Operációkutatás

2. A kétfázisú szimplex módszer (vázlatos bemutatása)

Dósa György

Pannon Egyetem / Matematika Tanszék

2025

A kétfázisú szimplex módszer

- Az első fázis feladata: megengedett bázismegoldás előállítása
- A második fázis feladata: a megengedett bázismegoldásból kiindulva, optimális bázismegoldás előállítása
- Ha csupa $\leq$ feltétel van, és a jobboldalon csupa nemnegatív szám, akkor nincs szükség első fázisra, ilyen volt a korábbi feladatunk. Egyébként viszont szükség lehet első fázisra.
- A kétfázisú szimplex módszert egy feladat megoldásán keresztül mutatjuk be (részletesebben megtalálható az ajánlott irodalomban).

(Megint) egy termelési probléma

Adott a következő táblázat:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Készlet	a feltétel típusa
Erőf$_1$	1	2	1	3	0	15	$\geq$
Erőf$_2$	0	1	1	5	1	40	$\leq$
Erőf$_3$	1	0	0	2	2	18	$=$
Haszon	25	28	18	40	33		

Vagyis, most az első erőforrásból **legalább** 15-öt, a másodikból **legfeljebb** 40-et, a harmadikból **pontosan** 18-at kell felhasználni!

Megint ezek a kérdések merülnek fel, mint múltkor:
Hogyan keressünk optimális megoldást?

- Van-e egyáltalán?
- Ha igen, akkor mennyi van?
- Hogyan találjuk meg?
  De van még egy fontos kérdés: **Hogyan induljunk**????

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Készlet	a feltétel típusa
Erőf$_1$	1	2	1	3	0	15	$\geq$
Erőf$_2$	0	1	1	5	1	40	$\leq$
Erőf$_3$	1	0	0	2	2	18	$=$
Haszon	25	28	18	40	33		

A feladat modellje most a következő lesz:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \qquad\qquad & \geq 15 \\
x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 & \leq 40 \\
x_1 \qquad\qquad + 2x_4 + 2x_5 & = 18 \\
x_i & \geq 0, 1 \leq i \leq 5 \\
25x_1 + 28x_2 + 18x_3 + 40x_4 + 33x_5 & = z \to \max
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \qquad\quad &\geq 15 \\
x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 &\leq 40 \\
x_1 \qquad\qquad\quad + 2x_4 + 2x_5 &= 18 \\
x_i &\geq 0, 1 \leq i \leq 5 \\
25x_1 + 28x_2 + 18x_3 + 40x_4 + 33x_5 &= z \rightarrow \max
\end{aligned}
$$

Kezdjük el megoldani. Első lépésként alakítjuk át $=$ feltételekké (maradék-, és többletváltozók bevezetésével):

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \qquad - x_6 \qquad\quad &= 15 \\
x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 \qquad + x_7 &= 40 \\
x_1 \qquad\qquad + 2x_4 + 2x_5 \qquad\qquad &= 18 \\
x_i &\geq 0, 1 \leq i \leq 7 \\
25x_1 + 28x_2 + 18x_3 + 40x_4 + 33x_5 &= z \rightarrow \max
\end{aligned}
$$

Ez a sztenderd alak.

Baj van! Nincs elég bázisvektorunk! Hát akkor csináljunk!

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \quad - x_6 \quad + y_1 &= 15\\
x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 \quad + x_7 &= 40\\
x_1 \quad + 2x_4 + 2x_5 \quad + y_2 &= 18\\
x \geq 0, y &\geq 0\\
25x_1 + 28x_2 + 18x_3 + 40x_4 + 33x_5 &= z \to \max\\
-y_1 - y_2 &= z^* \to \max
\end{aligned}
$$

- Az első (induló) bázis ez lesz: $B = \{q_1, a_7, q_2\}$, ahol az x-ek oszlopait a-val, az y-ok oszlopait q-val jelöltük (mesterséges vektorok).
- Csakhogy az y-okat nem lenne szabad használnunk! Akkor meg kell hogy szabaduljunk tőlük. Erre szolgál a z^* célfüggvény, neve: mesterséges (vagy másodlagos) célfüggvény.

Következik az **első fázis**. Ez addig tart, amíg van q vektor a bázisban. (Jelenleg van kettő is.)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \quad - x_6 \quad + y_1 &= 15 \\
x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 \quad + x_7 &= 40 \\
x_1 \quad + 2x_4 + 2x_5 \quad + y_2 &= 18 \\
x \geq 0, y &\geq 0 \\
25x_1 + 28x_2 + 18x_3 + 40x_4 + 33x_5 &= z \to \max \\
-y_1 - y_2 &= z^* \to \max
\end{aligned}
$$

Az első fázis első szimplex táblája:

	B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_1	q_2
-1	q_1	15	1	2	1	3	0	-1	0	1	0
0	u_7	40	0	1	1	5	1	0	1	0	0
-1	q_2	18	1	0	0	2	2	0	0	0	1
	z^*	-33	-2	-2	-1	-5	-2	1	0	0	0

	B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_1	q_2
-1	q_1	15	1	2	1	3	0	-1	0	1	0
0	u_7	40	0	1	1	5	1	0	1	0	0
-1	q_2	18	1	0	0	2	2	0	0	0	1
	z^*	-33	-2	-2	-1	-5	-2	1	0	0	0

Hogyan kaptuk ezt meg:

- baloldalon a q vektorok szorzója -1, az a vektoroknak 0
- a legalsó sorban: a bázisvektorok alatt 0 van.
- a többi szám a legalsó sorban: skalárszorzással. Például $-33 = (-1, 0, -1) \cdot (15, 40, 18)$.

Vagy a_1 alatt a lagalsó sorban: $-2 = (-1, 0, -1) \cdot (1, 0, 1)$.
Vagy a_4 alatt a lagalsó sorban: $-5 = (-1, 0, -1) \cdot (3, 5, 2)$.

A Szimplex módszer **első fázisa**

- A szokásos módon báziscseréket végzünk:
- Fenntartjuk a bázismegoldás megengedettségét: **minimum szabály**!!!
- A célfüggvény növekedjen (ha lehet), olyan oszlop megy a bázisba, ahol a **redukált költség negatív**.
- "Örülünk" ha mesterséges vektor megy ki a bázisból.
- Ha már a célfüggvény nem tud növekedni, az akkor van ha a redukált költség vektora csupa nemnegatív számból áll, ekkor megállunk.
- *Állítás: Ha z^* maximális értéke negatív (marad), akkor az (eredeti) feladatnak nincs megengedett mgoldása. Ha viszont "felmegy" 0-ra, akkor az (eredeti) feladatnak van megengedett megoldása, és áttérünk majd a második fázisra.*

Lássuk a báziscseréket. Ebből:

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_1	q_2
q_1	15	**1**	2	1	3	0	-1	0	1	0
a_7	40	0	1	1	5	1	0	1	0	0
q_2	18	1	0	0	2	2	0	0	0	1
z^*	-33	-2	-2	-1	-5	-2	1	0	0	0

Ezt kapjuk (q_1 kimegy a bázisból, ő többé már nem is kell, oszlopát is töröljük):

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_2
a_1	15	1	2	1	3	0	-1	0	0
a_7	40	0	1	1	5	1	0	1	0
q_2	3	0	-2	-1	-1	2	**1**	0	1
z^*	-3	0	2	1	1	-2	-1	0	0

Még egy báziscsere:
ez volt:

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	q_2
a_1	15	1	2	1	3	0	-1	0	0
a_7	40	0	1	1	5	1	0	1	0
q_2	3	0	-2	-1	-1	2	**1**	0	1
z^*	-3	0	2	1	1	-2	-1	0	0

ez lett (q_2 is kimegy a bázisból, ő sem kell már, az oszlopát töröljük):

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	18	1	0	0	2	2	0	0
a_7	40	0	1	1	5	1	0	1
a_6	3	0	-2	-1	-1	2	1	0
z^*	0	0	0	0	0	0	0	0

Látjuk hogy z^* értéke felment 0-ra, ez azért van mert nincs mesterséges vektor a bázisban, **vége van az első fázisnak**.

Hogyan tovább? (Második fázis)

Itt tartunk:

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	18	1	0	0	2	2	0	0
a_7	40	0	1	1	5	1	0	1
a_6	3	0	-2	-1	-1	2	1	0
z^*	0	0	0	0	0	0	0	0

- az alsó sorra már nincs szükségünk, helyette "visszatérünk" az igazi célfüggvényhez
- az alsó sor számolása megint skalárszorzattal megy majd, de vigyázni kell!

			25	28	18	40	33	0	0
	B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
25	a_1	18	1	0	0	2	2	0	0
0	a_7	40	0	1	1	5	1	0	1
0	a_6	3	0	-2	-1	-1	2	1	0
	z	?	?	?	?	?	?	?	?

az alsó sor számolása (skalárszorzással):

	B	x_B	25 a_1	28 a_2	18 a_3	40 a_4	33 a_5	0 a_6	0 a_7
25	a_1	18	1	0	0	2	2	0	0
0	a_7	40	0	1	1	5	1	0	1
0	a_6	3	0	-2	-1	-1	2	1	0
	z	450	0	-28	-18	10	17	0	0

Például $z = 25 \cdot 18 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 3$
DE !!!
pl. a_2 alatt: $-28 = 25 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) - 28$, vagyis a skalárszorzat eredményéből a fölső számot ki kell vonni.
Ugyanígy pl. a_4 alatt: $10 = 25 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) - 40$.

Innentől ugyanúgy megy tovább, mint korábban, végrehajtjuk a második fázist.
ebből:

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	18	1	0	0	2	2	0	0
a_7	40	0	**1**	1	5	1	0	1
a_6	3	0	-2	-1	-1	2	1	0
z	450	0	-28	-18	10	17	0	0

ez lett:

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	18	1	0	0	2	2	0	0
a_2	40	0	1	1	5	1	0	1
a_6	83	0	0	1	9	4	1	2
z	1570	0	0	10	150	45	0	28

Kész is van a második fázis is.

Értékeljük ki a feladat megoldását:

B	x_B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	18	1	0	0	2	2	0	0
a_2	40	0	1	1	5	1	0	1
a_6	83	0	0	1	9	4	1	2
z	1570	0	0	10	150	45	0	28

- egyedüli optimális megoldást kaptunk!
- $x_{opt}\left(18, 40, 0, 0, 0 \,|83, 0\right)$, vagyis az első termékből gyártunk 18, a másodikból pedig 40 egységnyit.
- Az első erőforrás készletéből $x_6 = 83$-mal többet használunk fel, mint amennyit kötelező. A másik kettőből pontosan annyit amennyi van.
- A célfüggvény értéke 1570.