# Operációkutatás

## 1. előadás

Dósa György

Pannon Egyetem / Matematika Tanszék

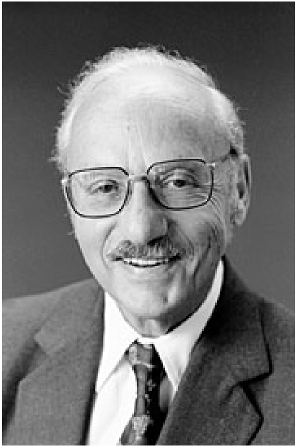
2021.02.19.

# Operációkutatás, tematika:

- Lineáris Programozás
- Szállítási feladat
- Hozzárendelési feladat
- (némi) Játékelmélet
- Diszkrét Programozás:
-         hátizsák feladat
-         utazó ügynök
- Cutting Stock feladat

# A kezdet (OpKut)

- (Hadműveleti Operációk Kutatása)
- Lineáris Programozás
- George Dantzig, szimplex módszer



# Irodalom


- Wayne L. Winston, Operations Research, Applications and algorithms, Duxbury Press, 1991
- Éles András, Gyorgy Dosa, Tutorial for Operations Research, Modeling in GNU MathProg, February 12, 2020, http://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/handle/123456789/13112
- Tomor Benedek, Matematika VI, Veszprémi Egyetem jegyzete
- Tomor Benedek: Az Operációkutatás matematikai alapjai, Útmutató, Veszprémi Egyetem
- Bertók Botond, Network Synthesis and Optimization, http://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/handle/123456789/13111
- Dósa György honlapja: https://math.uni-pannon.hu/~dosa/

# Egy termelési probléma

Adott a következő táblázat:

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | Készlet |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Erőf$_1$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 24 |
| Erőf$_2$ | 0 | 1 | 1 | 5 | 1 | 43 |
| Erőf$_3$ | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 18 |
| Haszon | 19 | 23 | 15 | 42 | 33 | |

- Termékek ( $T_1$, ..., $T_5$ ).
- Erőforrások
- Készlet
- Pl. termelünk 1 egységnyit $T_1$-ből...
- Pl. termelünk 2 egységnyit $T_1$-ből...
- Pl. termelünk 8 egységnyit $T_2$ -ből és még 1 egységnyit $T_4$ -ből, akkor összesen fogyasztunk $8 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 19$ egységnyit az első erőforrásból.
- többi erőforrás: hasonlóan
- *Termelési terv: pl.* $x(0, 8, 0, 1, 0)$, ha $c(19, 23, 15, 42, 33)$ jelöli a hasznon vektorát, az összes haszon ennyi lesz: $c \cdot x = (19, 23, 15, 42, 33) \cdot (0, 8, 0, 1, 0) = 226.$
- Mi lesz a "legjobb" termelési terv?

Próbálkozzunk!

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | Készlet |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Erőf$_1$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 24 |
| Erőf$_2$ | 0 | 1 | 1 | 5 | 1 | 43 |
| Erőf$_3$ | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 18 |
| Haszon | 19 | 23 | 15 | 42 | 33 | |

a, $x(18, 0, 0, 0, 0)$, $z_1 = 18 \cdot 19 = 342$
b, $x(0, 12, 0, 0, 0)$, $z_2 = 12 \cdot 23 = 276$
c, $x(0, 0, 24, 0, 0)$, $z_3 = 24 \cdot 15 = 360$
d, $x(0, 0, 0, 8, 0)$, $z_4 = 8 \cdot 42 = 336$
e, $x(0, 0, 0, 0, 9)$, $z_5 = 9 \cdot 33 = 297$
f, ???

Definíciók:

- Egy $x$ vektor megoldás (mo), ha behelyettesítve, nem lépjük túl a készleteket
- Egy $x$ vektor megengedett megoldás (memo), ha megoldás, és komponensei nemnegatív számok
- Egy $x$ vektor optimális megoldás (opt mo), ha megengedett megoldás, és az ilyenek között a "legjobb".

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | Készlet |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Erőf$_1$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 24 |
| Erőf$_2$ | 0 | 1 | 1 | 5 | 1 | 43 |
| Erőf$_3$ | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 18 |
| Haszon | 19 | 23 | 15 | 42 | 33 | |

Példák ezekre:

$x(-1, 1, 1, 1, 1)$ megoldás, de nem megengedett

$x(10, 1, 1, 0, 0)$ megengedett megoldás

Hogyan keressünk optimális megoldást?

- Van-e egyáltalán?
- Ha igen, akkor mennyi van?
- Hogyan találjuk meg?
- Egy lehetséges megoldási módszer: Szimplex Módszer

Hogyan keressünk optimális megoldást?
Vezessük be a következő jelöléseket:

- Az együttható mátrix: $A$,
- az erőforrások készlete: $b$,
- célfüggvény együtthatók: $c$.
- Akkor a feladat a következő:

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
x &\geq 0 \\
z &= c \cdot x \longrightarrow \max
\end{aligned}
$$

Ennek neve: Lineáris Program (LP).
Részletesen kiírva:

Részletesen kiírva:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \qquad\quad & \leq 24 \\
x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 & \leq 43 \\
x_1 \qquad\qquad\qquad + 2x_4 + 2x_5 & \leq 18 \\
x_i & \geq 0, 1 \leq i \leq 5 \\
19x_1 + 23x_2 + 15x_3 + 42x_4 + 33x_5 & = z \rightarrow \max
\end{aligned}
$$

Kezdjük el megoldani. Első lépésként alakítjuk át = feltételekké (maradék változók bevezetésével):

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \qquad\quad + s_1 \qquad &= 24 \\
x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 \quad + s_2 \qquad &= 43 \\
x_1 \qquad\qquad + 2x_4 + 2x_5 \qquad + s_3 &= 18 \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\
19x_1 + 23x_2 + 15x_3 + 42x_4 + 33x_5 &= z \rightarrow \max
\end{aligned}$$

Ennek táblázatos alakja (elhagyjuk az x-eket, csak a lényeges információt hagyjuk meg):
Ami itt van alább: Szimplex Tábla

| $B$ | $x_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 24 | 1 | **2** | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 43 | 0 | 1 | 1 | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $u_3$ | 18 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 0 | $-19$ | $-23$ | $-15$ | $-42$ | $-33$ | 0 | 0 | 0 |

B: bázis (max. független rendszer). Jelenleg: $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, a kanonikus bázis
**bázismegoldás**: $x_B = (0, 0, 0, 0, 0, 24, 43, 18)$.
*jelentése*: olyan megengedett megoldás, hogy ha valamely $a_i$ nincs a bázisban, akkor $x_i = 0$
alsó sor: a célfüggvény értéke, valamint: **redukált költség** (a $c$ vektor ellentettjei)
**Mire jó ez???**

**Tétel** (a szimplex tábla három esete), [Dantzig]

1. Ha a legalsó sorban nincs negatív szám (a redukált költség minden komponense nemnegatív), akkor a bázismegoldás optimális.
2. Ha van negatív szám a legalsó sorban (a redukált költség komponensei között), de az összes ilyen oszlopban a tábla belsejében (az alsó negatív szám fölött) nincs pozitív szám, akkor a célfüggvény felülről nem korlátos.
3. Egyébként (nem is 1. és nem is 2.) vagyis van negatív szám alul, és ezek között olyan is hogy a negatív szám fölött a táblázat belsejében van pozitív szám, akkor végrehajtható olyan báziscsere, amelynek során a célfüggvény értéke nem romlik (általában javul).

Mire jó ez nekünk?

**Szimplex módszer** (Primál szimplex módszer második fázisa)

- Báziscseréket végzünk
- Fenntartjuk a bázismegoldás megengedettségét, ami azt jelenti hogy az $x$ vektor komponensei nemnegatívok kell hogy maradjanak. Ezt biztosítja a **minimum szabály**!!!
- De a célfüggvény növekedjen (ha lehet), olyan oszlop megy a bázisba, ahol a **redukált költség negatív**.
- Ha már a célfüggvény nem tud növekedni, az akkor van ha a redukált költség vektora csupa nemnegatív számból áll, ez az "optimalitás kritériuma". Ekkor megállunk.
- Állítás: A szimplex módszer véges sok lépésben véget ér (megfelelő módon végrehajtva). Általában "gyorsan" véget ér.

Válasszuk a bázisba belépőnek az $a_2$ vektort. A **minimum szabály** akkor a következő: $\min\left\{\frac{24}{2}, \frac{43}{1}\right\}$, az $a_2$ oszlopából vesszük a pozitív számokat, ezek a nevezők; a bázismegoldás oszlopából kerülnek ki a számlálók. A minimum: 24/2, emiatt a "24" sorában választjuk a generáló elemet. Vagyis $u_1$ hagyja el a bázist. A generáló elem angol neve "pivot" elem (vastaggal jelölve a táblázatban).
Hogyan hajtjuk végre a transzformációt?

- A generáló elem sorát elosztjuk a generáló elemmel (vagyis most 2-vel), továbbá
- a generáló elem sorának az 1/2-szeresét levonjuk a második sorból,
- a generáló elem sorának az 0/2-szeresét levonjuk a harmadik sorból,
- a generáló elem sorának a $-23/2$-szeresét levonjuk (vagyis a 23/2-szeresét hozzáadjuk) a célfüggvény sorából (sorához).
- Az előbbi szorzókat (1/2, 0/2, illetve 23/2) hogyan kaptuk: a számlálók a generáló elem oszlopában, a generáló elemtől különböző számok, a nevező mindig a generáló elem. A számolást elvégezve ez lesz a következő táblázat:

ez volt:

| $B$ | $x_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 24 | 1 | **2** | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 43 | 0 | 1 | 1 | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $u_3$ | 18 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 0 | $-19$ | $-23$ | $-15$ | $-42$ | $-33$ | 0 | 0 | 0 |

ez lett:

| $B$ | $x_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_2$ | 12 | $1/2$ | 1 | $1/2$ | $3/2$ | 0 | $1/2$ | 0 | 0 |
| $u_2$ | 31 | $-1/2$ | 0 | $1/2$ | $7/2$ | 1 | $-1/2$ | 1 | 0 |
| $u_3$ | 18 | 1 | 0 | 0 | 2 | **2** | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 276 | $-15/2$ | 0 | $-7/2$ | $-15/2$ | $-33$ | $23/2$ | 0 | 0 |

Most válasszuk az $a_5$ vektort a bázisba belépőnek. A minimum szabály szerint $u_3$ hagyja el a bázist. A számolás után ez lesz a következő táblázat:

ez volt:

| $B$ | $x_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_2$ | 12 | 1/2 | 1 | 1/2 | 3/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 31 | −1/2 | 0 | 1/2 | 7/2 | 1 | −1/2 | 1 | 0 |
| $u_3$ | 18 | 1 | 0 | 0 | 2 | **2** | 0 | 0 | 1 |
| $z$ | 276 | −15/2 | 0 | −7/2 | −15/2 | −33 | 23/2 | 0 | 0 |

ez lett:

| $B$ | $x_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_2$ | 12 | 1/2 | 1 | **1/2** | 3/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 22 | −1 | 0 | 1/2 | 5/2 | 0 | −1/2 | 1 | −1/2 |
| $a_5$ | 9 | 1/2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1/2 |
| $z$ | 573 | 9 | 0 | −7/2 | 51/2 | 0 | 23/2 | 0 | 33/2 |

Egyetlen negatív szám maradt az alsó sorban, ezt kell választanunk hogy bemenjen a bázisba. A minimum szabáy szerint $a_2$ hagyja el a bázist. Összegezve, a célfüggvény változása a következőképpen történik:

- Ha olyan oszlop megy a bázisba ahol negatív a redukált költség, a célfüggvény (általában) növekszik
- Ha olyan oszlop megy a bázisba ahol pozitív a redukált költség, a célfüggvény (általában) csökken
- Ha olyan oszlop megy a bázisba ahol 0 a redukált költség, a célfüggvény nem változik

Az előbbiak csak akkor igazak, ha a bázismegoldás nemdegenerált. Ha a bázismegoldás degenerált, az azt jelenti, hogy van 0 a bázishoz tartozó $x$ értékek között. Jelenleg $B(a_2, u_2, a_5)$ a bázis, és minden érték $x_2, s_2, x_5$ közül pozitív. Vagyis most a bázis nemdegenerált.
Lássuk mi történik a báziscsere után:

ez volt:

| $B$ | $x_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_2$ | 12 | $1/2$ | 1 | $\mathbf{1/2}$ | $3/2$ | 0 | $1/2$ | 0 | 0 |
| $u_2$ | 22 | $-1$ | 0 | $1/2$ | $5/2$ | 0 | $-1/2$ | 1 | $-1/2$ |
| $a_5$ | 9 | $1/2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $1/2$ |
| $z$ | 573 | 9 | 0 | $-7/2$ | $51/2$ | 0 | $23/2$ | 0 | $33/2$ |

ez lett:

| $B$ | $x_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_3$ | 24 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $u_2$ | 10 | $-3/2$ | $-1$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 1 | $-1/2$ |
| $a_5$ | 9 | $1/2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $1/2$ |
| $z$ | 657 | $25/2$ | 7 | 0 | 36 | 0 | 15 | 0 | $33/2$ |

Optimális megoldást kaptunk: $x_B = (0, 0, 24, 0, 9\,|0, 10, 0\,)$.

- 24 illetve 9 egységnyit termelünk a harmadik illetve ötödik termékből (a többiből nem termelünk)
- megmarad 10 egységnyi erőforrás a második erőforrásból
- a célfüggvény értéke 657