Musterlösung zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, der $\mathbb{R}$ als einen Unterkörper enthält. Das heisst $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{F}$, die abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist und so dass die Einschränkung dieser Operationen auf $\mathbb{R}$ gerade die übliche Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ ist. Zeige:

- $\mathbb{F}$ ist in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
- Ist $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F} = 2$, dann existiert ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{C}$ so dass $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für $a, b \in \mathbb{F}$.

Lösung. Per Definition ist $(\mathbb{F}, +, 0)$ eine abelsche Gruppe. Als Skalarmultiplikation des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{F}$ nehmen wir die Einschränkung der Multiplikation von $\mathbb{F}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$. Die Kompatibilität der Skalarmultiplikation mit dem Produkt in $\mathbb{R}$ folgt aus dem Assoziativgesetz von $\mathbb{F}$. Analog folgen Distributivität und die Neutralität der 1 bezüglich der Skalarmultiplikation aus den entsprechenden Axiomen des Körpers $\mathbb{F}$.
Sei nun $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F} = 2$, dann bilden für $x \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$ die Elemente $1, x$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{F}$. Aus der Distributivität in $\mathbb{F}$ folgt, dass die Multiplikation in $\mathbb{F}$ eindeutig bestimmt ist durch das Produkt $x \cdot x = r + sx$ für $r, s \in \mathbb{R}$. Tatsächlich gilt für zwei Elemente $v = a + bx, w = c + dx \in \mathbb{F}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$v \cdot w = (a + bx) \cdot (c + dx) = ac + (ad + bc)x + bdx^2,$$

und die Produkte zwischen den Elementen a, b, c, d können in $\mathbb{R}$ berechnet werden. Es reicht zu zeigen, dass wir ein anderes Element $\tilde{x} = a + bx \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$ finden können, so dass $\tilde{x}^2 = -1$. Dann hat die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi(\lambda + \mu\tilde{x}) = \lambda + \mu i$$

die gesuchten Eigenschaften.
Unter Verwendung von $x \cdot x = r + sx$ und dem Ansatz $\tilde{x} = a + bx$ berechnen wir

$$\tilde{x}^2 = a^2 + 2abx + b^2(r + sx) = (a^2 + b^2r) + (2ab + b^2s)x \stackrel{!}{=} -1 + 0 \cdot x.$$

Wir erhalten die Gleichungen $a^2 + b^2r = -1$ und $2ab + b^2s = 0$. Da $\tilde{x} = a + bx \notin \mathbb{R}$ muss $b \neq 0$ gelten, also folgt $2a = -bs$. Setzen wir $a = -bs/2$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$\frac{b^2s^2}{4} + b^2r = b^2\left(\frac{s^2}{4} + r\right) = -1.$$

Diese Gleichung hat genau dann eine reelle Lösung b falls $\frac{s^2}{4} + r < 0$. Doch $\frac{s^2}{4} + r$ ist gerade die Diskriminante der quadratischen Gleichung $X^2 - sX - r = 0$. Wäre diese nichtnegativ, hätte diese Gleichung neben den (voneinander verschiedenen) Lösungen x und $s - x$ auch eine Lösung in $\mathbb{R}$. Dies ist ein Widerspruch, da ein Polynom zweiten Grades über $\mathbb{F}$ nur maximal zwei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{F}$ haben kann.

Aufgabe 2.
Bestimme sowohl mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen als auch direkt mit der Definition, an welchen Stellen folgende Funktionen komplex differenzierbar sind und berechne gegebenenfalls die Ableitung:

(i) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$

(ii) $f(x+iy) = ax + iby$ (für $a, b \in \mathbb{C}$)

Lösung. Für die Prüfung der Differenzierbarkeit in $z_0 = x + yi$ über die Definition lassen wir $z - z_0 = h$ gegen 0 konvergieren.

(i) Für $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{z\mathrm{Re}(z) - z_0\mathrm{Re}(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(z_0 + h)\mathrm{Re}(z_0 + h) - z_0\mathrm{Re}(z_0)}{h} \\ &= \frac{z_0\mathrm{Re}(z_0) + z_0\mathrm{Re}(h) - z_0\mathrm{Re}(z_0)}{h} + \mathrm{Re}(z_0 + h) \\ &= z_0\frac{\mathrm{Re}(h)}{h} + \mathrm{Re}(z_0 + h).\end{aligned}$$

Der Term $\mathrm{Re}(z_0 + h)$ hat als Grenzwert für $h \longrightarrow 0$ gerade $\mathrm{Re}(z_0)$. Der Ausdruck $\mathrm{Re}(h)/h$ hat keinen Grenzwert für $h \longrightarrow 0$ in $\mathbb{C}$. Tatsächlich ist für $h \in \mathbb{R}$ der Ausdruck konstant 1 und für $h \in \mathbb{R}i$ konstant 0. Also gibt es insgesamt keinen Grenzwert, falls $z_0 \neq 0$. Für $z_0 = 0$ existiert die Ableitung und ist gerade gleich $0 + \mathrm{Re}(z_0) = 0$.

Für die Cauchy-Riemann Gleichungen stellen wir fest, dass $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x+yi)) = x^2$ und $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + yi)) = xy$. Damit ist f bei $z_0 = x + yi$ differenzierbar, falls gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dies ist genau für $x = 0, y = 0$ erfüllt und die Ableitung ist $2x + yi = 0$.

(ii) Beachte, dass f eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion ist. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{f(z_0) + f(h) - f(z_0)}{h} = \frac{f(h)}{h}.$$

Setzt man nun $h = x + yi$ ein und verwendet $h^{-1} = (x - iy)/(x^2 + y^2)$ ergibt sich

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{(ax + byi)(x - yi)}{x^2 + y^2} = \frac{(ax^2 + by^2) + (b - a)xyi}{x^2 + y^2}.$$

Diese Funktion ist konstant gleich a für $y = 0$ und konstant b für $x = 0$. Damit ist eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit, dass $a = b$. Ist dies erfüllt, ist der Grenzwert genau gleich a und damit die Funktion überall differenzierbar.

Für die Cauchy-Riemann Gleichungen berechnen wir $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + yi)) = \mathrm{Re}(a)x - \mathrm{Im}(b)y$ und $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + yi)) = \mathrm{Im}(a)x + \mathrm{Re}(b)y$. Damit ist f bei $z_0 = x + yi$ differenzierbar, falls gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b) = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{Im}(b) = -\mathrm{Im}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Wir erhalten das gleiche Ergebnis wie oben, die Ableitung ist $\mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(a)i = a$.

Aufgabe 3. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist. Sei $D^- = \{\overline{z} : z \in D\}$. Zeige, dass dann auch $g\colon D^- \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ in $\overline{z_0}$ komplex differenzierbar ist. Was ist die Ableitung?

Lösung. Beachte, dass g gerade die Komposition

$$D^- \xrightarrow{z \mapsto \overline{z}} D \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto \overline{z}} \mathbb{C}$$

ist. Da sowohl die komplexe Konjugation als auch f stetig differenzierbar sind, ist auch g stetig differenzierbar auf der offenen Menge D^-. Wenn wir $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ schreiben, dann gilt für g, dass

$$g(x + iy) = \overline{u(x, -y) + iv(x, -y)} = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

Mit $\tilde{u}(x, y) = u(x, -y)$ und $\tilde{v}(x, y) = -v(x, -y)$ können wir also die Cauchy-Riemann Gleichungen an der Stelle $\overline{z_0}$ überprüfen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(x, y), \\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(x, y).
\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass u, v die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen. Also ist g an der Stelle $\overline{z_0}$ komplex differenzierbar und

$$g'(x + iy) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) = \overline{f'(x - iy)},$$

also $g'(\overline{z_0}) = \overline{f'(z_0)}$.

Aufgabe 4.

(i) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass $\mathbb{H} = \{a\,\mathrm{Id} + bI + cJ + dK \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ein Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ mit den Relationen $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ und $IJ = K$ ist.

(ii) Für $q = a + bI + cJ + dK$ nennen wir $\overline{q} = a - bI - cJ - dK$ die Konjugierte und $\mathrm{N}(q) = q\overline{q}$ die Norm von q. Zeige:

$$\mathrm{N}(q) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathrm{Id} \qquad \overline{q_1} \cdot \overline{q_2} = \overline{q_2 q_1} \qquad \mathrm{N}(q_1 q_2) = \mathrm{N}(q_1)\mathrm{N}(q_2)$$

(iii) Zeige, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist (das heisst jedes Element $\neq 0$ ist invertierbar), aber nicht kommutativ ist.

(iv) Zeige, dass die Gleichung $x^2 = -1$ unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{H}$ hat.

$\star$ (v) Die quaternionische Norm wird benutzt, um zu zeigen, dass jede natürliche Zahl als Summe von 4 Quadraten geschrieben werden kann (der berühmte *4 Quadrate-Satz von Lagrange*), zum Beispiel $42 = 5^2+3^2+2^2+2^2$. Suche und studiere einen Beweis, der Quaternionen benutzt!

Lösung. (i) Um zu zeigen, dass $\mathbb{H}$ einen Unterring darstellt, muss man zeigen, dass $\mathbb{H}$ abgeschlossen unter Multiplikation ist. Da das Distributivgesetz in $M_2(\mathbb{C})$ gilt, reicht es, dies für Produkte zwischen den Erzeugern Id, I, J, K von $\mathbb{H}$ zu prüfen. Alle Produkte, die Id enthalten sind offensichtlich wieder in $\mathbb{H}$. Für die anderen Paarungen ergibt sich:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}, IJ = -JI = K, IK = -KI = -J, JK = -KJ = I.$$

(ii) Schreibt man das Produkt

$$N(q) = (a + bI + cJ + dK)(a - bI - cJ - dK)$$

vollständig aus, ergeben sich 16 Terme. Die entscheidenden vier Terme sind gerade

$$a \cdot a + (bI) \cdot (-bI) + (cJ) \cdot (-cJ) + (dK) \cdot (-dK).$$

Da $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}$, ergeben diese genau die finale Formel. Wir müssen nur zeigen, dass alle anderen, gemischten Terme sich gegenseitig aufheben. Dies folgt leicht aus $IJ = -JI, IK = -KI, JK = -KJ$.

Für $\overline{q_1} \cdot \overline{q_2} = \overline{q_2 q_1}$ beobachten wir, dass $q \longmapsto \overline{q}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist. Deshalb genügt es die Formel für $q_1, q_2 \in \{\mathrm{Id}, I, J, K\}$ zu zeigen. Ist eines der $q_i = \mathrm{Id}$ ist die Formel klar, für alle Paarungen zwischen I, J, K folgt sie leicht aus den Produkten, die oben berechnet wurden.

Schliesslich gilt

$$N(q_1q_2) = q_1q_2\overline{q_1q_2} = q_1 \underbrace{q_2\overline{q_2}}_{=N(q_2)\in\mathbb{R}\mathrm{Id}} \overline{q_1} = N(q_2) \underbrace{q_1\overline{q_1}}_{=N(q_1)},$$

da Elemente von $\mathbb{R}\mathrm{Id}$ mit anderen Matrizen kommutieren.

(iii) Mit $\mathrm{N}(q) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathrm{Id}$ sieht man $q = 0$ genau dann wenn $N(q) = 0$. Ist also $q \neq 0$ dann folgt durch Multiplizieren der Gleichung $N(q) = q\overline{q}$ von rechts mit $N(q)^{-1}$, dass $\mathrm{Id} = q(\overline{q}N(q)^{-1})$, also ist q invertierbar in $\mathbb{H}$ (da $\overline{q} \in \mathbb{H}$ und $N(q)$ eine skalare Matrix). Für die Nichtkommutativität haben wir oben gesehen: $IJ = -JI = K \neq 0$.

(iv) Für $x = bI + cJ + dK$ sieht man leicht $\overline{x} = -x$ und damit

$$x^2 = -x\overline{x} = -N(x) = (-b^2 - c^2 - d^2)\mathrm{Id}.$$

Also ist $x^2 = -1$ falls b, c, d so gewählt werden, dass $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Hierfür gibt es unendlich viele Wahlmöglichkeiten. Beachte, dass ein Polynom f über einem Körper nur maximal $\deg(f)$ viele Nullstellen haben kann. Dieser Satz ist über Schiefkörpern offenbar nicht mehr erfüllt!

(v) See for example
`https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange's_four-square_theorem#Proof_using_the_Hurwitz_integers`.

$\star$ **Aufgabe 5.** Mit den komplexen Zahlen und den Quaternionen haben wir Schiefkörper auf 2- und auf 4-dimensionalen Vektorräumen über $\mathbb{R}$ konstruiert. Können wir ein solches Produkt auch auf $\mathbb{R}^3$ konstruieren? Präziser: Gibt es ein $\mathbb{R}$-bilineares Produkt $\star\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sodass die Verknüpfung assoziativ ist, es ein neutrales Element $1 \in \mathbb{R}^3$ gibt und jedes Element $\neq 0$ bezüglich $\star$ invertierbar ist?

Lösung. Sei $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \cdot 1$ und betrachte die Abbildung

$$m_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \longmapsto a \star x.$$

Da $\star$ bilinear ist, ist dies ein linearer Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$. Sein charakteristisches Polynom hat Grad 3 und muss nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle haben. Also existiert ein reeller Eigenwert λ mit Eigenvektor $x_\lambda \neq 0$. Jetzt multipliziere die Gleichung $a \star x_\lambda = \lambda x_\lambda$ mit x_λ^{-1} von rechts. Dann folgt

$$a = a \star x_\lambda \star x_\lambda^{-1} = \lambda x_\lambda \star x_\lambda^{-1} = \lambda 1.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \cdot 1$.