Prof. R. Pandharipande
C. Schießl
J. Schmitt

Übungsblatt 0

In diesem Übungsblatt wiederholen wir das grundlegende Rechnen mit komplexen Zahlen. Es wird nicht abgegeben.

Aufgabe 1.

(i) Berechne in der Form $a + bi$:

$$\frac{1+i}{1-i} \qquad (1+i\sqrt{3})^3 \qquad (1+i)^4$$

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} \qquad (1+i)^n + (1-i)^n$$

(ii) Stelle diese komplexen Zahlen in der Form $re^{2\pi it}$ dar:

$$4i \qquad -3$$

$$1+i \qquad 1+\sqrt{3}$$

(iii) Finde alle Lösungen der Gleichungen in der Form $a + bi$:

$$x^3 = 1 \qquad x^4 = -2$$

Aufgabe 2. Zeige für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

(i) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(ii) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Aufgabe 3.

(i) Beschreibe die Teilmenge der komplexen Zahlen z, die jeweils die folgenden Bedingungen erfüllen:

a)
$$1 < |3z + 4| < 2$$

b)
$$|z - 1| < |z|$$

c)
$$\mathrm{Re}(iz + 2) \geq 0$$

d)
$$|\mathrm{Re}\, z| < |z|$$

e)
$$|z - 1| + |z + 1| = 3$$

f)
$$|z| = \mathrm{Re} z + 1$$

g)
$$\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0 \quad (z\neq z_2)$$
h)
$$\operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0 \quad (z\neq z_2)$$
In den letzten beiden Teilaufgaben sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zwei feste, voneinander verschiedene komplexe Zahlen.

(ii) Zeige, dass z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, falls $z_1+z_2+z_3=0$ und $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.