Übungsblatt 3

Abgabe am 18. Oktober 16

Aufgabe 1. Seien $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, $g\colon U \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytische Funktionen mit $U \subset \mathbb{C}$ offen. Zeige, dass dann $\frac{f}{g}$ analytisch ist mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Aufgabe 2. Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zeige, dass f konstant sein muss, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\operatorname{Re} f =$ konstant
- $\operatorname{Im} f =$ konstant
- $|f| =$ konstant

Aufgabe 3.

(i) Sei $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$. Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklung von A^2 bis zur Ordnung 5.

(ii) Zeige, dass $A(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ für $|z| < 1$.

(iii) Wir definieren die Bernoullizahlen B_n durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Berechne B_n für $n \leq 4$.

(iv) Berechne die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

⋆ **Aufgabe 4.** Untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen auf dem Konvergenzradius, dass heisst für $|z| = 1$:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$

Hinweis: Test von Abel

⋆ **Aufgabe 5.** Versuche eine Definition der quaternionischen Ableitung analog zur komplexen Ableitung zu finden und untersuche die Funktion $f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $f(h) = h^2$ mit deiner Definition auf quaternionische Differenzierbarkeit.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.