A szállítási feladat

Adott egy táblázat, amelynek m sora és n oszlopa van. Tekintsük az alábbit. Itt m=4 és n=4.

8	7	3	2	15
1	4	2	5	43
2	3	4	7	28
1	1	4	4	19
18	32	35	20	

A szállítási feladat

Minden sor megfelel egy raktárnak (tehát most 4 raktár van) és minden oszlop egy boltnak (most 4 bolt van).

8	7	3	2	15
1	4	2	5	43
2	3	4	7	28
1	1	4	4	19
18	32	35	20	

Továbbá minden sor végén látunk számokat, az oszlopok alatt, valamint a táblázat celláiban, a cellák bal felső sarkában. Megmagyarázzuk ezeknek a jelentését.

A szállítási feladat

A sorok végén levő szám a raktárkészletet jelenti. Az oszlop alatti szám a bolt igényét. Feltesszük hogy ezek összege megegyezik.

8	7	3	2	15
1	4	2	5	43
2	3	4	7	28
1	1	4	4	19
18	32	35	20	

Tehát például az első bolt igénye 18 egység valamilyen áruból, és például a harmadik raktár készlete 28, ugyanebből az áruból.

A cellák bal felső sarkaiban levő számok azt jelentik, hogy a megfelelő viszonylatban 1 egység szállítása mennyibe kerül.

A szállítási feladat

A feladat: Szállítsuk el az összes árut az adott készletek és igények figyelembe vételével, minimális összköltséggel.

8	7	3	2	15
1	4	2	5	43
2	3	4	7	28
1	1	4	4	19
18	32	35	20	

Az összes költség a következőképpen számolandó: Ha például az első raktárból az első boltba 3 egységet szállítok, az 3-szor 8 egységbe kerül. Ha 5-öt szállítok, az 5-ször 8 pénzegységbe kerül.

Az É-NY-i módszer

A feladatot kétfázisú módszerrel oldjuk meg. Első fázisban egy megengedett bázismegoldást állítunk elő.

8 15	7	3	2	15
1	4	2	5	43
2	3	4	7	28
1	1	4	4	19
18	32	35	20	

Az egyik legegyszerűbb módszer egy megengedett bázismegoldás előállítására az úgynevezett Észak-Nyugat-i módszer.
A tábla É-Ny-i sarka a bal felső sarok. Itt elszállítunk annyit amennyit csak lehetséges. Ez nem lehet több mint 15, és nem lehet több mint 18. Akkor ezek minimuma, azaz 15 egységet szállítunk itt.

Az É-NY-i módszer

A szállított mennyiséget „nagy” piros számmal jelöljük, a cella „közepén”.

8 15	7	3	2	0
1	4	2	5	43
2	3	4	7	28
1	1	4	4	19
3	32	35	20	

Ezzel az első raktár készletét kimerítettük, és az első bolt igényéből is kielégítettünk 15-öt. Ezeket a számokat levonjuk az első raktár készletéből és az első bolt igényéből, a módosult táblázatot mellékeljük itt balra. Ezek után redukáljuk a táblázatot: az első sorral már nem kell hogy foglalkozzunk. Most a második sor első oszlopa lett az É-Ny-i sarok!

Az É-NY-i módszer

Az előbbi módszert ismételgetve (iterálva), megkapjuk az alábbi megoldást.

8 15	7	3	2
1 3	4 32	2 8	5
2	3	4 27	7 1
1	1	4	4 19

Mint látjuk, a kapott megoldás nem túl bonyolult. Mindazáltal, ha a szállítási egységköltségek nagyjából egyenlők lennének (most nem ez a helyzet), vagy „szerencsés” módon helyezkednének el, tehát éppen olcsó helyeken sikerülne szállítani (most ez sem igaz), akkor az É-Ny-i módszer is képes meglehetősen jó megoldást generálni.

Az É-NY-i módszer

Figyeljük meg, hogy pontosan 7 helyen történik szállítás, ami a sorok száma plusz oszlopok száma -1.

8 15	7	3	2
1 3	4 32	2 8	5
2	3	4 27	7 1
1	1	4	4 19

A kapott megoldás értékét a következőképpen kapjuk: 8-szor 15, plusz 1-szer 3, stb.

A kapott érték: 458.

Vajon sok ez vagy kevés?

Az É-NY-i módszer

Egyszerű alsó korlát számolása:

8 15	7	3	2
1 3	4 32	2 8	5
2	3	4 27	7 1
1	1	4	4 19

Könnyű úgynevezett „alsó korlátot” generálni ara vonatkozólag, hogy legalább mekkora lesz a minimális költség.
Erre egy egyszerű módszer a következő: Az első sorban a legkisebb egységköltség 2. Akkor az első sorban legalább 2-ször 15 forint lesz amit fizetni kell. A második sorban ez legalább 1-szer 43, és így tovább. Akkor a költség legalább 2x15 + 1x43 + 2x28 + 1x19= 148.

Az É-NY-i módszer

Láttuk, az összes költség, tetszőleges megengedett megoldás esetén legalább 148. Az É-Ny-i módszer által kapott megoldás értéke 458.

8 15	7	3	2
1 3	4 32	2 8	5
2	3	4 27	7 1
1	1	4	4 19

Az előbbinél „jobb” alsó korlátot is megpróbálhatunk meghatározni. Ehelyett inkább mutatunk egy másik módszert, amely az É-Ny-i módszernél, az esetek többségében, lényegesen hatékonyabb. Nevezzük Tábla-Minimum módszernek, röviden legyen ez a TM módszer.

A Tábla-Minimum módszer

Kezdjük újra, egy megengedett bázismegoldást állítunk megint elő.

8	7	3	2	15
1 18	4	2	5	43
2	3	4	7	28
1	1	4	4	19
18	32	35	20	

Válasszunk ki egy olyan cellát, ahol a szállítási (egység)költség minimális. Több helyen van 1-es költség, válasszuk például a második sor első celláját. Szállítsunk el itt amennyit csak lehet, ez 18 egység. Utána redukáljuk a táblázatot: az oszlop kiesik, a sorban a raktárkészlet 18-cal csökken.

A Tábla-Minimum módszer

Folytatva (iterálva) az előző lépést, a következő táblázatot (megengedett bázismegoldást) kapjuk:

8	7	3	2 15
1 18	4	2 25	5 5
2	3 13	4 10	7 5
1	1 19	4	4

Jegyezzük meg, hogy ha több cellának van ugyanakkora (és minimális) költsége, akkor ezek közül tetszőlegesen választhatunk.
A kapott megoldáshoz tartozó célfüggvényérték: 256, ami lényegesen jobb, mint amit az É-Ny-i módszerrel kaptunk, az alsó korlátunkhoz is közelebb van.

A Tábla-Minimum módszer

Jelenleg azt tudjuk, hogy az optimumérték 148 és 256 között van.

8	7	3	2 15
1 18	4	2 25	5 5
2	3 13	4 10	7 5
1	1 19	4	4

Még azt is vegyük észre, hogy mindkét módszer (É-Ny-i módszer és TM módszer) a következő lépések ismétléséből áll:

1. kiválasztunk egy cellát
2. ott a lehető legtöbbet szállítjuk
3. a táblát redukáljuk

Csak az 1. lépésben különböznek. Mindkét módszer esetén az igénybe vett cellák száma 7 (sorok+oszlopok-1)

A Vogel-Korda módszer

Bemutatunk egy harmadik módszert is. Ez is az előbbi 3 lépést iterálja, itt is csak az 1. lépés más mint az előbbieknél.

8	7	3	2
1	4	2	5
2	3	4	7
1	1	4	4

Mindhárom ezek szerint mohó módszer. Ez a harmadik módszer (a Vogel-Korda) azonban egy kicsit kevésbé mohó mint az első kettő. Hogyan válasszuk ki az első cellát, ahol majd sokat szállítunk? Ehhez segédváltozókat definiálunk.

A Vogel-Korda módszer

8	7	3	2	15	1
1	4	2	5	43	1
2	3	4	7	28	1
1	1	4	4	19	0
18	32	35	20		
0	2	1	2		

Számoljuk ki soronként és oszloponként a két legkisebb szállítási költség különbségét. Ezeket a számokat zölddel adtuk meg. Például az első sorban 3-2=1, az utolsó oszlopban 4-2=2 a segédváltozó értéke.

A Vogel-Korda módszer

8	7	3	2	15	1
1	4	2	5	43	1
2	3	4	7	28	1
1	1 19	4	4	19	0
18	32	35	20		
0	2	1	2		

Most vegyünk ezek közül egy maximális számot. Ez valamelyik 2-es. Legyen például a második oszlop alatti 2. Akkor ebből az oszlopból válasszunk minimális költségű cellát. Ez az utolsó sorban van. Itt fogunk maximális lehetséges mennyiséget szállítani, ami 19. Eztán a táblázatot redukáljuk, és az előbbi lépéseket ismételjük.