第一章　　绪　　论

1、设 x 是精确值 x^* 的一个近似值，

近似值 x 的**绝对误差** e= x^*-x

绝对误差限 ε　　|e|≤ε　　有关系式 $x-\varepsilon\le x^*\le x+\varepsilon$ 或 $x^*=x\pm\varepsilon$

相对误差 e_r　　$e_r=\dfrac{e}{x^*}=\dfrac{x^*-x}{x^*}$（$x^*$ 未知，用 x 代替）$e_r=\dfrac{e}{x}=\dfrac{x^*-x}{x}$

相对误差限 ε_r　$=\varepsilon/|x|$　　　　$|e_r|\le\varepsilon_r$

有效数字 n　从 x 左起第一个非零数 字到该数位共有 n 位

凡是由精确值经过四舍五入得到的近似值，其绝对误差限等于该近似值末位的半个单位。

1. 设近似值 $x=321.235$ 近似 x^* 具有 5 位有效数字，求 x 的相对误差限。

解　$\varepsilon_r=\dfrac{0.5\times10^{-2}}{321.235}=0.000015564\ (=0.15564\times10^{-4}=0.0015564\%)$

2. 设近似值 x 的相对误差限位 10^{-5}，则 x 至少具有（5）为有效数字。

第二章　解线性方程组的直接法

1、Gauss 消去法

是一种规则化的加减消元法，通过逐次消元计算，转化为等价的上三角形方程组。

顺序 Gauss 消去法(简称为 Gauss 消去法)：　$a_{kk}^{(k)}(k=1,2,\dots,n)$　为主元素

前提条件：主元素都不为零 ⇔ 矩阵 A 的各阶顺序主子式都不为零。

主元 Gauss 消去法：　　前提条件：矩阵 A 的行列式不为零。

分为列主元消去法和全主元消去法，常用的方法为列主元消去法。列主元 Gauss 消去法是在每一步消元前，在主元所在的一列选取绝对值最大的元素作为主元素。

2、直接三角分解法

（1）**Doolittle 分解(LU)**　前提条件：A 的各阶顺序主子式不为零。

则存在唯一单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U 使 A = LU

Doolittle 分解(LU)法：Ax=b 且 A=LU，则先用 Ly=b 求 y，再用 Ux=y 求 x。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\quad \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&&&&\\l_{21}&1&&&\\l_{31}&l_{32}&1&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\\l_{n1}&l_{n2}&l_{n3}&\cdots&1\end{pmatrix}\quad \mathbf{U}=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&\dots&u_{1n}\\&u_{22}&\dots&u_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&u_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}u_{1j}=a_{1j}\quad j=1,2,\cdots,n\\ l_{i1}=a_{i1}\div u_{11}\quad i=2,3,\cdots,n\\ \text{对}k=2,3,\dots,n,\text{计算}\\ u_{kj}=a_{kj}-\sum\limits_{m=1}^{k-1}l_{km}u_{mj}\quad j=k,k+1,\cdots,n\\ l_{ik}=(a_{ik}-\sum\limits_{m=1}^{k-1}l_{im}u_{mk})\div u_{kk}\quad ,i=k+1,k+2,\cdots,n\end{cases}$$

三阶的 LU 计算公式

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&&\\a_{21}/u_{11}&1&\\a_{31}/u_{11}&(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\&a_{22}-l_{21}u_{12}&a_{23}-l_{21}u_{13}\\&&a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}\end{pmatrix}$$

（2）平方根法

LDM 分解 和 Cholesky 分解(GG^T)　$D=\begin{pmatrix}u_{11}&&\\&u_{22}&\\&&u_{33}\end{pmatrix}$　$M=\begin{pmatrix}1&u_{12}/u_{11}&u_{13}/u_{11}\\&1&u_{23}/u_{22}\\&&1\end{pmatrix}$

A = LU = LDM = LDL^T = GG^T

（平方根法：Ax=b 且 A= GG^T，则先用 Gy=b 求 y，再用 $G^Tx=y$ 求 x）

紧凑格式三阶公式

$$\begin{pmatrix}a_{11}&&\\a_{21}&a_{22}&\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}g_{11}&&\\g_{21}&g_{22}&\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{a_{11}}&&\\a_{21}/g_{11}&\sqrt{a_{22}-g_{21}{}^2}&\\a_{31}/g_{11}&(a_{32}-g_{31}g_{21})/g_{22}&\sqrt{a_{33}-g_{31}{}^2-g_{32}{}^2}\end{pmatrix}$$

全公式：若记 G=(gij)，则有：对 k=1, 2, …, n

$$\begin{cases}g_{kk}=(a_{kk}-\sum\limits_{m=1}^{k-1}g_{km}^2)^{\frac12}\\ g_{ik}=(a_{ik}-\sum\limits_{m=1}^{k-1}g_{im}g_{km})\div g_{kk}\quad ,i=k+1,\cdots,n\end{cases}$$

（3）追赶法

Crout 分解(TM)　**A = LU = LDM = TM**

$$A=\begin{pmatrix}a_1&c_1&&&\\d_2&a_2&c_2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&d_{n-1}&a_{n-1}&c_{n-1}\\&&&d_n&a_n\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}\alpha_1&&&&\\\gamma_2&\alpha_2&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&\gamma_{n-1}&\alpha_{n-1}&\\&&&\gamma_n&\alpha_n\end{pmatrix}\quad M=\begin{pmatrix}1&\beta_1&&&\\&1&\beta_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&\beta_{n-1}\\&&&&1\end{pmatrix}$$

三对角矩阵 A 的各阶顺序主子式都不为零的一个充分条件是：

$|a_1|>|c_1|>0$；$|a_n|>|d_n|>0$；$|a_i|\ge|c_i|+|d_i|$，$c_id_i\ne0$，i=2, 3, …, n-1.

$$\begin{cases}\alpha_1=a_1,\beta_1=c_1\div\alpha_1,\gamma_i=d_i,i=2,3,\cdots,n\\ \alpha_i=a_i-d_i\beta_{i-1},i=2,3,\cdots,n\\ \beta_i=c_i\div\alpha_i,i=2,3,\cdots,n-1\end{cases}$$

3、向量和矩阵的范数

（1）向量的范数　　‖**x**‖为向量 x 的范数

①非负性：‖**x**‖≥0，且‖**x**‖=0 当且仅当 x=0；

②齐次性：实数 α，‖αx‖=|α|‖x‖；

③三角不等式：‖x+y‖≤‖x‖+‖y‖。

x=(x1, x2, …, xn)^T

向量的 1-范数：　$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

向量的 2-范数：　$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

向量的∞-范数：　$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

范数的等价性 m　‖**x**‖$_\alpha$≤　‖**x**‖$_\beta$ ≤M　‖**x**‖$_\alpha$，∀　**x**∈Rn

常用的三种向量范数等价关系　‖**x**‖$_\infty$≤　‖**x**‖$_1$ ≤ n‖**x**‖$_\infty$，∀　**x**∈Rn

$\|\mathbf{x}\|_\infty\le\|\mathbf{x}\|_2\le\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty\quad,\forall\mathbf{x}\in R^n$　　$\|\mathbf{x}\|_2\le\|\mathbf{x}\|_1\le\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2\quad,\forall\mathbf{x}\in R^n$

若 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\|=0$ 则向量序列{**x**(k)}收敛于向量 **x***，记作 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{x}^*$，或 $\mathbf{x}^{(k)}\to\mathbf{x}^*$

$$\mathbf{x}^{(k)}\to\mathbf{x}^*\Leftrightarrow x_i^{(k)}\to x_i^*,i=1,2,\cdots,n$$

4、矩阵的范数

①非负性②齐次性③三角不等式‖A+B‖≤‖A‖+‖B‖和‖AB‖≤‖A‖‖B‖

‖A‖为矩阵 A 的范数，λ 为矩阵的特征值 $|A-\lambda E|=0$

常用的矩阵范数

矩阵的 1-范数：$\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$，也称矩阵的列范数.

矩阵的 2-范数：$\|A\|_2=\sqrt{\max\lambda(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$，也称为谱范数.

矩阵的∞-范数：$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，也称为行范数.

矩阵的 F-范数：$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2}$

λ1，λ2，…，λn 为矩阵 A 的 n 个特征值，则 $\rho(\mathbf{A})=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ 为矩阵 A 的谱半径。

Cond(A)=‖A‖‖A^{-1}‖，称为方程组 Ax=b 或矩阵 A 的条件数。

2. 用 LU 分解法求方程组 $\begin{pmatrix}2&1&3\\4&5&1\\6&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ 的解。

解　由于 $\begin{pmatrix}2&1&3\\4&5&1\\6&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&-5\\3&0&-7\end{pmatrix}$，所以 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&3&-5\\0&0&-7\end{pmatrix}$

解 Ly=b 得：$y=(5,-7,-14)^T$，再解 Ux=y 得 $x=(-1,1,2)^T$。

第三章　解线性方程组的迭代法

$x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$，　k=0, 1, 2, …　　其中 M 称为迭代矩阵。

1、Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法

Jacobi 迭代法（J 迭代法）$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad,i=1,2,\cdots n,k=0,1,2,\cdots$

迭代矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}&\cdots&-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\-\frac{a_{21}}{a_{22}}&0&\cdots&-\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}&-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}&\cdots&0\end{pmatrix}$　若记 $\mathbf{g}=(\frac{b_1}{a_{11}},\frac{b_2}{a_{22}},\cdots,\frac{b_n}{a_{nn}})^T$

则 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$　k=0, 1, 2, …

$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad,i=1,2,\cdots n,k=0,1,2,\cdots$

2、Gauss-Seidel 迭代法（G-S 迭代法）　（了解）

收敛比 J 迭代法快

3、逐次超松弛迭代法---SOR 方法　（了解）

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad,i=1,2,\cdots n,k=0,1,2,\cdots$$

ω 称为松弛因子，当 ω>1 时称为超松弛迭代，当 ω<1 时称为欠松弛迭代。

SOR 方法收敛的快慢与松弛因子 ω 的选择有密切关系。经验上可取 1.4<ω<1.6。

4、迭代法的收敛性

迭代法收敛 ⇔ 迭代矩阵谱半径小于 1 $\rho(\mathbf{A})<1$ 。

若‖M‖<1，则对任意 x(0)，迭代法收敛（充分非必要条件）。

且 $\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\|\le\frac{\|\mathbf{M}\|}{1-\|\mathbf{M}\|}\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|$　　$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\|\le\frac{\|\mathbf{M}\|^k}{1-\|\mathbf{M}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|$

若使‖$\mathbf{x}^{(k)}$ − $\mathbf{x}^*$‖<ε，只需 $\frac{\|\mathbf{M}\|^k}{1-\|\mathbf{M}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|<\varepsilon$　即 $k>\ln(\frac{\varepsilon(1-\|\mathbf{M}\|)}{\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|})/\ln\|\mathbf{M}\|$

若 n 阶矩阵 A=(a_{ij})满足：$\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}|\quad,i=1,2,\cdots,n$　则 A 是严格对角占优矩阵。

若 A 严格对角占优，则 J 法，GS 法，SOR 法(0<≤ω1)收敛

若 A 是对称正定矩阵，则解方程组 Ax=b 的

① J 迭代法收敛 ⇔2D-A 也正定；

② G-S 迭代法必收敛；

③ SOR 法(0<ω<2)收敛。

3. 解线性方程组的迭代格式 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$，$k=0,1,2,\ldots$是否收敛，为什么？

其中 $M=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&4&1\\0&2&3\end{pmatrix}$。

解 不收敛。因为 $\lambda=2$ 是 M 的特征值，所以 $\rho(M)\ge2>1$.

)

二、(11 分) 用 Jacobi 法解线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\x_1+3x_2+x_3=2\\2x_1+x_2+4x_3=3\end{cases}$，取 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，

若使 $\|x^{(k)}-x^*\|_1<10^{-3}$，问应迭代多少步？

解　由于 Jacobi 迭代矩阵为 $B=\begin{pmatrix}0&-1/2&1/2\\-1/3&0&-1/3\\-1/2&-1/4&0\end{pmatrix}$，$\|B\|_1=\frac{5}{6}$.

迭代一步得：$x^{(1)}=(1/2,\ \ 2/3,\ \ 3/4)^T$，若使 $\|x^{(k)}-x^*\|_1<10^{-3}$，则有：

$$k>\ln\frac{\varepsilon(1-\|B\|_1)}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_1}\div\ln\|B\|_1=\ln\frac{10^{-3}/6}{23/12}\div\ln\frac{5}{6}\approx51.28$$

所以，取 k=52。即应迭代 52 步。

第四章　解非线性方程的迭代法

1、简单迭代法（逐次逼近法）

方程 $f(x)=0$ 改写 $x=\varphi(x)$，取合适的初始值 x_0，然后作迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，$k=0,1,2,\cdots$

$\varphi(x)$ 称为迭代函数

（1）整体收敛：若①$a\le\varphi(x)\le b$；②$|\varphi'(x)|\le L<1$，$\forall x\in[a,b]$。则 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，$\forall x0\in[a,b]$ 都收敛于方程的唯一根 α。

（2）局部收敛：若 $|\varphi'(\alpha)|<1$，则对充分接近 α 的初值 x_0，迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛。

（3）$\{x_k\}$p 阶收敛于 α 是指：$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=C$　p=1 称为线性收敛；p=2 称平方收敛；p>1 称超线性收敛。

$$k>\ln\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}\div\ln L$$

（4）若 $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(m-1)}(\alpha)=0$，但 $\varphi^{(m)}(\alpha)\neq0$，则迭代法 m 阶收敛。

2、Newton 迭代法　（了解）

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad ,k=0,1,2,\cdots$$

3、二分法　（了解）

误差估计式 $|x_k-\alpha|\le2^{-(k+1)}(b-a)$.

4．求简单迭代法 $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}+\dfrac{1}{x_k}$，$(k=0,1,2,\ldots)$ 的收敛阶。

解　设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\alpha$ 得 $\alpha=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{\alpha}$，即 $\alpha=\sqrt2$。又由于 $\varphi(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}$，所以，

$\varphi'(\alpha)=\dfrac12-\dfrac12=0$，$\varphi''(\alpha)=-\dfrac{2}{2\sqrt2}\neq0$，所以，迭代法收敛阶为 2。

三、（11 分）说明方程 $x=x^3-5$ 在区间[1，2]内有唯一根，并建立一个收敛的迭代格式，使对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 都收敛，说明收敛理由。

解　记 $f(x)=x^3-x-5$，则 $f(x)\in C[1,2]$，且 $f(1)=-5<0$，$f(2)=1>0$，

$f'(x)=3x^2-1>0$，$x\in[1,2]$。所以，方程 $x=x^3-5$ 在区间[1，2]内有唯一根。

将方程改写成：$x=\sqrt[3]{x+5}$，建立迭代格式：$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+5}$，$k=0,1,2,\ldots$

由于迭代函数 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+5}$ 满足：$1<\sqrt[3]{6}\le\varphi(x)=\sqrt[3]{x+5}\le\sqrt[3]{7}<2$，$x\in[1,2]$，

$$|\varphi'(x)|=\frac13(x+5)^{-\frac23}<\frac13<1,\quad x\in[1,2]$$

所以，对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 迭代法都收敛。

方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内有唯一根，$f(a)f(b)<0$，$f'(x)>0$。

第六章　插值与逼近

1、Lagrange 插值多项式

定义：$l_k(x)$ (k=0, 1, …, n) 是关于节点 x_k (k=0, 1, …, n) 的 n 次 Lagrange 插值基函数。

$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n=\sum\limits_{k=0}^{n}l_k(x)y_k$　称为 n 次 Lagrange 插值多项式。

公式：
$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

若记 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，则 $l_k(x)=\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega_{n+1}'(x_k)}$

n 次 Lagrange 插值余项 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x))$

若 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在 $[a,b]$ 有上界 M_{n+1}，则 $|R_n(x)|\le\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

2、Newton 插值多项式

定义：$f(x_j)-f(x_i)$ 与 x_j-x_i $(i\neq j)$ 的比值为 $f(x)$ 关于点 x_i,x_j 的**一阶差商** $f[xi,xj]$

称 $f[x_i,x_j]=\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$ 为 $f(x)$ 关于点 x_i,x_j 的**一阶差商**

称 $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$ 为 $f(x)$ 关于点 x_i,x_j,x_k 的**二阶差商**

称 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\dfrac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$ 为 $f(x)$ 关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的 **k 阶差商**

差商性质：①k 阶差商　$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum\limits_{j=0}^{k}\dfrac{1}{\omega_{k+1}'(x_j)}f(x_j)$　（线性组合）

②差商对节点具有对称性；

③n 次多项式 $f(x)$ 的 k 阶差商，当 $k\le n$ 时是一个 n-k 次多项式；当 $k>n$ 时恒等于 0。

④若 $f(x)$ 具有 k 阶连续导数，则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$，（即为 x^k 系数）。

n 次 Newton 插值多项式　$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$

$N_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots$
$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

n 次 Newton 插值余项 $R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

3、分段插值多项式（略）

4、三次样条插值（略）

6、正交多项式

$f(x)$与 g(x)的内积 $(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$

$$\|f\|_2=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

ρ(x)是非负连续函数,称为[a, b]上的权函数

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx}$$

Schemite 正交化

$$g_0(x)=f_0(x)$$

$$g_1(x)=f_1(x)-\frac{(f_1,g_0)}{(g_0,g_0)}g_0(x),$$

$$\vdots$$

$$g_n(x)=f_n(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(f_n,g_i)}{(g_i,g_i)}g_i(x)$$

P_n 上由线性无关函数 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 经过 Schemite 正交化过程得到的多项式 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$称为[a, b]上的正交多项式.（即 $f_0(x)=1, f_1(x)=x,$
$f_2(x)=x^2, \cdots, f_n(x)= x^n$）

区间[-1, 1]上权函数对应的二次正交多项式

$\rho(x)$	1	x^2	x^4	x^6
$p_0(x)$	1	1	1	1
$p_1(x)$	x	x	x	x
$p_2(x)$	$x^2-\frac{1}{3}$	$x^2-\frac{3}{5}$	$x^2-\frac{5}{7}$	$x^2-\frac{7}{9}$
$p_3(x)$	$x^3-\frac{3}{5}x$	$x^3-\frac{5}{7}x$	$x^3-\frac{7}{9}x$	$x^3-\frac{9}{11}x$

7、数据拟合的最小二乘法

$$\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$$

常用的函数系有幂函数系$\{x^j\}$，三角函数系$\{\sin jx\}$，$\{\cos jx\}$,指数函数系$\{e^{\lambda_j x}\}$正交函数系等.最常用的是幂函数系$\{x^j\}$,即取$\Phi=P_n=\mathrm{Span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$,这时求得的拟合曲线称为多项式拟合曲线. （即 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=x^2, \cdots, \varphi_n(x)=x^n$）

引进向量 $\varphi_j=(\varphi_j(x_0), \varphi_j(x_1), \cdots, \varphi_j(x_m))^T$ ，$j=0, 1, 2, \cdots, n$　　$\mathbf{f}=(y_0, y_1, \cdots, y_m)^T$

且记向量内积 $(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^m \rho(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$,　　$(\mathbf{f},\varphi_k)=\sum_{i=0}^m \rho(x_i)y_i\varphi_k(x_i)$

正则方程组

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\mathbf{f},\varphi_0)\\ (\mathbf{f},\varphi_1)\\ \vdots\\ (\mathbf{f},\varphi_n)\end{pmatrix}$$

5．求满足条件 $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=0, f'(1)=0$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 的表达式。

解　设 $H_3(x)=x(x-2)(ax+b)$，则 $-(a+b)=1$，$-a=0$。

于是，　$H_3(x)=-x(x-2)$。

7．求区间[－1，1]上权函数为 $\rho(x)=x^2$ 的二次正交多项式 $P_2(x)$。

解　$P_0(x)=1$，　$P_1(x)=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}1=x$，

$$P_2(x)=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}1-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}x=x^2-\frac{3}{5}$$

8．设 $f(x)=5x^3-x^2+3$，求差商 $f[0,1], f[7,6,3,5], f[3,1,2,6,4]$。

解　$f[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=4$，　$f[7,6,3,5]=5$，　$f[3,1,2,6,4]=0$。

9．给定离散数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	3	1	2	4

试求形如 $y=a+bx^2$ 的拟合曲线。

解　基函数为 $\varphi_0(x)=1$，　$\varphi_1(x)=x^2$，　于是

$\varphi_0=(1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1)^T$，$\varphi_1=(1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 4)^T$，$f=(3,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 4)^T$，

正则方程组为:

$$\begin{cases}4a+6b=10\\ 6a+18b=21\end{cases}$$，解之得：　$a=3/2$，　$b=2/3$

所以，拟合曲线为：　$y=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}x$。

六、(6 分)利用 Lagrange 基函数性质，证明：　$\sum_{i=1}^n \frac{i^k}{\prod_{j=1,j\neq i}^n (i-j)}=0$，$k=1,2,\ldots,n-2$。

证明：取节点 $x_i=i$，　$i=1,2,\ldots,n$，　$f(x)=x^{k+1}$，　则有：　$y_i=f(x_i)=i^{k+1}$，

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \frac{x-j}{i-j}$$

由插值多项式的唯一性有：

$$x^{k+1}=f(x)=L_n(x)=\sum_{i=1}^n l_i(x)y_i=\sum_{i=1}^n\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \frac{x-j}{i-j}\Big)i^{k+1}$$

取 $x=0$ 得：

$$0=\sum_{i=1}^n\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \frac{-j}{i-j}\Big)i^{k+1}=(-1)^{n-1}n!\sum_{i=1}^n\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \frac{1}{i-j}\Big)i^k$$

即：　$\sum_{i=1}^n \frac{i^k}{\prod_{j=1,j\neq i}^n (i-j)}=0$，　$k=1,2,\ldots,n-2$。

第七章　数值积分

1、插值型求积公式

求积公式的一般形式 $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k y_k + R[f] \approx \sum_{k=0}^{n} A_k y_k$

积分系数

$A_k = \int_a^b l_k(x)dx \quad ,k = 0,1,2,\cdots n$

2、求积公式的代数精度

求积公式对 $f(x)=x^j$ $(j=0,1,2,\cdots,m)$ 都精确成立，但对 $f(x)=x^{m+1}$ 不精确成立则称此公式具有 m 次代数精度.

例 确定形如 $\int_0^3 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(3)$ 的求积公式，使其代数精度尽可能高。

解 令公式对 $f(x)=1, x, x^2$ 都精确成立，则

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=3 \\ A_1+3A_2=4.5 \\ A_1+9A_2=9 \end{cases}，解之得：A_0=0, A_1=9/4, A_2=3/4.$$

数值求积公式为 $\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{4}[3f(1)+f(3)]$

3、复化求积公式

在区间[a，b]上，取等距节点 $x_k=a+kh$，$k=0,1,2,\cdots,n$，$h=(b-a)/n$

由定积分的区间可加性，有 $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$

（1）复化梯形公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

如果记 $M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$ 　则有 $|I-T_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$ 即复化梯形公式是收敛的。

而要使 $|I-T_n|<\varepsilon$ 　则 $n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}$

（2）复化 Simpson 公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{6}[f(x_{k-1}) + 4f(x_{k-\frac{1}{2}}) + f(x_k)] = \frac{h}{6}[f(a) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)] = S_n$$

如果记 $M_4 = \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$ 　则有 $|I-S_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}M_4$ 即复化梯形公式是收敛的。

而要使 $|I-S_n|<\varepsilon$ 　则 $n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{2880\varepsilon}}$

6. 设求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 是插值型求积公式，求 $\sum_{k=0}^{n} A_k$.

解　$\sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a$。

或，由于公式对 $f(x)=1$ 精确成立，所以 $\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b 1dx = b-a$。

四、（11 分）利用复化 Simpson 公式 S_n 计算定积分 $I = \int_0^1 \sin x dx$ 若使 $|I-S_n|<10^{-5}$，问应取 n 为多少？并求此近似值。

解　由于 $|(\sin x)^{(4)}| = |\sin x| \le \sin 1$，所以，n 应满足：$n > \sqrt[4]{\frac{\sin 1}{2880\times 10^{-5}}} \approx 2.32$，

故，应取 n＝3。而且有：

$$I \approx S_3 = \frac{1}{18}[\sin 0 + \sin 1 + 2\sin\frac{1}{3} + 2\sin\frac{2}{3} + 4\sin\frac{1}{6} + 4\sin\frac{1}{2} + 4\sin\frac{5}{6}] \approx 0.4596997$$

第八章　常微分方程数值解法

1、**一般形式**：$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\le x\le b \\ y(a)=\alpha \end{cases}$　其中 $f(x,y)$ 是已知函数, α 为给定的初值。

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 $\{a\le x\le b, -\infty<y<\infty\}$ 上连续且关于 y 满足 **Lipschitz** 条件

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|\quad ,\forall x,y$$

其中 L>0 为 Lipschitz 常数, 则初值问题(8.1)有唯一解。

（1）**Euler 公式**　$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_0=\alpha \quad ,n=0,1,2\cdots,N-1 \end{cases}$

（2）**梯形公式**

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})] \\ y_0=\alpha \quad ,n=0,1,2\cdots,N-1 \end{cases}$$

（3）**改进的 Euler 方法**

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})] \\ y_0=\alpha \quad ,n=0,1,2\cdots,N-1 \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(K_1+K_2) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+h,y_n+hK_1) \\ y_0=\alpha \quad ,n=0,1,2\cdots,N-1 \end{cases}$$

2、**局部截断误差** $y(x_{n+1})-y_{n+1}$　设 $y_n=y(x_n)$

如果单步差分公式的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$, 则称该公式为 p 阶方法。

一元函数的 Taylor 展开式为:

$$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\frac{y'''(x_n)}{3!}h^3+\cdots$$

二元函数的 Taylor 展开式为:

$$f(x_n+h,y_n+k)=f(x_n,y_n)+\frac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial y}k$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_n,y_n)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x_n,y_n)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x_n,y_n)}{\partial y^2}k^2\right]+\cdots$$

3、**单步方法的收敛性和稳定性**

设单步方法的增量函数 $\Phi(x, y, h)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则方法是收敛的。

若单步方法用于试验方程为: $y_{n+1}=g(\lambda h)y_n$, 则方法的绝对稳定区域是: $|g(\lambda h)|<1$。

方　　法	方法的阶数	稳 定 区 间
uler 方法	1	(-2, 0)
梯形方法	2	(-∞, 0)
改进 Euler 方法	2	(-2, 0)
二阶 R-K 方法	2	(-2, 0)
三阶 R-K 方法	3	(-2.51, 0)
四阶 R-K 方法	4	(-2.78, 0)

三阶R-K公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+4K_2+K_3) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hK_1) \\ K_3=f(x_n+h,y_n-hK_1+2hK_2) \end{cases}$$

10. 求解初值问题 $\begin{cases} y'=ye^x & 1\le x\le 2 \\ y(1)=2 \end{cases}$ 的改进 Euler 方法是否收敛？为什么？

解　因为 $f(x,y)=ye^x$ 关于变量 y 满足 Lipschitz 条件，故收敛。

五、（11 分）已知求解常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & x\in[a,b] \\ y(a)=\alpha \end{cases}$$

的差分公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}(k_1+2k_2) \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+\frac{3}{4}h,y_n+\frac{3}{4}hk_1) \\ y_0=\alpha \end{cases}$$

求此差分公式的阶。

解　由于

$$k_2=f_n+\frac{3h}{4}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)+\frac{9h^2}{32}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+O(h^3)$$

$$y_{n+1}=y_n+hf_n+\frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)+\frac{3h^3}{16}(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2)+O(h^4)$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$=y_n+hf_n+\frac{h^2}{2}(\frac{\partial f_n}{\partial x}+\frac{\partial f_n}{\partial y}f_n)$$

$$+\frac{h^3}{6}[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x\partial y}f_n+\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}f_n^2+\frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y}+(\frac{\partial f_n}{\partial y})^2f_h]+O(h^4)$$

于是，$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$，

此差分公式是 2 阶的。