Übungsblatt 1

Abgabe am 4. Oktober 16

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, der $\mathbb{R}$ als einen Unterkörper enthält. Das heisst $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{F}$, die abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist und so dass die Einschränkung dieser Operationen auf $\mathbb{R}$ gerade die übliche Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ ist. Zeige:

- $\mathbb{F}$ ist in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
- Ist $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F} = 2$, dann existiert ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{C}$ so dass $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für $a, b \in \mathbb{F}$.

Aufgabe 2.
Bestimme sowohl mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen als auch direkt mit der Definition, an welchen Stellen folgende Funktionen komplex differenzierbar sind und berechne gegebenenfalls die Ableitung:

(i) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$
(ii) $f(x + iy) = ax + iby$ (für $a, b \in \mathbb{C}$)

Aufgabe 3. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist. Sei $D^- = \{\overline{z} : z \in D\}$. Zeige, dass dann auch $g : D^- \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ in $\overline{z_0}$ komplex differenzierbar ist. Was ist die Ableitung?

Aufgabe 4. (i) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass $\mathbb{H} = \{a\,\mathrm{Id} + bI + cJ + dK \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ein Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ mit den Relationen $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ und $IJ = K$ ist.

(ii) Für $q = a + bI + cJ + dK$ nennen wir $\overline{q} = a - bI - cJ - dK$ die Konjugierte und $\mathrm{N}(q) = q\overline{q}$ die Norm von q. Zeige:

$$\mathrm{N}(q) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathrm{Id} \qquad \overline{q_1} \cdot \overline{q_2} = \overline{q_2 q_1} \qquad \mathrm{N}(q_1 q_2) = \mathrm{N}(q_1)\mathrm{N}(q_2)$$

(iii) Zeige, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist (das heisst jedes Element $\neq 0$ ist invertierbar), aber nicht kommutativ ist.

(iv) Zeige, dass die Gleichung $x^2 = -1$ unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{H}$ hat.

$\star$ (v) Die quaternionische Norm wird benutzt, um zu zeigen, dass jede natürliche Zahl als Summe von 4 Quadraten geschrieben werden kann (der berühmte *4 Quadrate-Satz von Lagrange*), zum Beispiel $42 = 5^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$. Suche und studiere einen Beweis, der Quaternionen benutzt!

$\star$ **Aufgabe 5.** Mit den komplexen Zahlen und den Quaternionen haben wir Schiefkörper auf 2- und auf 4-dimensionalen Vektorräumen über $\mathbb{R}$ konstruiert. Können wir ein solches Produkt auch auf $\mathbb{R}^3$ konstruieren? Präziser: Gibt es ein $\mathbb{R}$-bilineares Produkt $\star\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sodass die Verknüpfung assoziativ ist, es ein neutrales Element $1 \in \mathbb{R}^3$ gibt und jedes Element $\neq 0$ bezüglich $\star$ invertierbar ist?

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.