Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt, C. Schießl

30. September 16
HS 2016

Übungsblatt 2

Abgabe am 11. Oktober 16

Aufgabe 1. Welche dieser Funktionen können Realteil einer analytischen Funktion sein? Gib diese gegebenenfalls an:

(i) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$

(ii) $u(x, y) = e^x \sin(y)$

(iii) $u(x, y) = e^x \sinh(y)$

Aufgabe 2.

(i) Leiten Sie die Polarform der Cauchy-Riemann Gleichungen her:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(ii) Überprüfen Sie, dass für jede ganze Zahl m die Funktionen

$$u(re^{i\theta}) := r^m \cos(m\theta), \quad v(re^{i\theta}) := r^m \sin(m\theta)$$

die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine *stückweise differenzierbare Kurve* in U von $p \in U$ nach $q \in U$ in U ist eine stetige Abbildung $\phi : [0, 1] \longrightarrow U$ mit $\phi(0) = p$, $\phi(1) = q$, so dass es $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ gibt derart, dass $\phi|_{(t_{i-1},t_i)}$ differenzierbar ist für alle $i = 1, \ldots, n$.

(i) Ist ϕ eine stückweise differenzierbare Kurve von $p \in U$ nach $q \in U$ und ψ eine solche Kurve von q nach $r \in U$, dann ist

$$\psi * \phi : [0, 1] \longrightarrow U, t \longmapsto \begin{cases} \phi(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi(2t-1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine stückweise differenzierbare Kurve in U von p nach r.

(ii) Die Relation $\sim$ auf U definiert für $p, q \in U$ durch

$$p \sim q \iff \text{Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve von } p \text{ nach } q$$

ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind offene Teilmengen von U.

(iii) Folgere: Ist U zusammenhängend, dann können je zwei Punkte in U durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbunden werden.
Erinnerung: $U \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, falls für alle $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offen und disjunkt mit $U \subset A \cup B$ folgt $A \cap U = \emptyset$ oder $B \cap U = \emptyset$.

(iv) Schliesse, dass für eine offene, zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{C}$ jede analytische Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f' = 0$ konstant ist.

Aufgabe 4. Reelle Funktionen $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stellen wir uns üblicherweise als Graphen $\{(x, g(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vor. Bei einer komplexen Funktion wäre dieser Graph aber eine Teilmenge des vierdimensionalen Raums $\mathbb{C}^2$. Deshalb müssen wir uns anders behelfen. Verschiedene Methoden eine komplexe Funktion $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, w = f(z)$ darzustellen wären:

(i) Man stellt sich die Funktion f als Verformung der Zahlenebene f vor. Um diese zu zeichnen, betrachtet man die Bilder der Gitternetze Re $z =$ konstant, Im $z =$ konstant oder des Polarkoordinatennetzes $r =$ konstant, $\phi =$ konstant.

(ii) Man zeichnet ein "Höhenlinienbild" von f, das heisst, man zeichnet die Urbilder der Gitternetze Re $w =$ konstant, Im $w =$ konstant.

(iii) Man zeichnet den (dreidimensionalen) Graphen der Funktion $|f|$.

Führe diese Methoden für $f(z) = z^3$ durch. Aus der Vorlesung wissen wir, dass f analytisch, also eine konforme Abbildung ist. Wo an deinen Zeichnungen kann man das auch erkennen?

Aufgabe 5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. Zeige: Ist f konform auf U, dann ist f analytisch auf U mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.