівності $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$.

Якщо хоча б у одній точці $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}_0)$ нерівність строга, тобто $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$, то за рахунок неперервності гармонічних функцій ця нерівність буде збережена і в деякому околі цієї точки, а це означатиме, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) > \dfrac{1}{4\pi \boldsymbol{R}_0^2} \iint\limits_{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}_0)} \boldsymbol{u}(\xi) \boldsymbol{dS}_\xi$

Тобто ми прийшли до протиріччя з припущенням, що $\exists \xi \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}_0)$, що $\boldsymbol{u}(\xi) < \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$. Це означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}_0)$.

Оскільки ця рівність має місце для кулі будь – якого радіусу $\boldsymbol{R} \le \boldsymbol{R}_0$, то це означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$ коли $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{R}_0)$.

Покажемо тепер, що функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$, коли $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Для цього виберемо довільну точку $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$, то з'єднаємо її з точкою $\boldsymbol{x}_0$ ламаною. Побудуємо послідовність куль $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{R}_i), \boldsymbol{i} = 0..\boldsymbol{N}$ з такими властивостями центри куль $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{i} = 1..\boldsymbol{N}$ належать ламаній. $\boldsymbol{x}_{i+1} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{R}_i) \subset \Omega,\ \boldsymbol{i} = 1, \boldsymbol{N}$. $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{R}_N)$.

Оскільки центр кожної наступної кулі з номером $\boldsymbol{i}+1$, лежить всередині кулі з номером $\boldsymbol{i}$, то використовуючи метод математичної індукції, ми можемо встановити властивість: якщо функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$ коли $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{R}_i)$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$, коли $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_{i+1},\boldsymbol{R}_{i+1})$. Це означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$, коли $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{R}_N)$. Зокрема, це означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^*)\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$. І теорема доведена.

Наслідки з принципу максимуму

Наслідок 1 Гармонічна функція відмінна від тотожної константи не досягає в скінченій області ні свого максимального ні свого мінімального значення.

Наслідок 2 Якщо функція гармонічна в області Ω і неперервна в $\overline{\Omega}$, то свої максимальне і мінімальне значення вона приймає на границі області.

Наслідок 3 Якщо функція гармонічна в області Ω і неперервна в $\overline{\Omega}$, то $\left|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right|\le\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}}\left|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right|$.

Наслідок 4 Нехай $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ - гармонічні функції в області Ω і має місце нерівність $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\le\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\le\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega$.

Оператор Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат

Якщо замість прямокутних координат $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ ввести ортогональні криволінійні координати q_1,q_2,q_3 за допомогою співвідношень

$$q_i=f_i(x,y,z),\ i=1,2,3 \tag{5.8}$$

(5.14) дозволяють записати обернені перетворення

$$\boldsymbol{x}=\varphi_1(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3),\ \boldsymbol{y}=\varphi_2(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3),\ \boldsymbol{z}=\varphi_3(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3) \tag{5.9}$$

Загальний вигляд оператора Лапласа в криволінійних координатах має вигляд:

$$\Delta u=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_2H_1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] \tag{5.10}$$

Де
$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_1^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial \boldsymbol{q}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial \boldsymbol{q}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial \boldsymbol{q}_1}\right)^{2\,2} \\ \boldsymbol{H}_2^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial \boldsymbol{q}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial \boldsymbol{q}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial \boldsymbol{q}_2}\right)^2 \\ \boldsymbol{H}_3^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial \boldsymbol{q}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial \boldsymbol{q}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial \boldsymbol{q}_3}\right) \end{cases} \qquad (5.11)$$

<u>Для сферичної системи координат</u> $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}_2 = \theta, \boldsymbol{q}_3 = \varphi,$ Формули (5.9) мають вигляд $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\sin\theta\cos\varphi,$ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\sin\theta\sin\varphi, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}\cos\theta, \boldsymbol{H}_1 = 1, \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}_3 = \boldsymbol{r}\sin\theta$

Таким чином оператор Лапласа у сферичній системі координат матиме вигляд.

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \qquad (5.12)$$

<u>Для циліндричної системи координат</u> $q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z,$

Формули (5.9), (5.11) мають вигляд $\boldsymbol{x} = \rho\cos\varphi,$ $\boldsymbol{x} = \rho\sin\varphi, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{H}_1 = 1, \boldsymbol{H}_2 = \rho, \boldsymbol{H}_3 = 1.$

Оператор Лапласа в циліндричній системі координат має вигляд:

$$\Delta_{\rho,\varphi,\boldsymbol{z}} \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}^2} \qquad (5.13)$$

Якщо функція $\boldsymbol{u}$ не залежить від змінної $\boldsymbol{z}$, то отримуємо полярну систему координат і вираз оператора Лапласа в полярній системі координат:

$$\Delta_{\rho,\varphi} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \qquad (5.14)$$

Перетворення Кельвіна гармонічних функцій.

Нехай функція $\boldsymbol{u}$ гармонічна за межами кулі $\boldsymbol{U}(0, \boldsymbol{R})$, тоді функцію

$$v(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) \qquad (5.15)$$

(в (5.15) використовується перетворення аргументу обернених радіус векторів $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{R}^2}{|\boldsymbol{y}|^2}\boldsymbol{y}$ або обернене $\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{R}^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$) будемо називати перетворенням Кельвіна гармонічної функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{n}$ - вимірному евклідовому просторі.

В подальшому будемо вважати, що $\boldsymbol{R}=1$, цього завжди можна досягти шляхом зміни масштабу. Покажемо, що для $\boldsymbol{n}=3$ перетворення Кельвіна $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ гармонічної функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ є гармонічною функцією аргументу $\boldsymbol{y}$.

Легко показати, що перший доданок в операторі Лапласа (5.12) може бути записаний у вигляді $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$

Таким чином при $n=3,\ R=1$ (5.15) має вигляд $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right)$. Оскільки $\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$, а $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}$, то $|\boldsymbol{y}|=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}$, або $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$.

Покажемо, що функція $v(r',\theta,\varphi)=ru(r,\theta,\varphi)$. Де $\boldsymbol{r}=\frac{1}{\boldsymbol{r}'}$, задовольняє рівнянню Лапласа, якщо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},\theta,\varphi)$ - гармонічна функція.

Дійсно маємо

$$r\Delta_{r,\varphi,\theta}u=\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0=$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)+$$

$$\frac{r'^2}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=r'^4\Delta_{r',\varphi,\theta}v(r',\theta,\varphi)=0$$

При отриманні останньої рівності було враховано що $\frac{\partial v}{\partial r}=-r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)$.

Аналогічно тому, як було показана гармонічність $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right)$ у тривимірному евклідовому просторі, можна показати гармонічність функції $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right)$ у двовимірному евклідовому просторі.

Гармонічність в нескінченно віддаленій точці та поведінка гармонічних функцій на нескінченості.

Означення Будемо говорити**,** що функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ є гармонічною функцією в нескінченно віддаленій точці , якщо функція

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\begin{cases}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right), & \boldsymbol{n}=3\\ \boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right), & \boldsymbol{n}=2\end{cases} \tag{5.16}$$

є гармонічною функцією в точці нуль.

Теорема 1 *(про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці в просторі)* Якщо при $\boldsymbol{n}=3$ функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ функція прямує до нуля не повільніше $\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}$, а частинні похідні ведуть себе як $\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{O}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{1+|\alpha|}}\right)$

Теорема 2 *(про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці на площині)* Якщо при $n=2$ функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ обмежена, а частинні похідні ведуть себе як $\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{O}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{1+|\alpha|}}\right)$.

Гармонічні функції які мають поведінку на нескінченості визначену теоремами 1 та 2 для тривимірного і двовимірного просторів називають регулярними на нескінченості гармонічними функціями , а відповідні оцінки умовами регулярності на нескінченості.

Єдиність гармонічних функцій

Нехай $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ - гармонічна функція в обмеженій області Ω з границею $\boldsymbol{S}$, тоді має місце рівності Дірихле

$$\iiint\limits_{\Omega} \left|\boldsymbol{gradU}\right|^2 \boldsymbol{dx} = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{dS} \qquad (5.17)$$

Нехай $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ - гармонічна функція області $\boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{R})/\Omega$ з границями $\boldsymbol{S}$ та $\boldsymbol{S}(0,\boldsymbol{R})$, де $\boldsymbol{R}$ як завгодно велике число, тоді має місце рівності Дірихле

$$\iiint\limits_{\boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{R})/\Omega} \left|\boldsymbol{gradU}\right|^2 \boldsymbol{dx} = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{dS} + \iint\limits_{\boldsymbol{S}(0,\boldsymbol{R})} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{dS} \qquad (5.18)$$

Для доведення рівності Дірихле (5.17) достатньо записати очевидну ціпочку рівностей.

$$0 = \iiint\limits_{\Omega} U(x)\Delta U(x)dx = \iiint\limits_{\Omega} U(x)div(gradU(x))dx = \iint\limits_{S} U(x)(gradU(x),n)dS -$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \left|gradU(x)\right|^2 dx$$

Аналогічно можна довести і рівність (5.18)

При формулюванні теорем единості гармонічних функцій ми скрізь будемо припускати існування відповідної гармонічної функції, хоча сам факт існування гармонічної функції ми доведемо пізніше.

Теорема 3 *(Перша теорема единості гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega' = \boldsymbol{R}^3/\Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні $\boldsymbol{S}$ задані значення, то така функція едина.

Доведення Припустимо, що в області Ω існує принаймні дві гармонічні функції, які приймають на поверхні $\boldsymbol{S}$ однакові значення $\begin{cases} \Delta u_i(x) = 0, \ x \in \Omega \\ u_i\big|_{x \in S} = f, \ i = 1,2 \end{cases}$

Для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ будемо мати задачу $\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega \\ u\big|_{x \in S} = 0, \end{cases}$

Застосуємо рівність Дірихле для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Будемо мати

$\iiint\limits_{\Omega} |\boldsymbol{gradu}|^2 \boldsymbol{dx} = \iint\limits_{S} \boldsymbol{U} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{dS} = 0$. Звідси маємо, що $\boldsymbol{gradu}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \Omega$. Остання рівність означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{const}, \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$, а оскільки $u(x) = 0, \ x \in S$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \Omega$. Тобто ми маємо, що $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$.

Покажемо справедливість теореми для області Ω'.

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні $\boldsymbol{S}$ однакові значення $\begin{cases} \Delta u_i(x) = 0, \ x \in \Omega' \\ u_i\big|_{x \in S} = f, \ i = 1,2 \end{cases}$ отримаємо для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ задачу $\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega' \\ u\big|_{x \in S} = 0, \ u(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|}\right), x \to \infty \end{cases}$

Застосуємо для $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ рівність (5.18)

$$\iiint\limits_{U(0,R)/\Omega} |gradU|^2 dx = \iint\limits_{S} U \frac{\partial U}{\partial n} dS + \iint\limits_{S(0,R)} U \frac{\partial U}{\partial n} dS = \iint\limits_{S(0,R)} U \frac{\partial U}{\partial n} dS .$$

Спрямуємо радіус кулі $\boldsymbol{R}$ до нуля і врахуємо умову регулярності на нескінченості $\iiint\limits_{\Omega'} |gradU|^2 dx = \lim\limits_{R \to \infty} \iint\limits_{S(0,R)} U \dfrac{\partial U}{\partial n} dS \le \lim\limits_{R \to \infty} \dfrac{1}{R^3} \iint\limits_{S(0,R)} dS = 0$.

Таким чином $u(x) \equiv const, x \in \Omega'$, а оскільки $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$, то $u_1(x) \equiv u_2(x), \ x \in \Omega'$

Теорема 4 *(Друга теорема єдиності гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій

області Ω, (або в області $\Omega' = \boldsymbol{R}^3 / \Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні $\boldsymbol{S}$ задані значення своєї нормальної похідної $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x \in \boldsymbol{S}}$, то в області Ω вона визначається с точністю до адитивної константи, а в області Ω' вона єдина.

Доведення Припустимо, що в області Ω існує принаймі дві гармонічні функції, які приймають на поверхні $\boldsymbol{S}$ однакові значення нормальної похідної

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x \in \boldsymbol{S}} = \boldsymbol{f}, \ \boldsymbol{i} = 1,2 \end{cases}.$$

Для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ будемо мати

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x \in \boldsymbol{S}} = 0, \end{cases}$$

Для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ використаємо рівність Дірихле

$$\iiint\limits_{\Omega} |gradu|^2 dx = \iint\limits_{S} U \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$ тобто $gradu(x) \equiv 0, x \in \Omega$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{const}$.

Константа залишається невизначеною і таким сином $u_1(x) = u_2(x) + const$.

Покажемо справедливість теореми для області Ω'.

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні $\boldsymbol{S}$ однакові значення $\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x \in \boldsymbol{S}} = \boldsymbol{f}, \ \boldsymbol{i} = 1,2 \end{cases}$ отримаємо для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ задачу

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x \in \boldsymbol{S}} = 0, \end{cases}$$

Застосуємо для $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ рівність (5.18)

$$\iiint\limits_{U(0,R)/\Omega} |gradu|^2 dx = \iint\limits_{S} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iint\limits_{S(0,R)} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint\limits_{S(0,R)} u \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Спрямуємо радіус кулі $\boldsymbol{R}$ до нуля і врахуємо умову регулярності на

нескінченості. В результаті будемо мати

$$\iiint\limits_{\Omega'} |gradu|^2 dx = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{S(0,R)} u\frac{\partial u}{\partial n} dS \le \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^3} \iint\limits_{S(0,R)} dS = 0$$

Таким чином $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{const}, \boldsymbol{x} \in \Omega'$, а оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, а $u_1(x) \equiv u_2(x)$ Друга теорема єдиності доведена .

Теорема 5 *(Третя теорема єдиності гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega' = \boldsymbol{R}^3/\Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні $\boldsymbol{S}$ задані значення лінійної комбінації нормальної похідної та функції $\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\right|_{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{S}}$, $\alpha \ge 0$, то в області Ω та в області Ω' вона визначається єдиним чином.

Теорему 5 довести самостійно.

§ 6 Рівняння Гельмгольца, деякі властивості його розв'язків

[6, стор. 349 - 353], [1, стор. 438 - 441]

Рівнянням Гельмгольца в математичній фізиці називають рівняння вигляду $\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega$, де $\boldsymbol{k}$ взагалі кажучи комплексна константа.

Джерелом виникнення рівняння Гельмгольца є математичні моделі періодичних процесів.

Нехай ми маємо хвильове рівняння, яке в залежності від розмірності простору, якому належить область інтегрування Ω може моделювати процес акустичних коливань об'єму газу, або електромагнітні коливання в тривимірному просторі, коливання мембрани в двовимірному просторі, коливання струни, або стрижня у одновимірному просторі.

Таким чином розглядаємо граничну задачу:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^2 \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{l}_i \boldsymbol{u}\big|_{x \in S} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \end{cases} \tag{6.1}$$

В задачі (6.1) відсутні початкові умови у зв'язку з тим, що розглядаються спеціальні значення функції $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ та $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$. А саме ми вважаємо, що ці функції є періодичними по аргументу $\boldsymbol{t}$ з однаковим періодом.

Покладемо, що $F(x,t) = F_1(x)\cos(\omega t) - F_2(x)\sin(\omega t)$,

$$f(x,t) = f_1(x)\cos(\omega t) - f_2(x)\sin(\omega t) \tag{6.2}$$

Можна очікувати, що в результаті доволі тривалої дії таких збурень розв'язок задачі при будь – яких початкових умовах теж буде періодичним , тобто

$$u(x,t) = V_1(x)\cos(\omega t) - V_2(x)\sin(\omega t). \tag{6.3}$$

Підставляючи (6.3) в задачу (6.1), отримаємо

$$\left(\Delta \boldsymbol{V}_1 + \frac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{V}_1\right)\cos(\omega \boldsymbol{t}) - \left(\Delta \boldsymbol{V}_2 + \frac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{V}_2\right)\sin(\omega \boldsymbol{t}) = -\frac{\boldsymbol{F}_1}{\boldsymbol{a}^2}\cos(\omega \boldsymbol{t}) + -\frac{\boldsymbol{F}_2}{\boldsymbol{a}^2}\sin(\omega \boldsymbol{t})$$

$$\cos(\omega t) l_i V_1\big|_{x \in S} - \sin(\omega t) l_i V_2\big|_{x \in S} = f_1 \cos(\omega t) - f_2 \sin(\omega t)$$

Оскільки функції $\sin(\omega \boldsymbol{t}), \cos(\omega \boldsymbol{t})$ - лінійно незалежні, то для амплітуди $\boldsymbol{V}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{i} = 1,2$ отримаємо рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x}) + \dfrac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2} = -\dfrac{\boldsymbol{F}_j}{\boldsymbol{a}^2}, \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \boldsymbol{j} = 1,2 \\ \boldsymbol{l}_i \boldsymbol{V}_j\big|_{x \in S} = \boldsymbol{f}_j \end{cases} \tag{6.4}$$

Аналогічний результат можна отримати, якщо ввести комплексну амплітуду $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}_2$, комплексну зовнішню силу та комплексну амплітуду граничної умови $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{f}_2$.

Шукаючи розв'язок (6.1) у вигляді $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{i\omega t}$ (6.5)

Отримаємо для комплексної амплітуди задача

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) + \dfrac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2} = -\dfrac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{a}^2}, \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{l}_i \boldsymbol{V}\big|_{x \in S} = \boldsymbol{f} \end{cases} \qquad (6.4')$$

Другим джерелом виникнення рівняння Гельмгольца є стаціонарне рівняння дифузії при наявності в середовище процесів , що ведуть до розмноження речовини. Такі процеси наприклад виникають при дифузії нейтронів. Рівняння має вигляд:

$$\Delta \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (6.6)$$

Де $\boldsymbol{D}$ - коефіцієнт дифузії, $\boldsymbol{c}$ - швидкість розмноження нейтронів.

Суттєвою відмінністю граничних задач для рівняння Гельмгольца від граничних задач рівняння Лапласа полягає в можливому порушенні єдиності розв'язку як для внутрішніх так і для зовнішніх задач.

Розглянемо таку граничну задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 u = 0, \ 0 < x < \pi; \ 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 \end{cases} \qquad (6.7)$$

При $\boldsymbol{k} = 0$ задача (6.7) має лише тривіальний розв'язок, що випливає з першої теореми єдності гармонічних функцій.

Нехай, $\boldsymbol{k}$ - ціле число. Неважко перевірити, що в цьому разі задача (6.7) має нетривіальний розв'язок $u(x, y) = \sin(kx)\sin(ky)$, а це в свою чергу означає, що задача з неоднорідними граничними умовами та неоднорідне рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 u = -F(x, y), \ 0 < x < \pi; \ 0 < y < \pi \\ u(0, y) = \varphi_1(y), \ u(1, y) = \varphi_2(y), \ u(x, 0) = \psi_1(x), \ u(x, 1) = \psi_2(x) \end{cases} \qquad (6.8)$$

має неєдиний розв'язок , який визначається з точністю до розв'язку однорідного рівняння, тобто з точністю до функції $A\sin(kx)\sin(ky)$.

Розглянемо приклад зовнішньої задачі для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta u(x) + k^2 u = 0, \ |x| > \pi, x = (x_1, x_2, x_3) \\ u(x)\big|_{|x|=\pi} = 0, \ u(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

При $\boldsymbol{k} = 0$. Гранична задача має лише тривіальний розв'язок тотожньо рівний нулю, що випливає з другої теореми єдиності гармонічних функцій. У випадку, коли $\boldsymbol{k}$ - ціле ми маємо, що розв'язком граничної задачі (6.9) окрім тотожного нуля буде функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\sin(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x})|}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$. Легко перевірити, що ця функція задовольняє як однорідному рівнянню Гельмгольца (це уявна частина фундаментального розв'язку) так і граничній умові на сфері і умові на нескінченості.

Наявність нетривіального розв'язку у однорідної задачі означає неєдиність розв'язку відповідної неоднорідної задачі.

Лекція 23

Задача на власні значення для оператора Лапласа

Причини порушення єдності розв'язку у внутрішньої граничної задачі (6.8) і зовнішньої граничної задачі (6.9) різні.

Для того щоб зрозуміти причину існування нетривіального розв'язку у задачі (6.8) розглянемо більш загальну однорідну задачу з параметром:

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \lambda \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{l}_i \boldsymbol{u}\big|_S = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

Розв'язком цієї задачі будемо вважати таку множину значень параметру λ, при яких існує нетривіальний розв'язок граничної задачі (6.10), і самі розв'язки, що відповідають цим значенням параметру λ, які називають власними функціями. Неважко зрозуміти, що (6.10) є узагальнення задачі Штурма – Ліувілля для оператора Лаплпса.

Застосовуючи функцію Гріна $\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для оператора Лапласа граничної задачі, яка відповідає типу граничної умови, можемо звести (6.10) до однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з ермітовим полярним ядром:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \lambda \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \tag{6.11}$$

Оскільки множина характеристичних чисел ермітового ядра не порожня, то існує дійсне значення параметру $\lambda = \lambda_0$, такі що рівняння (6.11) при цьому значені має нетривіальний розв'язок $u(x) = u_0(x)$. Тобто $\lambda_0, u_0(x)$ - характеристичне число і власна функція рівняння (6.11), а значить і еквівалентної граничної задачі (6.10).

Таким чином, якщо для граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{l}_i \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big|_{x \in S} = 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

реалізується ситуація, що число $\boldsymbol{k}^2$ співпадає з одним з характеристичних чисел

оператора Лапласа для області Ω з заданим типом граничних умов, то розв'язок задачі (6.12) для довільного вільного члена рівняння взагалі кажучи не існує.

Зрозуміло, що (6.12) через функцію Гріна можна звести до інтегрального рівняння $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}^2 \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy} + \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})$ (6.13)

Де $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$.

Третя теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь стверджує, що інтегральне рівняння (6.13), у випадку коли $\boldsymbol{k}^2$ - характеристичне число має розв'язок тоді і лише тоді, коли вільний член $\boldsymbol{F}_1$ ортогональний усім розв'язкам однорідного рівняння (6.11) при $\lambda = \boldsymbol{k}^2$ а сам розв'язок неєдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій, що відповідають заданому значенню характеристичного числа.

Розглянемо тепер природу неєдиності розв'язку зовнішньої задачі (6.9). Треба відмітити, що для зовнішніх задач рівняння Лапласа умова регулярності забезпечувала єдиність розв'язку. Для граничної задачі рівняння Гельмгольца в тривимірному просторі вимога лише затухання розв'язку на нескінченості вже не дає можливість виділити єдиний розв'язок.

При розв'язанні зовнішніх задач для рівняння Гельмгольца як правило цікавими є дві основні задачі :

1. Розповсюдження хвилі від тіла в нескінченість, коли тіло є джерелом виникнення періодичних коливань.
2. Розповсюдження хвилі з нескінченості і взаємодія її з тілом, в цьому випадку відбувається дифракція

Нагадаємо, що для тривимірного простору у рівняння Гельмгольца є фундаментальні розв'язки $q_k^+(x) = \dfrac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$, $q_k^-(x) = \dfrac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$, які є комплексними

амплітудами періодичних сферичних хвиль $u^-(r,t)=\dfrac{e^{i\omega\left(t-\frac{|r|}{a}\right)}}{4\pi|r|}$ $u^+(r,t)=\dfrac{e^{i\omega\left(t+\frac{|r|}{a}\right)}}{4\pi|r|}$ та,

при цьому згадаємо, що $k=\dfrac{\omega}{a}$, $\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{x}|$.

Аналізуючи нахил прямих $t-\dfrac{r}{a}=const,\ t+\dfrac{r}{a}=const$, можна зрозуміти, що $u_-(x,t)$ - відповідає сферичній хвилі, яка прямує на нескінченість зі швидкістю $\boldsymbol{a}$, а $u_+(x,t)$ відповідає хвилі як прямує з нескінченості зі швидкістю $-\boldsymbol{a}$.

Для виділення єдиного розв'язку зовнішньої задачі задаються умови поведінки розв'язку задачі в нескінченно віддаленій точці. Ці умови називають умовами випромінювання або умовами Зомерфельда.

$$u(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\qquad \frac{\partial u(x)}{\partial|x|}-iku(x)=o\left(|x|^{-1}\right),\ |x|\to\infty \tag{6.14}$$

$$u(x)=O\left(|x|^{-1}\right)\qquad \frac{\partial u(x)}{\partial|x|}+iku(x)=o\left(|x|^{-1}\right),\ |x|\to\infty \tag{6.15}$$

Умова (6.14) відповідає хвилям, що уходять на нескінченість, (6.15) - хвилям, що приходять з нескінченості.

Саме умови (6.14) і (6.15) забезпечують єдність розв'язку зовнішніх граничних задач для рівняння Гельмгольца.

Для доведення цього факту можна скористатися формулами інтегрального представлення розв'язку однорідного рівняння Гельмгольца.

$$\Delta u+k^2u=0$$

$$u(x)=-\iint_S\left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dS_y \tag{6.16}$$

Формула (6.16) є аналогом формули (5.5) отриманої для представлення розв'язків рівняння Лапласа.

Записавши (6.16) для сфери $\boldsymbol{S_R}(0)$ і спрямовуючи її радіус до нескінченості,

а також враховуючи умови Зомерфельда (6.14) для знака плюс та (6.15) для знаку мінус ми отримаємо, що $u(x) \equiv 0$.

У випадку рівняння Гельмгольца на площині Умови Зомерфельда мають вигляд:

$$u(x) = O\left(|x|^{-0.5}\right), \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(|x|^{-0.5}\right), \ |x| \to \infty \qquad (6.14')$$

$$u(x) = O\left(|x|^{-0.5}\right), \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o\left(|x|^{-0.5}\right), \ |x| \to \infty \qquad (6.15')$$

§ 7 Функції Бесселя та їх властивості

[1, стор. 345 - 357]

При знаходженні розв'язків рівняння Пуассона та Гельмгольца в областях циліндричної форми, рівняння теплопровідності та хвильового рівняння в кругових та циліндричних областях з'являється необхідність записати розв'язки наступних звичайних диференціальних рівняння другого порядку з степеневими коефіцієнтами:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (7.1),$$

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0 \qquad (7.2).$$

В рівняннях (7.1), (7.2) ν є числовий параметр.

Рівняння (7.1) називають рівнянням Бесселя порядку ν, а рівняння (7.2) називають рівнянням Бесселя уявного аргументу порядку ν.

Легко показати, що рівняння (7.2) можна отримати з рівняння (7.1) якщо в (7.1) ввести заміну незалежної змінної $\xi = ix$, цей факт і пояснює назву рівняння (7.2).

Знайти розв'язок цих рівнянь у вигляді елементарних функцій не вдається, тому враховуючи поліноміальний вигляд коефіцієнтів рівняння, можна побудувати розв'язок рівнянь у вигляді узагальненого степеневого ряду.

$y(x) = x^{\rho}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...+)$ (7.3), де $\rho,\ a_0, a_1, ...$ - невідомі коефіцієнти.

Підставимо (7.3) у (7.1) і зберемо коефіцієнти при однакових степенях змінної x

$$(\rho^2 - \nu^2)a_0 x^{\rho} + ((\rho+1)^2 - \nu^2)a_1 x^{\rho+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[((\rho+k)^2 - \nu^2)a_k + a_{k-2}\right]x^{\rho+k} = 0 \quad (7.4).$$

З (6.4) отримаємо рівності для визначення коефіцієнтів.

$$\begin{aligned} &(\rho^2 - \nu^2) = 0 \\ &a_1 = 0 \\ &((\rho+k)^2 - \nu^2)a_k + a_{k-2} = 0 \end{aligned} \quad (7.5).$$

З першого рівняння (7.5) маємо: $\rho = \nu \qquad \rho = -\nu$ (7.6).

Оберемо перше значення, а саме $\rho = \nu$, тоді отримаємо

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu + k)},\ k = 2,3... \quad (7.7).$$

Враховуючи (7.7) та друге співвідношення (7.5) маємо $a_1 = a_3 = ...a_{2k+1} = ... = 0$

Для коефіцієнтів з парними індексами з формули (7.7) легко отримати

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)....(\nu+k)k!} \quad (7.8).$$

Обираючи $$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \quad (7.9)$$

і підставляючи значення коефіцієнтів в (7.3) отримаємо

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (7.10).$$

Обираючи друге значення параметру $\rho = -\nu$, отримаємо

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\nu+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \quad (7.10').$$

Відмітимо, що визначення функції $J_{-\nu}(x)$ є коректною лише для не цілих

значень параметру ν, оскільки визначення a_0 за формулою (7.9) при $\nu = -n$ не має змісту, оскільки $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = ...\Gamma(-n) = \infty$.

Змінюючи в формулі (7.10') індекс сумування $k = k' + n$, отримаємо

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x) \qquad (7.11).$$

Остання рівність свідчить про лінійну залежність функцій $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$ і таким чином лінійна комбінація цих функцій не може складати загальний розв'язок рівняння Бесселя.

Другий лінійно незалежний розв'язок рівняння Бесселя для довільного значення параметру ν, взагалі кажучи не представляється у вигляді узагальненого степеневого ряду (7.3), утворимо спеціальну лінійну комбінацію для нецілих значень параметру ν $N_\nu(x) = \dfrac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$, $\nu \neq n$. (7.12).

Для $\nu = n$, враховуючи попередні викладки, маємо що чисельник і знаменник тотожно перетворюються в нуль, тобто маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$.

Розкриємо невизначеність за допомогою правила Лопіталя:

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]. \qquad (7.12').$$

Покажемо, що функція $N_n(x)$ задовольняє рівняння (7.1). Дійсно, позначимо диференціальний оператор

$$L(J_\nu) = J''_\nu + \frac{1}{x} J'_\nu + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu = 0$$

$$L(J_{-\nu}) = J''_{-\nu} + \frac{1}{x} J'_{-\nu} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_{-\nu} = 0 \qquad (7.13).$$

Продиференціюємо останні рівності по ν, та отримаємо:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)-\frac{2\nu}{x^2}J_\nu=0 \qquad\qquad L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)-\frac{2\nu}{x^2}J_{-\nu}=0$$

Помножимо перше рівняння на 1, друге рівняння на $(-1)^n$, віднімемо від першого рівняння друге, отримаємо:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)-(-1)^n L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)-\frac{2\nu}{x^2}(J_\nu-(-1)^n J_{-\nu})=0.$$

Останнє співвідношення розділимо на π і перейдемо до границі при $\nu\to n$, отримаємо $\frac{1}{\pi}L\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)-(-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)\right]=L(N_n)=0$

Таким чином, введену функцію ми будемо називати функцією Бесселя другого роду ν - го порядку як для цілих так і нецілих значень параметру.

Враховуючи вигляд $\left[\left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}\left[\ln\frac{x}{2}-\Psi(k+n+1)\right]$

$$\left(\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}=\sum_{k=0}^{n1}\frac{(-1)^{n-k}(n-k-1)!(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!}-\sum_{k=n}^{\infty}\left[\ln\frac{x}{2}-\Psi(k-n+1)\right]\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!(k-n)!}$$

які можна отримати шляхом обчислення похідних по параметру ν, та з врахуванням властивостей функції $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ та функції $\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Остаточний вигляд функції Бесселя другого роду

$$N_n(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}+\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}\left[\Psi(k+n+1)+\Psi(k+1)\right]$$

(7.14).

Дуже часто функцію Бесселя другого роду $N_\nu(x)$ називають **функцією Вебера**.

Важливою властивістю функцій Бесселя є асимптотичний характер поведінки цих функцій на нескінченості. Вводячи функцію $y(x)=\frac{v(x)}{\sqrt{x}}$, підставляючи її в рівняння Бесселя отримаємо рівняння $v''+\left(1-\frac{\nu^2-0.25}{x^2}\right)v=0$

Розв'язки останнього рівняння можна представити для $x\to\infty$ у вигляді

$v(x)=\gamma\sin(x+\delta)+O\left(\frac{1}{x}\right)$, а відповідно $y(x)=\gamma\frac{\sin(x+\delta)}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

Додаткові дослідження дозволяють отримати, наступні асимптотичні формули:

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),\ x\to\infty \qquad (7.14),$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),\ x\to\infty \qquad (7.14').$$

Останні формули свідчать про те, що функції Бесселя як першого так і другого роду мають злічену кількість нулів, тобто рівняння $J_\nu(x)=0$ $N_\nu(x)=0$ мають злічену кількість коренів, які для великих значень аргументу x асимптотично прямують до нулів тригонометричних функцій $\cos(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=0,\ \sin(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=0$. А самі функції Бесселя ведуть себе як $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ x\to\infty$

Аналіз формул (7.10) та (7.14) показує, що при $x\to 0$

$$J_n(x)\approx\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n,\ n=0,1,2...\ N_n(x)\approx-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\to\infty,\ N_0(x)=\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}\to\infty,\quad x\to 0$$

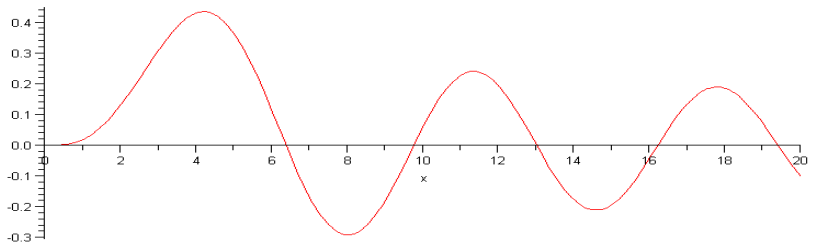
Важливою властивістю функцій Бесселя першого та другого роду є рекурентні формули, яким задовольняють функції Бесселя

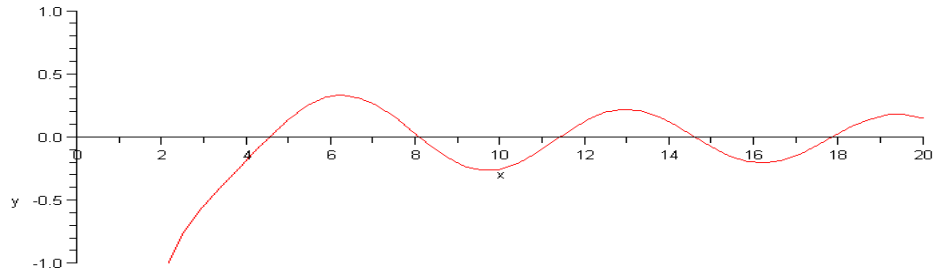
$$\frac{d}{dx}J_\nu(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}J_\nu(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x) \qquad (7.15),$$

$$\frac{d}{dx}N_\nu(x)+\frac{\nu}{x}N_\nu(x)=N_{\nu-1}(x) \qquad \frac{d}{dx}N_\nu(x)-\frac{\nu}{x}N_\nu(x)=-N_{\nu+1}(x) \qquad (7.16).$$

Виключаючи з двох співвідношень похідну, можна зв'язати між собою функції Бесселя трьох сусідніх порядків.

Для прикладу наведемо графіки функцій Бесселя $J_3(x)$ та $N_3(x)$





Другий клас функцій Бесселя - функції Бесселя уявного аргументу можна отримати як два лінійно–незалежних розв'язки рівняння (7.2), зокрема їх можна записати за формулою (7.10) з використанням заміни змінної $x \to ix$ в результаті будемо мати функцію Бесселя першого роду уявного аргументу:

$$I_\nu(x)=\frac{J_\nu(ix)}{i^\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}, \quad 0<x<\infty \qquad (7.17).$$

Другий лінійно – незалежний розв'язок для нецілих ν можна отримати аналогічно попередньому розв'язку з формули (7.10').

$$I_{-\nu}(x) = i^{\nu} J_{-\nu}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(k-\nu+1)}, \quad 0 < x < \infty \qquad (7.18).$$

Легко бачити, що при $\nu = n$ функції $I_n(x) = I_{-n}(x)$, тобто є лінійно залежними між собою і не можуть бути використані для запису загального розв'язку рівняння (7.2).

Функцію другого роду уявного аргументу будують у вигляді лінійної комбінації $K_{\nu}(x) = \dfrac{\pi\left[I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)\right]}{2\sin(\nu\pi)}$ (7.19).

Враховуючи, що $I_n(x) = I_{-n}(x)$, остання формула має невизначеність типу $\frac{0}{0}$ при $\nu = n$. Розкриваючи її за правилом Лопіталя отримаємо

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}\left(\left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} - \left[\frac{\partial I_{\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}\right) \qquad (7.20).$$

Функція $K_{\nu}(x)$ називають функцією другого роду уявного аргументу, або функцією Макдональда вона має наступний вигляд:

$$K_n(x) = -I_n(x)\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left\{\Psi(k+1) + \Psi(k+n+1)\right\} +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k}$$

(7.21).

Виходячи з рекурентних співвідношень (7.14), (7.14'), можна отримати рекурентні співвідношення для функцій Бесселя уявного аргументу першого та другого роду:

$$\frac{d}{dx}I_{\nu}(x) - \frac{\nu}{x}I_{\nu}(x) = J_{\nu+1}(x) \qquad \frac{d}{dx}I_{\nu}(x) + \frac{\nu}{x}J_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) \qquad (7.22),$$

$$\frac{d}{dx}K_{\nu}(x) + \frac{\nu}{x}K_{\nu}(x) = -K_{\nu-1}(x) \quad \frac{d}{dx}K_{\nu}(x) - \frac{\nu}{x}K_{\nu}(x) = -K_{\nu+1}(x) \qquad (7.23).$$

Відмітимо також характер поведінки функцій Бесселя уявного аргументу при $\boldsymbol{x}=0$ та $\boldsymbol{x}\to\infty$.

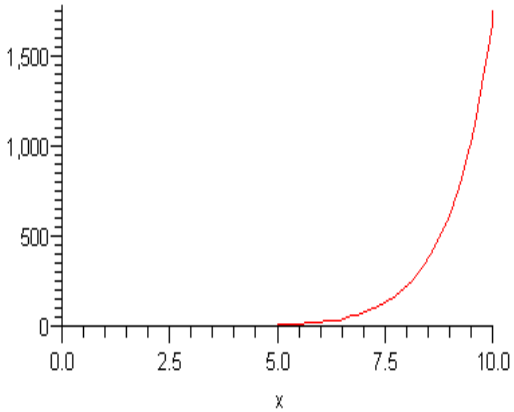
Виходячи з формул (7.17) та (7.21) можна зробити висновок, що

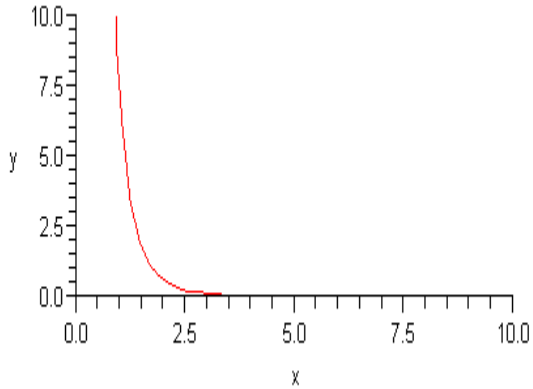
$$I_\nu(x)=O(x^\nu),\ x\to 0 \tag{7.24}$$

$$K_\nu(x)=O(x^{-\nu}),\ \nu>0,\ K_0(x)=O(\ln(x)),\ \ x\to 0 \tag{7.25}$$

$$I_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^x \qquad K_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \quad \boldsymbol{x}\to\infty \tag{7.26}$$

Наведемо графіки функцій $\boldsymbol{I}_3(\boldsymbol{x})$ та $\boldsymbol{K}_3(\boldsymbol{x})$





Лекція 24

§ 8 Потенціали операторів Лапласа та Гельмгольца, їх властивості

[2, стор. 353 - 381]

Теорія потенціалів є дуже ефективним засобом дослідження існування і єдності розв'язків граничних задач для еліптичних та параболічних рівнянь. За допомогою потенціалів граничні задачі можна звести до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з полярним ядром, а іноді до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з сингулярним або навіть гіпергингулярним ядром.

При отримані замість граничної задачі інтегрального рівняння Фредгольма дослідження існування і єдності розв'язку можна проводити використовуючи теорію Фредгольма для інтегральних рівнянь.

Крім того, використовуючи потенціали можна побудувати більш ефективні чисельні методи знаходження розв'язків граничних задач, чисельні методи які базуються на теорії потенціалу називають методами граничних інтегральних рівнянь.

Введемо потенціали для основних еліптичних операторів Лапласа і Гельмгольца для тривимірного евклідового простору.

$$U(x)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(y)}{4\pi|x-y|}dy \qquad (8.1)$$

$$U^k(x)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\rho(y)}{4\pi|x-y|}dy \qquad (8.1')$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\iint\limits_{S}\frac{\mu(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y \qquad (8.2)$$

$$V^k(x)=\iint\limits_{S}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad (8.2')$$

$$W(x)=\iint\limits_{S}\sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad (8.3)$$

$$W^k(x)=\iint\limits_{S}\sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad (8.3')$$

Означення 1 *Інтеграли (8.1), (8.1') будемо називати потенціалом об'єму для оператора Лапласа та Гельмгольца відповідно,Інтеграли (8.2), (8.2') будемо називати потенціалами простого шару (слоя) для оператора Лапласа та Гельмгольца відповідно, Інтеграли (8.3), (8.3')будемо називати потенціалами подвійного шару (слоя) для оператора Лапласа та Гельмгольца відповідно.*

При цьому функції ρ, μ, σ називають щільностями потенціалів, які задані в області Ω або на поверхні $\boldsymbol{S}$

Як легко бачити, при записі усіх потенціалів використовується фундаментальний розв'язок відповідного оператора:

Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ для потенціалів об'єму, простого шару і подвійного шару для оператора Лапласа, або фундаментальний розв'язок оператора Гельмгольца $\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ для потенціалів об'єму, простого шару і подвійного шару.

Аналогічно потенціалам для операторів Лапласа і Гельмгольца в тривимірному просторі можна ввести потенціали і для двовимірного простору. При цьому треба використовувати фундаментальні розв'язки оператора Лапласа і Гельмгольца в двовимірному просторі.

Нагадаємо, що фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа при $\boldsymbol{n}=2$ має вигляд $\boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$, та фундаментальний розв'язок для оператора Гельмгольца при $\boldsymbol{n}=2$, який можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)=\pm\frac{\boldsymbol{i}}{4}\left(\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\pm \boldsymbol{i}\boldsymbol{N}_0(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\right) \qquad (8.4)$$

В (8.4) функції $\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{N}_0(\boldsymbol{x})$ - функції Бесселя нульового порядку першого і

другого роду.

Відповідно до вигляду фундаментальних розв'язків, потенціали в двовимірному просторі матимуть вигляд:

$$\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x}) = \iint\limits_{D} \rho(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dx} \quad (8.5) \qquad \boldsymbol{U}_k(\boldsymbol{x}) = \iint\limits_{D} \rho(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dx} \quad (8.5')$$

$$\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}) = \oint\limits_{C} \mu(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dl}_y \quad (8.6) \qquad \boldsymbol{V}_k(\boldsymbol{x}) = \oint\limits_{C} \mu(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dl}_y \quad (8.6')$$

$$\boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x}) = \oint\limits_{C} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{\partial \boldsymbol{n}_y}\boldsymbol{dl}_y \quad (8.7) \qquad \boldsymbol{W}_k(\boldsymbol{x}) = \oint\limits_{C} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{\partial \boldsymbol{n}_y}\boldsymbol{dl}_y \quad (8.7')$$

Відмітимо, що властивості потенціалів залежать від декількох факторів, перелічимо їх:

- властивостей щільностей потенціалів;
- положення точки $\boldsymbol{x}$ (належить $\boldsymbol{x}$ області інтеграції або не належить);
- властивості поверхні $\boldsymbol{S}$ для потенціалів простого і подвійного шару.

Властивості потенціалів поза областю інтеграції

Теорема 1 *(про властивості потенціалів поза областю інтеграції)* Якщо щільності потенціалів простого і подвійного шару інтегровані на поверхні $\boldsymbol{S}$, $\iint\limits_{S} |\mu(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{dS}_y < \infty$, $\iint\limits_{S} |\sigma(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{dS}_y < \infty$, а потенціалу об'єму інтегрована в області Ω $\iiint\limits_{\Omega} |\rho(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{dy} < \infty$, то відповідні потенціали для оператору Лапласа і Гельмгольца є функціями які мають неперервні похідні будь-якого порядку в довільній області Ω_1, яка не перетинається з областю інтегрування (Ω для потенціалу об'єму та $\boldsymbol{S}$ для потенціалів простого та подвійного шару) і в кожній точці Ω_1 ці потенціали задовольняють рівняння Лапласа або Гельмгольца відповідно.

Доведення теореми для будь – якого з потенціалів практично не відрізняється, тому продемонструємо доведення для випадку потенціалу простого шару оператора Гельмгольца.

Оскільки щільність потенціалу простого шару μ інтегрована на $\boldsymbol{S}$, а функція $\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ є неперервно-диференційованою скільки завгодно разів у випадку, коли $(x, y) \in (\Omega_1, S)$, $\Omega_1 \cap \boldsymbol{S} = \emptyset$, то можна застосувати теорему про можливість диференціювання такого інтегралу, шляхом обчислення похідної від підінтегральної функції.

Тобто $\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{V}^{k}(\boldsymbol{x}) = \iint\limits_{S} \mu(\boldsymbol{y})\boldsymbol{D}^{\alpha}\left(\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)\boldsymbol{dS}_{y}, \boldsymbol{x} \in \Omega_1$, оскільки підінтегральна функція $\mu(\boldsymbol{y})\boldsymbol{D}^{\alpha}\left(\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)$ - неперервною функцією аргументу x, майже для кожного $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}$, то $\iint\limits_{S} \mu(\boldsymbol{y})\boldsymbol{D}^{\alpha}\left(\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)\boldsymbol{dS}_{y} \in \boldsymbol{C}(\Omega_1)$.

Оскільки потенціал має неперервні похідні будь – якого порядку, то $(\Delta + \boldsymbol{k}^2)\boldsymbol{V}^{k}(\boldsymbol{x}) = \iint\limits_{S} \mu(\boldsymbol{y})(\Delta_{x} + \boldsymbol{k}^2)\left(\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)\boldsymbol{dS}_{y} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_1$.

Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, $(\Delta_{x} + \boldsymbol{k}^2)\left(\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) \equiv 0$. Таким чином теорема доведена.

Теорема 2 *(про неперервність і неперервну диференційованість потенціалу об'єму)* Якщо щільність потенціалу об'єму інтегрована в області Ω, то потенціал об'єму для оператора Лапласа і Гельмгольца (8.1) та (8.1') э неперервними і неперервно-диференційованими функціями в усьому евклідовому просторі $\boldsymbol{R}^3$.

Доведення Розглянемо функцію $\rho_1(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \rho(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} \in \Omega \\ 0, \quad \boldsymbol{y} \in \Omega' \end{cases}$. Функція ρ_1 залишається інтегрованою в будь – якій області $\Omega_1 \in \boldsymbol{R}^3$.

Нехай $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ довільна точка . Розглянемо будь – яку область, яка містить точку $\boldsymbol{x}$, нехай це область Ω_1, тоді $\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho_1(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$.

На останню формулу будемо дивитися як на результат відображення деякої функції $\rho_1 \in L_2(\Omega_1)$ за допомогою полярного ядра $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$. Відомо, що результатом відображення буде функція $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}} \in \boldsymbol{C}(\Omega_1)$. Таким чином неперервність потенціалу доведена.

Розглянемо тепер функцію $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}^{(s)}(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_s} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho_1(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_s}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \frac{\left(\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|-1\right)\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\frac{\partial|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\partial \boldsymbol{x}_s} = \frac{\left(\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|-1\right)\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\frac{\boldsymbol{x}_s-\boldsymbol{y}_s}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \frac{\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}$$

Де $\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ - неперервна функція. Таким чином $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_s}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ є полярним ядром в будь – який області тривимірного простору.

А це означає що $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}^{(s)}(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_s} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho_1(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$ як результат відображення функції $\rho_1 \in \boldsymbol{L}_2(\Omega_1)$ за допомогою полярного ядра є неперервною функцією. Тобто $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}^{(s)} \in \boldsymbol{C}(\Omega_1)$.

Покажемо тепер, що $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}^{(s)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_s}$. Розглянемо

$$\int\limits_{z_0}^{z_s} U_k^{(s)}(..x_s..)dx_s = \int\limits_{z_0}^{z_s}\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)dydx_s = \iiint\limits_{\Omega_1}\rho_1(y)\int\limits_{z_0}^{z_s}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dx_s dy =$$

$$\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)dy\Bigg|_{x_s=z_s} - \iiint\limits_{\Omega_1}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)dy\Bigg|_{x_s=z_0} = U_k(x)\big|_{x_s=z_s} - U_k(x)\big|_{x_s=z_0}$$

Вважаємо точку $\boldsymbol{z}_s$ - змінною, а $\boldsymbol{z}_0$ фіксованою і обчислимо похідну від лівої і

правої частини останньої рівності $\frac{\partial \boldsymbol{U}_k(..\boldsymbol{z}_s..)}{\partial \boldsymbol{z}_s} = \boldsymbol{U}_k^{(s)}(..\boldsymbol{z}_s..)$. Таким чином теорема доведена.

Теорема 3 (*Про другі похідні потенціалу об'єму)* Якщо цільність потенціалу об'єму $\rho \in \boldsymbol{C}^{(1)}(\Omega) \cap \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$, то об'ємний потенціал (8.1) і (8.1') має в області Ω неперервні похідні другого порядку і задовольняє відповідно рівнянню Пуассона

$$\Delta \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{8.6}$$

або неоднорідному рівнянню Гельмгольца

$$(\Delta + \boldsymbol{k}^2)\boldsymbol{U}_k(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{8.6'}$$

Доведення проведемо для потенціалу об'єму оператора Гельмгольца в тривимірному випадку. Усі інші випадки розглядаються аналогічно.

Оскільки щільність потенціалу є неперервною, то згідно до теореми 2 потенціал об'єму має неперервні перші похідні зокрема і в області Ω. Обчислимо похідну потенціалу об'єму:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_k(x)}{\partial x_j} &= \iiint_\Omega \rho(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dy = -\iiint_\Omega \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dy = \\ &= \iiint_\Omega \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dy - \iint_S \rho(y)\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(n, y_j)dS_y\end{aligned} \tag{8.7}$$

В (8.7) була використана формула інтегрування за частинами. Таким чином перша частинна похідна потенціалу об'єму представлена у вигляді двох потенціалів: потенціалу об'єму з неперервною щільністю $\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{y}_j}$ і потенціалу простого шару з щільністю $\rho(\boldsymbol{y})\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}_j)$. З теореми 2 випливає що перший доданок - потенціал об'єму є неперервно-диференційована функція, а з теореми 1 випливає, що другий доданок - потенціал простого шару є теж неперервно-диференційована функція.

Таким чином можна обчислити другу похідну, шляхом диференціювання рівності

$$(8.7).\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}_k(\boldsymbol{x})}{\partial^2 \boldsymbol{x}_j} = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}_j} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} d\boldsymbol{y} - \iint\limits_{S} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}_j) d\boldsymbol{S}_y =$$

$$-\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}_j} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_j} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} d\boldsymbol{y} + \iint\limits_{S} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_j} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}_j) d\boldsymbol{S}_y = \boldsymbol{A}.$$

Перший доданок в правій частині останньої рівності є невласним інтегралом, запишемо його у вигляді:

$$A = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega / U(x,\varepsilon)} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy + \iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega / U(x,\varepsilon)} \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy - \underline{\iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y} +$$

$$\underline{+\iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y} - \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right) e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \frac{y_j - x_j}{|x-y|} = \frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right) e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\overrightarrow{y-x}, y_j) =$$

$$= -\frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right) e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(n_y, y_j).$$

То можемо записати, що

$$\iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}_j} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}_j) d\boldsymbol{S}_y = -\iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\left(\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|-1\right) \boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2} \cos^2(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}_j) d\boldsymbol{S}_y =$$

$$-\frac{(\pm \mathrm{ik}\varepsilon - 1)\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2} \varepsilon^2 \iint\limits_{S(0,1)} \rho(\boldsymbol{x} + \varepsilon\xi) \cos^2(\boldsymbol{n}_\xi, \boldsymbol{y}_j) d\boldsymbol{S}_\xi$$

Таким чином друга похідна має вигляд:

$$\frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial^2 x_j} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iiint\limits_{\Omega/U(x,\varepsilon)} \rho(y)\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dy - \right.$$

$$\left. -\frac{(\pm \mathrm{ik}\varepsilon - 1)e^{\pm ik\varepsilon}}{4\pi}\iint\limits_{S(0,1)} \rho(x+\varepsilon\xi)\cos^2(n_\xi, x_j)dS_\xi\right] \qquad (8.8)$$

Обчислимо нарешті значення оператора Гельмгольца від потенціалу об'єму.

$$\left(\Delta + k^2\right)U_k(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iiint\limits_{\Omega/U(x,\varepsilon)} \rho(y)\left(\Delta_x + k^2\right)\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dy\right] -$$

$-\rho(x)\iint\limits_{S(0,1)}\sum_{j=1}^{3}\cos^2(n_\xi, x_j)dS_\xi = -\rho(\boldsymbol{x})$. Таким чином теорема 3 доведена.

Зауважимо, що теорема 3 має цілком конкретне застосування.

Зокрема частинні розв'язки рівняння Гельмгольца $\left(\Delta + \boldsymbol{k}^2\right)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega$ або Пуассона $\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega$ можна знайти у вигляді потенціалів об'єму для оператора Гельмгольца або Лапласу, з щільністю потенціалу $\rho(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

Поверхня Ляпунова

Означення 2 *Поверхню* $\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{R}^3$ *будемо називати поверхнею Ляпунова, якщо вона задовольняє наступним умовам:*

В будь – якій точці $\boldsymbol{x}$ *поверхні* $\boldsymbol{S}$ *існує єдина цілком визначена нормаль* $\boldsymbol{n}_x$.

Для будь – яких точок $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}$, *існують такі додатні константи* a,α, *що кут* θ *між векторами нормалі* $\boldsymbol{n}_x,\boldsymbol{n}_y$ *задовольняє умові* $\theta \le a|x-y|^\alpha$ *(8.9)*

Теорема 4 *(Про сферу Ляпунова)* Нехай S замкнена поверхня Ляпунова, тоді існує така постійна $d>0$, що якщо довільну точку $x_0\in S$ прийняти за центр сфери радіусу $\boldsymbol{d}$, то будь – яка пряма паралельна нормалі n_{x_0} до поверхні S перетинає поверхню S в середині сфери лише один раз.

Цю сферу $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{d})$ будемо називати сферою Ляпунова. Зрозуміло, що якщо число $\boldsymbol{d}$ є радіусом сфери Ляпунова, то будь – яке число менше за $\boldsymbol{d}$ теж буде радіусом сфери Ляпунова. Звідси випливає, що число $\boldsymbol{d}$ можна обрати так, що би воно задовольняє нерівності $\boldsymbol{a}\boldsymbol{d}^{\alpha} < 1$ (8.10).

Місцева система координат на поверхні Ляпунова

На поверхні $\boldsymbol{S}$ виберемо довільну точку $\boldsymbol{x}$ і зробимо її початком місцевої локальної системи координат, вісь ξ_3 направимо в напрямку зовнішньої нормалі $\boldsymbol{n}_x$, а дві інші вісі ξ_1,ξ_2 розташуємо в дотичній площині до поверхні $\boldsymbol{S}$ в точці $\boldsymbol{x}$ так що би утворити обрані вісі утворювали праву трійку. Враховуючи теорему 4, зрозуміло, що частину поверхні Ляпунова $\boldsymbol{S}$, яка розташована в середини сфери $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$ можна записати у вигляді явного рівняння

$\xi_3 = f(\xi_1,\xi_2)$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^1$. (8.11). При цьому очевидно, що $\boldsymbol{f}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(0,0)}{\partial \xi_{\boldsymbol{i}}} = 0, \boldsymbol{i} = 1,2$. (8.12).

Рівності (8.12) мають місце оскільки рівняння дотичної площини, що проходить через точку (0,0,0) має вигляд $\xi_3 = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(0,0)}{\partial \xi_1}\xi_1 + \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(0,0)}{\partial \xi_2}\xi_2$, а з іншого боку ця площина задається рівнянням $\xi_3 = 0$.

Оскільки, виконується (8.11), то сама функція $\boldsymbol{f}$ і її частинні похідні в середині сфери Ляпунова будуть малими. Наша задача оцінити порядок малості функції $\boldsymbol{f}$ і її частинних похідних.

Позначимо через $S_1(x) = S \cap U(x,d)$ - частину поверхні, яка лежить всередині сфери Ляпунова. Візьмемо довільну точку $y \in S_1(x)$, оцінимо $\cos(\boldsymbol{n}_y,\xi_3) = \cos(\boldsymbol{n}_y,\boldsymbol{n}_x)$.

$\cos(\boldsymbol{n}_y,\xi_3) = \cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} - \ldots \geq 1 - \dfrac{\theta^2}{2!}$, остання нерівність виконується

завдяки нерівностям (8.9), (8.10) $\theta \le \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha} < \boldsymbol{a}\boldsymbol{d}^{\alpha} < 1$. Нехай $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, тоді

$$\cos(\boldsymbol{n}_y, \xi_3) = \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{n}_x) \ge 1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{r}^{2\alpha} \ge \frac{1}{2} \qquad (8.13)$$

Оскільки в середині сфери Ляпунова рівняння поверхні має вигляд (8.11), то вектор одиничної нормалі можна записати:

$$n_y = \frac{\left(-\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}, -\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2}} = \begin{pmatrix} \cos(n_y,\xi_1) \\ \cos(n_y,\xi_2) \\ \cos(n_y,\xi_3) \end{pmatrix} \qquad (8.14)$$

Оцінимо $\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2} = \frac{1}{\cos(n_y,n_x)} \le$

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}}{1-\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}} \le 1 + a^2r^{2\alpha}$. Таким чином

$\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2 \le 2a^2r^{2\alpha} + a^4r^{4\alpha} \le 3a^2r^{2\alpha}$, $\left|\frac{\partial \boldsymbol{f}(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_{\boldsymbol{i}}}\right| \le \sqrt{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^{\alpha}, \boldsymbol{i} = 1,2$ або

$$\cos(\boldsymbol{n}_y, \xi_{\boldsymbol{k}}) \le \sqrt{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^{\alpha}, \boldsymbol{i} = 1,2 \qquad (8.15)$$

Оцінимо $|\xi_3| = |\boldsymbol{f}(\xi_1,\xi_2)|$ для частини поверхні $\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{x})$. Позначимо через $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $\boldsymbol{r}^2 = \rho^2 + \xi_3^2$. Враховуючи оцінку (8.15), можна записати оцінку для похідної вздовж будь – якого напряму в дотичній площині

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \rho}\right| \le \sqrt{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^{\alpha} \le \sqrt{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{d}^{\alpha} \le \sqrt{3} \qquad (8.16)$$

Таким чином $r = |\xi_3| = |f| \le \int_0^{\rho} \left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| d\rho \le \sqrt{3}\rho$ (8.17),

а звідси маємо $\rho^2 \le r^2 \le 4\rho^2$, або $\rho \le r \le 2\rho$

З (8.16) маємо $\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \le \sqrt{3} a r^{\alpha} \le 2^{\alpha}\sqrt{3} a \rho^{\alpha}$.

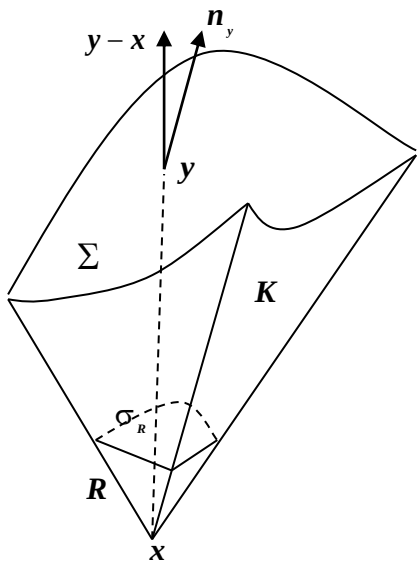
Таким чином з (8.17) $\left|\xi_3\right| =\le \frac{2^{\alpha} a\sqrt{3}}{\alpha+1}\rho^{\alpha+1} = \boldsymbol{a}_1 \rho^{\alpha+1} \le \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{r}^{\alpha+1}$ (8.18)

Оцінимо тепер $\cos(n_y, \vec{r})$ де $\vec{r} = \overrightarrow{y-x}$. Дійсно

$$\cos(n_y, \vec{r}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{y_k - x_k}{y-x}\cos(n_y, x_k) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\xi_k}{r}\cos(n_y, x_k) + \frac{\xi_3}{r}\cos(n_y, x_3) \le$$
$$2\sqrt{3} r^{\alpha} + a_1 r^{\alpha} = c_1 r^{\alpha}$$

Остаточно маємо маємо $\cos(n_y, \vec{r}) \le c_1 r^{\alpha}$ (8.19)

Тілесний кут спостереження поверхні



Розглянемо двосторонню кусково – гладку поверхню Σ, яка може бути як замкненою так і незамкненою. Зафіксуємо одну з двох сторін поверхні, обравши на ній додатній напрямок нормалі. Нехай $\boldsymbol{y} \in \Sigma$ - довільна точка, $\boldsymbol{n}_y$ - зовнішня нормаль в точці $\boldsymbol{y}$ до поверхні Σ. Нехай $\boldsymbol{x}$ - довільна точка простору, зокрема може належати і поверхні Σ.

Будемо вважати, що взаємне розташування поверхні Σ і точки $\boldsymbol{x}$ є таким, що $\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \ge 0$.

З'єднаємо кожну точку поверхні Σ з точкою $\boldsymbol{x}$. Поверхня, яка утворюється в результаті з'єднання країв поверхні Σ з точкою $\boldsymbol{x}$ утворює конічну поверхню $\boldsymbol{K}$.

Оберемо точку $\boldsymbol{x}$ за центр сфери достатньо малого радіусу $\boldsymbol{R}$, такого, щоб сфера $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R})$ не перетиналася з поверхнею Σ. Позначимо через $\sigma_{\boldsymbol{R}}$ - площу поверхні тієї частини сфери, яка опинилася в середині конусу.

Означення 3 *Тілесним кутом спостереження поверхні Σ з деякої точки*

$x \in R^3$ *будемо називати величину* $\omega(x,\Sigma) = \dfrac{\sigma_R}{R^2}$ (8.20).

Величина (8.20) очевидно не залежить від радіусу сфери $\boldsymbol{R}$ і тому представляє міру тілесного кута.

У випадку, коли поверхня Σ є такою, що величина $\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ змінює свій знак в залежності від положення точки $\boldsymbol{y}$, то для визначення тілесного кута спостереження такої поверхні, вона розбивається на окремі частини $\Sigma = \bigcup_{i=1} \Sigma_i$ на кожній з яких $\boldsymbol{sign}(\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) = \boldsymbol{const}$, $\boldsymbol{y} \in \Sigma_i$

Таким чином $\omega(\boldsymbol{x},\Sigma) = \sum_i \omega(\boldsymbol{x},\Sigma_i)\boldsymbol{sign}(\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))\Big|_{\boldsymbol{y}\in\Sigma_i}$ (8.20')

Лема 1 Для будь – якої кусково-гладкої поверхні Σ, кут спостереження цієї поверхні визначається за формулою $\omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}) = -\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dS}_y$ (8.21)

Теорема 5 (про обмеженість кута спостереження для скінчених поверхні Ляпунова) Якщо Σ- скінчена поверхня Ляпунова, то існує така постійна C_0, що

$$\iint\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x - y|} \right| dS_y \le C_0 \qquad (8.22)$$

Лекція 25

Потенціал подвійного шару та його пряме значення

[2, стор. 370 - 381]

Згідно до теореми 1 лекції 24, потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца (а також Лапласа) $\boldsymbol{W}^k(\boldsymbol{x}) = \iint\limits_S \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dS}_y$ для будь – якої області, яка не має перетину з поверхнею $\boldsymbol{S}$ є функцією яка має похідні будь – якого порядку.

В точках поверхні $\boldsymbol{S}$ потенціали подвійного шару є невласним інтегралом і його поведінка залежить від властивості щільності та властивості поверхні інтегрування.

Теорема 6 (*Про пряме значення потенціалу подвійного шару)* Якщо $\boldsymbol{S}$ замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$, тоді потенціал подвійного шару (8.3), (8.3’) має в будь – якій точці поверхні $\boldsymbol{S}$ цілком визначене скінчене значення і це значення неперервно змінюється, коли точка $\boldsymbol{x}$ пробігає поверхню $\boldsymbol{S}$.

Доведення Оскільки $\sigma \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$, то σ - обмежена на поверхні $\boldsymbol{S}$, таким чином

$$\left|\sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right| \le M\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right| \le M\sqrt{1+k^2|x-y|^2}\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\right| \le M_1\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\right|,\ x, y \in S.$$

Згідно до теореми 5 інтеграл $\iiint\limits_S \left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right| \boldsymbol{dS}_y$ існує, а таким чином існує інтеграл $\boldsymbol{W}^k(\boldsymbol{x}) = \iint\limits_S \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dS}_y$ коли $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$.

Покажемо тепер, що $\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{k}} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$. Розглянемо $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$, як ядро інтегрального оператора.

Оскільки $K(x,y) = \dfrac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_y, y-x)$, де $A(x,y) = \left(\mp ik|x-y|+1\right)e^{\pm ik|x-y|}$, то згідно (8.19) $\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{c}_1|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha}$. Таким чином

$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-0.5\alpha}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-0.5\alpha}} = \dfrac{\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-0.5\alpha}}$. є полярним ядром. А це в свою чергу забезпечує відображення неперервної на $\boldsymbol{S}$ щільності σ в неперервний на $\boldsymbol{S}$ потенціал подвійного шару $\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{k}}$. Теорема доведена.

Означення 4 *Значення потенціалу подвійного шару в точках поверхні будемо називати прямим значенням потенціалу подвійного шару і позначатимемо його* $\overline{W^k(x)}$, $x \in S$.

Інтеграл Гауса

Інтегралом Гауса будемо називати потенціал подвійного шару оператора Лапласа з щільністю $\sigma(\boldsymbol{y}) = 1$, тобто $W_0(x) = \iint\limits_S \dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ (8.22).

Лема Якщо $\boldsymbol{S}$, замкнена поверхня Ляпунова що обмежує область Ω то інтеграл Гауса визначається наступною формулою:

$$\boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -1, & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ -0.5, & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega' \end{cases} \qquad (8.23).$$

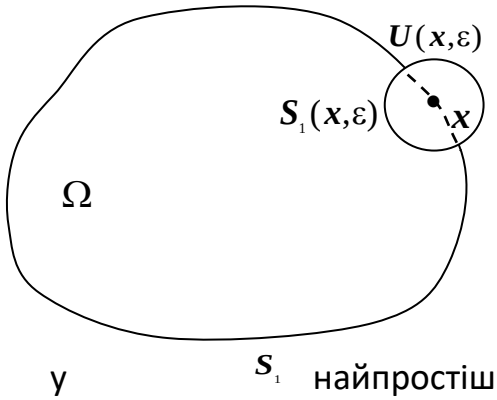
Доведення. Розглянемо випадок коли $\boldsymbol{x} \in \Omega'$. В цьому випадку функція $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ - гармонічна в області Ω по аргументу $\boldsymbol{x}$ оскільки $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}$ то $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{y}$.

Згідно до властивості гармонічної функції маємо $\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y = 0$

Для випадку, коли $\boldsymbol{x}\in\Omega$ розглянемо область $\Omega_\varepsilon = \Omega/\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Функція $\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ буде гармонічною в області Ω_ε і для неї має місце співвідношення $\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y + \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y = 0$. Обчислимо значення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y = -\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\cos(\boldsymbol{n}_y,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\boldsymbol{dS}_y = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}(-1)\iint\limits_{S(x,\varepsilon)}\boldsymbol{dS}_y = 1$$

Випадок $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ можна дослідити, якщо розглянути область $\Omega_\varepsilon^1 = \Omega/(\Omega\cap\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\varepsilon))$ у якій функція $\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ - гармонічна і записати інтеграл по замкненій поверхні $\boldsymbol{S}_\varepsilon^1$ яка обмежує область Ω_ε^1 та спрямувати ε до нуля.



Аналізуючи інтеграл Гауса легко бачити, що навіть у найпростішому випадку постійної щільності потенціал подвійного шару при переході через поверхню $\boldsymbol{S}$ має розрив. Наступна теорема вивчає поведінку потенціалу подвійного шару при підході до поверхні S з середини та ззовні області.

Теорема 7 *(Про граничні значення потенціалу подвійного шару)* Нехай $\boldsymbol{S}$ - замкнута поверхня Ляпунова, а σ неперервна на S щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца та Лапласа $\boldsymbol{W}^k(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}(\overline{\Omega})\cap\boldsymbol{C}(\overline{\Omega'})\cap\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$ і його граничні значення при підході до поверхні $\boldsymbol{S}$ з середини $\boldsymbol{W}_i^k(\boldsymbol{x})$ і з зовні $\boldsymbol{W}_e^k(\boldsymbol{x})$ задовольняють співвідношенням:

$$\begin{aligned} W_i^k(x) &= -\frac{\sigma(x)}{2} + \overline{W^k(x)}, \quad x\in S \\ W_e^k(x) &= \frac{\sigma(x)}{2} + \overline{W^k(x)}, \quad x\in S \end{aligned} \qquad (8.24).$$

Доведення Розглянемо потенціал подвійного шару

$$\boldsymbol{W}^{k}(\boldsymbol{x})=\iint_{S}\sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y=\iint_{S}\sigma(\boldsymbol{y})(1\mp \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y$$

Позначимо $(1\mp ik|x-y|)e^{\pm ik|x-y|}=\varphi(|x-y|)$.

Розглянемо довільну точку $\boldsymbol{x}_0\in \boldsymbol{S}$ та запишемо потенціал подвійного шару у вигляді:

$$\begin{aligned}W^{k}(x)&=W^{k}(x)\pm\iint_{S}\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y=\\&=W_1^{k}(x)+\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)W_0(x)\end{aligned},$$

де $W_1^{k}(x)=\iint_{S}\left[\sigma(y)\varphi(|x-y|)-\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ (8.25),

а $W_0(x)=\iint_{S}\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ - інтеграл Гауса. Покажемо, що $\boldsymbol{W}_1^{k}$ неперервна функція в точці $\boldsymbol{x}_0$. Візьмемо точку $\boldsymbol{x}_0$ за центр сфери $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\eta)$, яка розіб'є поверхню $\boldsymbol{S}$ на дві частини S' і S'', де $S'=S\cap U(x_0,\eta)$, а $S''=S/S'$. Враховуючи представлення поверхні $S=S'\cup S''$, запишемо $W_1^{k}(x)=W_1'^{k}(x)+W_1''^{k}(x)=$

$$=\iint_{S'}\left[\sigma(y)\varphi(|x-y|)-\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\iint_{S''}[\cdots]dS_y$$

Покажемо, що $\left|W_1^{k}(x)-W_1^{k}(x_0)\right|$ можна зробити як завгодно малим за рахунок зближення точок $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{x}_0$. Запишемо очевидну нерівність

$\left|W_1^{k}(x)-\overline{W_1^{k}(x_0)}\right|\le\left|W_1''^{k}(x)-\overline{W_1''^{k}(x_0)}\right|+\left|W_1'^{k}(x)\right|+\left|\overline{W_1'^{k}(x_0)}\right|$. Оцінимо праву частину нерівності. Оберемо радіус сфери η таким чином щоби $\left|\left[\sigma(y)\varphi(|x-y|)-\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\right|\le\frac{\varepsilon}{3C_0}$, де ε - довільне мале число, а C_0 - константа з формулювання теореми 5, нерівність (8.22). Це можливо завдяки неперервності $\sigma(\boldsymbol{y})\varphi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$. Таким чином $\left|\boldsymbol{W}_1'^{k}(\boldsymbol{x})\right|\le\frac{\varepsilon}{3\boldsymbol{C}_0}\iint_{S'}\left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right|\boldsymbol{dS}_y\le\frac{\varepsilon}{3}$.

Аналогічна нерівність виконується і для $\left|\overline{\boldsymbol{W}_1'^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}_0)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$, як для частинного випадку положення точки $\boldsymbol{x}$.

Зафіксуємо радіус сфери η і будемо вважати, що точка $\boldsymbol{x}$ достатньо близька до точки $\boldsymbol{x}_0$, така $|x - x_0| \le \frac{1}{2}\eta$, тоді на поверхні $\boldsymbol{S}''$ $|x - y| \ge |y - x_0| - |x - x_0| \ge \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}$. Таким чином підінтегральна функція в інтегралі $W_1''^k(x)$ є неперервною і тому неперервним буде і сам інтеграл, тобто $\left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Це доводить неперервність $W_1^k(x)$ в точці $\boldsymbol{x}_0$.

З неперервності $W_1^k(x)$, можемо записати

$$W_{1\ i}^k(x_0) = W_{1\ e}^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} \qquad (8.26).$$

Врахуємо представлення

$$W^k(x) = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x - x_0|)W_0(x) \qquad (8.27).$$

Обчислимо граничні значення потенціалу в точці $\boldsymbol{x}_0$ з середини та ззовні:

$$W_i^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0i}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} - \sigma(x_0)$$

(8.28);

$$W_e^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0e}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)}$$

(8.29).

Оскільки $\overline{W_1^k(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} - \sigma(x_0)\overline{W_0(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}$ (8.30).

Враховуючи (8.28) - (8.30) отримаємо:

$$W_i^k(x_0) = \overline{W^k(x_0)} - \frac{\sigma(x_0)}{2}$$

$$W_e^k(x_0) = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}$$

Таким чином теорема доведена.

Потенціал простого шару та його властивості

Нагадаємо, що потенціали простого шару для оператора Лапласа та Гельмгольца записуються у вигляді

$$V(x)=\iint\limits_S \frac{\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad\qquad V^k(x)=\iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y .$$

Вивчимо властивості цих потенціалів в усьому евклідовому просторі.

Теорема 8 *(про неперервність потенціалу простого шару)* Якщо $\boldsymbol{S}$ - замкнута поверхня Ляпунова, а μ вимірювана і обмежена на S, то потенціал простого шару оператора Лапласа та Гельмгольца є функцією неперервною в усьому евклідовому просторі.

Доведення. Оскільки властивості потенціалів в будь – якій точці простору, яка не належить поверхні $\boldsymbol{S}$ досліджувались в теоремі 1, то встановити неперервність потенціалу простого шару необхідно лише в точках поверхні $\boldsymbol{S}$.

Побудуємо сферу Ляпунова $\boldsymbol{S(x,d)}$ і нехай $\boldsymbol{S'_d(x)}$ - частина поверхні $\boldsymbol{S}$, яка знаходиться всередині сфери Ляпунова. Тоді потенціал простого шару

$$V^k(x)=\iint\limits_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y+\iint\limits_{S\setminus S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y$$

(8.31).

У другому інтегралі (8.31) підінтегральна функція є неперервна і обмежена , а значить цей інтеграл існує.

Для оцінки першого інтегралу введемо локальну систему координат ξ_1,ξ_2,ξ_3 с центром в точці $\boldsymbol{x}$. Нехай $\boldsymbol{G'(x)}$ - проекція $\boldsymbol{S'_d(x)}$ на площину $\xi_3=0$, дотичну до поверхні $\boldsymbol{S}$ в точці $\boldsymbol{x}$.

$$\left|\iint\limits_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right| \le \iint\limits_{G'(x)} \frac{|\mu(\xi_1,\xi_2)|d\xi_1 d\xi_2}{4\pi\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\cos(n_y,\xi_3)} \le 2M\int_0^{2\pi}\int_0^{d}\frac{\rho d\rho}{4\pi\rho}=Md$$

При оцінці інтегралу були використані оцінки (8.13) та оцінка

$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}\le\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}=\frac{1}{\rho}$. Таким чином потенціал простого шару дійсно існує в кожній точці простору $\boldsymbol{R}^3$

Покажемо тепер неперервність потенціалу в точці $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$

Оберемо сферу Ляпунова $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\eta),\ \eta<\boldsymbol{d}$. Тоді потенціал простого шару можна представити аналогічно (8.31) у вигляді:

$$V^k(x)=\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y+\iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y$$

(8.31').

Очевидно, що перший інтеграл $\boldsymbol{V}_1^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})=\iint\limits_{\boldsymbol{S}\setminus\boldsymbol{S}'_\eta(\boldsymbol{x})}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm\boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mu(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y$ є неперервною функцією і для $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, що $\left|\boldsymbol{V}_1^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{V}_1^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}')\right|\le\frac{\varepsilon}{3}$ як тільки $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|<\delta$.

Покажемо, що $\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y-\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS\right|\le\frac{2\varepsilon}{3},\ |x-x'|<\delta$

Очевидно, що

$$\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y-\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS_y\right|\le\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right|+\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS\right|$$

Розглянемо другий інтеграл і виберемо точки $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'$ так, що $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|<\frac{\eta}{2}$.

Введемо локальну систему координат з центром в точці $\boldsymbol{x}$. Тоді нехай точка $y=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, а $x'=(\xi_1',\xi_2',\xi_3')$ Тоді $\frac{1}{r}=\frac{1}{|y-x'|}\le\frac{1}{\sqrt{(\xi_1-\xi_1')^2+(\xi_2-\xi_2')^2}}\le\frac{1}{\rho}$

$$\rho\le|y-x'|=\|y-x'+x-x\|\le|x-x'|+|x-y|\le\eta+\frac{\eta}{2}=\frac{3\eta}{2}$$

Таким чином можна записати оцінку інтеграла

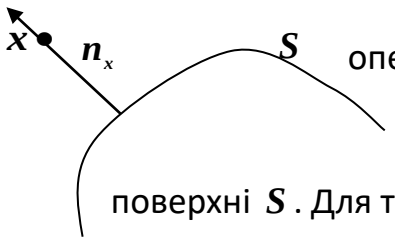
$$\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS_y\right|\le 2M\iint\limits_{G'_\eta(x)}\frac{d\xi_1d\xi_2}{4\pi\sqrt{(\xi_1-\xi_1')^2+(\xi_2-\xi_2')^2}}\le 2M\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3\eta}{2}}\frac{\rho d\rho}{4\pi\rho}=\frac{3\eta M}{2}\le\frac{\varepsilon}{3}$$ за

рахунок вибору достатньо маленького значення η.

Інтеграл $\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$, як частинний випадок попереднього інтегралу при $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$. Таким чином встановлено, що $\left|\boldsymbol{V}^k(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}^k(\boldsymbol{x}')\right| \le \varepsilon$, якщо $\left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\right| \le \delta$. Теорема доведена.

Нормальна похідна потенціалу простого шару

Будемо розглядати потенціал простого шару $V^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y$ для



оператору Гельмгольца Візьмемо довільну точку $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{S}$, і проведемо через цю точку яку-не будь нормаль $\boldsymbol{n}_x$ до поверхні $\boldsymbol{S}$. Для такого випадку в точці $\boldsymbol{x}$, можна обчислити похідну по напрямку нормалі n_x від потенціалу простого шару, яку обчислюють шляхом диференціювання підінтегральної функції

$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial n_x}\iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y = \iint\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dS_y$ Обчислимо вираз

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\pm ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2}e^{\pm ik|x-y|}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j - y_j}{|x-y|}\cos(n_x, x_j) =$$

$$\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_x, x-y)$$

Теорема 9 *(про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару)* Якщо μ обмежена і вимірювана функція на поверхні Ляпунова $\boldsymbol{S}$, то нормальна похідна потенціалу простого шару

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} = \iint\limits_S \mu(y)\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_x, x-y)dS_y \qquad (8.32)$$

має в кожній точці поверхні $\boldsymbol{S}$ цілком визначене скінчене значення, яке неперервно

змінюється коли точка $\boldsymbol{x}$ пробігає поверхню $\boldsymbol{S}$, це значення називають прямим значенням нормальної похідної потенціалу простого шару $\overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x}}$, $x \in S$.

Доведення При доведенні теореми будемо розглядати нормальну похідну потенціалу, як результат відображення щільності μ за допомогою інтегрального оператора з ядром $K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_x, x-y)$. (8.33).

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова, можна показати, що ядро (8.33) є полярним, оскільки для достатньо малих значень $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, $\cos(n_x, x-y) \le a_2|x-y|^{\alpha}$. Це означає, що $K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}\cos(n_x, x-y)|x-y|^{-\frac{\alpha}{2}}}{4\pi|x-y|^{2-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^{2-\frac{\alpha}{2}}}$ - є полярним ядром. Звідси маємо, що інтегральний оператор з полярним ядром відображає обмежену функцію у неперервну.

Теорема 10 *(про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару)* Якщо S замкнута поверхня Ляпунова, а μ неперервна на S щільність, то потенціал простого шару має на S граничні значення правильної нормальної похідної при підході до точки $x \in S$ з середини та ззовні і ці граничні значення можуть бути обчислені:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_i} = \frac{\partial \overline{V^k(x)}}{\partial n} + \frac{\mu(x)}{2} \qquad (8.34),$$

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_e} = \frac{\partial \overline{V^k(x)}}{\partial n} - \frac{\mu(x)}{2}$$

(8.35).

Означення 5 *Граничні значення нормальної похідної в точці* $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$

потенціалу простого шару з середини $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i}$ *та з зовні* $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e}$ *будемо називати правильними, якщо вони є граничними значеннями* $\frac{\partial V^k(x)}{\partial n}$ *коли* $x \to x_0$ *вздовж нормалі* n_{x_0} *з середини та ззовні відповідно.*

Доведення. Розглянемо вираз, який представляє собою суму потенціалу подвійного шару і нормальної похідної потенціалу простого шару з однаковою щільністю μ. $\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} + W^k(x) = \iint\limits_S \mu(y)\left[\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right]dS_y$ (8.36).

Можна показати, що ця функція змінюється неперервно, коли точка $\boldsymbol{x}$ перетинає поверхню $\boldsymbol{S}$, рухаючись по нормалі до цієї поверхні в точці $\boldsymbol{x}$.

Враховуючи неперервність (8.36) при переході через поверхню вздовж нормалі , можемо записати: $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} + W_i^k(x_0) = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} + W_e^k(x_0) = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \overline{W^k(x_0)}$.

Звідси маємо: $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} = \overline{W^k(x_0)} - W_i^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \frac{\mu(x_0)}{2}$.

$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} = \overline{W^k(x_0)} - W_e^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} - \frac{\mu(x_0)}{2}$ Що і треба було довести.

Лекція 26

§ 9 Дослідження існування розв'язків основних граничних задач рівняння Лапласа та Гельмгольца

[2, стор. 382 - 393]

Будемо розглядати замкнену Ляпуновську поверхню, яка обмежує дві області Ω та Ω' - зовнішню по відношенню до області Ω. Будемо розглядати основні граничні задачі рівняння Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ u\big|_{x\in S} = f(x) \end{cases} \quad (9.1) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ u\big|_{x\in S} = f(x),\ u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \end{cases} \quad (9.1')$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in S} = f(x) \end{cases} \quad (9.2) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in S} = f(x),\ u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \end{cases} \quad (9.2')$$

Будемо називати граничні задачі (9.1) та (9.1') внутрішньою та зовнішньою граничними задачами Дірихле і позначати D_i та D_e відповідно. Граничні задачі (9.2) та (9.2') будемо називати внутрішньою та зовнішньою граничними задачами Неймана та позначати N_i та N_e відповідно.

Функцію $f(x)$ будемо вважати неперервною на поверхні Ляпунова S.

Враховуючи властивості потенціалів, будемо шукати розв'язки граничних задач Діріхле у вигляді потенціалу подвійного шару, а задач Неймана у вигляді потенціалу простого шару з невідомими щільностями:

$$u(x) = \iint_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y \qquad D_i \text{ та } D_e \qquad (9.3)$$

$$u(x) = \iint_S \mu(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y \qquad N_i \text{ та} N_e \qquad (9.4)$$

В області Ω та Ω' потенціали простого шару та подвійного шару

задовольняють рівняння Лапласа.

Для знаходження розв’язків відповідних граничних задач необхідно задовільними граничним умовам на поверхні S та для зовнішніх задач умовам регулярності на нескінченості.

Запишемо інтегральні співвідношення, які дозволять задовольнити граничні умови та визначити невідомі щільності потенціалів.

Для запису інтегральних співвідношень використаємо теореми про граничні значення потенціалу подвійного шару та граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару.

$$f(x)=\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\sigma(x)}{2},\ x\in S,\ D_i \qquad (9.5)$$

$$f(x)=\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{\sigma(x)}{2},\ x\in S,\ D_e \qquad (9.6)$$

$$f(x)=\iint_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ N_i \qquad (9.7)$$

$$f(x)=\iint_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ N_e \qquad (9.8)$$

Неважко бачити, що рівняння (9.5) – (9.8) є інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду і розпадаються на дві пари союзних (спряжених): D_i, N_e та D_e, N_i. З теорем Фредгольма відомо, що існування і єдність розв’язків інтегрального рівняння і спряженого до нього виконується одночасно. Тому ми будемо досліджувати одночасно пари рівнянь D_i, N_e та D_e, N_i.

Ядро інтегрального рівняння (9.6) має вигляд

$$K(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}=-\frac{\cos(y-x,n_y)}{4\pi|x-y|^2} \qquad (9.9),$$

відповідно спряженого до нього рівняння (9.8)

$$K^*(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}=-\frac{\cos(x-y,n_x)}{4\pi|x-y|^2} \qquad (9.10)$$

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова і оцінки $\cos(y-x,n_y)<a_1|x-y|^{\alpha}$, можна встановити, що ядра $K(x,y),\ K^*(x,y)$ є полярними і для таких інтегральних рівнянь можна застосовувати теореми Фредгольма.

Дослідження внутрішньої задачі Дірихле та зовнішньої задачі Неймана.

Покажемо, що інтегральні рівняння Фредгольма (9.5) з полярним ядром (9.9) та спряжене до нього рівняння (9.8) мають єдиний розв'язок для будь – якого неперервного вільного члена.

Розглянемо однорідне рівняння для рівняння (9.8)

$$\iint_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\mu(x)}{2}=0,\ x\in S, \qquad (9.8')$$

Нехай $\mu_0(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{S})$ розв'язок однорідного рівняння (9.8'), зрозуміло, що в цьому випадку функція $\mu_0(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$ і задовольняє рівняння

$$\iint_S \mu_0(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\mu_0(x)}{2}=0,\ x\in S, \qquad (9.8'')$$

Побудуємо потенціал простого шару з щільністю μ_0 і позначимо його

$$V_0(x)=\iint_S \mu_0(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y. \qquad (9.11).$$

Потенціал (9.11) має правильну нормальну похідну при підході до поверхні $\boldsymbol{S}$ з зовні, а рівняння (9.8'') означає, що $\dfrac{\partial V_0(x)}{\partial n_e}\equiv 0$ (9.12).

Зрозуміло, що для $\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x})$ задовольняє граничній задачі

$$\begin{cases}\Delta V_0(x)=0,\ x\in\Omega' \\ \left.\dfrac{\partial V_0(x)}{\partial n}\right|_{x\in S}=0\end{cases} \qquad (9.13),$$ яка

має лише тривіальний розв'язок, тобто $\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}'$. Оскільки потенціал простого шару є неперервною функцією в усьому евклідовому просторі, то $V_0(x) \equiv 0,\ x \in S$, таким чином $V_0(x)$ задовольняє граничній задачі Дірихле $\begin{cases} \Delta V_0(x) = 0,\ x \in \Omega \\ V_0(x)\big|_{x \in S} = 0 \end{cases}$, яка має лише тривіальний розв'язок $V_0(x) \equiv 0, x \in \Omega$. Таким чином маємо, що $\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, а це означає, враховуючи (9.11), що $\mu_0(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Таким чином однорідне рівняння (9.8') має лише тривіальний розв'язок, а відповідне неоднорідне рівняння (9.8) і спряжене до нього неоднорідне рівняння (9.5) має єдиний розв'язок для будь – якого неперервного вільного члену $f(x)$. З наведених міркувань має місце теорема.

Теорема 1 (*про існування розв'язку внутрішньої задачі Дірихле та зовнішньої задачі Неймана)* Нехай $\boldsymbol{S}$ замкнена поверхня Ляпунова, тоді внутрішня задача Дірихле (9.1) та зовнішня задача Неймана (9.2') мають єдині розв'язки для будь – яких неперервних функцій $f(x)$ і розв'язки цих задач можна представити у вигляді потенціалу подвійного шару (9.3) та простого шару (9.4) відповідно.

Дослідження зовнішньої задачі Дірихле та внутрішньої задачі Неймана.

Розглянемо однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню Фредгольма (9.6)

$$\iint_S \sigma_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y + \frac{\sigma_0(x)}{2} = 0,\ x \in S,\ D_e \qquad (9.6').$$

Згідно до властивостей інтегралу Гауса $W_0(x)$, легко перевірити, що, рівняння (9.6') має нетривіальний розв'язок $\sigma_0(x) \equiv 1$, можна показати, що інших нетривіальних розв'язків не існує. Це означає, що розв'язок спряженого неоднорідного рівняння (9.7) існує тоді і лише тоді, коли його вільний член $f(x)$ ортогональний розв'язкам спряженого однорідного рівняння, тобто функції $\sigma_0(x) \equiv 1$. Умову ортогональності можна записати у вигляді

$$\iint_S f(x)dS = 0 \qquad (9.14).$$

Таким чином має місце теорема.

Теорема 2 (Про існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана) Нехай S. Замкнута поверхня Ляпунова, а $f \in C(S)$, тоді внутрішня задача Неймана (9.2) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконана умова ортогональності (9.14), а сам розв'язок можна представити у вигляді потенціалу простого шару (9.4).

Розглянемо випадок зовнішньої задачі Дірихле. Згідно до того, що однорідне рівняння (9.6') має один нетривіальний розв'язок, то однорідне спряжене до нього рівняння

$$\iint_S \mu_1(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y + \frac{\mu_1(x)}{2} = 0\,,\ x \in S,\ N_i \qquad (9.7')$$

теж має один нетривіальний розв'язок $\mu_1(x)$-(власну функцію характеристичного числа $\lambda = -\frac{1}{2}$. Згідно до третьої теореми Фредгольма, неоднорідне рівняння (9.6) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова ортогональності $\iint_S f(x)\mu_1(x)dS = 0$ і при цьому розв'язок інтегрального рівняння (9.6) неєдиний.

В той же час відомо, що зовнішня задача Дірихле має єдиний розв'язок (друга теорема єдиності гармонічних функцій). Отже маємо протиріччя, яке викликане тим, що потенціал подвійного шару $u(x) = \iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ у вигляді якого ми шукаємо розв'язок зовнішньої задачі Дірихле не є гармонічною функцією регулярною на нескінченості. Дійсно цей потенціал веде себе як $\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), |x| \to \infty$, тобто прямує до нуля швидше ніж регулярна гармонічна функція.

Для виправлення цієї ситуації будемо шукати розв'язок зовнішньої задачі Дірихле $\boldsymbol{D}_i$ у вигляді:

$$u(x)=\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{1}{|x|}\iint_S \sigma(y)dS_y \qquad (9.15),$$

де перший доданок як і раніше є потенціалом подвійного шару, а другий – потенціал Робена, який не порушуючи гармонічність цієї функції, забезпечує регулярність на нескінченості. При цьому ми вважаємо, що система координат обрана таким чином, що точка $x=0\in\Omega$.

Для знаходження щільності σ, запишемо інтегральне співвідношення використовуючи теорему про граничні значення потенціалу подвійного шару (потенціал Робена є неперервною функцією в $\boldsymbol{R}^3$):

$$f(x)=\iint_S \sigma(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{1}{|x|}\right)dS_y+\frac{\sigma(x)}{2} \qquad (9.16).$$

$K(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{1}{|x|}\right)$ - ядро інтегрального рівняння.

Покажемо, що (9.16) має єдиний розв'язок. Для цього покажемо, що

однорідне рівняння $\iint_S \sigma_0(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{1}{|x|}\right)dS_y+\frac{\sigma_0(x)}{2}=0$ (9.16')

має лише тривіальний розв'язок. Нехай σ_0 деякий розв'язок рівняння (9.16')

Побудуємо потенціал з щільністю σ_0

$$U_0(x)=\iint_S \sigma_0(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{1}{|x|}\iint_S \sigma_0(y)dS_y \qquad (9.17),$$

який задовольняє рівняння Лапласа для $x\in\Omega'$ З (9.16') випливає, що граничне значення потенціалу $\boldsymbol{U}_0$ при підході до поверхні $\boldsymbol{S}$ з зовні дорівнює нулю, тобто

функція $\boldsymbol{U}_0$ є розв'язком граничної задачі $\begin{cases}\Delta U_0(x)=0, x\in\Omega' \\ U_0\big|_{x\in S}=0, U_0(x)=\frac{1}{|x|}, |x|\to\infty\end{cases}$, ця задача

має лише тривіальний розв'язок, тобто $U_0(x) \equiv 0, x \in \Omega'$. Помножимо (9.17) на $|\boldsymbol{x}|$, та спрямуємо $\boldsymbol{x} \to \infty$. В результаті отримаємо, що $\iint\limits_S \sigma_0(y) dS = 0$ (9.18).

Тобто будь – який розв'язок інтегрального рівняння (9.16'), задовольняє співвідношення (9.18), але тоді рівняння (9.16') спрощується і приймає вигляд $\iint\limits_S \sigma_0(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \right) dS_y + \frac{\sigma_0(x)}{2} = 0$. Відомо, що це рівняння має у якості розв'язку функцію $\sigma_0(x) \equiv const$, але з (9.18) випливає що $\sigma_0(x) \equiv 0$. Таким чином, однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок, а відповідне неоднорідне рівняння (9.16) має єдиний розв'язок для будь – якого вільного члена $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Тобто нами доведена теорема.

Теорема 3 *(про існування розв'язку зовнішньої задачі Дірихле)* Нехай $\boldsymbol{S}$ замкнена поверхня Ляпунова, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$, тоді зовнішня задача Дірихле (9.1') має єдиний розв'язок регулярний на нескінченості для довільної неперервної функції $\boldsymbol{f}$ і цей розв'язок може бути знайдений у вигляді суми потенціалі подвійного шару і потенціалу Робена.

Третя гранична задача для рівняння Лапласа

Окрім основних граничних задач рівняння Лапласа, метод потенціалів може бути застосований до третьої граничної задачі (Ньютона).

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x) u \right]\Big|_{x \in S} = f(x) \end{cases} \quad (9.19), \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega' \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x) u \right]\Big|_{x \in S} = f(x), \\ u(x) = O\left(|x|^{-1} \right), |x| \to \infty \end{cases} \quad (9.19').$$

Будемо припускати, $\alpha(x) > 0, \ x \in S$. Розв'язок граничних задач (9.18) та (9.18')

будемо шукати у вигляді потенціалів простого шару $V(x)=\iint\limits_S \mu(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$.

Враховуючи теорему про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару запишемо інтегральні рівняння для щільності потенціалу μ по поверхні $\boldsymbol{S}$:

$$f(x)=\iint\limits_S \mu(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{\alpha(x)}{4\pi|x-y|}\right)dS_y+\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ H_i$$

(9.20),

$$f(x)=\iint\limits_S \mu(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{\alpha(x)}{4\pi|x-y|}\right)dS_y-\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ H_e$$

(9.20’).

Можна показати, що у випадку, коли $\alpha(\boldsymbol{x})\geq 0, \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{S}$, інтегральні рівняння (9.20) та (9.20’) мають єдині розв’язки для будь – якої неперервної функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ці розв’язки можуть бути знайдені у вигляді потенціалу простого шару.

Дослідження існування розв’язків граничних задач рівняння Гельмгольца.

Розглянемо граничні задачі для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases}\left(\Delta+k^2\right)u(x)=0,\ x\in\Omega\\ u\big|_{x\in S}=f(x)\end{cases}\qquad (9.21)$$

$$\begin{cases}\left(\Delta+k^2\right)u(x)=0,\ x\in\Omega'\\ u\big|_{x\in S}=f(x),\\ u(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\ |x|\to\infty\\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial|x|}\pm iku(x)=o\left(|x|^{-1}\right),\ |x|\to\infty\end{cases}\qquad (9.21')$$

$$\begin{cases} \left(\Delta + k^2\right)u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x \in S} = f(x) \end{cases} \qquad (9.22) \qquad \begin{cases} \left(\Delta + k^2\right)u(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x \in S} = f(x), \\ u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial |x|} \pm iku(x) = o\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \end{cases} \qquad (9.22')$$

Будемо шукати розв'язки граничних задач для рівняння Гельмгольца у вигляді потенціалу простого шару $V^k(x) = \iint\limits_S \dfrac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y$ для задачі Неймана (9.22), (9.22') та у вигляді потенціалу подвійного шару $W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \dfrac{\partial}{\partial n_y} \dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$ для задачі Дірихле (9.21), (9.21').

Теорема 4 (Про існування розв'язків граничних задач для рівняння Гельмгольца) Нехай число k^2 не є власним числом внутрішньої задач Дірихле та Неймана оператора Лапласа в області Ω, тоді граничні задачі Дірихле та Неймана, внутрішня та зовнішня (9.21), (9.22) та (9.21'), (9.22') мають єдиний розв'язок для будь – якої неперервної функції $f(x)$ на поверхні S ці розв'язки можна представити у вигляді потенціалів подвійного шару та простого шару відповідно.

Доведення Будемо шукати розв'язки внутрішньої та зовнішньої задачі Дірихле у вигляді потенціалу подвійного шару $u(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \dfrac{\partial}{\partial n_y} \dfrac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$ (9.22), а внутрішньої та зовнішньої задач Неймана у вигляді потенціалу простого шару

$$\boldsymbol{u(x)} = \iint\limits_S \frac{\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mu(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dS}_y \qquad (9.24).$$

Враховуючи властивості потенціалів та фундаментальних розв'язків

оператора Гельмгольца, легко бачити, що ці функції задовольняють однорідному рівнянню Гельмгольца та умовам регулярності на нескінченості у випадку зовнішніх задач.

Для визначення невідомої щільності запишемо граничні інтегральні рівняння:

$$f(x) = -\frac{\sigma(x)}{2} + \iint_S K(x,y)\sigma(y)dS_y,\ D_i \qquad (9.25),$$

$$f(x) = \frac{\sigma(x)}{2} + \iint_S K(x,y)\sigma(y)dS_y,\ D_e \qquad (9.25'),$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{2} + \iint_S K^*(x,y)\mu(y)dS_y,\ N_i$$

(9.26),

$$f(x) = -\frac{\mu(x)}{2} + \iint_S K^*(x,y)\mu(y)dS_y,\ N_e \qquad (9.26').$$

Де $K(x,y) = \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2}e^{ik|x-y|}\cos(y-x,n_y)$ (9.27),

та $K^*(x,y) = \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{-ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{-ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2}e^{-ik|x-y|}\cos(x-y,n_x)$ (9.27')

ядра основного та спряженого інтегральних рівнянь.

Вивчимо випадок зовнішньої задачі Дірихле та внутрішньої задачі Неймана $\boldsymbol{D_e}$, $\boldsymbol{N_i}$.Розглянемо однорідне інтегральне рівняння, яке відповідає $\boldsymbol{N_i}$

$$0 = \frac{\mu(x)}{2} + \iint_S K^*(x,y)\mu(y)dS_y \qquad (9.28).$$

Припустимо, що (9.28) має єдиний нетривіальний розв'язок μ_0, тоді і однорідне рівняння $f(x) = \frac{\sigma(x)}{2} + \iint_S K(x,y)\sigma(y)dS_y,\ D_e$ (9.29),

теж має єдиний нетривіальний розв'язок σ_0. Складемо потенціал простого шару з

щільністю μ_0 $V_0^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{-ik|x-y|}\mu_0(y)}{4\pi|x-y|} dS_y$. З теореми про розрив нормальної похідної потенціалу простого шару маємо, що цей потенціал є розв'язком граничної задачі: $\begin{cases} (\Delta + k^2)V_0^k(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \left.\frac{\partial V_0^k(x)}{\partial n_i}\right|_{x \in S} = 0 \end{cases}$, але оскільки $\boldsymbol{k}^2$ не є власне число внутрішньої задачі Неймана, то остання гранична задача має лише тривіальний розв'язок, тобто $\boldsymbol{V_0^k(x) \equiv 0,\ x \in \Omega}$. Враховуючи неперервність потенціалу простого шару в усьому евклідовому просторі можна записати, що $\boldsymbol{V_0^k(x) \equiv 0,\ x \in S}$. Звідси випливає, що $\boldsymbol{V_0^k}$ задовольняє граничній задачі $\begin{cases} (\Delta + k^2)V_0^k(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ \left.V_0^k(x)\right|_{x \in S} = 0 \end{cases}$, а оскільки V_0^k задовольняє умові Зомерфельда, то єдиним розв'язком останньої задачі Дірихле є тотожній нуль. Отже маємо, що $\boldsymbol{V_0^k(x) \equiv 0,\ x \in \Omega \cup S \cup \Omega'}$, а це в свою чергу означає, що $\mu_0 = 0, x \in S$ і рівняння (9.28) та (9.29) мають лише тривіальні розв'язки. Згідно до теореми Фредгольма відповідні неоднорідні рівняння (9.25') та (9.26) мають єдиний розв'язок для будь-якого вільного члена $\boldsymbol{f}$. Теорема доведена.

Лекція 27

Граничні задачі рівняння Лапласа на площині

[2, стор. 394 - 399]

Граничні задачі для рівняння Лапласа у двовимірних областях можуть бути досліджені за допомогою логарифмічних потенціалів простого і подвійного шару (8.6), (8.7) з врахуванням деяких особливостей цих потенціалів. Зокрема у тривимірному просторі потенціали простого шару є гармонічною функцією як в області Ω, так і в області Ω', а потенціал подвійного шару є гармонічною функцією в області Ω, і не є гармонічною в Ω' (порушується регулярність на нескінченості).

Для потенціалів у двовимірному просторі маємо, що логарифмічний потенціал подвійного шару є гармонічною функцією як в області D так і в області D', а логарифмічний потенціал простого шару є гармонічною функцією в області D, але не є гармонічною в області D'. Зокрема потенціал простого шару при $|x| \to \infty$ зростає як $\ln|x|$, але гармонічна функція у двовимірному просторі повинна бути обмеженою. Постановка граничних для рівняння Лапласа у двовимірному просторі мають вигляд аналогічний задачам у тривимірному просторі з урахування обмеженості розв'язку в нескінченно-віддаленій точці.

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D \\ u\big|_{x\in C} = f(x) \end{cases} \qquad (9.30) \qquad\qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D' \\ u\big|_{x\in C} = f(x),\ u(x) = O(1),\ |x| \to \infty \end{cases} \qquad (9.30')$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in C} = f(x) \end{cases} \qquad (9.31) \qquad\qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D' \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in C} = f(x),\ u(x) = O(1),\ |x| \to \infty \end{cases} \qquad (9.31')$$

Теорема єдиності гармонічної функції для внутрішньої та зовнішньої задачі Неймана має формулювання відмінне від аналогічної теореми для тривимірного

простору.

Теорема 1 *(єдиності гармонічної функції з умовами Неймана у двовимірному просторі)* Якщо в області $D \subset R^2$ існує гармонічна функція, а у області $D' \subset R^2$ гармонічна функція регулярна на нескінченості, яка приймає на границі C області D або D' задане значення нормальної похідної, то в D та D' ця функція визначається з точність до адитивної константи.

Друга особливість стосується зовнішньої задачі Неймана

Лема Для того щоби зовнішня задача Неймана (9.29') мала розв'язок необхідно щоби $\oint\limits_C f(x)dx = 0$. (9.32)

Доведення Розглянемо двозв'язну область $U(0,R)/D$, де $U(0,R)$ - круг радіусу R з центром в початку координат. Враховуючи властивості гармонічних функцій можна записати для розв'язку задачі Неймана співвідношення: $\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} dx + \oint\limits_{C(R,0)} \frac{\partial u}{\partial n} dx = 0$ (9.32'), де C - контур, що обмежує область D, а $C(R,0)$ - коло радіусу R з центром в початку координат. Спрямуємо $R \to \infty$ та врахуємо поведінку гармонічної функції двох змінних в нескінченно-віддаленій точці $\frac{\partial u}{\partial n} = O(1/R^2)$, $\oint\limits_{C(R,0)} dx = 2\pi R$. Таким чином $\oint\limits_{C(R,0)} \frac{\partial u}{\partial n} dx = O(1/R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Звідси маємо $\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} dx = \oint\limits_C f(x)dx = 0$, і лема доведена.

Для знаходження розв'язку задачі Дірихле так само, як і у тривимірному просторі, будемо використовувати потенціал подвійного шару (логарифмічний) $\oint\limits_C \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} dy$, а для задачі Неймана потенціал простого шару

(логарифмічний) $\oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$.

Використовуючи теорему про граничні значення потенціалу подвійного шару, та теорему про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару отримаємо інтегральні рівняння Фредгольма другого роду для кожної з граничних задач:

$$f(x)=\oint_C \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}dy-\frac{\sigma(x)}{2} \qquad D_i \qquad (9.33)$$

$$f(x)=\oint_C \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}dy+\frac{\sigma(x)}{2} \qquad D_e$$

(9.33’)

$$f(x)=\oint_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}dy+\frac{\mu(x)}{2} \qquad N_i \qquad (9.34)$$

$$f(x)=\oint_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}dy-\frac{\mu(x)}{2} \qquad N_e$$

(9.34’)

Граничні інтегральні рівняння (9.33), (9.33’), (9.34), (9.34’) - інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з полярними ядрами у випадку, коли контур C - контур Ляпунова.

Для дослідження властивостей інтегральних рівнянь (9.33), (9.33’), (9.34), (9.34’) корисною буде наступна лема:

Лема Якщо інтегральне рівняння $f(x)=\oint_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}dy-\frac{\mu(x)}{2}$ (N_e) має розв’язок, а функція $f(x)$ задовольняє умові $\oint_C f(x)dx=0$ (9.32), то логарифмічний потенціал простого шару $\oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$ дає розв’язок зовнішньої задачі Неймана N_e.

Доведення Нехай рівняння (9.34’) має розв’язок. Візьмемо функцію μ що є розв’язком цього рівняння як щільність потенціалу простого шару $\oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$. Цей потенціал задовольняє граничній умові задачі Неймана і є гармонічною поза контуром C за винятком можливо нескінченно віддаленої точки у якій ця функція може бути необмеженою. Покажемо що при виконанні умови (9.32) потенціал простого шару є обмеженою функцією в нескінченно віддаленій точці. Проінтегруємо обидві частини рівняння (9.34’) по контуру C

$$\oint_C f(x)dx = \oint_C\oint_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}dydx - \oint_C \frac{\mu(x)}{2}dx = 0. \qquad (9.35).$$

У подвійному інтегралі поміняємо місцями x та y і використаємо

$$\oint_C\oint_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}dydx = \oint_C\oint_C \mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}dydx =$$

властивості інтегралу Гауса:

$$\oint_C \mu(x)\left\{\oint_C \frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}dy\right\}dx = -\frac{1}{2}\oint_C \mu(x)dx$$

Таким чином з (9.33) та останньої рівності випливає

$$\oint_C \mu(x)dx = 0 \qquad (9.36).$$

У рівності (9.36) замінимо x на y та помножимо цю рівність на $\ln|x|$ і додамо до потенціалу простого шару $\oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$. В результаті отримаємо новий вираз для потенціалу простого шару

$$\oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x|}{|x-y|}dy \qquad (9.37).$$

Інтеграл (9.35) є обмеженим в нескінченно віддаленій точці і більш того він прямує до нуля. Таким чином лема доведена.

Дослідження існування розв’язків інтегральних рівнянь D_i та N_e (9.33), (9.34’) здійснюється аналогічно тривимірному випадку, а відповідна теорема

існування розв'язку має аналогічне формулювання теоремі 1 *§8* (*про існування розв'язку внутрішньої задачі Дірихле та зовнішньої задачі Неймана)*

Дослідження пари рівнянь D_e та N_i теж повторює тривимірний випадок, а відповідні результати аналогічні теоремі 2 *§8* (*Про існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана)* та теоремі 3 *§8 (про існування розв'язку зовнішньої задачі Дірихле).*

При досліджені задачі D_e її розв'язок шукають у вигляді суми потенціалу подвійного шару та потенціалу Робена:

$$u(x) = \int_C \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} dy + \int_C \sigma(y) dy \qquad (9.38)$$

при цьому інтегральне рівняння для знаходження щільності буде мати вигляд:

$$f(x) = \int_C \sigma(y) \left[\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} + 1 \right] dy + \frac{\sigma(x)}{2} \qquad (9.39).$$

§10 Теплові потенціали та їх застосування для дослідження граничних задач рівняння теплопровідності

[6, стор. 224 - 231]

Нехай Ω - просторова область обмежена границею S, а $\varepsilon_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$ - фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності у тривимірному просторі.

Тоді $$U(x,t) = \int_0^t \iiint_\Omega a^2 \varepsilon(x-y, t-\tau) \rho(y,\tau) dy d\tau \qquad (10.1)$$

$$V(x,t) = \int_0^t \iint_S a^2 \varepsilon(x-y, t-\tau) \mu(y,\tau) dS_y d\tau \qquad (10.2)$$

$$W(x,t) = \int_0^t \iint_S a^2 \frac{\partial \varepsilon(x-y, t-\tau)}{\partial n_y} \sigma(y,\tau) dS_y d\tau \qquad (10.3)$$

Будемо називати тепловими потенціалами об'єму, простого шару,

подвійного шару відповідно. Функції ρ, μ, σ будемо називати щільностями відповідних потенціалів.

Властивості теплових потенціалі дуже схожі до властивостей потенціалів операторів Гельмгольца та Лапласа.

Властивість 1 Теплові потенціали об'єму, простого шару та подвійного шару задовольняють однорідним початковим умовам:

$U(x,0) = V(x,0) = W(x,0) = 0$. Ця властивість очевидно випливає з формул (10.1) – (10.3).

Властивість 2 Якщо точка $x \notin \Omega$ для теплового потенціалу об'єму, або точка $x \notin S$ для теплових потенціалів простого шару та подвійного шару, то усі три потенціали є функціями, які мають неперервні похідні будь – якого порядку по аргументах $x, t > 0$ і задовольняють в кожній такій точці $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ однорідному рівнянню теплопровідності.

Ця властивість безпосередньо випливає з властивостей фундаментального розв'язку оператора теплопровідності та властивості інтегралів, що залежать від параметрів. Для теплових потенціалів подвійного шару та простого шару мають місце теоремі про граничне значення потенціалу подвійного шару та граничне значення теплового потенціалу простого шару.

Теорема 1 *(про граничне значення теплового потенціалу подвійного шару)* Нехай $\boldsymbol{S}$ замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma(x,t) \in C(S \times (t > 0))$, тоді тепловий потенціал подвійного шару (10.3) при підході вздовж нормалі $\boldsymbol{n}$ до точки $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}$ поверхні $\boldsymbol{S}$ області $\boldsymbol{\Omega}$ з середини та ззовні прямує до своїх неперервних граничним значенням і ці значення визначаються рівностями

$$W_i(x,t) = -\frac{\sigma(x,t)}{2} + \overline{W}(x,t),\ x \in S \qquad (10.4)$$

$$W_e(x,t)=\frac{\sigma(x,t)}{2}+\overline{W}(x,t),\ x\in S \tag{10.5}$$

$$\overline{W}(x,t)=\int_0^t\iint_S a^2\frac{\partial\varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_y}\sigma(y,\tau)dS_y d\tau$$

- пряме значення теплового потенціалу подвійного шару, яке неперервно змінюється коли точка $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{t}>0)$.

Теорема 2 *(про граничні значення нормальної похідної теплового потенціалу простого шару)* Нехай S замкнена поверхня Ляпунова, $\mu(x,t)\in C(S\times(t>0))$, тоді нормальна похідна теплового потенціалу простого шару (10.2) при підході вздовж нормалі $\boldsymbol{n}$ до точки x, t поверхні S області Ω з середини та ззовні прямує до своїх неперервних граничним значенням і ці значення визначаються рівностями

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial n_i}=\frac{\mu(x,t)}{2}+\overline{\frac{\partial V(x,t)}{\partial n}},\ x\in S \tag{10.6}$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial n_e}=-\frac{\mu(x,t)}{2}+\overline{\frac{\partial V(x,t)}{\partial n}},\ x\in S \tag{10.7}$$

$\overline{\frac{\partial V(x,t)}{\partial n}}=\int_0^t\iint_S a^2\frac{\partial\varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_x}\mu(y,\tau)dS_y d\tau$ - пряме значення нормальної похідної теплового потенціалу простого шару, яке неперервно змінюється коли точка $(x,t)\in(S\times t>0)$.

Наведені теореми дозволяють звести граничні задачі рівняння теплопровідності до граничних інтегральних рівнянь відносно невідомої щільності. Запишемо канонічні граничні задачі теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t)-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0,\ x\in\Omega,\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u(x,t)\big|_{x\in S}=f(x,t) \end{cases} \tag{10.8}$$

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega',\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,t)\big|_{x\in S} = f(x,t) \end{cases}$$

(10.8’),

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n}\Big|_{x\in S} = f(x,t) \end{cases} \qquad (10.9),$$

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega',\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n}\Big|_{x\in S} = f(x,t) \end{cases} \qquad (10.9’).$$

Це внутрішня та зовнішня граничні задачі першого і другого роду для однорідного рівняння теплопровідності з однорідними початковими умовами і неоднорідними граничними умовами.

Розв’язок задачі Дірихле (10.8), (10.8’) будемо шукати у вигляді теплового потенціалу подвійного шару (10.3), а розв’язок задач Неймана у вигляді теплового потенціалів простого шару (10.2) з невідомими щільностями σ та μ. Використовуючи теорему 1 та теорему 2, можемо записати інтегральні рівняння відносно невідомих щільностей

$$f(x,t) = \int_0^t \iint_S a^2 \frac{\partial \varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_y} \sigma(y,\tau) dS_y d\tau - \frac{\sigma(x,t)}{2},\ x \in S, t > 0, D_i \qquad (10.10),$$

$$f(x,t) = \int_0^t \iint_S a^2 \frac{\partial \varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_y} \sigma(y,\tau) dS_y d\tau + \frac{\sigma(x,t)}{2},\ x \in S, t > 0, D_e \qquad (10.11),$$

$$f(x,t) = \int_0^t \iint_S a^2 \frac{\partial \varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_x} \mu(y,\tau) dS_y d\tau + \frac{\mu(x,t)}{2},\ x \in S, t > 0, N_i \qquad (10.12),$$

$$f(x,t) = \int_0^t \iint_S a^2 \frac{\partial \varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_x} \mu(y,\tau) dS_y d\tau - \frac{\mu(x,t)}{2},\ x \in S, t > 0, N_e \qquad (10.13).$$

Інтегральні рівняння (10.10) – (10.13) представляють собою рівняння Фредгольма другого роду по просторовій змінній та рівняння Вольтера по змінній τ і розпадаються на дві пари спряжених рівнянь (10.10), (10.13) та (10.11). (10.12).

Можна показати що інтегральні рівняння (10.10) – (10.13) мають єдиний розв'язок для будь – якої неперервної функції $\boldsymbol{f(x,t)}$, а це в свою чергу свідчить про існування і єдність розв'язку граничних задач (10.8), (10.9) та (10.8'), (10.9')

Аналогічно граничним задачам Діріхле та Неймана до інтегрального рівняння можна звести і граничну задачу з умовами третього роду (Ньютона), розв'язок якої треба шукати у вигляді теплового потенціалу простого шару.

Для знаходження розв'язку більш загальної задачі

$$\begin{aligned} &a^2\Delta u(x,t)-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-F(x,t),\ x\in\Omega,\ t>0 \\ &u(x,0)=u_0(x),\ u(x,t)\big|_{x\in S}=f(x,t) \end{aligned} \tag{10.14}$$

Використаємо представлення її розв'язку через функцію Гріна першої граничної задачі:

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\int_0^t\iiint_\Omega E_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau+\iiint_\Omega E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi- \\ &-a^2\int_0^t\iint_S\left(\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}f(\xi,\tau)\right)dS_\xi d\tau \end{aligned} \tag{3.22}$$

При цьому сама функція Гріна $E_1(x,\xi,t-\tau)=\omega_1(x,\xi,t-\tau)+\varepsilon(x-\xi,t-\tau)$ може бути знайдена як розв'язок канонічної задачі:

$$\begin{aligned} &a^2\Delta_x\omega_1(x,\xi,t-\tau)-\frac{\partial\omega_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}=0,\ x,\xi\in\Omega,t>0 \\ &\omega_1(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau\le 0}=0,\ \omega_1(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S}=-\varepsilon_1(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S} \end{aligned}$$

Аналогічні міркування можна провести для усіх інших граничних задач рівняння теплопровідності.

Теоретичні питання третього модуля

1. Поняття δ - функції Дірака, слабка збіжність
2. Узагальнені функції, визначення, приклади, сингулярні та регулярні узагальнені функції.
3. Диференціювання узагальнених функцій, приклади обчислення похідних.
4. Поверхнева функція Дірака.
5. Використання узагальнених функцій для моделювання зосереджених факторів і розподілів.
6. Поняття носія та порядку узагальнених функцій.
7. Згортка та регуляризація узагальнених функцій
8. Визначення фундаментального розв'язку основних диференціальних операторів.
9. Визначення функції Гріна основних крайових задач для еліптичного рівняння представлення розв'язку.
10. Визначення функції Гріна основних крайових задач для параболічного рівняння представлення розв'язку.
11. Визначення функції Гріна основних крайових задач для гіперболічного рівняння представлення розв'язку.
12. Задача Коші для рівняння теплопровідності, представлення розв'язку задачі Коші.
13. Задача Коші для рівняння коливання струни, представлення розв'язку, формула Даламбера.
14. Задача Коші для рівняння коливання мембрани, представлення розв'язку, формула Пуассона.
15. Фундаментальний розв'язок рівнянь Лапласа та Гельмгольца.
16. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.
17. Фундаментальне розв'язок хвильового оператора для R^1, R^2, R^3
18. Визначення гармонічної функції.
19. Регулярність на нескінченності, перетворення Кельвіна.
20. Оператор Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат.
21. Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$ та гармонічних функцій.
22. Теорема про середнє значення гармонічної функції.
23. Принцип максимуму гармонічної функції, наслідки.
24. Теорема єдиності гармонійної функції із граничними умовами першого та другого роду.
25. Теорема єдиності гармонійної функції із граничними умовами третього роду.
26. Рівняння для функцій Бесселя дійсного аргументу, функції Бесселя першого та другого роду дійсного аргументу
27. Властивості функцій Бесселя першого та другого роду дійсного аргументу.
28. Рівняння для функцій Бесселя уявного аргументу, функції Бесселя першого та другого роду уявного аргументу
29. Властивості функцій Бесселя першого та другого роду уявного аргументу
30. Методи побудови функції Гріна для оператора Лапласа, на прикладі задачі Дірихле для півпростору.
31. Методи побудови функції Гріна для оператора Лапласа, на прикладі задачі Неймана для півпростору.
32. Методи побудови функції Гріна для оператора Лапласа, на прикладі задачі Дірихле для кулі.
33. Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для півпрямої.
34. Джерела виникнення рівняння Гельмгольца.
35. Приклади неєдиності розв'язку внутрішньої граничних задач рівняння Гельмгольца, природа неєдиності.

36. Приклади неєдиності розв’язку зовнішньої граничних задач рівняння Гельмгольца, природа неєдиності, умови Зомерфельда.
37. Визначення потенціалів для оператора Лапласа та Гельмгольца.
38. Регулярність на нескінченності, перетворення Кельвіна.
39. Теорема про властивості перших похідних потенціалу об'єму, теорема
40. Теорема про другі похідні потенціалу об'єму.
41. Поняття поверхні Ляпунова, теорема про існування сфери Ляпунова.
42. Локальна система координат для поверхні Ляпунова, оцінка COS (n(y), y-x).
43. Тілесний кут спостереження поверхні з точки простору, лема про обчислення тілесного кута.
44. Потенціал подвійного шару на поверхні Ляпунова, властивості прямого значення потенціалу подвійного шару.
45. Інтеграл Гауса, його значення в різних точках простору.
46. Теорема про граничні значення потенціалу подвійного шару.
47. Інтегральні рівняння для внутрішньої задачі Дірихле та зовнішньої задачі Неймана рівняння Лапласа. Теореми існування розв’язку.
48. Інтегральні рівняння для зовнішньої задачі Дірихле та внутрішньої задачі Неймана рівняння Лапласа. Теореми існування розв’язку.
49. Граничні інтегральні рівняння для крайової задачі з граничними умовами третього роду.
50. Інтегральні рівняння для першої та другої граничних задач рівняння Гельмгольца.
51. Теорема про існування розв’язку граничних задач для рівняння Гельмгольца.
52. Теорема единості гармонічної функції для задачі Неймана у двовимірному просторі.
53. Граничні інтегральні рівняння для задач Діріхле та Неймана у двовимірному випадку.
54. Визначення основних теплових потенціалів.
55. Теорема про граничні значення теплового потенціалу подвійного шару.
56. Теорема про граничні значення нормальної похідної теплового потенціалу простого шару.
57. Інтегральні рівняння для основних граничних задач рівняння теплопровідності.

Глава 4 Узагальнені розв'язки граничних задач

Лекція 28

§ 1 Математичний апарат дослідження узагальнених розв'язків граничних задач

[8, стор.69 - 101]

Допоміжні результати

При дослідженні властивостей узагальнених розв'язків граничних задач ми будемо користуватися апаратом функціонального аналізу, тому нагадаємо деякі важливі поняття.

Означення 1 *Нехай* $\boldsymbol{E}$ *- лінійний нормований простів, тоді будемо говорити, що сукупність елементів* $\boldsymbol{E}' \subset \boldsymbol{E}$ *є всюди щільною в* $\boldsymbol{E}$*, якщо будь – який елемент* $\boldsymbol{E}$ *можна представити як границю в нормі* $\boldsymbol{E}$ *елементів з* $\boldsymbol{E}'$*. Якщо в* $\boldsymbol{E}$ *існує злічена всюди щільна множина елементів, то* $\boldsymbol{E}$ *називають сепарабільним простором.*

Означення 2 *Простір* $\boldsymbol{E}$ *називають повним, якщо для будь – якої фундаментальної в* $\boldsymbol{E}$ *послідовності існує граничний елемент, що належить* $\boldsymbol{E}$*. Повний лінійний нормований простір називається банаховим простором.*

Означення 3 *Банаховий простір* $\boldsymbol{H}$ *в якому для будь – яких двох елементів* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}$ *визначений скалярний добуток* $(u,v)_H$ *з усіма властивостями скалярного добутку називають гільбертовим простором.*

Означення 4 *Послідовність* $u_n \in H$ *будемо називати такою, що слабко збігається в* $\boldsymbol{H}$ *до елементу* $\boldsymbol{u}$*, якщо* $(u_n - u, v)_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ \forall v \in H$*.*

Означення 5 *Множина* $\boldsymbol{M}$ *банахового (гільбертового) простору* $\boldsymbol{B}$ *називається компактною, якщо будь – яка нескінчена множина елементів з* $\boldsymbol{M}$

містить збіжну в просторі $\boldsymbol{B}$ *підпослідовність.*

Означення 6 *Лінійним функціоналом* l *у гільбертовому просторі H будемо називати лінійну неперервну числову функцію* $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u})$, *визначену для кожного* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}$. *Функціонал є неперервним якщо числова послідовність* $l(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l(u)$ *для* $u_n \xrightarrow{H} u$. *Будь – який неперервний лінійний функціонал є також і обмеженим і навпаки, тобто* $|l(u)| \le C\|u\|_H$

Теорема 1 (**Ф.Риса-Фішера** *про представлення лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі*) Будь – який неперервний лінійний функціонал l, заданий у гільбертовому просторі H може бути представлений у вигляді скалярного добутку $l(u) = (u, v)_H$, при цьому v визначається для кожного функціоналу l єдиним чином, $\|l\| = \|v\|_H$.

Означення 7 *Лінійний оператор* $\boldsymbol{A}$ *який діє з банахового простору* B_1 *у банаховий простів* B_2 *називається обмеженим, якщо існує така константа* C, *що для будь-якого елементу* $f \in D(A) \subset B_1$ *має місце нерівність* $\|Af\|_{B_2} \le C\|f\|_{B_1}$.

Означення 8 *Лінійний оператор* $\boldsymbol{A}$, *який діє з банахового простору* B_1 *у банаховий простів* B_2 *називається неперервним на елементі* $f \in D(\boldsymbol{A})$, *якщо для будь – якої послідовності елементів* $f_n \in D(\boldsymbol{A}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *по нормі банохового простору* B_1, *числова послідовність* $\boldsymbol{A}f_n$ *збігається до елемента* $\boldsymbol{A}f$. *Якщо оператор* $\boldsymbol{A}$ *неперервний на кожному елементі банахового простору* B_1, *його називають неперервним.*

Для того щоб лінійний оператор $\boldsymbol{A}$ був неперервним необхідно і достатньо щоб цей оператор був обмеженим.

Означення 9 *Нехай* $D(A^*) \subset H$, *підмножина елементів гільбертового*

простору H, з наступними властивостями: для будь – якого $g \in D(A^*)$ існує такий елемент $h \in H$, що для усіх $a \in D(A)$ має місце рівність $(Af, g) \in (f, h)$, тоді кажуть що на множині $D(A^*)$ заданий оператор A^*, який ставить у відповідність елементу $g \in D(A^*)$ елемент $h = A^* g$ і називається спряженим до оператора A. Для основного і спряженого оператора має місце $(Af, g) \in (f, A^* g)$. Якщо $A = A^*$, то оператор A називається самоспряженими.

Означення 10 *Будемо називати лінійний оператор A цілком неперервним з гільбертового простору H у гільбертов простір H, якщо він переводить будь – яку обмежену множину елементів в H у компактну множину елементів.*

Означення 11 *Оператор A, який діє у гільбертовому просторі називається скінченно-вимірним (n – вимірним), якщо він відображає гільбертов простір H у його (n – вимірний) підпростір.*

Терема 2 (про представлення цілком неперервного оператора) Для того щоб заданий на сепарабільному гільбертовому просторі H лінійний обмежений оператор A із H в H був цілком неперервним необхідно і достатньо щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувало ціле число $n(\varepsilon)$ і такі лінійні оператори A_1 та A_2, A_1 - (n – вимірний), а $\|A_2\| \le \varepsilon$, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$.

Матричне представлення лінійного обмеженого оператора

Нехай A - лінійний обмежений оператор, який діє з сепарабільного гільбертового простору H в H нехай $D_A = H$, $\{e_i\}_{i=1,\infty}$ - ортонормований базис елементів з H. Розглянемо нескінчену матрицю

$$a_{i,j} = (Ae_i, e_j) = (e_i, A^* e_j),\ i \ge 1,\ j \ge 1 \qquad (1.1)$$

будемо називати її матричним представленням оператора A по базису $\{e_i\}_{i=1,\infty}$.

Оскільки $a_{i,j} = \left(Ae_i, e_j\right)$ - коефіцієнт Фур'є елемента Ae_i, то з рівності Парсеваля – Стєклова будемо мати, що $\sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{i,j}\right|^2 = \left\|Ae_i\right\|^2 \le \left\|A\right\|^2 = \left\|A^*\right\|^2$. (1.2)

Візьмемо довільний елемент $f \in H$ і нехай $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ - його розвинення в ряд Фур'є. Оскільки $Af \in H$, то його коефіцієнти Фур'є мають вигляд

$$\left(Af\right)_j = (Af, e_j) = \left(A\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \left(Ae_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i a_{i,j},\ j = 1, 2... \quad (1.3)$$

Ряд в правій частині (1.3) збігається абсолютно оскільки його загальний член мажарується загальним членом збіжного ряду $\frac{1}{2}\left(\left|f_i\right|^2 + \left|a_{i,j}\right|^2\right)$. Підставляючи значення коефіцієнтів Фур'є в ряд Фур'є $Af = \sum_{i=1}^{\infty} \left(Af\right)_j e_j$, отримаємо

$$Af = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} f_i\right) e_j \quad (1.4)$$

Таким чином, для довільного елементу $f \in H$ елемент $Af \in H$ може бути знайдений за формулою (1.4) лише з використанням матриці $a_{i,j}$. Матричне представлення спряженого оператора A^* в базисі $\left\{e_i\right\}_{i=1,\infty}$ запишемо через матрицю $a^*_{i,j} = (A^* e_i, e_j) = (e_i, Ae_j) = \overline{a}_{j,i},\ i, j \ge 1$.

Стискаючий лінійний оператор

Результати викладені в цьому параграфі справедливі для будь – якого банахового простору, але ми розглянемо лише випадок коли лінійний оператор діє в сеперебільному гільбертовому просторі H.

Означення 12 Будемо називати лінійний оператор A що дії з H в H стискаючим якщо $\left\|A\right\|_H < 1$.

Лема1 Якщо A лінійний стискаючий оператор з H в H, то існує заданий на

H оператор $(I-A)^{-1}$ з H в H такий що $\left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}$

Доведення Для доведення розглянемо рівняння $(I-A)f=g$ (1.5)

і покажемо, що для довільного $g \in H$ єдиним розв'язком є розв'язок, що представляється збіжним в H рядом $f=\sum_{k=0}^{\infty} A^k g,\ A^0=I$. (1.6)

Цей ряд збіжний, оскільки H - повний простір, а часткові суми ряду $f_m=\sum_{k=0}^{m} A^k g,$ утворюють фундаментальну послідовність: при $p>m$

$\|f_p-f_m\|=\left\|A^p g+.....+A^{m+1}g\right\| \le \left\|A^p g\right\|+.....+\left\|A^{m+1}g\right\| \le$

$\|g\|\left(\|A\|^{m+1}+.....\right)=\|g\|\dfrac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|} \to 0$ при $m,p \to \infty$. Елемент $f \in H$ є розв'язком рівняння (1.5) оскільки $(I-A)f=(g+Ag+A^2g+....)-\left(Ag+A^2g+....\right)=g$. Цей розв'язок єдиний. Дійсно, якщо припустити, що існують два елементи f_1 та f_2 то $f=f_1-f_2$ задовольняє однорідному рівнянню $(I-A)f=0$. Тому має місце оцінка $\|f\|=\|Af\| \le \|A\|\|f\|$. Таким чином $f=0,\ f_1=f_2$

Таким чином оператор $(I-A)^{-1}$ існує, визначений на усьому просторі H. Оскільки $\left\|(I-A)^{-1}g\right\|=\left\|g+Ag+....+A^m g+....\right\| \le \|g\|(1+\|A\|+...) \le \dfrac{g}{1-\|A\|}$ для усіх $g \in H$, то оператор $(I-A)^{-1}$ є обмежений.

Зауваження В припущеннях леми 1 існує також обмежений оператор $\left(I-A^*\right)^{-1}$, оскільки $\|A\|=\|A^*\|$ При цьому $\left(I-A^*\right)^{-1}=\left[(I-A)^{-1}\right]^*$.

Представлення операторного рівняння з цілком неперервним оператором у скінчено вимірному вигляді

З теореми про представлення цілком неперервного оператора в

сепарабільному гільбертовому просторі, операторне рівняння $\left(I-\lambda A\right)f=g$ можна представити у вигляді $\left(I-\lambda A_2\right)f-\lambda A_1 f=g$ (1.7),

де оператор A_1 - n - вимірний, а $|\lambda|\|A_2\|\le\varepsilon<1$. Позначимо $\left(I-\lambda A_2\right)f=h$. За лемою 1 оператор $\left(I-\lambda A_2\right)$ має на H заданий обмежений оператор $\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}$ при цьому $f=\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}h$.

Таким чином операторне рівняння (1.7) перепишеться у вигляді $h-\lambda A_1\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}h=g$. (1.8)

Для спряженого рівняння $\left(I-\overline{\lambda}A^*\right)f^*=g^*$ (1.5’)

можна записати представлення $\left(I-\overline{\lambda}A_2^*\right)f^*-\overline{\lambda}A_1^*f^*=g^*$ (1.7’).

Застосуємо до останнього рівняння оператор $\left(I-\overline{\lambda}A_2^*\right)^{-1}$, отримаємо еквівалентне рівняння:

$$f^*-\overline{\lambda}\left[\left(I-\overline{\lambda}A_2^*\right)^{-1}\right]A_1^*f^*=z^*,\quad z^*=\left[\left(I-\overline{\lambda}A_2^*\right)^{-1}\right]g^*. \qquad (1.8')$$

При цьому оператор $\left[\left(I-\overline{\lambda}A_2^*\right)^{-1}\right]A_1^*$ буде спряженим до оператора $A_1\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}$. Враховуючи скінчено вимірність оператора A_1 скінчено вимірним буде також оператор $A_1\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}$, тобто його матричне представлення може бути записане через елементи базису $\{e_1,e_2.....e_n\}$ і при цьому $\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_{i,j}\right|^2=\left\|A_1\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}\right\|^2$.

Рівняння (1.8) можна представити у вигляді $\sum_j h_j e_j-\lambda\sum_j\sum_i h_i a_{i,j}e_j=\sum_j g_j e_j$, яке еквівалентне алгебраїчній системі рівнянь для коефіцієнтів Фур’є $h_1,h_{2,.....,}h_m,...$елементу h: $h_j-\lambda\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j}h_i=g_j,\ j\le n;\ h_j=g_j,\ j>n$. Оскільки

$j > n,\ h_j = g_j$ тобто відомі, то остання система зводиться до системи алгебраїчних рівнянь $h_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} h_i = g_j + \lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i,j} g_i,\ \ j \le n;$ (1.9).

Аналогічним чином спряжене рівняння (1.8’) можна замінити системою лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів Фур’є $f_j^*,\ j = 1, 2...$ елемента f^* через коефіцієнти Фур’є $z_j^*,\ j = 1, 2,..$ елемента $z^* = (I - \overline{\lambda} A_2^*)^{-1} g^*$. При цьому для $f_j^*,\ j \le n$ отримаємо лінійну алгебраїчну систему

$$f_j^* - \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{j,i} f_j^* = z_j^*,\ j = 1, 2, ...n \qquad (1.9').$$

При цьому $f_j^* = z_j^* + \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{j,i} f_j^*,\ \ j > n$ (1.10).

Теореми Фредгольма для операторного рівняння

Розглянемо операторні рівняння другого роду з лінійним цілком неперервним оператором $\boldsymbol{A}$, який діє з гільбертового простору $\boldsymbol{H}$ у гільбертів простір $\boldsymbol{H}$.

$$f - \lambda \boldsymbol{A} f = g \qquad (1.11),$$

спряжене рівняння

$$f^* - \lambda \boldsymbol{A}^* f^* = g^* \qquad (1.12)$$

та однорідні рівняння :

$$f - \lambda \boldsymbol{A} f = 0 \qquad (1.11')$$

$$f^* - \lambda \boldsymbol{A}^* f^* = 0 \qquad (1.12')$$

λ - комплексно значний параметр.

Для вказаних рівнянь має місце **теореми Фредгольма**, які узагальнюють відомі нам теореми Фредгольма для інтегральних рівняння Фредгольма другого роду (інтегральний оператор з неперервним та полярним ядром є цілком неперервним).

Теорема 1 (*перша теорема Фредгольма для операторного рівняння*) Якщо однорідне рівняння (1.11’) має при даному значені параметру λ лише тривіальний

розв'язок, то спряжене рівняння (1.12') теж має лише тривіальний розв'язок, а неоднорідне рівняння (1.11) і спряжене до нього неоднорідне рівняння (1.10) мають єдині розв'язки для будь – яких $g, g^* \in H$.

Теорема 2 (*друга теорема Фредгольма для операторного рівняння*) Однорідне рівняння (1.11') може мати нетривіальний розв'язок лише для зліченої множини значень параметру $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \ldots$, кожне з яких має скінчену кратність. Спряжене рівняння (1.12') має нетривіальний розв'язок тоді і лише тоді, коли параметр $\lambda = \overline{\lambda}_k, k = 1, 2, \ldots$, при цьому кратність λ_k і $\overline{\lambda_k}$ співпадає.

Теорема 3 *(третя теорема Фредгольма для операторного рівняння)* Рівняння (1.11) при $\lambda = \lambda_k$, кратності $\boldsymbol{r_k}$ має розв'язок тоді і лише тоді, коли вільний член g, ортогональний до усіх розв'язків спряженого однорідного рівняння $f^*_{k+j,\ j=0..r_k-1}$, тобто $(g, f^*_{k+j})_H = 0,\ j = 0..r_k - 1$. Тоді розв'язок неєдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа λ_k, тобто $f = f_0 + \sum_{j=0}^{r_k-1} c_j f_{k+j}$, де f_0 - частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.11).

Доведення. *Перша теорема Фредгольма*. Розглянемо системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.9) та (1.9'), матриці цих систем є ермітово спряженими, таким чином модулі визначників цих матриць співпадають. Якщо для одна з цих систем має розв'язок при довільному вільному члені (тобто визначник відмінний від нуля) то і спряжене рівняння має розв'язок для довільного вільного члена. Зокрема розв'язки однорідного рівняння і спряженого рівняння тільки тривіальні. Якщо одне з однорідних рівнянь має лише тривіальний розв'язок (тобто відповідний визначник не дорівнює нулю) то спряжене однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок, при цьому неоднорідні системи (1.9) та (1.9') мають

єдині розв'язки для довільних вільних членів. Ту саму властивість мають рівняння (1.7) та (1.7'). Дійсно, нехай рівняння (1.7) або (1.7') має розв'язок для довільного вільного члена $g \in H$ або ($g^* \in H$). Або теж саме рівняння (1.8) та (1.8') має розв'язок для довільного вільного члена $g \in H$ або ($z^* \in H$), зокрема і для $g \in H$ або ($z^* \in H$), які натягнуті на елементи базису $e_1, e_{2,.....,} e_n$. Таким чином система алгебраїчних рівнянь (1.9) або (1.9') мають розв'язки для довільного вільного члена, тому визначник цих систем відмінний від нуля, а значить відповідні однорідні системи рівнянь мають лише тривіальні розв'язки.

Зворотно, нехай одне з однорідних рівнянь (1.11') або (1.12') має лише тривіальний розв'язок, тоді відповідна однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь для (1.9), (1.9') мають лише тривіальні розв'язки. Визначники обох систем відмінні від нуля, тобто неоднорідні системи (1.9), (1.9') мають єдині розв'язки для довільних вільних членів, а тоді єдині розв'язки мають рівняння (1.11), (1.12) для довільних вільних членів з H.

Друга теорема Фредгольма Для довільного значення параметра λ $rang(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{A}) = rang(\mathbf{E} - \overline{\lambda} \mathbf{A}^*) = q \le n$, де $\mathbf{A} = a_{i,j}$, $\mathbf{A}^* = \overline{a}_{j.i}, i = 1..n, j = 1..n$. Таким чином однорідні для (1.9) та (1.9') системи рівнянь мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків, що рівна $n - q$. Для випадку, коли $q < n$ число λ будемо визначати як характеристичне число, число $r = n - q$ є кратність характеристичного числа λ, а відповідні розв'язки (n-вимірні вектори) $\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}, ...\mathbf{f}^{(r)}$ як власні вектори числа λ. При цьому спряжене однорідне рівняння для (1.9') має характеристичне число $\overline{\lambda}$ і власні вектори $\mathbf{f}^{*(1)}, \mathbf{f}^{*(2)}, ...\mathbf{f}^{*(r)}$

Третя теорема Фредгольма Для випадку, коли параметр λ є характеристичним числом, то для існування розв'язку неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.9) згідно теореми Кронекера - Капеллі необхідно і достатньо щоб вільний член системи (1.9) був ортогональним до усіх розв'язків

спряженого однорідного рівняння. Тобто

$$0=\sum_{j=1}^{n}\left(g_j+\lambda\sum_{i=n+1}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)\mathbf{f}_j^{*(s)}=\sum_{j=1}^{n}g_j\bar{\mathbf{f}}_j^{*(s)}+\sum_{j=n+1}^{\infty}g_j\bar{\mathbf{f}}_j^{*(s)}=(g,\mathbf{f}^*) \qquad (1.13)$$

Розв'язок рівняння (1.11) очевидно може бути записаний у вигляді $f^{(0)}+\sum_{s=1}^{r}c_s f^{(s)}$, де $f^{(0)}$ - довільний розв'язок неоднорідного рівняння, c_s, $s=1..r$ - довільні константи.

Простір $W_2^k(\Omega)$ та його властивості

[8, стор.120 - 145]

Нехай Ω - обмежена область з границею S, яка задовольняє умові Ліпшица. Нехай $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ - лінійна множина функцій неперервних з усіма їх похідними в області $\overline{\Omega}$. Позначимо через $C_0^{\infty}(\Omega)$ лінійну множину усіх функцій з $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, які мають компактний носій в області Ω, тобто усі функції з множини $C_0^{\infty}(\Omega)$ тотожно перетворюються в нуль в околі границі S разом з усіма своїми похідними.

Для функцій з класу $C_0^{\infty}(\Omega)$ та $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ можна ввести скалярний добуток $(u,v)_{L_2(\Omega)}=\int_{\Omega}u(x)\bar{v}(x)dx$, який породжує норму $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}=\int_{\Omega}u(x)\bar{u}(x)dx$.

Для функцій з $C_0^{\infty}(\Omega)$ та $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ можна ввести скалярний добуток і в іншій спосіб. Нехай k ціле невід'ємне число. Тоді

$$(u,v)_{W_2^k(\Omega)}=\sum_{|i|\le k}\int_{\Omega}D^iuD^ivdx, \quad u,v\in C^{\infty}(\Omega) \qquad (1.14),$$

де $$D^iu=\frac{\partial^{i_1i_2.....i_n}u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}.....\partial x_n^{i_n}} \qquad (1.15)$$

Скалярний добуток (1.3) породжує норму

$$\|(u)\|^2_{W_2^k(\Omega)}=(u,u)_{W_2^k(\Omega)}=\sum_{|i|\le k}\int_{\Omega}D^iuD^iudx, \quad u,v\in C^{\infty}(\Omega) \qquad (1.14').$$

(1.3’) відповідає усім аксіомам норми і таким чином простір $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ з введеною нормою $\|(u)\|_{W_2^k(\Omega)}$ стає нормованим простором, який ми будемо позначати $S_2^k(\Omega)$. Збіжність у цьому просторі означає, що, якщо $\|u_n - u\|_{W_2^k(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\|D^i u_n - D^i u\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ \forall |i| \le k$, тобто в просторі $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$ по нормі $\boldsymbol{L_2(\Omega)}$ збігається послідовність функцій та послідовність усіх частинних похідних до $\boldsymbol{k}$ - го порядку включно.

Особливістю нормованого простору $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$ є його неповнота, тобто не будь – яка фундаментальна по нормі простору $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$ послідовність буде мати границю, що належить цьому простору.

Важливим для подальшого буде наступна властивість похідних функцій з класу $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$:

$$\int_{\Omega} D^i u(x)\psi(x)dx = (-1)^{|i|}\int_{\Omega} u(x)D^i\psi(x)dx,\ \forall u \in S_2^k(\Omega),\ \psi \in C_0^{\infty}(\Omega) \qquad (1.16)$$

Для побудови повного простору з нормою $\boldsymbol{W_2^k(\Omega)}$ будемо використовувати стандартну процедуру поповнення.

У випадку $\boldsymbol{k} = 0$ повним простором, який містить в собі $\boldsymbol{S_2^0(\Omega)}$ та щільну лінійну множину $\boldsymbol{C^{\infty}(\overline{\Omega})}$ є простір $\boldsymbol{L_2(\Omega)}$.

Для випадку $\boldsymbol{k} > 0$ скалярний добуток введений в $S_2^k(\Omega)$ не може бути розширений на усі елементи простору $L_2(\Omega)$, оскільки не усі елементи цього простору мають похідні в якому не будь розумному сенсі.

Розглянемо послідовність $\{u_n\}$ фундаментальну в $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$. Тобто $\|u_n - u_m\|_{W_2^k(\Omega)} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, або $\|D^i u_n - D^i u_m\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,\ |i| \le k$. Можливі два випадки:

а) Послідовність $\{\boldsymbol{u_n}\}$ збігається до деякого елементу $\boldsymbol{u}$ в $S_2^k(\Omega)$, тобто

$\|u_n - u\|_{W_2^k(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ і елемент $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{S}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$, тобто $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{\Omega})$. При цьому послідовність $\{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}\} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to\infty]{} \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{u}$ по нормі $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$ для $|\boldsymbol{i}| \le \boldsymbol{k}$.

б) Послідовність $\{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}\}$ збігається до деякого елементу $\boldsymbol{u}$ по нормі $\boldsymbol{S}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$, але елемент $u \notin S_2^k(\Omega)$, тобто $\boldsymbol{u} \notin \boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{\Omega})$. В цьому випадку $\boldsymbol{u}$ граничний елемент фундаментальної послідовності будемо додавати до простору $\boldsymbol{S}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$.

Якщо до простору $\boldsymbol{S}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$ додати границі усіх фундаментальних по нормі $\boldsymbol{S}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$ послідовностей, то ми отримаємо повний нормований простір який позначатиме $W_2^k(\Omega)$.

Покажемо, що будь – який елемент $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$ має похідні до $\boldsymbol{k}$ порядку включно Дійсно, якщо $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\boldsymbol{\Omega})$, то ця функція має похідні будь – якого порядку в класичному розумінні. Якщо $\boldsymbol{u}$ є границею деякої фундаментальної послідовності, тобто $\boldsymbol{u} = \lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}$ то послідовність $\{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}\}$, як вже відмічалося, фундаментальна по нормі $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$, оскільки простір $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$ є повним, то послідовність $\{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}\}$ збігається по нормі $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$ до деякого елементу $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})} \in \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$. Саме функцію $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$ і можна вважати узагальненою похідною функції $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$. Тобто $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$ в $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$.

Покажемо, що функція $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$ задовольняє інтегральній тотожності, дійсно

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} D^i u_n \phi dx = (-1)^{|i|} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} u_n D^i \phi dx$, перейдемо до границі в лівій і правій частині рівності

$$\int\limits_{\Omega} v^{(i)} \phi dx = (-1)^{|i|} \int\limits_{\Omega} u D^i \phi dx \qquad (1.17)$$

Остання рівність і показує, що $\boldsymbol{v}^{(\boldsymbol{i})}$ можна вважати похідною $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{u}$. Можна показати що така похідна єдина.

Аналогічно простору $\boldsymbol{W}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$ можна побудувати простір $\overset{0}{\boldsymbol{W}}{}_2^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\Omega})$, який будується за допомогою процедури поповнення простора $\boldsymbol{C}_0^{\infty}(\boldsymbol{\Omega})$.

Лекція 29

Нерівність Пуанкаре – Фрідріхса

[10, стор.62 - 63]

Розглянемо обмежену область Ω і покажемо, що для будь – якої функції $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ має місце нерівність Пуанкаре – Фрідріхса.

$$\int_\Omega u^2(x)dx \le C_\Omega^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x)dx \qquad (1.18)$$

Доведення Покажемо справедливість цієї нерівності для будь – якої функції $u(x)$ з $C_0^\infty(\Omega)$. Будемо вважати, що область Ω можна заключити у паралелепіпед $\boldsymbol{\Pi} = \{\boldsymbol{x} : 0 \le \boldsymbol{x}_i \le \boldsymbol{l}_i,\ \boldsymbol{i} = 1, \boldsymbol{n}\}$. За межами області Ω продовжимо функцію $u(x)$ нульовим значенням, тобто $u(x) \equiv 0,\ x \in \Omega'$. Припустимо, що серед усіх сторін паралелепіпеда сторона $\boldsymbol{l}_1$ є найменшою. Позначимо $x_1^{'} = (x_2, ... x_n) \subset \Pi_1 = \{x_1', 0 \le x_i \le l_i, i = 2..n\}$, а x_1 - перша координата точки $\boldsymbol{x}$.

Запишемо очевидну рівність $\mathrm{u}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1^{'}) = \int_0^{\mathrm{x}_1} \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{y}_1, \mathrm{x}_1^{'})}{\partial \mathrm{y}_1} \mathrm{dy}_1$.

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату, проінтегруємо по паралелепіпеду Π і оцінимо праву частину використовуючи нерівність Коші – Буняківського.

$$\int_\Pi u^2(x)dx = \int_0^{l_1} dx_1 \int_{\Pi_1} \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x_1^{'})}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 dx_1' \le \int_0^{l_1} dx_1 \int_{\Pi_1} \left[x_1 \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial u(y_1, x_1')}{\partial y_1} dy_1 \right)^2 \right] dx_1' =$$

$$= \frac{l_1^2}{2} \int_\Pi \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx \le \frac{l_1^2}{2} \int_\Pi \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

Тобто нерівність (1.18) має місце з константою $C_\Omega = \frac{l_1}{\sqrt{2}}$.

З нерівності (1.18), отриманої для функцій $C_0^\infty(\Omega)$ шляхом використання

процедури поповнення, отримаємо, що ця нерівність є справедливою для функції $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Зокрема, нерівність (1.18) дозволяє ввести в просторі $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ еквівалентну норму. Покажемо, що $\|u\|_2^2 = \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$ є еквівалентною нормою в просторі $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тобто, покажемо, що знайдуться такі константи $C_1 > 0, C_2 > 0$, що $C_1\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le \|u\|_2 \le C_2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$

Дійсно $\|u\|_2^2 = \left(\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) \le \left(\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) + \int\limits_\Omega u^2(x)dx = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$, тобто $C_2 = 1$.

Має місце нерівність

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) + \int\limits_\Omega u^2(x)dx \le \left(1 + C_\Omega^2\right)\left(\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right) = \left(1 + C_\Omega^2\right)\|u\|_2^2.$$

З останньої нерівності випливає, що $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + C_\Omega^2\right)}}$.

Теорема Релліха. *(теорема про компактність обмеженої множини)* Будь – яка обмежена множина в просторі $W_2^1(\Omega)$ компактна в $L_2(\Omega)$.

Тобто, якщо M така нескінчена множина функцій, що для $\forall u \in M, \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C$, то з M можна виділити нескінчену підмножину, яка збігається в $L_2(\Omega)$ до деякого елементу з цього простору.

Еквівалентні нормування у просторах $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ та $W_2^1(\Omega)$

[8, стор.156 - 159]

Нехай в області Ω з границею $S \in C^1$ задана дійсна неперервна в $\overline{\Omega}$

симетрична матриця $\boldsymbol{P}(x)=\left(p_{i,j}(x)\right)_{i,j=1,n}$, функція $a(x)\in C(\Omega)$, а на границі S функція $\sigma(x)\in C(S)$. Визначимо на $W_2^1(\Omega)$ ермітову білінійну форму

$$W(f,g)=\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}p_{i,j}f_{x_i}\overline{g}_{x_j}+a(x)f\overline{g}\right)dx+\int_{S}\sigma(x)f\overline{g}dS \qquad (1.19)$$

Теорема *(про еквівалентність норм у просторі* $W_2^1(\Omega)$*)* Якщо матриця $\boldsymbol{P}(x)$ додатньо визначена, тобто для кожного комплексного вектора $\xi=(\xi_1,...\xi_n)$ і для усіх $x\in\overline{\Omega}$ $\sum_{i,j=1}^{n}p_{i,j}\xi_i\overline{\xi}_j\geq\gamma\|\xi\|^2$ з постійною $\gamma>0$, функція $a(x)\geq 0, x\in\overline{\Omega}, \sigma(x)\geq 0,\ x\in S$ та або $a(x)\not\equiv 0$, або $\sigma(x)\not\equiv 0$, то білінійна форма (1.19) визначає в $W_2^1(\Omega)$ скалярний добуток еквівалентний скалярному добутку

$$(f,g)_{W_2^1(\Omega)}=\int_{\Omega}\left[\left(\nabla f,\nabla\overline{g}\right)+f\overline{g}\right]dx \qquad (1.20).$$

Це фактично означає, що існують такі константи $C_1>0, C_2>0$, що має місце нерівність

$$C_2^2\|f\|^2_{W_2^1(\Omega)}\leq W(f,f)\leq C_1^2\|f\|^2_{W_2^1(\Omega)}. \qquad (1.21)$$

Таким чином, ця теорема дозволяє ввести норму у просторі $W_2^1(\Omega)$

$$\|f\|_*^2=W(f,f) \qquad (1.22)$$

еквівалентну звичайній нормі в цьому просторі.

Доведення Для доведення теореми необхідно встановити справедливість двосторонньої нерівності (1.21). Зауважимо, що в виразі (1.19) кожне з трьох доданків для $W(f,f)$ невід'ємне. Оскільки

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n}p_{i,j}f_{x_i}\overline{f}_{x_j}\right)dx\leq p_0\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left|f_{x_i}\right|\left|\overline{f}_{x_j}\right|dx\leq p_0n\int_{\Omega}|\nabla f|^2dx\leq p_0n\|f\|^2_{W_2^1(\Omega)},\ p_0=\max_{1\leq i,j\leq n}\left\|p_{i,j}\right\|_{C(\Omega)}$$

$$\int_{\Omega}a(x)|f|^2dx\leq a_1\|f\|^2_{L_2(\Omega)},\ a_1=\|a\|_{C(\Omega)}$$

$\int\limits_S \sigma(x)|f|^2 dS \le \sigma_1 \|f\|^2_{L_2(S)} \le C^2\sigma_1 \|f\|^2_{W_2^1(\Omega)}$, $\sigma_1 = \|\sigma\|_{C(S)}$ (Дивись нерівність (3.4) лекції 30). З цих нерівностей випливає, що права нерівність (1.21) має місце з постійною $C_1^2 = p_0 n + a_1 + \sigma_1 C^2$

Покажемо справедливість лівої нерівності (1.21), а саме покажемо що має місце нерівність $\|f\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \frac{1}{C_2^2} W(f, f)$.

Припустимо зворотне, що відповідної константи C_2 не існує. Тоді для довільного цілого $m \ge 1$ знайдеться така функція $f_m(x) \in W_2^1(\Omega)$, що $\|f_m\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ge mW(f_m, f_m)$, або знайдеться $g_m(x) = \frac{f_m(x)}{\|f_m\|_{W_2^1(\Omega)}}$, $\|g_m\|_{W_2^1(\Omega)} = 1$ така, що

$W(g_m, g_m) = \int\limits_\Omega \left(\sum\limits_{i,j=1}^n p_{i,j} g_{mx_i} \overline{g}_{mx_j} + a(x)|g_m|^2 \right) dx + \int\limits_S \sigma(x)|g_m|^2 dS \le \frac{1}{m}$. Звідси випливає, що кожне з доданків останньої нерівності не перевищує $\frac{1}{m}$ і тому мають місце нерівності: $\int\limits_\Omega a|g_m|^2 dx < \frac{1}{m}$; $\int\limits_S \sigma|g_m|^2 dS < \frac{1}{m}$; $\int\limits_\Omega |\nabla g_m|^2 dx < \frac{1}{m\gamma}$.

(1.23).

З (1.23) випливає, що послідовність g_m, $m = 1, 2...$ обмежена в $W_2^1(\Omega)$, тому з неї можна обрати фундаментальну в $L_2(\Omega)$ послідовність нехай це є послідовність g_m, $m = 1, 2...$, тобто $\|g_m - g_p\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, $m, p \to \infty$

Розглянемо

$$\|g_m - g_p\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \|g_m - g_p\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\nabla\left(g_m - g_p\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|g_m - g_p\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$2\|\nabla g_m\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\nabla g_p\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|g_m - g_p\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{p\gamma} \underset{p,m\to\infty}{\to} 0$$

Таким чином послідовність g_m, $m = 1, 2...$ фундаментальна в просторі

$W_2^1(\Omega)$ і тому збігається по нормі цього простору до деякого елементу $g \in W_2^1(\Omega)$.

Переходимо до границі при $m \to \infty$, отримаємо

$$\|g\|_{W_2^1(\Omega)} = 1, \int_\Omega |\nabla g|^2 dx = 0, \ \int_\Omega a|g|^2 dx = 0, \ \int_S \sigma |g|^2 dS = 0. \qquad (1.24)$$

З перших двох рівностей випливає, що $g(x) = const, x \in \Omega$, звідси маємо $g(x) = 1/\sqrt{|\Omega|}, x \in \Omega$ таким чином маємо протиріччя з двома останніми рівностями (1.24) і теорема доведена.

§ 2 Узагальнені розв'язки задачі Діріхле еліптичних рівнянь в просторі $W_2^1(\Omega)$

[10, стор.91 - 103]

Будемо розглядати лінійне еліптичне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$Lu = div(p(x)gradu) + a(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \qquad (2.1).$$

Головна частина рівняння (2.1) $div(p(x)gradu)$ допускає узагальнення вигляду $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \ p_{i,j}(x) = p_{j,i}(x)$ (2.2).

Для рівняння (2.1) будемо припускати, що $\nu \le p(x) \le \mu, \quad \nu, \mu > 0$ (2.3),

$a_1 \le a(x) \le a_2$ (2.3').

Для головної частини (2.2) умова (2.3) трансформується в умову

$$\nu\xi^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} p_{i,j}\xi_i\xi_j \le \mu\xi^2, \ \xi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad (2.3'').$$

Для рівняння (2.1) будемо розглядати три основні граничні задачі:

з умовами Діріхле $u|_S = \varphi(x)$ (2.4),

Неймана $$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = \varphi(x) \qquad (2.5),$$

або Ньютона $$\left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u\right|_S = \varphi(x) \qquad (2.6).$$

Де $\frac{\partial u}{\partial N} = p(x)\frac{\partial u}{\partial n}$, для головної частини (2.2) $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j}(x)u_{x_j}\cos(n, x_i)$, а n - одинична зовнішня нормаль до поверхні S.

Усі перераховані задачі можуть бути зведені до задач з однорідним граничними умовами, тобто такими умовами, що $\varphi(x) \equiv 0$.

Для цього необхідно записати граничну задачу відносно нової функції $v(x) = u(x) - \Phi(x)$, де функція $\Phi(x)$ задовольняє відповідній граничній умові та належить простору $W_2^1(\Omega)$.

Відносно f та $f_i, i = 1, n$ будемо рахувати, що $\|f\|_{L_2(\Omega)} < \infty \quad \|\boldsymbol{f}\|_{L_2(\Omega)} < \infty$

Розглянемо граничну задачу для рівняння (2.1) з однорідними граничними умовами $$\mathrm{u}|_{\mathrm{S}} = 0 \qquad (2.4').$$

Введемо білінійну форму:

$$L(u,\eta) := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} p(x)u_{x_i}\eta_{x_i} - a(x)u\eta \right)dx = \int_\Omega \left(-f\eta + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \eta_{x_i} \right)dx \qquad (2.7).$$

Рівність (2.7) можна отримати з рівняння (2.1) шляхом множення його на функцію η, інтегрування добутку по області Ω, застосування формули інтегрування за частинами та використанням умови (2.4').

Означення 1 *Функцію $u(x)$ з простору $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ будемо називати узагальненим розв'язком задачі Діріхле (2.1), (2.4'), якщо для кожного елементу $\eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ має місце інтегральна тотожність (2.7).*

Інтегральна тотожність (2.7) має зміст для більш широкого класу функцій ніж

гранична задача (2.1), (2.4'). Цілком зрозуміло, що якщо обрати функцію $\eta(x),\ u(x) \in C^0_\infty(\Omega)$, то шляхом інтегрування за частинами можемо перейти від інтегральної тотожності до диференціального рівняння (2.1).

В той же час інтегральна тотожність (2.7) має зміст для функцій $u, \eta \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$. Таким чином з використанням інтегральної тотожності (2.7) ми розширили поняття розв'язку граничної задачі Діріхле.

Отримаємо для узагальненого розв'язку енергетичну тотожність, яка дозволить нам довести єдиність узагальненого розв'язку задачі Діріхле.

Розглянемо квадратичну форму і запишемо нерівності:

$$L(u,u) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n p(x) u_{x_i}^2 - a(x) u^2 \right) dx \geq \int_\Omega \left(\nu \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 - a_2 u^2 \right) dx = \nu \|u_x\|^2 - a_2 \|u\|^2 \geq \left(\frac{\nu}{C_\Omega^2} - a_2 \right) \|u\|^2 = \delta_1 \|u\|^2, \quad (2.8).$$

$$\delta_1 = \left(\frac{\nu}{C_\Omega^2} - a_2 \right) \quad (2.8')$$

В нерівності (2.8) використані наступні позначення $\|u_x\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x) dx, \quad \|u\|^2 = \int_\Omega u^2(x) dx$. Якщо $\delta_1 > 0$, то з (2.8) можна отримати

$$\nu \|u_x\|^2 \leq L(u,u) + a_2 \|u\|^2 \leq \left(1 + \frac{a_2}{\delta_1} \right) L(u,u) \quad (2.9),$$

або з (2.9) маємо $L(u,u) \geq \delta_2 \|u_x\|^2, \quad \delta_2 = \dfrac{\nu \delta_1}{\delta_1 + a_2}$

(2.10).

Для узагальненого розв'язку u з $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ задачі Діріхле, виходячи з (2.7), нерівності Буняківського та ε-нерівності, можна записати наступну нерівність:

$$L(u,u) = -(f,u)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{f}_i, u_{x_i}\right)_{L_2(\Omega)} \le \|f\|\|u\| + \|\boldsymbol{f}\|\|u_{x_i}\| \le \varepsilon_1\|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|^2 + \varepsilon_2\|u_x\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\|\boldsymbol{f}\|^2 \quad (2.11).$$

Таким чином, маємо з (2.10) та (2.11)

$$\delta_2\|u_x\|^2 \le \|f\|\|u\| + \|\boldsymbol{f}\|\|u_{x_i}\| \le \varepsilon_1\|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|^2 + \varepsilon_2\|u_x\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\|\boldsymbol{f}\|^2 \le (\varepsilon_1 C_\Omega^2 + \varepsilon_2)\|u_x\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\|\boldsymbol{f}\|^2 \quad (2.12).$$

Оберемо в (2.12) $\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{4}$, $\varepsilon_1 = \frac{\delta_2}{4C_\Omega^2}$ Таким чином з (2.12) отримаємо

$$\frac{\delta_2}{2}\|u_x\|^2 \le \frac{C_\Omega^2}{\delta_2}\|f\|^2 + \frac{1}{\delta_2}\|\boldsymbol{f}\|^2 \text{ або } \quad \|u_x\|^2 \le \frac{2}{\delta_2^2}\left(C_\Omega^2\|f\|^2 + \|\boldsymbol{f}\|^2\right) \quad (2.13).$$

Враховуючи, що $\|u_x\|^2$ - еквівалентна нормі $\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$ має місце теорема

Теорема 1 (*єдиності узагальненого розв'язку задачі Діріхле)* Задача Діріхле для рівняння (2.1), з однорідними граничними умовами (2.4) $(\varphi(x) \equiv 0)$ при виконанні умови (2.3), (2.4) може мати лише єдиний розв'язок при виконанні умови $\delta_1 = \left(\frac{\nu}{C_\Omega^2} - a_2\right) > 0$ в класі $W_2^1(\Omega)$.

З оцінки (2.13) випливає, що однорідна гранична задача, коли $\|f\| = 0$, $\|\boldsymbol{f}\| = 0$, має лише тривіальний розв'язок, а це означає, що вихідна задача Діріхле дійсно може мати лише єдиний розв'язок.

Дослідження існування розв'язку граничної задачі Діріхле

В просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ розглянемо скалярний добуток

$$(u,v)_3 = \int_\Omega p(x)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)dx \quad (2.14)$$

Неважко перевірити з врахуванням теореми *про еквівалентність норм у просторі* $W_2^1(\Omega)$, що (2.14) задовольняє усім аксіомам скалярного добутку, який породжує ще одну норму еквівалентну стандартній нормі в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\|u\|_3^2 = (u,u)_3 \qquad (2.14')$$

Враховуючи введену норму, білінійну форму $L(u,\eta)$ можна записати у вигляді:

$$L(u,\eta) := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n p(x) u_{x_i} \eta_{x_i} - a(x) u \eta \right) dx = (u,\eta)_3 + l_u(\eta) = -(f,\eta) + \sum_{i=1}^n (f_i, u_{x_i})$$

(2.15),

де $l_u(\eta) = \int_\Omega -a(x)u(x)\eta(x)dx$ - лінійний неперервний функціонал від η, тобто $|l_u(\eta)| \le a_2 \|u\| \|\eta\| \le C_\Omega^2 a_2 \|u_x\| \|\eta_x\| \le C_3^2 C_\Omega^2 a_2 \|u\|_3 \|\eta\|_3$, C_3 - константа еквівалентності між нормами. Вираз $l_f(\eta) = -(f,\eta) + (f_i, \eta_{x_i}) = -\int_\Omega f(x)\eta(x)dx + \int_\Omega f_i(x)\eta_{x_i}(x)dx$,- лінійний неперервний функціонал, аналогічно $l_u(\eta)$ з використанням нерівності Коші – Буняківського та нерівності еквівалентних норм можна показати обмеженість функціоналу $l_f(\eta)$.

Згідно з теоремою Ріса – Фішира можна записати представлення $l_u(\eta) = (v,\eta)_3$. Остання рівність встановлює взаємооднозначну неперервну відповідність між єдиним елементом u та v, які належать $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, тобто $l_u(\eta) = (v,\eta)_3 = (Au,\eta)_3$, де A - лінійний обмежений оператор з $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ у $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ Лінійність і обмеженість оператора випливає з лінійності і обмеженості лінійного функціоналу $l_u(\eta)$.

Аналогічно, лінійний неперервний функціонал $l_f(\eta) = -(f,\eta) + \sum_{i=1}^n (f_i, u_{x_i})$-, за

теоремою Ріса – Фішира можна записати у вигляді $l_f(\eta) = \left(F, \eta\right)_3$. Де $F \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Таким чином інтегральну тотожність (2.15), яка визначає узагальнений розв'язок задачі Діріхле можна записати для довільного значення $\eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ у вигляді: $(u,\eta)_3 + (Au,\eta)_3 = (F,\eta)_3$ (2.16).

Рівність (2.16) в свою чергу еквівалентна операторному рівнянню в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\quad u + Au = F$ (2.17)

Дослідимо властивості оператора A і покажемо, що цей оператор є цілком неперервним в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, тобто відображає будь – яку обмежену множину елементів в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в компактну множину в цьому просторі.

Розглянемо послідовність $\{v_m\}_{m=1,\infty}$ з рівномірно обмеженими нормами, тобто $\|v_m\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C_0,\ m = 1,2\ldots$, тоді за рахунок обмеженості оператора A послідовність $\{Av_m\}_{m=1,\infty}$ теж рівномірно обмежена, тобто $\|Av_m\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C_0 \|A\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega} = C_1\ ,m = 1,2\ldots$

З теореми Реліха випливає, що з обмеженої в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ послідовності можна обрати збіжну в $L_2(\Omega)$ підпослідовність. Таким чином з $\{v_m\}_{m=1,\infty}$ та $\{Av_m\}_{m=1,\infty}$ можна обрати підпослідовності $\left\{v_{m_k}\right\}_{m_k=1,\infty}$ та $\left\{Av_{m_k}\right\}_{m_k=1,\infty}$, які збігаються в $L_2(\Omega)$.

Розглянемо
$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{A}(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}} - \mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}), \mathrm{A}(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}} - \mathrm{v}_{\mathrm{m_n}})\right)_3 = \mathrm{l}_{(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}} - \mathrm{v}_{\mathrm{m_n}})}(\mathrm{A}(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}} - \mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}))\\ &\le \max(|\mathrm{a}_1|, |\mathrm{a}_2|)\left\|\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}} - \mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}\right\|\left\|\mathrm{A}\left(\mathrm{v}_{\mathrm{m_k}} - \mathrm{v}_{\mathrm{m_n}}\right)\right\| \xrightarrow[\mathrm{k,n}\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

Таким чином послідовність $\left\{Av_{m_k}\right\}_{m_k=1,\infty}$ є фундаментальною в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, а оскільки цей простір є повним, то послідовність $\left\{Av_{m_k}\right\}_{m_k=1,\infty}$ збігається в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким чином оператора A переводить будь – яку обмежену множину елементів в

компактну множину в просторі $\overset{0}{W}{}^{1}_{2}(\Omega)$, а значить є цілком неперервним.

Таким чином для операторного рівняння (2.17) можна застосувати першу теорему Фредгольма з якої випливає наступна теорема.

Теорема 2 *(Про існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле)* Якщо задача Діріхле (2.1), (2.4') може мати не більш одного узагальненого розв'язку з $\overset{0}{W}{}^{1}_{2}(\Omega)$, то вона дійсне має розв'язок в $\overset{0}{W}{}^{1}_{2}(\Omega)$ для будь – яких f, $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega)$.

Дослідження існування розв'язку граничної задачі Діріхле з параметром

Розглянемо більш загальне рівняння з комплексним параметром λ:

$$Lu = div(p(x)gradu) + a(x)u = \lambda u + f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \qquad (2.18)$$

Коефіцієнти рівняння (2.18) як і раніше будемо вважати дійсними, в той же час $u(x)$ вважаємо комплексно значними.

Введемо скалярні добутки

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v}(x)dx \quad (u,v)_{\overset{0}{W}{}^{1}_{2}(\Omega} = \int_{\Omega} \left(u(x)\overline{v}(x) + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\overline{v}_{x_i} \right) dx \qquad (2.19)$$

Узагальнений розв'язок задачі Діріхле (2.18), (2.4') в просторі $\overset{0}{W}{}^{1}_{2}(\Omega)$ визначимо використовуючи тотожність:

$$L(u,\overline{\eta}) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} p(x)u_{x_i}\overline{\eta_{x_i}} - a(x)u\overline{\eta} \right) dx = -\lambda \int_{\Omega} u\overline{\eta}dx + \int_{\Omega} \left(-f\eta + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \eta_{x_i} \right) dx \qquad (2.20)$$

для $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}^{1}_{2}(\Omega)$. Для перетворення (2.20) до операторного рівняння введемо скалярний добуток $(u,v)_3 = \int_{\Omega} p(x) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x)\overline{v}_{x_i}(x)dx$ (2.14').

Цей скалярний добуток так само , як і в дійсному випадку породжує норму

еквівалентну стандартній нормі в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Використовуючи аналогічні міркування з попереднім випадком, прийдемо до наступного співвідношення

$$L(u,\overline{\eta}) = (u,\overline{\eta})_3 + (Au,\overline{\eta})_3 = \lambda\left(Bu,\overline{\eta}\right)_3 + (F,\overline{\eta})_3, \forall\, \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega \qquad (2.21).$$

В цьому співвідношенні усі доданки мають зміст аналогічний попередньому, а $l_u^{(1)}(\eta) = \left(Bu,\overline{\eta}\right)_3 = -\int\limits_{\Omega} u\overline{\eta}dx$ (2.22)

є лінійний неперервний функціонал, який породжує згідно до теореми Ріса – Фішера лінійний обмежений оператор B за формулою (2.22)

Аналогічно попередньому випадку можна довести, що оператори A та B є цілком неперервними операторами. Легко бачити, що в нашому випадку лінійний функціонал в правій частині (2.22) є частинним випадком лінійного неперервного функціоналу $\int\limits_{\Omega} -a(x)u(x)\overline{\eta(x)}dx = l_u(\eta) = \left(Au,\overline{\eta}\right)_3$ при $a \equiv 1$.

Більш того, зауважимо, що оператори A та B є симетричними, а значить і самоспряженими, і крім того оператор B є від'ємним, тобто $\left(Bu,u\right)_3 < 0,\, u \neq 0$ Ці властивості операторів A та B безпосередньо випливають з симетричності лінійних функціоналів $l_u^{(1)}(\eta)$ та $l_u(\eta)$, які визначають відповідні оператори.

З рівняння (2.21) випливає, що має місце операторна рівність

$$u + Au = \lambda Bu + F \qquad (2.23)$$

Запишемо (2.23) у вигляді $u + Au - \lambda_0 Bu = (\lambda - \lambda_0)Bu + F$ (2.23')

Покажемо, що при достатньо великому дійсному λ_0 оператор

$$\left(E - A - \lambda_0 B\right) \equiv D \qquad (2.24)$$

має обернений обмежений оператор. Для цього позначимо $Dv = w$. Згідно до (2.24), остання рівність еквівалентна тотожності (2.21) при $\lambda = \lambda_0$, $u = v$, $f = w,\ f_i = 0$, тобто $\left(Dv,\eta\right)_3 = \left(w,\eta\right)_3$

З цієї тотожності для $\eta = v$ отримаємо наступну нерівність

$$\left(v,w\right)_3 = \left(\left(E - A - \lambda_0 B\right)v,v\right)_3 = L(v,\overline{v}) + \lambda_0 \left\|v\right\|^2 \geq \nu \left\|v_x\right\|^2 + (\lambda_0 - a_2)\left\|v\right\|^2$$

З останньої нерівності випливає, що при $\lambda_0 \geq a_2$, оператор D є додатньо визначеним, є що гарантує наявність обмеженого оберненого оператора D^{-1}.

Таким чином рівність (2.23’) можна записати у вигляді:

$$u = (\lambda - \lambda_0)D^{-1}Bu + D^{-1}F \qquad (2.23'')$$

Оператор $D^{-1}B$, як добуток обмеженого на цілком неперервного операторів є оператор цілком неперервний. Завдяки цьому для операторного рівняння (2.23’’) можна застосувати три теореми Фредгольма.

Лекція 30

[10, стор.107 - 112]

Згідно до ***першої теореми Фредгольма*** маємо, що з єдиності розв'язку рівняння (2.23'') випливає існування розв'язку для довільного вільного члена $F \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega$. Оскільки (2.23'') еквівалентне тотожності (2.21), то перша теорема Фредгольма гарантує існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле (2.18), (2.4') $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ для довільних $\mathrm{f} \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\boldsymbol{f} \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ при виконанні умови єдиності розв'язку.

Зауважимо також, що оскільки оператори A та B є симетричними, то симетричним також буде оператори D^{-1} та $D^{-1}B$.

Друга теорема Фредгольма стверджує, що для однорідного симетричного рівняння $u = \mu D^{-1}Bu,\ \mu = \lambda - \lambda_0$ (2.25)

нетривіальний розв'язок рівняння існує лише для зліченої множини дійсних значень параметра $\{\lambda_k\} = \{\mu_k + \lambda_0\}_{k=1,\infty}$, кожному λ_k відповідає принаймні один нетривіальний розв'язок $\mathrm{v_k}$. Ці значення $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,\infty$ називаються спектральними значеннями причому їх можна занумерувати так, що $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le .....|\lambda_n| \le ....$ Друга теорема Фредгольма стверджує також, що кожне власне (спектральне) значення має скінчену кратність, тобто для кожного значення $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,\infty$ існує лише скінчена кількість лінійно – незалежних розв'язків однорідного рівняння (2.25). Для неоднорідного рівняння (2.23'') у випадку $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,\infty$ порушується єдиність розв'язку.

Третя теорема Фредгольма для неоднорідного рівняння (2.23'') дає необхідні і достатні умови існування розв'язку для випадку, коли $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,\infty$, тобто для спектральних значень параметру λ. А саме , якщо $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,\infty$, то

задача (2.23'') має розв'язок для тих і лише тих значень вільного члена $D^{-1}F$, які ортогональні до усіх розв'язків спряженого (вихідного) однорідного рівняння (2.25), тобто $\left(D^{-1}F, v_{k+j}\right)_3 = 0,\ j = 0, q_k - 1$ (2.26), де q_k - кратність власного числа $\lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_{q_k - 1}$.

Покажемо, що умова (2.26) еквівалентна умові

$$\int_\Omega (-fv_j + \sum_{i=1}^{n} f_i v_{j x_i}) dx = 0,\ j = k, k+1, k+2,\ k + q_k - 1 \qquad (2.27),$$

Дійсно, враховуючи симетричність рівняння (2.25), його можна для $u = v_k$, $\lambda = \lambda_k$ записати у вигляді $v_k = \mu_k BD^{-1}v_k$, $\mu_k = \lambda_k - \lambda_0$. (2.25')

Вводячи функцію $w_k = D^{-1}v_k$, запишемо рівняння (2.25') у вигляді

$Dw_k = \mu_k Bw_k$, $\mu_k = \lambda_k - \lambda_0$, або $w_k = \mu_k D^{-1}Bw_k$, $\mu_k = \lambda_k - \lambda_0$ (2.25'')

Враховуючи, що $BD^{-1} = D^{-1}B$, то рівняння (2.25'') співпадає з (2.25'), тобто $w_k = v_k$, таким чином має місце рівність $\left(D^{-1}F, v_{k+j}\right)_3 = \left(F, D^{-1}v_{k+j}\right)_3 = \left(F, w_{k+j}\right)_3 = \left(F, v_{k+j}\right)_3 = 0,\ j = 0, q_k - 1$.

Теорема 3 (*Про існування узагальненого розв'язку задачі Дірихле з параметром)* Задача Діріхле (2.18), (2.4') має єдиний розв'язок у просторі $W_2^1(\Omega)$ при будь яких $f, \mathbf{f} \in L_2(\Omega)$ для будь-яких дійсних значень параметру λ, окрім не більш ніж зліченої множини $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,....$, які утворюють спектр задачі Дірихле (2.18), (2.4'). Кожне значення λ_k має скінчену кратність і єдиною граничною точкою спектру є $\lambda = \infty$. Для існування розв'язку задачі Дірихле при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1,2,....$ необхідно і достатньо що б виконувалася умова ортогональності (2.27), де v_{k+j}, $j = 0..q_k - 1$ розв'язки однорідної задачі Дірихле при $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_{k+q_k-1}$. Розв'язок у цьому випадку неєдиний і визначається з точністю до загального розв'язку однорідної задачі Дірихле $\sum_{j=0}^{q_k-1} c_j v_{k+j}$, де c_j -

довільні константи.

Узагальнена задача на власні значення Розвинення функцій в ряд по власних функціях симетричного оператора

Розглянемо однорідну задачу Дірихле

$$Lu = div(p(x)gradu) + a(x)u = \lambda u \qquad (2.18'),$$

$$u\big|_S = 0 \qquad (2.4').$$

Узагальненими розв'язками цієї задачі з простору $W_2^1(\Omega)$ є елемент $\mathrm{u} \in \overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$, який задовольняє інтегральній тотожності

$$L(u,\overline{\eta}) := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n p(x) u_{x_i} \overline{\eta_{x_i}} - a(x) u \overline{\eta} \right) dx = -\lambda \int_\Omega u \overline{\eta} dx, \ \forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \qquad (2.28).$$

Для дослідження задачі Дірихле на власні значення введемо скалярний добуток $(u,v)_4 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n p(x) u_{x_i} \overline{\eta_{x_i}} + (\lambda_0 - a(x)) u \overline{\eta} \right) dx$ (2.29).

Для того щоб (2.29) представляв собою скалярний добуток, необхідно обрати $\lambda_0 > 0$ достатньо великим, наприклад таким, щоб $\lambda_0 > a_2$.

Враховуючи введений скалярного добутку, запишемо (2.28) у вигляді:

$$(u,\eta)_4 = (\lambda_0 - \lambda)(u,\eta) \qquad (2.30).$$

Аналогічно (2.22) з використанням теореми Риса – Фішера введемо оператор B за правилом $-\int_\Omega u \eta dx = (Bu,\eta)_4$ (2.31).

Оператор B є цілком неперервним, симетричним та від'ємним.

В результаті (2.30) буде мати вигляд :

$$(u,\eta)_4 = (\lambda - \lambda_0)(Bu,\eta)_4 \qquad (2.30').$$

Враховуючи, що остання рівність повинна виконуватись для усіх $\eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, з (2.30') маємо операторну рівність $u = (\lambda - \lambda_0)Bu$, або

$$Bu = \mu u, \quad \mu = (\lambda - \lambda_0)^{-1} \qquad (2.32).$$

З загальної теорії самоспряжених цілком неперервних операторі випливає, що спектр оператора B є дійсним, від'ємним і усі власні числа μ_k, $k = 1,2,...$ можна занумерувати в порядку спадання їх модулів, з урахуванням кратності. Єдиною точкою накопичення може бути $\mu = 0$. Відповідні власні функції v_k, які задовольняють операторне рівняння $Bv_k = \mu_k v_k$ є дійсні і ортогональними, тобто

$$(v_k, v_l)_4 = 0, \; k \neq l \qquad (2.33).$$

При $\mu = 0$ рівняння (2.32) має лише тривіальний розв'язок. Таким чином власні функції $\{v_k\}$ складають базис в просторі $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$, а враховуючи, що $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ є нескінченновимірний простір, то кількість елементів базису є злічена множина.

Будь який елемент $F \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ розкладається в ряд Фур'є по елементах базису $\{v_k\}$, $k = \overline{1,\infty}$, тобто має місце представлення

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F, v_k)_4}{(v_k, v_k)_4} v_k(x) \qquad (2.34).$$

Ряд (2.34) збігається в нормі простору $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$. Нагадаємо, що збіжність ряду в просторі $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ означає збіжність в $L_2(\Omega)$ самого ряду (2.34), а також рядів отриманих шляхом однократного диференціювання по x_i, $i = 1..n$.

Зауважимо, що крім ортогональності по введеній нормі (2.33), власні функції $\{v_k\}$, $k = \overline{1,\infty}$ також є ортогональними у просторі $L_2(\Omega)$. Дійсно, з (2.30) та (2.32) випливає $\mu_k (v_k, v_l)_4 = (Bv_k, v_l)_4 = -(v_k, v_l) = 0, \; k \neq l$ (2.35)

Для власних функцій $\{v_k\}$, $k = \overline{1,\infty}$ можна обрати нормування так що

$$(v_k, v_l) = \delta_{k,l} = -(\lambda_k - \lambda_0)^{-1} (v_k, v_l)_4 \qquad (2.36)$$

В цьому випадку з урахуванням (2.30') ряд (2.34) можна записати у вигляді:

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(F,v_k)v_k(x) \qquad (2.37)$$

Оскільки $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ складає щільну множину в $L_2(\Omega)$, то $\{v_k\}, k=\overline{1,\infty}$ будучі базисом в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ є також базисом і в просторі $L_2(\Omega)$, а розвинення в ряд (2.37) має місце не тільки для $F\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, але й для $F\in L_2(\Omega)$ при чому ряд (2.37) збігається в нормі $L_2(\Omega)$. Таким чином має місце теорема

Теорема 4 *(Про властивості узагальненої граничної задачі на власні значення для еліптичного оператора)* Спектральна задача (2.18'), (2.4') при виконанні обмежень (2.2), (2.3) в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ має злічену множину власних чисел λ_k та власних функцій v_k $k=1,2....$ Усі власні числа за винятком декількох перших від'ємні і $\lambda_k\to-\infty, k\to\infty$. Власні функції v_k утворюють базис в $L_2(\Omega)$ та $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормований в $L_2(\Omega)$ і ортогональний в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ по скалярному добутку (2.29). Будь – який елемент $F\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ можна розкласти в ряд Фур'є по системі власних функцій $\{v_k\}_{k=1..\infty}$, який збігається по нормі простору $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

§3 *Узагальнені розв'язки другої та третьої граничних задач*

[10, стор.112 - 116]

Будемо вивчати граничну задачу:

$$Lu=div(p(x)gradu)+a(x)u=\lambda u+f(x),\ x\in\Omega \qquad (3.1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma(x)u\right|_S=0 \qquad (3.2).$$

З обмеженнями (2.3), (2.4) та додатковою умовою на функцію $\sigma=\sigma(x)\big|_{x\in S}$

$|\sigma(x)| \le \mu_3$ (3.3).

При дослідженні граничної задачі (3.1), (3.2) ми будемо користуватися деякими допоміжними результатами.

Сліди функцій класу $W_2^k(\Omega)$

Як випливає зі способу побудови простору функцій $W_2^k(\Omega)$, цей простір утворений шляхом поповнення простору $C^\infty(\overline{\Omega})$ по нормі $\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega (D^\alpha u(x))^2 dx$. Кожна функція $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ має значення на границі самої функції та усіх своїх похідних, тобто існує неперервна на границі S функція $u_S(x) \equiv u(x)\big|_{x\in S}$ та функції $u_S^{(\alpha)}(x) = D^\alpha u(x)\big|_{x\in S}, |\alpha| \le k$. Оскільки $u_S(x) \in C(S)$ - неперервна функція на S, то $u_S \in L_2(S)$. Функцію $u_S \in L_2(S)$ будемо називати слідом функції $u \in C^\infty(\Omega)$ на поверхні S.

Наша задача розповсюдити концепцію слідів для довільних функцій з $W_2^k(\Omega)$ на поверхні S як многовид розмірності $n-1$ Оскільки $W_2^k(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$, достатньо визначити поняття сліду для функцій $W_2^1(\Omega)$. Розглянемо для цього допоміжну нерівність.

Нехай S - поверхня класу C^1, яка лежить в $\overline{\Omega}$, а S_1 її простий кусок який однозначно проектується на частину D площини $x_n = 0$, і має рівняння $x_n = \varphi(x_1,...x_{n-1}) \in C^1(D)$. Оскільки область Ω обмежена, то можна рахувати, що вона розташована у кубі $\{0 < x_i < a, i = 1,...n\}$. Розглянемо функцію $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і покладемо її рівною нулю поза межами $\overline{\Omega}$. Згідно формули Ньютона – Лейбніца маємо $u(x)\big|_{S_1} = u(x_1,...x_{n-1},\varphi(x_1,...x_{n-1})) = \int_0^{\varphi(x_1,...,x_{n-1})} \frac{\partial u(x_1,...,x_{n-1},\xi)}{\partial \xi} d\xi$. Використовуючи нерівність Коші–Буняківського отримаємо:

$$\left|u_{S_1}\right|^2 \le \varphi(x_1,...,x_{n-1}) \int\limits_0^{\varphi(x_1,...,x_{n-1})} \left|\frac{\partial u(x_1,...,x_{n-1},\xi)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi \le a\int\limits_0^a \left|\frac{\partial u(x_1,...,x_{n-1},\xi)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi .$$

Помноживши цю рівність на $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+...+\varphi_{x_{n-1}}^2}$ та інтегруючи по D отримаємо нерівність $\int\limits_{S_1} \left|u_{S_1}(x)\right|^2 dS = \|u\|_{L_2(S_1)}^2 \le C^2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2$ з постійною C, яка не залежить від функції u. Оскільки поверхню S можна покрити скінченим числом простих кусків, то підсумовуючи попередні нерівності по усіх кусках поверхні S отримаємо нерівність $\|u\|_{L_2(S)} \le C\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ (3.4).

Нерівність (3.4) має місце для усіх функцій з класу $C^\infty(\overline{\Omega})$. Нехай тепер $u \in W_2^1(\Omega)$, тоді існує фундаментальна послідовність $\{u_n(x)\} \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ n=1,...\infty$,така, що збігається до функції u в нормі $W_2^1(\Omega)$. Для цієї послідовності має місце нерівність $\|u_p - u_q\|_{L_2(S)} \le C\|u_p - u_q\|_{W_2^1(\Omega)}$ (3.5).

Нерівність (3.5) означає, що послідовність слідів $u_S^{(n)}(x)$ буде фундаментальною в $L_2(S)$.

Оскільки простір $L_2(S)$ є повним, то існує функція $u_S \in L_2(S)$, до якої збігається послідовність слідів $u_S^{(n)}(x)$ по нормі $L_2(S)$. Таким чином функцію $u_S \in L_2(S)$ будемо називати слідом функції $u \in W_2^1(\Omega)$ на поверхні S.

Наші дослідження можна сформулювати у вигляді теореми

Теорема 1 *(Про існування сліду функцій з $W_2^1(\Omega)$)* Нехай Ω область з границею Ліпшица, тоді існує єдиний обмежений оператор T, який відображає простір $W_2^1(\Omega)$ у простір $L_2(S)$, тобто $Tu(x) = u_S(x)$ і при цьому має місце нерівність (3.4).

Оскільки оператор T є обмеженим, а значить неперервним, то близьким в $W_2^1(\Omega)$ функціям відповідають близькі сліди.

Теорема 2 *(Про компактність вкладення $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$).* Якщо Ω обмежена

область з кусково - ліпшецевой границею S, то будь – яка обмежена в $W_2^1(\Omega)$ множина функцій є компактною в $L_2(S)$.

Компактність вкладення простору $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$ означає, що з будь – якої множини $M \subset W_2^1(\Omega)$, такої, що $\forall u \in M$, $\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C$ можна вибрати збіжну в нормі $L_2(S)$ підпослідовність.

Теорема 3 (*Нерівність Фрідріхса)* Нехай Ω - область з границею Ліпшица, тоді існує така константа $C_1 > 0$, яка залежить лише від області Ω, що для кожної $u \subset W_2^1(\Omega)$ має місце нерівність

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le C_1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_S u^2(x) dS \right\} \qquad (3.6).$$

Нерівність (3.6) випливає з теореми ***про еквівалентність норм у просторі*** $W_2^1(\Omega)$ лекції 29.

Дослідження узагальнених розв'язків другої та третьої задачі

Визначення узагальненого розв'язку ведемо за допомогою інтегральної тотожності, для цього помножимо рівняння (3.1) на η, проінтегруємо по області Ω, застосуємо формулу інтегрування за частинами і граничну умову (3.2). В результаті цих перетворень отримаємо інтегральну тотожність:

$$\int_{\Omega} [p(x) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \eta_{x_i} - (a(x) - \lambda) u \eta] dx + \int_S \sigma(x) u \eta dS = -\int_{\Omega} f(x) \eta dx \qquad (3.7)$$

Співвідношення (3.6) має зміст для будь – яких $u, \eta \in W_2^1(\Omega)$, оскільки функції цього класу мають узагальнені похідні з $L_2(\Omega)$ та сліди з $L_2(S)$. Таким чином усі інтеграли в (3.6) існують і є обмеженими.

Для випадку, коли функція $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ та коефіцієнти рівняння достатньо гладкі, то з інтегральної тотожністі (3.7), шляхом обернених

перетворень можна отримати граничну задачу (3.1), (3.2). Тобто, використання інтегральної тотожності розширяє поняття розв'язку для другої та третьої граничних задач.

Означення Будь – який елемент $u \in W_2^1(\Omega)$ будемо називати узагальненим розв'язком граничної задачі (3.1), (3.2), якщо він задовольняє інтегральній тотожності (3.7) для $\forall \eta \in W_2^1(\Omega)$.

Для дослідження узагальненого розв'язку введемо скалярний добуток

$$(u,v)_5 = \int_\Omega [p(x)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\eta_{x_i} + u\eta]dx \qquad (3.8).$$

Скалярний добуток (3.7) породжує норму в просторі $W_2^1(\Omega)$ еквівалентну стандартній нормі.

Інтегральну тотожність (3.7) у цьому випадку можна записати у вигляді:

$$(u,\eta)_5 - \int_\Omega [(a(x)+1)u\eta]dx + \lambda\int_\Omega u\eta dx + \int_S \sigma(x)u\eta dS = -\int_\Omega f(x)\eta dx \qquad (3.9).$$

Усі інтеграли в (3.9) представляють собою лінійні неперервні функціонали від η, введемо для них відповідні позначення:

$$-\int_\Omega [(a(x)+1)u\eta]dx = l_u^1(\eta), \qquad -\int_\Omega u\eta dx = l_u^2(\eta),$$

$$\int_S \sigma(x)u\eta dS = l_u^3(\eta), \qquad \int_\Omega f(x)\eta dx = l_f^4(\eta).$$

Лінійність кожного функціоналу є очевидною і випливає з вигляду кожного функціоналу. Неперервність (обмеженість) функціоналів l_u^1, l_u^2, l_f^4 випливає безпосередньо з нерівності Коші Буняківського та вигляду норми (3.8).

Покажемо обмеженість лінійного функціоналу $l_u^3(\eta)$, дійсно:

$$\left|l_u^3(\eta)\right| = \left|\int_S \sigma(x)u\eta dS\right| \le \mu_3 \|u\|_{L_2(S)} \|\eta\|_{L_2(S)} \le$$
$$\le \mu_3 C^2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|\eta\|_{W_2^1(\Omega)} \le \mu_3 C^2 C_2^2 \|u\|_5 \|\eta\|_5 \qquad (3.10).$$

Де C константа з оцінки (3.4), а C_2 - константа еквівалентності норм.

Враховуючи лінійність та неперервність функціоналів, згідно до теореми Ріса – Фішира, кожний функціонал може бути представлений у вигляді:

$$-\int_{\Omega}[(a(x)+1)u\eta]dx=(Au,\eta)_5 \qquad -\int_{\Omega}u\eta dx=(Bu,\eta)_5$$

$$\int_{S}\sigma(x)u\eta dS=(Cu,\eta)_5 \qquad -\int_{\Omega}f(x)\eta dx=(F,\eta)_5 \qquad (3.11)$$

Оператори, що фігурують у формулах (3.10) є лінійними, обмеженими та цілком неперервними. Цілковита неперервність операторів A,B тепер буде випливати з теореми Релліха.

Покажемо цілковиту неперервність оператора C.

Нехай $\{w_m\}$ - деяка нескінчена множина елементів , яка обмежена в $W_2^1(\Omega)$, тобто $\|w_k\|_{W_2^1(\Omega)}\le C_3,\ \forall w_k$, оскільки C - обмежений оператор, то обмеженою в $W_2^1(\Omega)$ буде також і множина елементів $\{Cw_m\}$, тобто $\|Cw_k\|_{W_2^1(\Omega)}\le C_3\|C\|\ \ \forall w_k$. З компактності вкладення простору $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(S)$ випливає, що з будь – яких обмежених в $W_2^1(\Omega)$ послідовностей $\{w_m\}$ та $\{Cw_m\}$ можна виділити підпослідовності, сліди яких збігаються в $L_2(S)$ (позначимо їх тими же символами).

Покажемо фундаментальність послідовності $\{Cw_m\}$.

Дійсно:
$$(Cw_m-Cw_k,Cw_m-Cw_k)_5=\int_S\sigma(x)(w_m-w_k)C(w_m-w_k)dS\le$$
$$\mu_3\|w_m-w_k\|_{L_2(S)}\|C(w_m-w_k)\|_{L_2(S)}\xrightarrow[k,m\to\infty]{}0$$

Права частина нерівності прямує до нуля в силу повноти простору $L_2(S)$.

Враховуючи усе викладене, рівність (3.8) можна записати у вигляді:

$$(u,\eta)_5+(Au,\eta)_5-\lambda(Bu,\eta)_5+(Cu,\eta)_5=(f,\eta)_5 \qquad (3.12).$$

Або враховуючи, що (3.11) повинна виконуватись для будь – якого елементу $\eta\in W_2^1(\Omega)$, можна записати операторне рівняння

$$u + Au - \lambda Bu + Cu = F \qquad (3.13).$$

Перепишемо рівняння (3.13) у вигляді :

$$(E + A + C - \lambda_0 B)u = (\lambda - \lambda_0)Bu + F \qquad (3.14)$$

Позначимо $E + A + C - \lambda_0 B = D$. Враховуючи, що оператор B симетричний від'ємнозначений оператор, то обираючи λ_0 достатньо великим додатнім числом можна показати, що оператор D має обмежений обернений оператор D^{-1}. Таким чином можемо записати рівняння (3.14) у вигляді:

$$u = (\lambda - \lambda_0)D^{-1}Bu + D^{-1}F \qquad (3.14').$$

Оператор $D^{-1}B$ як добуток цілком неперервного і обмеженого оператора є оператором цілком неперервним і симетричним. Таким чином для операторного рівняння (3.14') можна застосувати три теореми Фредгольма, які визначають умови існування і єдиність розв'язку. Міркування по застосуванню теорем Фредгольма повністю повторюють ті міркування, що наведені для задачі Дірихле, таким чином має місце теорема.

Теорема 4 *(Про існування узагальненого розв'язку другої та третьої граничної задачі)* Друга і третя граничні задачі (3.1), (3.2) мають єдиний розв'язок в $W_2^1(\Omega)$ для будь – якого вільного члена $f \in L_2(\Omega)$ та для усіх дійсних значень параметру λ окрім не більш ніж зліченої множини дійсних значень $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \infty$, які називаються спектром граничної задачі (3.1), (3.2). Кожне спектральне значення має скінчену кратність, усі власні числа від'ємні за винятком декількох перших і єдиною точкою накопичення власних чисел є $-\infty$. При умові, коли параметр $\lambda = \lambda_k$ розв'язок граничної задачі існує тоді і лише тоді, коли вільний член f ортогональний усім розв'язкам однорідної задачі (3.1'), (3.2') при $\lambda = \lambda_k$, тобто $\int\limits_{\Omega} f(x)v_{k+j}(x)dx = 0,\ j = \overline{0, r_k - 1}$, де r_k - кратність власного числа λ_k. В цьому випадку

розв’язок неєдиний і визначається з точність до лінійної оболонки $\sum_{j=0}^{r_k-1} c_j v_{k+j}$.

Лекція 31

§4 *Узагальнені розв'язки граничних задач для гіперболічного рівняння*

[стор. 310- 325]

Нехай Ω - деяка обмежена область у евклідовому просторі R^n, $x=(x_1,...x_n)$ - точка цього простору. У просторі $R^{n+1}=R^n\times\{-\infty<t<\infty\}$ розглянемо обмежений просторово – часовий циліндр $Z(\Omega,T)=\{x\in\Omega, 0<t<T\}$. Позначимо через $\Gamma(S,T)=\{x\in S, 0<t<T\}$ - бокову поверхню циліндру, а через $D_\tau=\{x\in\Omega, t=\tau\}$ - переріз циліндру $Z(\Omega,T)$ площиною $t=\tau$.

У циліндрі $Z(\Omega,T)$ при $T>0$ розглянемо гіперболічне рівняння:

$$\Theta u\equiv u_{tt}-div(p(x)gradu)+q(x)u=f(x,t) \qquad (4.1),$$

де $p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ q(x)\in C(\overline{\Omega}),\ p(x)\geq p_0=const>0, q(x)\geq 0$.

Означення 1 *Функція* $u(x,t)\in C^2(Z(\Omega,T))\cap C^1(\overline{Z(\Omega,T)}\cup\overline{D_0})$, *яка задовольняє у* $Z(\Omega,T)$ *рівняння (4.1), на* D_0 *початковим умовам:*

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (4.2)$$

$$u_t\big|_{t=0}=\psi(x) \qquad (4.3),$$

на $\Gamma(S,T)$ *одній з граничних умов*

$$u\big|_{\Gamma(S,T)}=\chi(x,t) \qquad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Bigg|_{\Gamma(S,T)}=\chi(x,t) \qquad (4.5),$$

де $\sigma\in C(\Gamma(S,t))$ *класичним розв'язком першої при умові (4.4) або третьої при умові (4.5) граничної задачі для хвильового рівняння (4.1).*

Якщо $\sigma \equiv 0,\ x \in \Gamma(S,T)$, то третя гранична задача називається другою граничною задачею.

В подальшому будемо розглядати граничні задачі для однорідних граничних умов

$$u\big|_{\Gamma(S,T)} = 0 \tag{4.4'}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Bigg|_{\Gamma(S,T)} = 0 \tag{4.5'}$$

Також будемо припускати, що $\sigma = \sigma(x) \geq 0,\ x \in \Gamma(S,T)$, $f(x,t) \in L_2(Z(S,T))$.

Єдиність узагальненого розв'язку

Нехай $u(x,t)$ є розв'язок однієї з граничних задач (4.1)-(4.3), (4.4') або (4.1)-(4.3), (4.5'). Виберемо довільне $\delta,\ 0 < \delta < T$. Помножимо (4.1) на функцію $v(x,t) \in C^1(\overline{Z}(\Omega, T-\delta))$, яка задовольняє умові

$$v\big|_{D_{T-\delta}} = 0 \tag{4.6}$$

і проінтегруємо отриману рівність по циліндру $Z(\Omega, T-\delta)$.

Врахуємо наступні співвідношення $u_{tt}v = (u_t v)_t - u_t v_t$

$vdiv(pgradu) = div(pvgradu) - p\left(gradu, gradv\right)$.

Використовуючи формулу Остроградського – Гауса з використанням умов (4.3) та (4.6), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} fvdxdt = \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(\left(u_t v\right)_t - div(pvgrau)\right)dxdt + \\
&\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt = \int\limits_{D_{T-\delta}} u_t vdxdt - \int\limits_{D_0} u_t vdx \\
&- \int\limits_{\Gamma(S,T-\delta)} p\frac{\partial u}{\partial n} vdSdt + \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt = \\
&- \int\limits_{D_0} \psi vdx - \int\limits_{\Gamma(S,T-\delta)} pv\frac{\partial u}{\partial n} dSdt + \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Для третьої (другої) граничної задачі з (4.7) отримаємо співвідношення

$$\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t \right) dxdt + \int\limits_{\Gamma(S,T-\delta)} p\sigma uvdSdt = \int\limits_{D_0} \psi vdx + \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} fvdxdt \qquad (4.8)$$

для усіх $v(x,t) \in C^1(\overline{Z}(\Omega, T-\delta))$ для яких виконане співвідношення (4.6), а таким чином для усіх $v(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega, T-\delta))$.

Якщо функція $u(x,t)$ є розв'язком першої граничної задачі, то додатково будемо припускати, що має місце умова

$$v\big|_{\Gamma(S,T-\delta)} = 0 \qquad (4.9).$$

Тоді з умови (4.7) отримаємо для $u(x,t)$ інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t \right) dxdt = \int\limits_{D_0} \psi vdx + \int\limits_{Z(\Omega,T-\delta)} fvdxdt \qquad (4.10)$$

для усіх $v(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega, T-\delta))$, для яких виконані умови (4.6) та (4.9).

Використаємо інтегральні тотожності (4.8), (4.10) для визначення узагальненого розв'язку граничних задач хвильового рівняння (4.1).

Будемо припускати, що $f(x,t) \in L_2(Z(S,T)), \psi(x) \in L_2(\Omega)$

Означення 2. *Функція $u \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ будемо називати узагальненим розв'язком в $Z(\Omega,T)$ першої граничної задачі (4.1) – (4.3), (4.4'), якщо вона задовольняє початковій умові (4.2), граничній умові (4.4') та тотожності (4.10) при $\delta = 0$ для будь-якої $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ для якої має місце умова (4.4') та умова*

$$v\big|_{D_T} = 0 \qquad (4.11).$$

Означення 3 *Функція $u \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ будемо називати узагальненим розв'язком в $Z(\Omega,T)$ третьої (другої) граничної задачі (4.1) – (4.3), (4.5'), якщо вона задовольняє початковій умові (4.2) та тотожності (4.8) при $\delta = 0$ для будь-якої $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ для якої має місце умова (4.11)..*

Покажемо, що має місце наступна теорема.

Теорема 1 *(єдиності узагальненого розв'язку граничних задач хвильового рівняння)* Гранична задача (4.1)-(4.3), (4.4') та (4.1)-4.3), (4.5') не може мати більш одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Нехай u - узагальнений розв'язок граничної задачі (4.1)-(4.3), (4.4') або граничної задачі (4.1)-(4.3), (4.5') при $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$. Покажемо, що $u=0$ в $Z(\Omega,T)$. Візьмемо довільне $\tau\in(0,T)$ та введемо функцію $v(x,t)=\begin{cases}\int\limits_t^\tau u(x,\theta)d\theta,\ 0<t<\tau\\ 0,\ \tau<t<T\end{cases}$, легко бачити, що функція $v(x,t)$ має у $Z(\Omega,T)$ узагальнені похідні

$$v_t=\begin{cases}-u,\ 0<t<\tau\\ 0,\ \tau<t<T\end{cases}\qquad v_{x_i}=\begin{cases}\int\limits_t^\tau u_{x_i}(x,\theta)d\theta,\ 0<t<\tau\\ 0,\ \tau<t<T\end{cases},$$ тобто $v\in W_2^1(Z(\Omega,T))$ та

$v\big|_{D_T}=0$, якщо u є розв'язком першої граничної задачі, то $v\big|_{\Gamma(S,T)}=0$.

Підставимо функцію v у тотожність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\left(p\left(\nabla u,\nabla v\right)+quv-u_tv_t\right)dxdt=\int\limits_{D_0}\psi vdx+\int\limits_{Z(\Omega,T)}fvdxdt \qquad (4.10'),$$

якщо u є розв'язком першої граничної задачі, або у тотожність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\left(p\left(\nabla u,\nabla v\right)+quv-u_tv_t\right)dxdt+\int\limits_{\Gamma(S,T)}p\sigma uvdSdt=$$
$$=\int\limits_{D_0}\psi vdx+\int\limits_{Z(\Omega,T)}fvdxdt \qquad (4.8'),$$

якщо u є розв'язком третьої (другої) граничної задачі при $T=\tau$.

В результаті для першої граничної задачі отримаємо рівність

$$\int\limits_{Z(\Omega,\tau)}\left(p\left(\nabla u,\int\limits_t^\tau\nabla ud\theta\right)-qv_tv+u_tu\right)dxdt=0 \qquad (4.12)$$

Для випадку третьої (другої) граничної задачі будемо мати рівність

$$\int\limits_{Z(\Omega,\tau)}\left(p\left(\nabla u,\int\limits_t^\tau \nabla d\theta\right)-qv_t v+u_t u\right)dxdt+\int\limits_{\Gamma(S,\tau)} p\sigma u(x,t)\int\limits_t^\tau u(x,\theta)d\theta dSdt=0. \quad (4.13)$$

Використовуючи дворазове інтегрування за частинами по змінній t, можна отримати наступні рівності: $\int\limits_{Z(\Omega,\tau)}\left(p(x)\nabla u,\int\limits_t^\tau \nabla u\right)d\theta dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega p(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x,t)dt\right|^2 dx$

$$\int\limits_{\Gamma(S,\tau)} p\sigma u(x,t)\int\limits_t^\tau u(x,\theta)d\theta dSdt=\frac{1}{2}\int\limits_S p\sigma\left(\int\limits_0^\tau u(x,t)dt\right)^2 dS$$

Крім того мають місце очевидні рівності:

$$\int\limits_{Z(\Omega,\tau)} qvv_t dxdt=-\frac{1}{2}\int\limits_{D_0} qv^2dx \qquad \int\limits_{Z(\Omega,\tau)} uu_t dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} u^2dx$$

Таким чином, якщо функція u розв'язок першої граничної задачі, то має місце інтегральна тотожність

$$\int\limits_\Omega p(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x,t)dt\right|^2 dx+\int\limits_{D_0} qv^2dx+\int\limits_{D_\tau} u^2dx=0 \qquad (4.12')$$

Якщо u розв'язок третьої (другої) граничної задачі, то має місце інтегральна тотожність

$$\int\limits_\Omega p(x)\left|\int\limits_0^\tau \nabla u(x,t)dt\right|^2 dx+\int\limits_{D_0} qv^2dx+\int\limits_{D_\tau} u^2dx+\int\limits_S p\sigma\left(\int\limits_0^\tau u(x,t)dt\right)^2 dS=0 \quad (4.13')$$

Враховуючи, що $p(x)>0, q(x)\ge 0, x\in Z(\Omega,T),\ \sigma(x)\ge 0,\ x\in\Gamma(S,T)$ з (4.12') для першої граничної задачі та (4.13') для третьої (другої) граничної задачі будемо мати, що $\int\limits_{D_\tau} u^2dx=0$, а оскільки τ - довільне число з інтервалу $(0,T)$, $u(x,t)=0,\ (x,t)\in Z(\Omega,T)$. Таким чином теорема доведена.

Оскільки будь – який класичний розв'язок є одночасно узагальненим, то має місце наслідок з теореми 1.

Наслідок 1 Гранична задача (4.1)-(4.3), (4.4') та (4.1)-4.3), (4.5') не може мати

більш одного класичного розв'язку.

Існування узагальненого розв'язку

Для встановлення факту існування узагальненого розв'язку скористаємось методом Фур'є, згідно з яким розв'язок граничної задачі для гіперболічного рівняння будемо шукати у вигляді ряду Фур'є по системі власних функцій відповідної граничної задачі для еліптичного рівняння.

Нехай $v(x)$ - узагальнена власна функція першої граничної задачі :

$$\begin{aligned} &div(p\nabla v) - qv = \lambda v,\ x \in \Omega \\ &v\big|_S = 0 \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Або третьої (другої при $\sigma = 0$) граничної задачі.

$$\begin{aligned} &div(p\nabla v) - qv = \lambda v,\ x \in \Omega \\ &\left.\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma v\right|_S = 0 \end{aligned} \qquad (4.15)$$

Це означає, що для першої граничної задачі $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ і задовольняє інтегральній тотожності $\int\limits_\Omega \left(p\nabla v \nabla \eta + qv\eta \right) dx + \lambda \int\limits_\Omega v\eta dx = 0,\ \forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (4.16).

У випадку третьої (другої) граничної задачі $v \in W_2^1(\Omega)$ і задовольняє інтегральні тотожності

$$\int\limits_\Omega \left(p\nabla v \nabla \eta + qv\eta \right) dx + \int\limits_S p\sigma v\eta dS + \lambda \int\limits_\Omega v\eta dx = 0,\ \forall \eta \in W_2^1(\Omega) \qquad (4.17).$$

При цьому число λ є відповідним власним числом задачі.

Як випливає з результатів лекції 30, система власних функцій $v_1(x), v_2(x), \ldots. v_n(x) \ldots.$ є ортонормованим базисом в просторі $L_2(\Omega)$.

Враховуючи обмеження на коефіцієнти рівняння та граничної умови $p(x) > 0, q(x) \geq 0, x \in Z(\Omega, T),\quad \sigma(x) \geq 0,\ x \in \Gamma(S,T)$, для власних чисел будемо мати $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots. \lambda_n \geq ..,$. При цьому кожне власне число буде повторюватись таку

кількість разів, яка його кратність.

Будемо припускати, що $\varphi \in L_2(\Omega),\ \psi \in L_2(\Omega),\ f(x,t) \in L_2(Z(\Omega,T))$. Згідно теореми Фубіні $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ майже для усіх $t \in (0,T)$.

Функції $\varphi(x),\ \psi(x)$ та функцію $f(x,t)$ для майже усіх $t \in (0,T)$ розкладемо у ряди Фур'є по системі власних функцій $v_1(x), v_2(x), \ldots. v_n(x) \ldots.$задачі на власні значення (4.14) для першої граничної задачі або задачі (4.15) для третьої (другої) граничної задачі.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x),\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k v_k(x),\ f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x), \qquad (4.18),$$

де $\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(\Omega)},\ \psi_k = (\psi, v_k)_{L_2(\Omega)},\ f_k(t) = \int\limits_{\Omega} f(x,t) v_k(x) dx$ (4.19).

Згідно нерівності Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \le \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)},\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 \le \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)},$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2(t) \le \int\limits_{\Omega} f^2(x,t) dx$ майже для усіх $t \in (0,T)$ (4.20).

Для початку, в якості вхідних функцій: початкових умов (4.2), (4.3) та вільного члена гіперболічного рівняння (4.1) візьмемо функції $\varphi_k v_k(x),\ \psi_k v_k(x)$ та $f_k(t) v_k(x)$ відповідно.

Розглянемо функцію $u_k(x,t) = U_k(t) v_k(x)$ (4.21)

де $U_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \dfrac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \sin\sqrt{-\lambda_k}\, t + \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau) d\tau$ (4.22)

Шляхом безпосередньої перевірки легко встановити, що функція (4.21) задовольняє майже для усіх $t \in (0,T)$ рівняння

$U_k'' - \lambda_k U_k = f_k(t),\ k = 1, 2, 3 \ldots$ (4.23)

та початкові умови $U_k(0) = \varphi_k,\ U_k'(0) = \psi_k$

Покажемо, що якщо $v_k(x),\ \lambda_k$ - узагальнена власна функція та власне число задачі (4.14), або (4.15), то функція $u_k(x,t)$ є узагальненим розв'язком першої або

третьої граничної задачі для рівняння $u_{tt} - div(p(x)\nabla u) + q(x)u = f_k(t)v_k(x)$ з початковими умовами $u\big|_{t=0} = \varphi_k v_k(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi_k v_k(x)$ (4.24).

Дійсно, функція $u_k(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, задовольняє початковим умовам (4.24) та у випадку першої граничної задачі має задовольняти інтегральній тотожності

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_{kt} v_t \right) dxdt = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt \qquad (4.10')$$

для усіх $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, які задовольняють умовам (4.4'), та (4.6) при $\delta = 0$.

Для третьої (другої) граничної задачі $u_k(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, має задовольняти інтегральній тотожності

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_{kt} v_t \right) dxdt + \int\limits_{\Gamma(S,T)} p\sigma u_k v dSdt = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt \qquad (4.8')$$

Для усіх $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, які задовольняють умові (4.6) при $\delta = 0$.

Покажемо справедливість тотожності (4.10')

Враховуючи справедливість (4.21), (4.22) обчислимо

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(u_{kt} v_t \right) dxdt = \int\limits_{\Omega} v_k(x) \left[\int\limits_0^T U_k^{'}(t) v_t dt \right] dx = \int\limits_{\Omega} v_k(x) \left[-\psi_k v(x,0) - \int\limits_0^T U_k^{''}(t) v dt \right] dx =$$
$$= -\psi_k \int\limits_{\Omega} v_k(x) v(x,0) dx - \lambda_k \int\limits_{Z(\Omega,T)} u_k v dxdt - \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt$$

Обчислимо ліву частину (4.10') та врахуємо останню рівність:

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_{kt} v_t \right) dxdt = \int\limits_0^T U_k(t) dt \int\limits_{\Omega} \left(p(x) \nabla v_k \nabla v + q(x) v_k v + \lambda_k v_k v \right) dx +$$
$$+ \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt$$

Аналогічним чином, у випадку другої та третьої граничних задач обчислимо ліву частину (4.8'), будемо мати:

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_{kt} v_t \right) dxdt = \int\limits_0^T U_k(t) dt \left(\int\limits_\Omega \left(p(x) \nabla v_k \nabla v + q(x) v_k v + \lambda_k v_k v \right) dx + \right.$$

$$\left. \int\limits_S p\sigma v_k v\, dS \right) = \psi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt$$

Якщо в якості початкових функцій в умовах (4.2) та (4.3) та вільного члена рівняння (4.1) узяти часткові суми рядів Фур'є

$\sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x),\ \sum\limits_{k=1}^{N} \psi_k v_k(x),\ \sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t) v_k(x),$ то узагальненим розв'язком відповідної граничної задачі буде функція $S_N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$, яка задовольняє інтегральній тотожності (4.10') для першої граничної задачі, або (4.8') для третьої (другої) граничної задачі.

При певних припущеннях можна очікувати, що розв'язок граничних задач (4.1)-(4.3), (4.4') та (4.1)-(4.3), (4.5') можна представити у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) v_k(x) \qquad (4.24)$$

Теорема 2 *(про існування розв'язку змішаної граничної задачі для хвильового рівняння)* Нехай $f \in L_2\left(Z(\Omega,T)\right)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, а функція $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ у випадку першої граничної задачі (4.1) - (4.3), (4.4') або $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ у випадку третьої (другої) граничної задачі (4.1)-(4.3), (4.5'). Тоді узагальнений розв'язок $u(x,t)$ відповідної граничної задачі існує і зображується збіжним у просторі $W_2^1(\Omega)$ рядом (4.24). При цьому має місце нерівність $\|u\|_{W_2^1(Z(\Omega,T))} \le C\left(\|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Z(\Omega,T))} \right)$ (4.25), в якому додатна константа C не залежить від φ, ψ, f.

Доведення З рівності (4.22) випливає, що для $t \in [0,T]$ має місце нерівність

$$\left|U_k(t)\right| \le \left|\varphi_k\right| + \left|\psi_k\right|\left|\lambda_k\right|^{-0.5} + \left|\lambda_k\right|^{-0.5}\int_0^T \left|f_k(t)\right|dt,\ k \ge 1.$$

Після піднесення до квадрату, застосування нерівності між середнім геометричним та середнім квадратичним та нерівності Коші - Буняківського отримаємо:

$$\begin{aligned} U_k^2(t) &\le 3\varphi_k^2 + 3\psi_k^2\left|\lambda_k\right|^{-1} + 3\left|\lambda_k\right|^{-1}\left(\int_0^T \left|f_k\right|dt\right)^2 \le \\ &\le C(T)\left(\varphi_k^2 + \psi_k^2\left|\lambda_k\right|^{-1} + \left|\lambda_k\right|^{-1}\int_0^T f_k^2 dt\right),\ k \ge 1 \end{aligned} \qquad (4.26)$$

З (4.22) для похідної $U_k^{'}(t)$ отримаємо наступні нерівності:

$$\left|U_k^{'}(t)\right|^2 \le C(T)\left(\varphi_k^2\left|\lambda_k\right| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)dt\right) \qquad (4.27).$$

Враховуючи, що $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ для першої граничної задачі та $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ для третьої (другої) граничної задачі, то з теореми про розвинення функцій у ряд Фур'є за системою власних функцій граничної задачі еліптичного оператора з використанням нерівності Бесселя можемо отримати

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\left|\lambda_k\right| \le C_1\left\|\varphi\right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \qquad (4.28).$$

Враховуючи, що функція $U_k(t)$ неперервно-диференційована на $\left[0,T\right]$, частинна сума ряду (4.24) $S_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)v_k(x)$ належить простору $\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)$ для першої граничної задачі, або простору $W_2^1(D_t)$ для третьої (другої) граничної задачі.

При дослідженні граничної задачі (4.1) - (4.3), (4.4') у просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)$ будемо користуватися скалярним добутком $\int_{D_t}\left(p\nabla u\nabla v + quv\right)dx$, а при дослідженні граничної задачі (4.1) - (4.3), (4.5') скалярним добутком

$$\int_{D_t} \left(p\nabla u \nabla v + quv \right) dx + \int_{\Gamma_t} p\sigma uv dS .$$

Враховуючи, що система власних функцій першої та третьої (другої) граничних задач $\left\{ \frac{v_k(x)}{\sqrt{-\lambda_k}} \right\}_{k=1,\infty}$ є ортонормованими в обраних скалярних добутках, та використовуючи нерівності (4.26), (4.27), оцінимо

$$\left\| S_N(x,t) - S_M(x,t) \right\|^2_{W_2^1(D_t)} = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k(t) v_k(x) \right\|^2_{W_2^1(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t) \left| \lambda_k \right| \le$$
$$\le C_2 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 \left| \lambda_k \right| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2 dt \right) \tag{4.29}$$

$$\left\| S_N^{'}(x,t) - S_M^{'}(x,t) \right\|^2_{L_2(D_t)} = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k^{'}(t) v_k(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^{'2}(t) \le$$
$$\le C_3 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 \left| \lambda_k \right| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2 dt \right) \tag{4.29'}$$

Додаючи (4.29) та (4.29’) та інтегруючи по $t \in [0,T]$ отримаємо нерівність

$$\left\| S_N(x,t) - S_M(x,t) \right\|^2_{W_2^1(Z(\Omega,T))} \le C_4 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 \left| \lambda_k \right| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2 dt \right) \tag{4.30}$$

Згідно нерівностей (4.20) та (4.28) наступні ряди збігаються $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_k \right| \varphi_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t) dt$. Враховуючи (4.30) отримаємо збіжність ряду (4.24) в нормі простору $W_2^1(Z(\Omega,T))$.

Лекція 32

§5 Узагальнені розв'язки граничних задач для параболічного рівняння

[8 стор. 388 - 401]

Нехай Ω - деяка обмежена область у евклідовому просторі R^n, $x=(x_1,...x_n)$ - точка цього простору. У просторі $R^{n+1}=R^n\times\{-\infty<t<\infty\}$ розглянемо обмежений просторово – часовий циліндр $Z(\Omega,T)=\{x\in\Omega,0<t<T\}$. Позначимо через $\Gamma(S,T)=\{x\in S,0<t<T\}$ - бокову поверхню циліндру, а через $D_\tau=\{x\in\Omega,t=\tau\}$ - переріз циліндру $Z(\Omega,T)$ площиною $t=\tau$.

У циліндрі $Z(\Omega,T)$ при $T>0$ розглянемо параболічне рівняння

$$Lu\equiv u_t-div(p(x)\nabla u)+q(x)u=f(x,t) \qquad (5.1),$$

де $p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ q(x)\in C(\overline{\Omega}),\ p(x)\geq p_0=const>0, q(x)\geq 0$.

Означення 1 Функція $u(x,t)\in C^{2,1}(Z(\Omega,T))\cap C^1(\overline{Z(\Omega,T)}\cup\overline{D_0})$, яка задовольняє у $Z(\Omega,T)$ рівняння (5.1), на D_0 початковій умові

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (5.2),$$

на $\Gamma(S,T)$ одній з граничних умов: $$u\big|_{\Gamma(S,T)}=\chi(x,t) \qquad (5.3),$$

або $$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Bigg|_{\Gamma(S,T)}=\chi(x,t) \qquad (5.4),$$

де $\sigma\in C(\Gamma(S,t))$, називається класичним розв'язком першої при умові (5.3) або третьої (другої) при умові (5.4) граничної задачі для параболічного рівняння (5.1).

Якщо $\sigma\equiv 0,\ x\in\Gamma(S,T)$, то третя гранична задача називається другою граничною задачею.

В подальшому будемо розглядати граничні задачі для однорідних

граничних умов

$$u\big|_{\Gamma(S,T)} = 0 \qquad (5.3')$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Bigg|_{\Gamma(S,T)} = 0 \qquad (5.4')$$

Також будемо припускати, що $\sigma = \sigma(x) \geq 0,\ x \in \Gamma(S,T)$, $f(x,t) \in L_2(Z(S,T))$.

Єдиність узагальненого розв'язку

Нехай $u(x,t)$ є класичним розв'язок однієї з граничних задач (5.1), (5.2), (5.3') або (5.1), (5.2), (5.4'). Виберемо довільне $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < T$ та просторово-часовий циліндр $Z(\Omega,\varepsilon,\tau) = \{x \in \Omega,\ \varepsilon < t < \tau\}$ Помножимо (5.1) на функцію $v(x,t) \in C^1(\overline{Z}(\Omega,T))$, яка задовольняє умові

$$v\big|_{D_T} = 0 \qquad (5.5),$$

проінтегруємо отриману рівність по циліндру $Z(\Omega,\varepsilon,\tau)$, де - $\tau \in (0,T)$.

Використовуючи формулу Остроградського – Гауса та умову (5.4'), отримаємо для третьої (другої) граничної задачі інтегральне співвідношення:

$$\int\limits_{Z(\Omega,\varepsilon,\tau)} \left(u_t - div(p\nabla u) + qu\right) v dxdt = \int\limits_{Z(\Omega,\varepsilon,\tau)} \left(p\left(\nabla u, \nabla v\right) + quv - uv_t\right) dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma(S,\varepsilon,\tau)} p\frac{\partial u}{\partial n} v dSdt + \int\limits_{D_\tau} uvdx = \int\limits_{D_\varepsilon} uvdx + \int\limits_{Z(\Omega,\varepsilon,\tau)} fvdxdt \qquad (5.6)$$

Для першої граничної задачі з (5.3') отримаємо інтегральне співвідношення:

$$\int\limits_{Z(\Omega,\varepsilon,\tau)} \left(u_t - div(p\nabla u) + qu\right) v dxdt = \int\limits_{Z(\Omega,\varepsilon,\tau)} \left(p\left(\nabla u, \nabla v\right) + quv - uv_t\right) dxdt +$$
$$+ \int\limits_{D_\tau} uvdx = \int\limits_{D_\varepsilon} uvdx + \int\limits_{Z(\Omega,\varepsilon,\tau)} fvdxdt \qquad (5.7),$$

які мають місце для усіх $v(x,t) \in C^1(\overline{Z}(\Omega,T))$ для яких виконане співвідношення (5.5), а таким чином для усіх $v(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega,T))$.

Якщо функція $u(x,t)$ є розв'язком першої граничної задачі, то додатково

будемо припускати, що має місце умова

$$v\big|_{\Gamma(S,T)} = 0 \qquad (5.8).$$

У співвідношеннях (5.6), (5.7) спрямуємо $\varepsilon \to 0,\ \tau \to T$ в результаті отримаємо інтегральні тотожності :

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u, \nabla v\right) + quv - uv_t \right) dxdt + \int\limits_{\Gamma(S,T)} p\frac{\partial u}{\partial n} vdSdt = \int\limits_{D_0} \varphi vdx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} fvdxdt \qquad (5.6')$$

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u, \nabla v\right) + quv - uv_t \right) dxdt = \int\limits_{D_0} \varphi vdx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} fvdxdt \qquad (5.7')$$

Використаємо інтегральні тотожності (5.6’), (5.7’) для визначення узагальненого розв’язку граничних задач рівняння теплопровідності (5.1).

Будемо припускати, що $f(x,t) \in L_2(Z(\Omega,T)),\ \varphi(x) \in L_2(\Omega)$

Означення 1. Функція $u \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ будемо називати узагальненим розв’язком в $Z(\Omega,T)$ першої граничної задачі (5.1), (5.2), (5.3’), якщо вона задовольняє граничній умові (5.3) та тотожності (5.7’) для будь-якої $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ для якої має місце умова (5.8) та умова $v\big|_{D_T} = 0$ (5.9).

Означення 2 *Функція* $u \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ *будемо називати узагальненим розв’язком в* $Z(\Omega,T)$ *третьої (другої) граничної задачі* (5.1),(5.2), (5.4’)*, якщо вона задовольняє інтегральні тотожності (5.6’) для будь-якої* $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$ для якої має місце умова (5.8) та умова (5.9).

Теорема 1 *(єдиності узагальненого розв’язку граничних задач рівняння теплопровідності)* Перша гранична задача (5.1),(5.2), (5.3’) та третя (друга) гранична задача (5.1),(5.2), (5.4’) не може мати більш одного узагальненого розв’язку.

Доведення. Нехай u - узагальнений розв’язок граничної задачі (5.1),(5.2), (5.3’) або граничної задачі (5.1),(5.2), (5.4’) при $f = 0$, $\varphi = 0$. Покажемо, що $u = 0$ в

$Z(\Omega,T)$. Розглянемо у $Z(\Omega,T)$ функцію $v(x,t)=\int\limits_t^T u(x,\theta)d\theta$, легко бачити, що функція $v(x,t)$ має у $Z(\Omega,T)$ узагальнені похідні $v_t=-u,\ v_{x_i}=\int\limits_t^\tau u_{x_i}(x,\theta)d\theta,\ i=1,2...n$. тобто $v\in W_2^1(Z(\Omega,T))$ та $v\big|_{D_T}=0$, якщо u є розв'язком першої граничної задачі, то $v\big|_{\Gamma(S,T)}=0$.

Підставимо функцію v у тотожність (5.7'), якщо u є розв'язком першої граничної задачі, або у тотожність (4.6'), якщо u є розв'язком третьої (другої) граничної задачі.

В результаті для першої граничної задачі отримаємо рівність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\left(p\left(\nabla u,\int\limits_t^T\nabla u d\theta\right)-qv_tv+u^2\right)dxdt=0 \qquad (5.10)$$

Для випадку третьої (другої) граничної задачі будемо мати рівність

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\left(p\left(\nabla u,\int\limits_t^T\nabla d\theta\right)-qv_tv+u^2\right)dxdt+\int\limits_{\Gamma(S,T)}p\sigma u(x,t)\int\limits_t^T u(x,\theta)d\theta dSdt=0. \quad (5.11)$$

Використовуючи дворазове інтегрування за частинами по змінній t, отримаємо наступні рівності:

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\left(p(x)\nabla u,\int\limits_t^T\nabla u\right)d\theta dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega p(x)\left|\int\limits_0^T\nabla u(x,t)dt\right|^2dx\geq 0$$

$$\int\limits_{\Gamma(S,\tau)}p\sigma u(x,t)\int\limits_t^T u(x,\theta)d\theta dSdt=\frac{1}{2}\int\limits_S p\sigma\left(\int\limits_0^T u(x,t)dt\right)^2dS\geq 0$$

Крім того має місце очевидна нерівність: $\int\limits_{Z(\Omega,T)}qvv_tdxdt=-\frac{1}{2}\int\limits_{D_0}qv^2dx\leq 0$

Таким чином, якщо функція u розв'язок першої граничної задачі, то має місце інтегральна тотожність

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} p(x)\left|\int_0^T \nabla u(x,t)dt\right|^2 dx + \int_{D_0} qv^2 dx\right) + \int_{Z(\Omega,T)} u^2 dxdt = 0 \qquad (5.10').$$

Якщо u розв'язок третьої (другої) граничної задачі, то має місце інтегральна тотожність $\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} p(x)\left|\int_0^T \nabla u(x,t)dt\right|^2 dx + \right.$

$$\left. + \int_{D_0} qv^2 dx + \int_S p\sigma\left(\int_0^T u(x,t)dt\right)^2 dS\right) + \int_{Z(\Omega,T)} u^2 dxdt = 0 \qquad (5.11').$$

Враховуючи, що $p(x) > 0,\ q(x) \geq 0, x \in Z(\Omega,T),\ \sigma(x) \geq 0,\ x \in \Gamma(S,T)$ з (5.10') для першої граничної задачі та (5.11') для третьої (другої) граничної задачі будемо мати, що $\int_{Z(\Omega,T)} u^2 dx \leq 0$, тобто $u(x,t) = 0,\ (x,t) \in Z(\Omega,T)$. Таким чином теорема доведена.

Оскільки будь – який класичний розв'язок є одночасно узагальненим, то має місце наслідок з теореми 1.

Наслідок 1 Перша гранична задача (5.1),(5.2), (5.3') та третя (друга) гранична задача (5.1),(5.2), (5.4')) не може мати більш одного класичного розв'язку.

Існування узагальненого розв'язку

Для доведення факту існування узагальненого розв'язку граничних задач параболічного рівняння скористаємось методом Фур'є. Розв'язок граничної задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є по системі власних функцій відповідної еліптичної граничної задачі.

Нехай $v(x)$ - узагальнена власна функція першої граничної задачі :

$$\begin{cases} div(p\nabla v) - qv = \lambda v,\ x \in \Omega \\ v|_S = 0 \end{cases} \qquad (5.12).$$

Або третьої (другої при $\sigma = 0$) граничної задачі:

$$\begin{cases} div(p\nabla v) - qv = \lambda v,\ x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n} + \sigma v\right|_S = 0 \end{cases} \qquad (5.13).$$

Це означає, що для першої граничної задачі $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ і задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int_\Omega \left(p\nabla v \nabla \eta + qv\eta \right) dx + \lambda \int_\Omega v\eta dx = 0,\ \forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \qquad (5.14).$$

У випадку третьої (другої) граничної задачі $v \in W_2^1(\Omega)$ і задовольняє інтегральні тотожності

$$\int_\Omega \left(p\nabla v \nabla \eta + qv\eta \right) dx + \int_S p\sigma v\eta dS + \lambda \int_\Omega v\eta dx = 0,\ \forall \eta \in W_2^1(\Omega) \qquad (5.15).$$

При цьому число λ є відповідним власним числом задачі.

Як випливає з результатів лекції 30, система власних функцій $v_1(x), v_2(x), ...v_n(x)....$ є ортонормованим базисом в просторі $L_2(\Omega)$.

Враховуючи обмеження на коефіцієнти рівняння та граничної умови $p(x) > 0, q(x) \geq 0, x \in Z(\Omega, T),\ \sigma(x) \geq 0,\ x \in \Gamma(S,T)$, для власних чисел будемо мати $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ....\lambda_n \geq ..,$. при цьому кожне власне число буде повторюватись таку кількість разів, яка його кратність.

Будемо припускати, що $\varphi \in L_2(\Omega),\quad f(x,t) \in L_2(Z(\Omega,T))$. Згідно теореми Фубіні $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ майже для усіх $t \in (0,T)$.

Функції $\varphi(x)$ та функцію $f(x,t)$ для майже усіх $t \in (0,T)$ розкладемо у ряди Фур'є по системі власних функцій $v_1(x), v_2(x), ...v_n(x)....$задачі на власні значення (5.12) для першої граничної задачі або задачі (5.13) для третьої (другої) граничної задачі.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x),\ f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x), \qquad (5.16),$$

де $\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(\Omega)},\quad f_k(t) = \int_\Omega f(x,t) v_k(x) dx \qquad (5.17).$

Згідно нерівності Бесселя маємо $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2 \le \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t) \le \int_{\Omega} f^2(x,t)dx$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T f_k^2(t)dt \le \int_{Z(\Omega,T)} f^2(x,t)dx = \|f\|^2_{L_2(Z(\Omega,T))} \qquad (5.18)$$

майже для усіх $t \in (0,T)$.

Для початку, у якості вхідних функцій, початкових умов (5.2) та вільного члена параболічного рівняння (5.1) візьмемо функції $\varphi_k v_k(x)$ та $f_k(t)v_k(x)$ відповідно.

Розглянемо функцію $u_k(x,t) = U_k(t)v_k(x)$ (5.19),

де $U_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{\lambda_k(t-\tau)}d\tau$ (5.20).

Шляхом безпосередньої перевірки легко встановити, що функція (5.20) задовольняє майже для усіх $t \in (0,T)$ рівняння

$$U_k' - \lambda_k U_k = f_k(t),\ k = 1,2,3... \qquad (5.21)$$

та початковій умови $U_k(0) = \varphi_k$ (5.22).

Покажемо, що якщо $v_k(x),\ \lambda_k$ - узагальнена власна функція та власне число задачі (5.12), або (5.13), то функція $u_k(x,t)$ є узагальненим розв'язком першої або третьої граничної задачі для рівняння $u_t - div(p(x)\nabla u) + q(x)u = f_k(t)v_k(x)$ з початковою умовою $u\big|_{t=0} = \varphi_k v_k(x)$ (5.23).

Дійсно, функція $u_k(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, задовольняє початковій умові (5.23) та у випадку першої граничної задачі задовольняє інтегральній тотожності

$$\int_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + qu_k v - u_k v_t\right)dxdt = \int_{D_0} \varphi_k v_k(x)vdx + \int_{Z(\Omega,T)} f_k(t)v_k(x)vdxdt \quad (5.24)$$

для усіх $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, які задовольняють умовам (5.8), та (5.9).

Для третьої (другої) граничної задачі $u_k(x,t) \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, та задовольняє інтегральній тотожності

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_k v_t \right) dxdt + \int\limits_{\Gamma(S,T)} p\sigma u_k v dSdt =$$
$$\varphi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt \qquad (5.25)$$

для усіх $v \in W_2^1(Z(\Omega,T))$, які задовольняють умовам (5.8).

Покажемо справедливість тотожності (5.24)

Враховуючи справедливість (5.21), (5.22) обчислимо

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(u_k v_t\right) dxdt = \int\limits_{\Omega} v_k(x) \left[\int\limits_0^T U_k(t) v_t dt \right] dx = \int\limits_{\Omega} v_k(x) \left[-\varphi_k v(x,0) - \int\limits_0^T U_k^{'}(t) v dt \right] dx =$$
$$= -\varphi_k \int\limits_{\Omega} v_k(x) v(x,0) dx - \lambda_k \int\limits_{Z(\Omega,T)} U_k v_k v dxdt - \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt \qquad (5.26).$$

Обчислимо ліву частину (5.24) та врахуємо останню рівність:

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(\nabla u_k, \nabla v\right) + q u_k v - u_k v_t \right) dxdt = \int\limits_0^T U_k(t) dt \int\limits_{\Omega} \left(p(x) \nabla v_k \nabla v + q(x) v_k v + \lambda_k v_k v \right) dx +$$
$$+\varphi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt = \varphi_k \int\limits_{D_0} v_k(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} f_k(t) v_k(x) v dxdt$$

Аналогічним чином доводиться рівність (5.25) для випадку другої та третьої граничних задач.

Якщо в якості початкових функцій в умовах (5.2) та вільного члена рівняння (5.1) узяти часткові суми рядів Фур'є $\sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t) v_k(x)$, то узагальненим розв'язком відповідної граничної задачі буде функція $S_N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$, яка задовольняє інтегральній тотожності (5.14) для першої граничної задачі, або (5.15) для третьої (другої) граничної задачі.

При певних припущеннях можна очікувати, що розв'язок граничних задач (5.1)-(5.3') та (5.1)-(5.2), (5.4') можна представити у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) v_k(x) \qquad (5.27).$$

Теорема 2 (*про існування розв'язку змішаної граничної задачі для рівняння*

теплопровідності) Нехай $f \in L_2\left(Z(\Omega,T)\right)$, а функція $\varphi \in L_2(\Omega)$ для першої граничної задачі (5.1)-(5.3'), або $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ для третьої (другої) граничної задачі (5.1)-(5.2), (5.4'), тоді узагальнений розв'язок $u(x,t)$ відповідної граничної задачі існує і зображується збіжним у просторі $W_2^1(\Omega)$ рядом (5.27). При цьому має місце нерівність $\|u\|_{W_2^1(Z(\Omega,T))} \le C\left(\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Z(\Omega,T))}\right)$ (5.28),

в якому додатна константа C не залежить від $\varphi,\ f$.

Доведення З рівності (5.20) випливає, що для $t \in [0,T]$ має місце нерівність

$$|U_k(t)| \le |\varphi_k| e^{\lambda_k t} + \int_0^T |f_k(\tau)| e^{\lambda_k (t-\tau)} d\tau \le |\varphi_k| e^{\lambda_k t} + \frac{\|f_k\|_{L_2(0,T)}}{\sqrt{2|\lambda_k|}},\ k \ge 1.$$

Після піднесення до квадрату, застосування нерівності між середнім геометричним та середнім квадратичним та нерівності Коші - Буняківського отримаємо: $U_k^2(t) \le 2\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t} + |\lambda_k|^{-1} \|f_k\|_{L_2(0,T)}^2$ (5.29)

Враховуючи, що $U_k(t)$ неперервно-диференційована на $[0,T]$, частинна сума ряду (5.27) $S_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ належить простору $\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)$ для першої граничної задачі, або простору $W_2^1(D_t)$ для третьої (другої) граничної задачі для кожного $t \in [0,T]$.

При дослідженні першої граничної задачі у просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)$ зручно користуватися скалярним добутком $\int_{D_t} \left(p\nabla u \nabla v + quv\right) dx$, при дослідженні третьої (другої) граничної задачі - скалярним добутком $\int_{D_t} \left(p\nabla u \nabla v + quv\right) dx + \int_{\Gamma_t} p\sigma uv dS$ (*дивись (1.21) лекції 29*).

Враховуючи, що система власних функцій першої та третьої (другої)

граничних задач є ортонормованими в обраних скалярних добутках та нерівність (5.29), оцінимо

$$\left\|S_N(x,t)-S_M(x,t)\right\|^2_{W_2^1(D_t)}=\left\|\sum_{k=M+1}^{N}U_k(t)v_k(x)\right\|^2_{W_2^1(D_t)}=\sum_{k=M+1}^{N}U_k^2(t)\left|\lambda_k\right|\le$$
$$\le\sum_{k=M+1}^{N}\left(2e^{\lambda_k t}\varphi_k^2\left|\lambda_k\right|+\int_0^T f_k^2dt\right) \qquad (5.30)$$

Аналогічно (5.30) можна отримати нерівність

$$\left\|S_N(x,t)\right\|^2_{W_2^1(D_t)}=\left\|\sum_{k=1}^{N}U_k(t)v_k(x)\right\|^2_{W_2^1(D_t)}=\sum_{k=1}^{N}U_k^2(t)\left|\lambda_k\right|\le\sum_{k=1}^{N}\left(2e^{\lambda_k t}\varphi_k^2\left|\lambda_k\right|+\int_0^T f_k^2dt\right) \qquad (5.31)$$

Проінтегруємо (5.30) та (5.31) по $t\in(0,T)$ в результаті отримаємо нерівності

$$\left\|S_N(x,t)-S_M(x,t)\right\|^2_{W_2^1(Z(\Omega,T))}\le C_1\sum_{k=M+1}^{N}\left(\varphi_k^2+\int_0^T f_k^2(t)\right)$$
$$\left\|S_N(x,t)\right\|^2_{W_2^1(Z(\Omega,T))}\le C_2\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_k^2+\int_0^T f_k^2(t)\right) \qquad (5.32)$$

Згідно нерівностей (5.18), ряд (5.27) збігається в нормі простору $W_2^1(Z(\Omega,T))$ і для розв’язку має місце нерівність (5.28).

Лекція 33

§ 6 Метод Гальоркіна дослідження узагальнених розв'язків

[8, стор. 326 - 331]

Застосування методу Фур'є, для дослідження існування і єдиності узагальненого розв'язку граничних задач для гіперболічного і параболічного рівняння, який використовувався в попередніх лекціях має певні обмеження, зокрема коефіцієнти рівняння не повинні залежити від часу t. Для дослідження більш загальної граничної задачі для рівняння гіперболічного типу можна застосувати метод Гальоркина, який одночасно може бути використаний і для знаходження наближеного розв'язку відповідної граничної задачі.

Розглянемо граничну задачу Діріхле для гіперболічного рівняння:

$$\Theta u \equiv u_{tt} - div(p(x,t)gradu) + q(x,t)u = f(x,t) \qquad (6.1)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \qquad u\big|_{\Gamma(S,T)} = 0 \qquad (6.2)$$

Як і раніше будемо припускати, що $f(x,t) \in L_2(Z(\Omega,T)),\ \psi(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Нехай $v_1(x), v_2(x), \ldots\ldots$ - довільна система функцій з простору $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ така, що задовольняє граничні умові $v_i\big|_S = 0,\ k = 1, 2\ldots$, лінійно незалежна і повна в просторі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тобто лінійний многовид натягнутий на цю систему функцій є усюди щільним в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для скінченого вимірного простору $V_m \in L_2(\Omega)$ натягнутого на систему функцій $v_1(x), v_2(x), \ldots\ldots$ отримаємо задачу, яка буде результатом ортогонального проектування задачі (6.1) – (6.2) на підпростір V_m.

Будемо шукати функцію $w_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) v_k(x)$ (6.3).

$c_k(t),\ k=1,2..$ - невідомі функції.

Зрозуміло, що при підстановці функції $w_m(x,t)$ в рівняння (6.1) для будь – яких функцій $c_k(t),\ k=1,2..$, рівняння не буде виконуватись, тобто

$$w_{mtt} - div(p(x,t)gradw_m) + q(x,t)w_m - f(x,t) = r_m(x,t) \qquad (6.4),$$

де $r_m(x,t)$ - нев'язка рівняння на елементах многовиду V_m. Згідно до методу Гальоркіна будемо вимагати, щоб нев'язка $r_m(x,t)$ була ортогональна многовиду V_m. Для цього необхідно і достатньо виконання рівностей:

$$\int_\Omega \left(w_{mtt} - div(p(x,t)gradw_m) + q(x,t)w_m - f(x,t)\right)v_k dx = 0,\ k=1,2... \qquad (6.5).$$

Останні рівності зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно $c_k(t),\ k=1,2..$.

$$\sum_{s=1}^{m} c_s''(t)\int_\Omega v_s(x)v_k(x)dx - c_s(t)\int_\Omega \left(div(p(x,t)gradv_s) - q(x,t)v_s\right)v_k dx = \int_\Omega f v_k dx \qquad (6.6).$$

Систему звичайних диференціальних рівня (6.6) з використанням початкових умов граничної задачі доповнимо початковими умовами для невідомих функцій $c_k(t),\ k=1,2..$, а саме спроектуємо початкові умови на многовид V_m: $\quad w_m(x,0) = \sum_{k=1}^{m} c_k(0)v_k(x) = \varphi^{(m)}(x),\ w_m'(x,0) = \sum_{k=1}^{m} c_k'(0)v_k = \psi^{(m)}(x),$

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{m} c_s(0)\int_\Omega v_s(x)v_k(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)v_k(x)dx \\ &\sum_{s=1}^{m} c_s'(0)\int_\Omega v_s(x)v_k(x)dx = \int_\Omega \psi(x)v_k(x)dx \end{aligned} \qquad (6.7)$$

Використовуючи позначення скалярних добутків, рівності (6.6) та (6.7) можна записати у вигляді:

$$\sum_{s=1}^{m} c_s''(t)\left(v_k, v_s\right)_{L_2(\Omega)} + c_s(t)\left(v_k, v_s\right)_{W_2^1(\Omega)} = \left(v_k, f\right)_{L_2(\Omega)},\ k=1,2.. \qquad (6.6')$$

$$\sum_{s=1}^{m} c_s(0)\left(v_k, v_s\right)_{L_2(\Omega)} = \left(v_k, \varphi\right)_{L_2(\Omega)} = \varphi_k$$
$$\sum_{s=1}^{m} c_s^{'}(0)\left(v_k, v_s\right)_{L_2(\Omega)} = \left(v_k, \psi\right)_{L_2(\Omega)} = \psi_k,\ k = 1, 2... \qquad (6.7')$$

(6.6), (6.7) або (6.6’), (6.7’) – є задача Коші для неоднорідної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Зрозуміло, що для випадку, коли коефіцієнти диференціального рівняння не залежать від часу, коефіцієнти диференціальної системи (6.6) будуть постійними.

Якщо систему функцій $v_1(x), v_2(x), ...$ обрати ортонормованою в просторі $L_2\left(\Omega\right)$, тобто $\left(v_k, v_m\right)_{L_2(\Omega)} = \delta_{k,m}$, то задача Коші (6.6’), (6.7’) буде мати вигляд:

$$c_k^{''}(t) + \sum_{s=1}^{m} c_s(t)\left(v_k, v_s\right)_{W_2^1(\Omega)} = \left(v_k, f\right)_{L_2(\Omega)},\ k = 1, 2.. \qquad (6.6''),$$

$$c_k(0) = \varphi_k,\quad c_k^{'}(0) = \psi_k,\ k = 1, 2... \qquad (6.7'').$$

Взагалі кажучи зведення задачі Коші (6.6’), (6.7’) до вигляду розв’язаному відносно старших похідних (6.6’’), (6.7’’) можливо і без припущення ортогональності системи функцій $v_1(x), v_2(x), ...$, оскільки матриця $\left(v_k, v_n\right)_{L_2(\Omega)}$, $k = 1..m, n = 1..m$ має відмінний від нуля визначник.

Систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\boldsymbol{\omega}^{'}(t) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{F}(t)\ ,\ \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}^{(0)} \qquad (6.8).$$

Де $\boldsymbol{\omega}\left(t\right) = \left(c_1^{'}(t), ...c_m^{'}(t), c_1(t), ...c_m(t)\right)$, $\boldsymbol{\omega}^{(0)} = \left(\psi_1, ...\psi_m, \varphi_1, ..., \varphi_m\right)$,

$$\mathbf{F}(t) = \left(F_1(t), ...F_m(t), \underbrace{0, ..., 0}_{m}\right),\ \left(F_1(t), ...F_m(t)\right) = \left\|\left(v_k, v_s\right)_{L_2(\Omega)}\right\|^{-1}\left(f_1(t), ..., f_m(t)\right)$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & \left\|\left(v_k, v_s\right)_{L_2(\Omega)}\right\|^{-1}\left\|\left(v_k, v_s\right)_{L_2(\Omega)}\right\|_{W_2^1(\Omega)} \\ \mathbf{E} & 0 \end{Vmatrix} \qquad (6.9)$$

Покажемо, що задача(6.8), (6.9) має єдиний розв'язок, який належить простору $W_2^1(0,T)$. Для цього можна звести задачу Коші (6.8) до інтегрального рівняння Вольтера: $\boldsymbol{\omega}(t)=\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau+\int_0^t \mathbf{F}(\tau)d\tau+\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ (6.10).

Вільний член рівняння (6.10) $\int_0^t \mathbf{F}(\tau)d\tau+\boldsymbol{\omega}^{(0)}\in W_2^1(0,T)$ в припущенні, що $\mathbf{F}\in L_2(0,T)$. Враховуючи приналежність вільного члена $W_2^1(0,T)$, маємо, що він є неперервним на проміжку $[0,T]$. З курсу звичайних диференціальних рівнянь випливає існування неперервного розв'язку інтегрального рівняння (6.10), а з неперервністі $\boldsymbol{\omega}(t)$ на $[0,T]$ випливає приналежність $\boldsymbol{\omega}\in W_2^1(0,T)$.

Таким чином встановлено існування та єдність функцій $w_m(x,t)=\sum_{k=1}^m c_k(t)v_k(x)$ для довільного m, таких, що $w_m\big|_S=0,\ w_m(x,0)=\sum_{s=1}^m \varphi_s v_s,\ w_m^{'}(x,0)=\sum_{s=1}^m \psi_s v_s$

Рівність (6.5) помножимо на $c_k^{'}(t)$, проінтегруємо по $t\in(0,\tau)$ і просумуємо по k від 1 до m. В результаті отримаємо рівність

$$\int_0^t\int_{D_\tau}\left(w_{m\tau\tau}-div(p(x,t)gradw_m)+q(x,t)w_m-f(x,t)\right)w_{m\tau}dxd\tau=0,\ k=1,2... \quad (6.11)$$

Врахуємо, що

$$w_{mtt}w_{mt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}w_{mt}^2\right);\ div(p\nabla w_m)w_{mt}=div(pw_{mt}\nabla w_m)-p\left(\nabla w_m,\nabla w_{mt}\right)=$$

$$div(pw_{mt}\nabla w_m)-p\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\nabla w_m}{2}\right|^2=div(pw_{mt}\nabla w_m)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(p\left|\frac{\nabla w_m}{2}\right|^2\right)+\frac{\partial p}{\partial t}\left|\frac{\nabla w_m}{2}\right|^2;$$

$$qw_{mt}w_m=\frac{\partial}{\partial t}\left(qw_m^2\right)-\frac{\partial q}{\partial t}w_m^2$$

Таким чином з (6.11) отримаємо

$$Y(t)=Y(0)-\int_0^t\int_S pw_{m\tau}\frac{\partial w_m}{\partial n}dSd\tau+\int_0^t\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\left|\frac{\nabla w_m}{2}\right|^2-\frac{\partial q}{\partial t}w_m^2\right)dxd\tau$$

(6.12),

де $Y(t)=\frac{1}{2}\int_{D_t}\left(\left(w_{mt}\right)^2+p\left|\nabla w_m\right|^2+qw_m^2\right)dx$ (6.13).

Зауважимо, що $\int_0^T 2Y(t)dt=\int_0^T\int_{D_t}\left(\left(w_{mt}\right)^2+p\left|\nabla w_m\right|^2+qw_m^2\right)dxdt=\left\|w_m\right\|^2_{W_2^1(Z(\Omega,T))}$

Враховуючи що $w_k\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, вираз $\int_0^t\int_S pw_{m\tau}\frac{\partial w_m}{\partial n}dSd\tau$ обертається в нуль. Таким чином отримаємо:

$$Y(t)=Y(0)+\int_0^t\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\left|\frac{\nabla w_m}{2}\right|^2-\frac{\partial q}{\partial t}w_m^2\right)dxd\tau+\int_0^t\int_{D_\tau}fw_{mt}dxd\tau \qquad (6.12')$$

Використовуючи нерівність Коші – Буняківського отримаємо:

$$\int_0^t\int_{D_\tau}fw_{m\tau}dxd\tau\le\frac{1}{2}\left(\int_0^t\int_{D_\tau}f^2dxd\tau+\int_0^t\int_{D_\tau}\left(w_{m\tau}\right)^2dxd\tau\right)\le\frac{1}{2}\left(\int_0^t\int_{D_\tau}f^2dxd\tau+\int_0^tY(\tau)d\tau\right)$$

Припустимо, що $\left|\frac{\partial p}{\partial t}\right|\le\mu,\ \left|\frac{\partial q}{\partial t}\right|\le\mu$ (6.13).

Тоді $\int_0^t\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial\tau}\left|\frac{\nabla w_m}{2}\right|^2-\frac{\partial q}{\partial\tau}w_m^2\right)dxd\tau\le C\int_0^tY(\tau)d\tau$. Таким чином рівність (6.12) перетворюється в нерівність

$$Y(t)\le Y(0)+C_1\int_0^tY(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{D_\tau}f^2dxd\tau,\ C_1=C+0.5 \qquad (6.14)$$

Лема Якщо невід'ємна, абсолютно інтегрована функція $\phi(t)$ задовольняє майже для усіх $t>0$ нерівність $\frac{d\phi(t)}{dt}\le c\phi(\tau)+\rho(\tau)$, де $c>0$ $\rho(t)$ неспадна функція, то $\phi(t)\le\phi(0)e^{ct}+\frac{e^{ct}-1}{c}\rho(t)$ (6.15)

$$\frac{d\phi(t)}{dt} \le \left[c\phi(0) + \rho(t)\right]e^{ct} \qquad (6.16)$$

Функція $\omega(t) = \int\limits_0^t Y(\tau)d\tau$ задовольняє умовам леми з константою $c = C_1,\ \rho(t) = Y(0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{D_\tau} f^2 dxd\tau$. Таким чином отримаємо оцінку

$$\int\limits_0^t Y(\tau)d\tau \le \frac{e^{C_1 t} - 1}{C_1}\left(Y(0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{D_\tau} f^2 dxd\tau\right) \qquad (6.17).$$

Оберемо в (6.17) $t = T$, отримаємо оцінку

$$\|w_m\|^2_{W_2^1(Z(\Omega,T))} \le \frac{e^{C_1 T} - 1}{C_1}\left(2\left\|\psi^{(m)}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\left\|\varphi^{(m)}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2_{Z(\Omega,T)}}\right) \qquad (6.18).$$

Враховуючи, що $\left\|\psi^{(m)}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\varphi^{(m)}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{W_2^1(\Omega)}$ з (6.18) отримаємо оцінку

$$\|w_m\|^2_{W_2^1(Z(\Omega,T))} \le \frac{e^{C_1 T} - 1}{C_1}\left(2\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\varphi\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2_{Z(\Omega,T)}}\right) \qquad (6.19).$$

Оцінка (6.19) гарантує рівномірну обмеженість множини функцій $\{w_m\}$, $m = 1, 2...$ в нормі $W_2^1\left(Z(\Omega,T)\right)$. З рівномірної обмеженості множини функцій $\{w_m\}$ випливає слабка компактність множини в просторі $W_2^1\left(Z(\Omega,T)\right)$, тобто можна обрати підпослідовність $\left\{w_{m_k}\right\}$, $m_k = 1, 2...$, яка слабко збігається до деякої функції $u \in W_2^1\left(Z(\Omega,T)\right)$. Функція u є розшукуваний узагальнений розв'язок змішаної граничної задачі (6.1), (6.2). Для доведення цього факту достатньо показати, що для довільної $v \in H_1\left(Z(\Omega,T)\right) = \left\{\overset{0}{W}{}_2^1\left(Z(\Omega,T)\right)\right\} \cap \left\{v\big|_{D_T} = 0\right\}$ має місце інтегральна тотожність:

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)} \left(p\left(gradu, gradv\right) + quv - u_t v_t\right)dxdt = \int\limits_{D_0} \psi v dx + \int\limits_{Z(\Omega,T)} fvdxdt \qquad (6.20).$$

Тотожність (6.20) необхідно встановити для будь – якої усюди щільної

множини функцій $M \subset H_1\left(Z(\Omega,T)\right)$. В якості такої множини функцій оберемо лінійні комбінації функцій $\theta_k(t)v_k\left(x\right)$, $k=1,2\ldots$, де $\theta_k(t)\in C\left(\left[0,T\right]\right)$, $\theta(T)=0$.

Покажемо виконання рівності (6.20) для довільної функції $\theta_k(t)v_k\left(x\right)$, $k=1,2\ldots$, а значить для довільної лінійної комбінації таких функцій.

Рівність (6.5) помножимо на $\theta_k(t)$ і про інтегруємо по $t\in\left[0,T\right]$ та використаємо формулу Остроградського – Гауса.

$$\int\limits_{Z(\Omega,T)}\left(p\left(gradw_{m_k},gradv_k\right)\theta_k+qw_{m_k}v_k-w_{m_k t}v_k\theta_k^{'}\right)dxdt=\int\limits_{D_0}\psi v_k dx+\int\limits_{Z(\Omega,T)}fv_k\theta_k dxdt$$

Спрямувавши $m_k\to\infty$, враховуючи слабку збіжність $\left\{w_{m_k}\right\}$, $m_k=1,2\ldots$ отримаємо (6.20) для довільної $v(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k(t)v_k\left(x\right)$.

Покажемо, що множина M є усюди щільною в просторі $H_1\left(Z(\Omega,T)\right)$. Для цього достатньо показати, що будь-яку функцію $\eta(x,t)\in C^2\left(Z(\Omega,T)\right)$, $\eta\big|_{D_T\cup\Gamma(S,T)}=0$, множина цих функцій є усюди щільною в $H_1\left(Z(\Omega,T)\right)$, можна як завгодно точно наблизити функціями з множини M в метриці $W_2^1\left(Z(\Omega,T)\right)$.

Норму в просторі $H_1\left(Z(\Omega,T)\right)$ визначимо $\|f\|_{H_1(Z(\Omega,T))}=\int\limits_{Z(\Omega,T)}\left(f^2+f_t^2+\left|\nabla f\right|^2dxdt\right)^{1/2}$. Множину M можна розглядати як множину лінійних комбінацій функцій $\theta_k(t)v_k^*\left(x\right)$, $k=1,2\ldots$, де $v_k^*\left(x\right)$, $k=1,2\ldots$ ортонормований базис простору $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ з скалярним добутком $\left(f,g\right)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega}=\int\limits_{\Omega}\nabla f(x)\nabla g(x)dx$. Для довільної функції $\eta(x,t)\in C^2\left(Z(\Omega,T)\right)$, $\eta\big|_{D_T\cup\Gamma(S,T)}=0$, $\forall t\in(0,T)$ η,η_t належать $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, їх можна розкласти в ряди Фур'є:

$$\eta(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(t)v_k^*(x),\ \eta_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^{'}(t)v_k^*(x),\ \eta_k(t)=\int_{\Omega}\nabla\eta(x,t)\nabla v_k^*(x)dx \quad (6.21)$$

При цьому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_k^2(t)+\eta_k^{'2}(t)\right)=\int_{\Omega}\left(\left|\nabla\eta(x,t)\right|^2+\left|\nabla\eta_t(x,t)\right|^2\right)dx, t\in[0,T] \quad (6.22).$$

Позначимо через $\eta_N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k(t)v_k^*(x)$ (6.23)

часткову суму ряду (6.21). Легко бачити, що для $t\in[0,T],\ N\geq 1\ \ \eta_t-\eta_{Nt}\in\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)$. З нерівності Пуанкаре – Фрідріхса отримаємо

$\|\eta_t-\eta_{Nt}\|_{L_2(D_t)}\leq C\|\eta_t-\eta_{Nt}\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)}$, $C>0$. Таким чином для усіх $t\in[0,T],\ N\geq 1$

$$\|\eta_t-\eta_{Nt}\|^2_{L_2(D_t)}+\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)}\leq C^2\|\eta_t-\eta_{Nt}\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)}+\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)}=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_k^2(t)+C^2\eta_k^{'2}(t)\right)$$

З (6.22) випливає, що $\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\eta_k^2(t)+C^2\eta_k^{'2}(t)\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$, таким чином

$$\|\eta-\eta_N\|^2_{H_1(Z(\Omega,T))}=\int_0^T\left(\|\eta_t-\eta_{Nt}\|^2_{L_2(D_t)}+\|\eta-\eta_N\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(D_t)}\right)dt\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

Тим самим існування та єдність розв’язку для граничної задачі (6.1), (6.2) доведена.

Теоретичні питання четвертого модуля

1. Лінійні неперервні функціонали, теорема Риса-Фишера, слабка збіжність у гільбертовому просторі.
2. Цілком неперервні оператори, зв’язок між скінчено вимірними та цілком неперервними операторами, теорема про представлення цілком неперервного оператора.
3. Матричне представлення лінійного обмеженого оператора, стискаючий лінійний оператор.
4. Перша теорема Фредгольма для операторного рівняння із цілком неперервним оператором.
5. Друга теорема Фредгольма для операторного рівняння із цілком неперервним оператором.
6. Третя теорема Фредгольма для операторного рівняння із цілком неперервним оператором.
7. Спосіб введення простору $W_2^k(\Omega)$, збіжність в просторі $W_2^k(\Omega)$.

8. Спосіб визначення похідних у просторі $W_2^k(\Omega)$.
9. Нерівність Пуанкаре - Фрідріхса, теорема Релліха.
10. Еквівалентність норм у просторі $W_2^1(\Omega)$ (норма введена через квадратичну форму).
11. Узагальнений розв'язок задачі Дірихле для еліптичного рівняння, теорема єдиничності узагальненого розв'язку задачі Дірихле.
12. Теорема існування узагальненого розв'язку задачі Дірихле для еліптичного рівняння.
13. Крайова задача для еліптичного рівняння з параметром, теорема існування розв'язку.
14. Теорема про розкладання функцій класу $W_2^1(\Omega)$ по системі узагальнених власних функцій еліптичного оператора.
15. Поняття слідів функцій клас $W_2^1(\Omega)$.
16. Теорема про існування узагальненого розв'язку другої та третьої крайової задачі для еліптичного рівняння.
17. Задача на власні значення для еліптичного рівняння з граничними умовами третього роду, розкладання в ряд Фур'є по власним функціям граничної задачі третього роду.
18. Узагальнений розв'язок граничних задач хвильового рівняння, теорема єдиності розв'язку граничних задач хвильового рівняння.
19. Метод побудови узагальненого розв'язку граничних задач хвильового рівняння, теорема існування розв'язку.
20. Узагальнений розв'язок граничних задач рівняння теплопровідності, теорема єдиності розв'язку граничних задач о рівняння теплопровідності.
21. Метод побудови узагальненого розв'язку граничних задач рівняння теплопровідності, теорема існування розв'язку.
22. Метод Бубнова – Гальоркіна побудови розв'язку граничної задачі гіперболічного рівняння.

Використана література

1. В.С. Владимиров Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
2. С.Г. Михлин Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
3. В.И. Смирнов Курс высшей математики том IV часть первая. М.: Наука, 1974.
4. А.Б. Васильев, Н.А. Тихонов Интегральные уравнения, М.: Московский університет, 1989
5. Ф. Франк, Р. Мизис Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики (часть вторая). Главная редакция общетехнической литературы, М.: 1937.
6. Г.Н. Положий Уравнения математической физики М.: Высшая школа 1964.
7. И.В. Савельев Курс общей физики том 2 Электричества. - М.: Наука, 1968.
8. В.П. Михайлов Диференциальные уравнения в частных производных М.: Наука, 1983.
9. Ф. Морс, Г. Фешбах Методы теоретичесеой физики, т. 1, М. : Иностранная література, 1958.
10. О.А. Ладыженская Краевые задачи математической физики М.: Наука, 1973.