A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

A hátizsák feladat (angolul „knapsack problem”) egy alapvető (klasszikus) feladat, a korábban tanult többi problémához (pl. szállításai feladat, hozzárendelési feladat) hasonlóan. A következőképpen lehet megfogalmazni:
Adott n darab tárgy és egy hátizsák. Minden tárgy két paraméterrel van jellemezve: adott a tárgy súlya és hasznossága (vagy röviden, haszna).
Legyen az i-edik tárgy súlya w(i), a haszna (értéke) pedig g(i) (ahol az i index 1 és n között megy). Feltesszük, hogy az előző számok mindegyike pozitív egész szám.
Adott továbbá a hátizsák kapacitása (teherbíró képessége), C, ez is pozitív egész.
Például legyenek az adatok a következők (a táblázatban):
Legyen C=16. A feladat a következő:
Mely tárgyakat kell bepakolni a hátizsákba úgy, hogy egyrészt beférjenek, másrészt a bepakolt tárgyak összes haszna a lehető legnagyobb legyen?

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	15	6	11	13	25
w(i)=	6	2	3	5	8

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Néhány triviális esetet könnyen elintézhetünk. Egyrészt, ha minden tárgy befér a zsákba (most nem ez a helyzet), akkor nyilvánvalóan minden tárgyat be kell pakolni, hiszen mindegyiknek pozitív a haszna. Ha viszont a tárgyak összsúlya (most 24) kisebb, mint a C kapacitás (ami most 16), akkor válogatnunk kell. Mindegyik tárgy esetén két lehetőség van: vagy elvisszük, vagy nem. Akkor ez 2^n lehetőség összesen, 5 tárgy esetén ez „csak” $2^5=32$, ami nem túl sok. Megtehetjük, hogy ezt a 32 esetet egyesével mind ellenőrizzük: Egyrészt beférnek-e a kiválasztott tárgyak a zsákba, vagy sem. Ha nem, akkor a lehetőséget elvetjük. Ha igen, kiszámoljuk hogy mekkora összes hasznot produkálnak.

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	15	6	11	13	25
w(i)=	6	2	3	5	8

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Például ha az első négy tárgyat kívánnánk elvinni, ezt a következő vektorral jellemezhetjük: x(1,1,1,1,0). Itt 1 jelenti azt, hogy a tárgyat elvisszük, 0 azt, hogy nem visszük. Ezen tárgyak (az első négy tárgy, ahol a vektorban 1 van) összsúlya 16, ezek tehát együtt beférnek. Akkor ez egy úgynevezett megengedett megoldás.
A hozzá tartozó célfüggvényérték z=15+6+11+13=45.
Ha ilyen módon mind a 32 lehetőséget egyenként megvizsgáljuk, a legjobb célfüggvényértéket kiválasztjuk, megkapjuk az optimális megoldást. Az eljárás neve: Brute Force (vagyis nyers erő). A baj az, hogy mivel az n a kitevőben van, 2^n gyorsan (exponenciálisan) növekszik, tehát nagyobb n esetén az eljárás nem alkalmazható.
Egyelőre tehát annyit tudunk, hogy van olyan megoldás, amelynek értéke 45, de lehet hogy van ennél jobb megoldás is, ezt azonban még egyelőre nem tudjuk. Ezt a 45-ös célfüggvényértékű megoldást akkor kapjuk, ha minden tárgy be van pakolva, kivéve azt, amelyiknek 25 a súlya.

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	15	6	11	13	25
w(i)=	6	2	3	5	8

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Akkor menjünk tovább. Keresnünk kell egy olyan módszert, amely a feladatot hatékonyan megoldja. Több ilyen módszer is van, mi most bemutatjuk az úgynevezett Korlátozás és Szétválasztás módszerét. Ezen a jelenlegi példán szemléltetjük a módszer működését, utána általánosan is összefoglaljuk, hogy hogyan működik egy ilyen algoritmus. Igazából ez nem is egy algoritmus, hanem egy algoritmus-család, vagy más szóval bizonyos típusú feladatok megoldásának egyfajta elve (angol neve „Branch and Bound”). Bizonyos fajta Diszkrét Programozási (DP) feladatok megoldására alkalmas: azt nevezzük DP feladatnak, amikor a megengedett megoldások (szóba jöhető lehetőségek) száma véges (vagy esetleg megszámlálhatóan végtelen). Most a hátizsák feladatra dolgozzuk ki a B&B egy lehetséges változatát. Ehhez először átrendezzük a feladat adatait.

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	15	6	11	13	25
w(i)=	6	2	3	5	8

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Számoljuk ki a g(i)/w(i) arányokat (ezeket fajlagos haszonnak nevezhetjük), azt fejezi ki pl. g(1)/w(1)=15/6, hogy az első tárgy egységnyi súlyára 15/6=2,5 egység haszon esik. (Vegyük úgy az egyszerűség kedvéért hogy a súlyokat kilogrammban, a hasznot pedig forintban mérjük.) Akkor az első tárgy minden kilójára 2,5 forint haszon jut, persze a tárgyakat nem szabad elvágni. De ha „szabad lenne elvágni a tárgyakat”, akkor az első tárgyat szét tudnánk vágni 6 darab egyforma, 1 kilós darabra, és minden darab haszna 2,5 forint lenne. A második tárgy esetén ez 6/2=3 forint, és így tovább. Most tegyük a tárgyakat a fajlagos haszon csökkenő sorrendjébe.

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	15	6	11	13	25
w(i)=	6	2	3	5	8
g/w=	2,5	3	3,66	2,6	3,125

→

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6
g/w=	3,66	3,125	3	2,6	2,5

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Mire jó nekünk ez az új sorrend? Láttuk az előbb, hogy ha a tárgyakat egy kilós darabokra vágnánk, akkor minden egyes kilóra a táblázat alsó sorában felsorolt fajlagos hasznok jutnak. De ha egykilós darabok vannak (minden tárgy egykilós), akkor csak a haszon az amiben különböznek. Akkor nyilván az új sorrendben kell őket bepakolni a zsákba, mindig még egyet, még egyet, addig amíg a zsák be nem telik, és így optimális megoldást kapunk (illetve kapnánk, ha szabad lenne a tárgyakat elvágni). Amikor a feladatnak azt a variánsát tekintjük (amikor a tárgyakat el szabad vágni), ezt az (eredeti) feladat relaxációjának nevezzük. Relaxáció jelentése itt: a korlátok lazítása, enyhítése.

Nyilvánvaló dolog, hogy ha egy feladatot úgy módosítunk, hogy bizonyos „szabályokat" vagy más szóval feltételeket enyhítünk, a korábbinál jobb megoldást kaphatunk.

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6
g/w=	3,66	3,125	3	2,6	2,5

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

(Gondoljunk arra, hogy egy mezei futóversenyen ha csak egy lábbal szabad szökdécselni, ez a szabály, aztán ezt a szabályt enyhítik, tehát szabad a szokásos módon, két lábbal futni, várhatóan a korábbinál jobb eredmények születnek.)
Általánosan is megfogalmazhatjuk az észrevételünket:
A relaxált feladat optimális megoldása legalább „annyira jó”, mint az eredeti feladat optimális megoldása. Mivel most a célfüggvényt maximalizáljuk, a következőről van szó. A relaxált feladat optimumértéke (tehát amikor el szabad vágni a tárgyakat kisebb darabokra) legalább akkora, mint az eredeti hátizsák feladat optimumértéke (amikor nem szabad a tárgyakat elvágni).

A relaxált feladat optimális megoldása, az előbbiek szerint a következő:
r(1,1,1,3/5,0), vagyis az első három tárgy teljesen be lesz pakolva (minden darabjuk) a negyedik tárgynak pedig a 3/5 része (az 5 egykilós darabból 3 darab).

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6
g/w=	3,66	3,125	3	2,6	2,5

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Az r(1,1,1,3/5,0) vektor tehát a relaxált feladat optimális megoldása. Az ehhez tartozó célfüggvényérték pedig $11+25+6+13\cdot 3/5=49{,}8$.
Ez azt (is) jelenti, hogy az eredeti hátizsák feladat optimális (jelöljük z*-gal) célfüggvényértéke nem lehet több mint az előbbi érték, vagyis $z^* \leq 49{,}8$. Ez persze még nem túl sok információ az optimális célfüggvényértékről, egyelőre annyit már tudunk hogy $45 \leq z^* \leq 49{,}8$, hiszen korábban találtunk már olyan megengedett megoldást, amelyhez 45-ös célfüggvény érték tartozik. Jegyezzük meg, hogy itt egyszerre két feladatot tekintünk: az eredeti hátizsák feladatot, és ennek relaxációját. A relaxált feladatot már meg is oldottuk, ennek optimális megoldása 49,8. De mi igazából a nem relaxált feladat optimális megoldására vagyunk kíváncsiak, arról egyelőre csak azt tudjuk, hogy 45 és 49,8 között van.
A két szám különbségét „rés”-nek nevezzük, (ennek angol neve „gap”.)

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6
g/w=	3,66	3,125	3	2,6	2,5

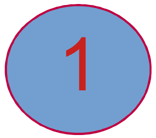
A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

(Mostantól a táblázat alsó sorát nem mutatjuk, a számoláshoz többé nincs rá szükségünk.) Most nekilátunk a B&B módszer kidolgozásának. Ennek során felépítünk egy úgynevezett keresőfát, vagy más néven döntési fát. Csúcsokat és éleket fogunk rajzolni. Kezdetben egy darab csúcs van, ennek neve „az 1-es csúcs". A csúcs alatt megoldjuk a relaxált feladatot, és ezt a megoldást írjuk a csúcs alá, együtt a relaxált feladat optimumértékével. A relaxált feladat optimális megoldása most r(1,1,1,3/5,0), az optimum értéke $11+25+6+13\cdot 3/5 = 42+7{,}8=49{,}8$. Itt ketté vettük az 49,8 értéket. Az első része az egész koordinátákból származik (tehát amely tárgyak teljesen befértek a zsákba, most nevezetesen az első három tárgy együttes haszna 42), valamint a tört értékből: most a negyedik tárgynak csak a 3/5 része van a relaxált optimális megoldásban, ehhez tartozik a maradék 7,8 érték. Továbbá: azért is érdemes az egész és tört koordinátákat külön kezelni, mert az egész koordinátákból adódó (1,1,1,0,0) vektor (a 3/5 tört koordinátát lefelé kerekítettük), az eredeti, tehát a hátiszák feladat számára egy megengedett megoldás. Ennek értéke a fenti 42 szám. Igaz, ennél már jobbat is ismerünk korábbról, amikor 45 volt a célfüggvény értéke.

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Egyelőre tehát így néz ki a keresőfánk:



(1,1,1,3/5,0)
z=42+7,8=49,8

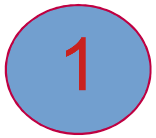
i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6

Következik az, hogy kiválasztunk egy csúcsot. Egyelőre csak egy csúcs van, akkor ezt kell választanunk, az 1-es csúcsot. Mivel még nem végeztünk a feladat megoldásával (nem tudjuk mennyi az optimum), következik egy elágaztatás (branching). Az 1-es csúcs valójában egy halmazt jelent, a feladat összes lehetséges megoldását tartalmazó halmazt, ahol bármelyik változó lehet 0 vagy 1. Ezeknek a lehetőségeknek nem mindegyike megengedett megoldás, hiszen például nem lehet minden koordináta 1 (mert nem fér be az összes tárgy egyszerre a zsákba), de ez nem jelent problémát, az algoritmus szempontjából.
Most az 1-es halmazt ketté bontjuk. Egyik fele az lesz, amikor a negyedik változó 0, a másik fele pedig az, amikor a negyedik változó értéke 1.

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

Még mindig így néz ki a keresőfánk:

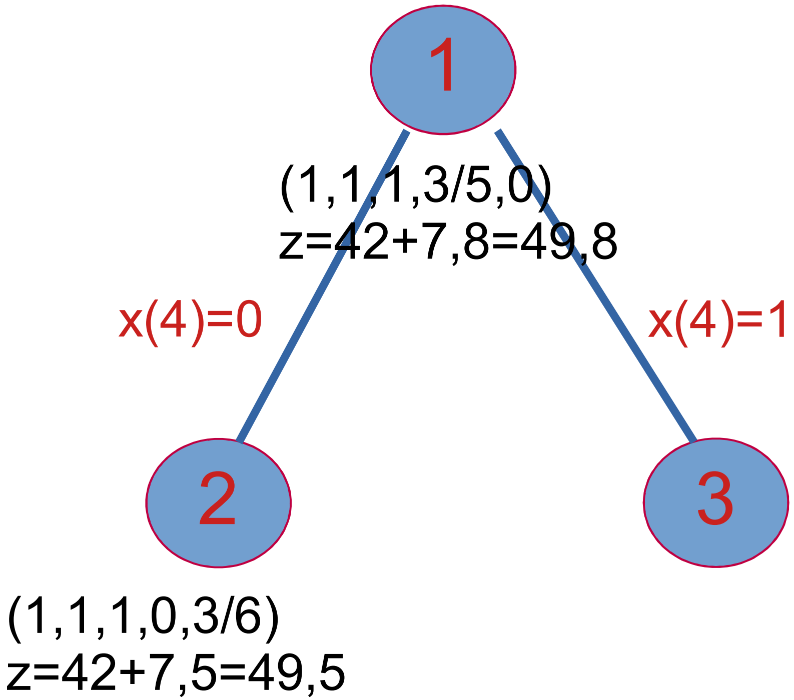
i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6



(1,1,1,3/5,0)
z=42+7,8=49,8

Azért a negyedik változó „mentén” vágjuk ketté a halmazt, mert az előbbi relaxált optimális megoldásban a negyedik változó, vagyis x(4) értéke a tört szám, (nevezetesen 3/5). Akkor tehát húzunk egy élt az 1-es csúcsból lefelé balra és egy másikat lefelé jobbra. Kapunk két újabb csúcsot, ezeket folyamatosan számozzuk, akkor ezek lesznek a 2-es és 3-as csúcsok. Az élekre írjuk a korlátokat, vagyis hogy x(4)=0 ill. x(4)=1. Az új csúcsok alatt pedig kiszámoljuk a csúcshoz tartozó feladat relaxált optimumát. Tehát a 2-es csúcs feladata az az eredeti hátizsák feladat, azzal a megszorítással, hogy x(4)=0, vagyis a negyedik tárgyat nem pakoljuk a zsákba, vagy más szóval, az „nincs is”. A 3-as csúcs feladata pedig az, hogy a negyedik tárgyat betesszük a zsákba, és a többi tárgy a maradék helyeken osztozik majd. Lássuk ezt a következő oldalon.

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel



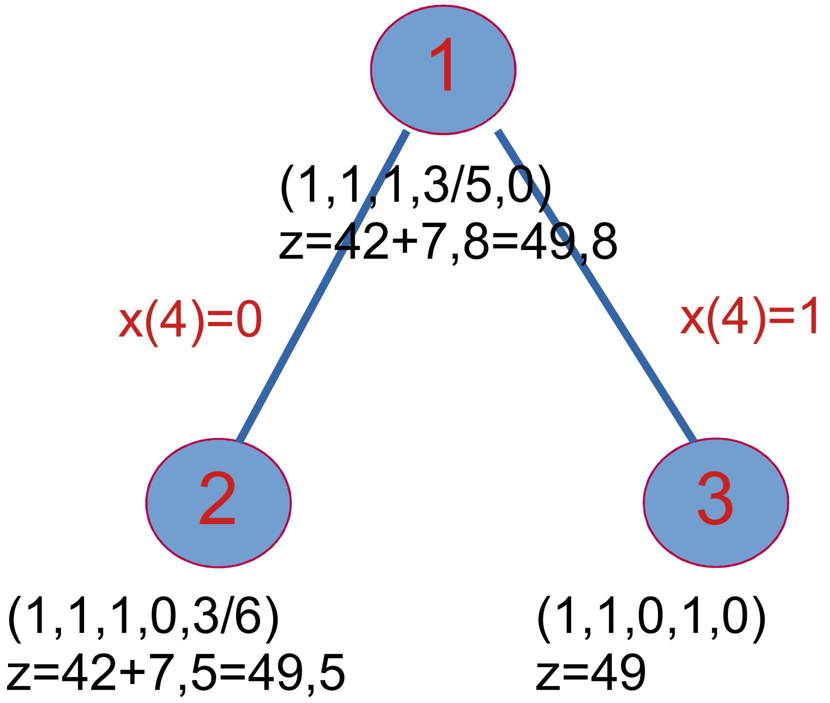
i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6

Figyeljük meg, „hogy jön ki” a két új csúcs esetén a kapott relaxált optimális megoldás. A 2-es csúcs esetén: Az első három tárgy befér a zsákba. A negyedik tárgy az most „nincs”. A maradék 3 kg-nyi helyre befér az utolsó tárgy 3/6 része. A célfüggvényérték pedig

$$11+25+6+15 \cdot 3/6=42+7,5=49,5$$

A 2-es csúcs lényegében az összes lehetséges megoldás halmazának egyik felét jelenti. Látjuk, hogy itt, a lehető legjobb esetben „csak” 49,5 célfüggvényérték érhető el, ami kisebb mint az 1-es csúcsnál levő 49,8. Általában is igaz, hogy ahogy haladunk lefelé, a relaxált optimum értéke soha sem nő, általában csökken.

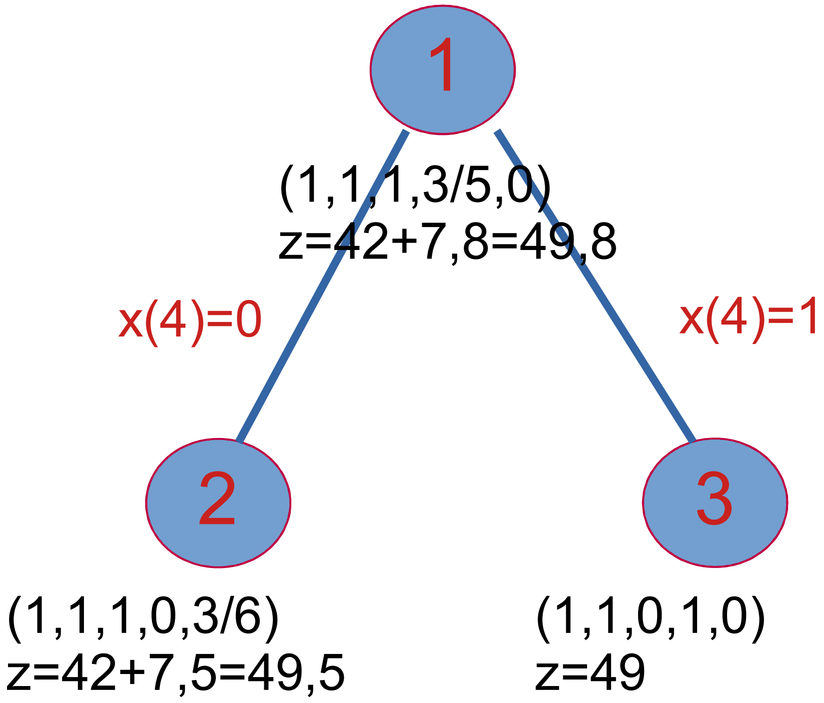
A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel



i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6

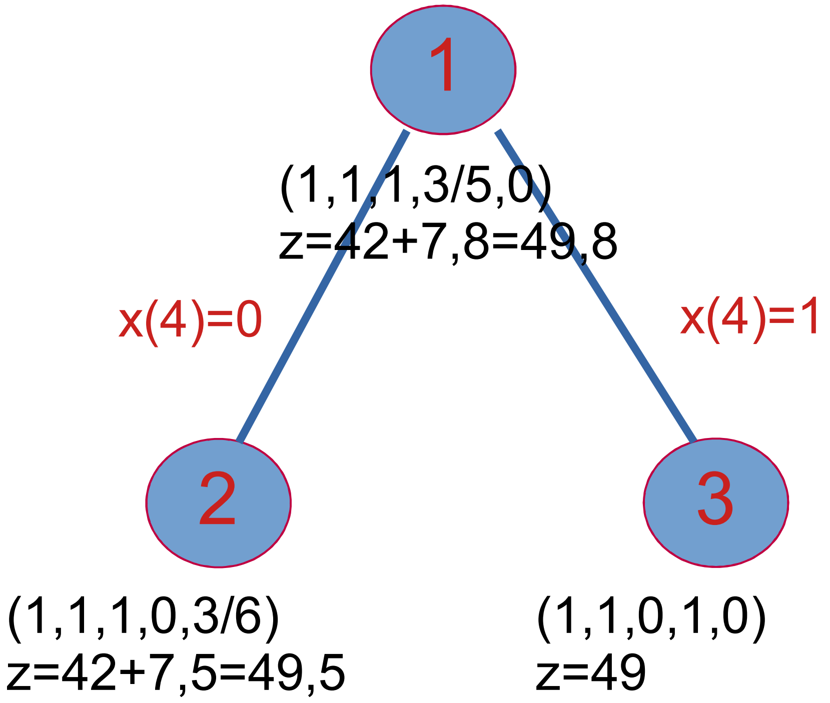
Most végezzük el a számolást a 3-as csúcs esetén: Először betesszük a zsákba a negyedik tárgyat, mert ezt már korábban eldöntöttük (ezen az ágon ez van). Marad 16-5 = 11 hely a zsákban. A tárgyakat (a többi tárgyat) balról jobbra haladva próbáljuk a zsákba tenni. Az első tárgy befér. Ekkor marad még 11-3=8 kilónyi hely, ide éppen befér a második tárgy. Az ehhez a megoldáshoz tartozó célfüggvényérték pedig 11+25+13=49

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel



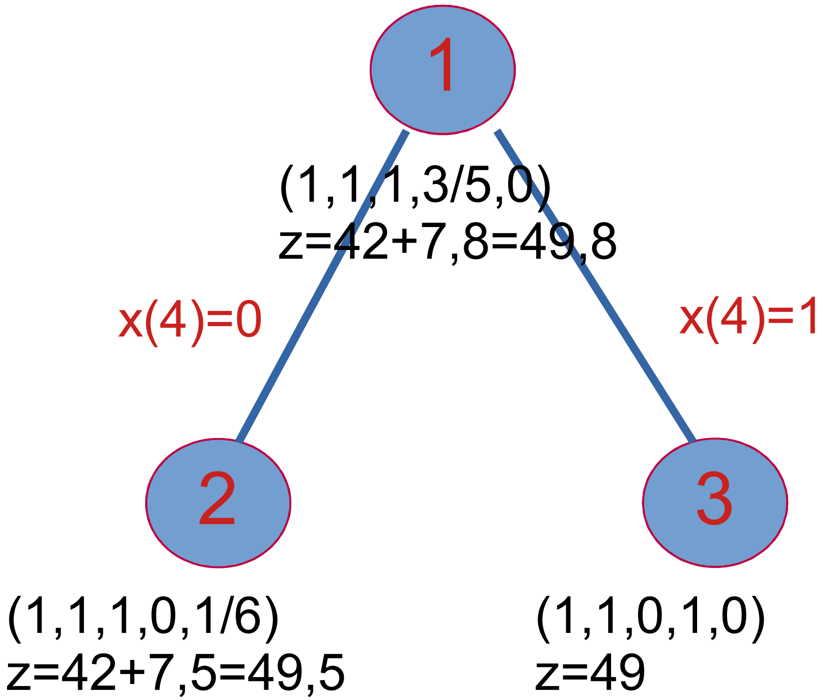
Most elemezzük a helyzetet, mit kaptunk. Megtudtunk-e valami újat a feladatról, ha igen, akkor mit. Egyrészt, az 1-es csúcs esetén is volt már egy új megengedett megoldásunk, nevezetesen x(1,1,1,0,0), ezt úgy kaphatjuk, hogy az 1-es csúcs alatti x(1,1,1,3/5,0) vektorból elhagyjuk a tört koordinátát. Az ehhez a megoldáshoz tartozó célfüggvényérték 42. Ennél azonban jobb az, amit korábban kaptunk, nevezetesen a 45. Minden pillanatban számon tartjuk, hogy mi az „addig talált" legjobb megoldás, tudjuk tehát hogy lehetséges 45-ös célfüggvényértékű megoldást csinálni. Menjünk tovább. A 2-es csúcs esetén a törtkoordinátát ha lefelé kerekítjük, akkor szintén 42 célfüggvényértéket kapunk. A 3-as csúcs esetén viszont 49-et!. Akkor a korábbi 45-ös megoldást elfelejtjük, és helyette megjegyezzük azt, ami ennél jobb, amelynek értéke 49. Ezek szerint az optimális célfüggvényérték, vagyis z* alsó becslése javult, már nem csak azt tudjuk hogy 45 ≤ z*, hanem azt is, hogy 49 ≤ z*.

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel



Másrészt nézzük meg, hogy a két ágon, milyen megoldásokat remélhetünk a „legjobb esetben”, vagy más szóval, változik-e a felső becslésünk (is) a z*-ra vonatkozóan.
A 2-es csúcs esetén a relaxált optimum értéke 49,5, ez azt jelenti, hogy ezen az ágon „talán” kaphatunk még akár 49,5-ös megoldást is, de ennél jobbat nem. Mivel tudjuk hogy az optimum értéke egész szám, ez a 49,5 tulajdonképpen 49-et jelent. (A 2-es csúcshoz tartozó ágon az optimum értéke legfeljebb 49,5, de mivel az optimum egész, így legfeljebb 49.)
A másik ágon is legfeljebb 49-es célfüggvényérték jöhet ki, sőt, ismerünk is egy ilyen vektort: (1,1,0,1,0), amely ezt az értéket produkálja.
Jegyezzük meg, hogy az 1-es csúcs, az már „nincs”, a számításokhoz már nem kell figyelembe vennünk, mert az 1-es halmazt kettéosztottuk, tehát a helyette létrejött 2-es és 3-as csúcsok adják most számunkra a szükséges információt.

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel

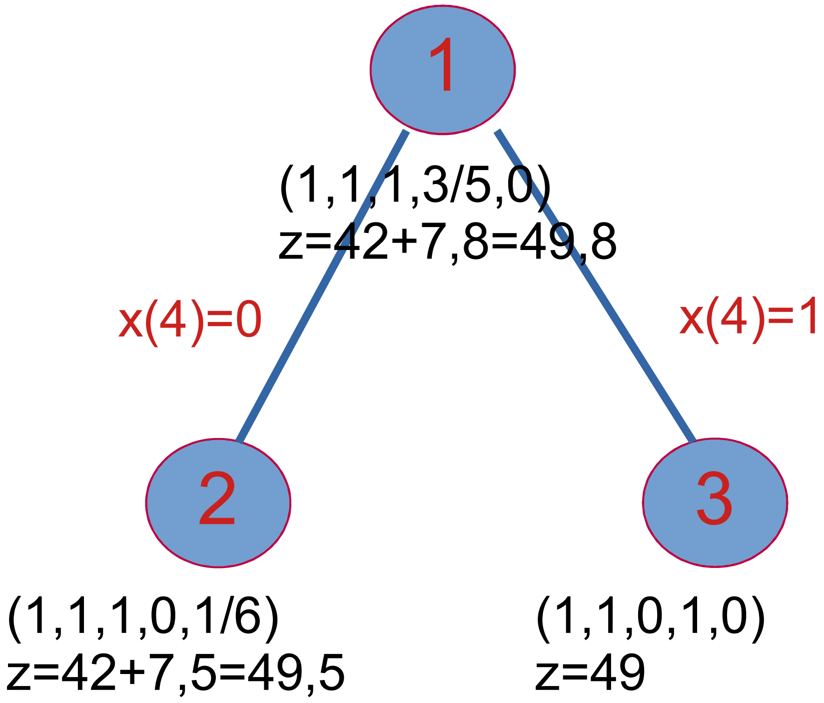


Összefoglalva: egyik ágon sem kaphatunk 49,5-nél jobb megoldást. Akkor ez azt jelenti hogy $49 \leq z^* \leq 49{,}5$. Figyelembe véve, hogy az optimális megoldás értéke egész szám, a 49,5 nyugodtan lefelé kerekíthető, vagyis a

$49 \leq z^* \leq 49$ erősebb becslés is igaz.

Vagyis a rés bezárult, tudjuk hogy $z^*=49$, a feladatot megoldottuk.

A hátizsák feladat, és megoldása a B&B módszerrel



Bemásoltuk újra alulra az adatokat, innen láthatjuk, hogy az (1,1,0,1,0) vektornak megfelelő megoldás a következő: bepakoljuk a zsákba azokat a tárgyakat, amelyeknek a súlya 3, 8, illetve 5. Ezek együttesen beférnek (összsúlyuk éppen 16), együttes hasznuk pedig 49. Nincs olyan megoldás, ahol ennél nagyobb összes haszon keletkezne. Ha azt is szeretnénk megtudni, hogy van-e másik olyan megoldás amely szintén 49-es haszonnal bír, a 2-es és 3-as csúcsokat tovább kellene ágaztatni lefelé, és megtudnánk hogy az egyes ágakon legfeljebb mekkora haszon érhető el. Ha mindenhol lecsökken ez 49 alá, akkor az előbbi (1,1,0,1,0) vektor az egyedüli optimális megoldás, egyébként pedig találunk másik optimális megoldást.

i=	1	2	3	4	5
g(i)=	11	25	6	13	15
w(i)=	3	8	2	5	6

A B&B módszer, általában

A következőkben összefoglaljuk a B&B módszert általánosan. Elöljáróban annyit, hogy a megoldás gráfja általában sokkal nagyobb. A Korlátozás és Szétválasztás (angolul B&B) módszerét minden feladatra másképp kell felépíteni. Mi most a Hátizsák feladatra építettük fel egy lehetséges változatát a B&B algoritmusnak, megjegyezzük, hogy másképp is felépíthető az algoritmus a Hátizsák feladatra, de ezzel most nem foglalkozunk. A jelenlegi változat talán a lehető leghatékonyabb. Most tekintsük át az algoritmus főbb „alkotórészeit”, és lépéseit.

1. Minden pillanatban (az algoritmus végrehajtása során) fenntartunk egy úgynevezett alsó korlátot (LB) és egy felső korlátot (UB), a feladat optimális megoldására (z*-ra) vonatkozólag. Alsó korlátot kaphatunk úgy is, hogy a B&B futása előtt megpróbálunk „jó” megoldásokat keresni. Példánkban így találtuk a 45-ös célfüggvényértékű megoldást. Más heurisztikát is alkalmazhatunk, ezekre most nem térünk ki. Ha nem keresünk előre ilyen „viszonylag jó” megoldást, az se baj, az algoritmus futása során is fogunk ilyeneket találni. Mindig számon tartjuk hogy mi az „eddigi legjobb” megoldás amit ismerünk, ez az alsó korlát értéke. Felső korlátként pedig a relaxált feladat optimális megoldása szolgál. Az alsó korlát és felső korlát között van a „gap”. Ez az algoritmus során fokozatosan kisebb lesz: az alsó korlát növekszik, mert egyre jobb megoldásokat kapunk. A felső korlát pedig csökken, mert egyre inkább kiderül, hogy bizonyos célfüggvényértékeket nem lehet elérni. Ha a gap mérete lecsökken nullára, akkor oldottuk meg a feladatot.

A B&B módszer, általában

2. Szükségünk van egy alaphalmazra, ebben a feladat összes lehetséges megoldása legyen benne, de nem baj ha bővebb halmaz. Ha n a tárgyak száma, az alaphalmazunk egy olyan vektor, amelynek n koordinátája van, és minden koordináta 0 vagy 1. A 0 azt jelenti hogy a megfelelő tárgyat nem pakoljuk be, 1 pedig azt jelenti hogy bepakoljuk.

3. Szétválasztási stratégiát alkalmazunk. Ha még van „gap", tehát az alsó és felső korlát nem egyenlő, valamelyik halmazt kettévágjuk (ez a „branching"). Mindig azt a halmazt vágjuk ketté, amelyik az éppen aktuális felső korlátot adja. Tehát, ha valamelyik csúcs esetén a csúcshoz tartozó relaxált optimumérték mondjuk z1, egy másik csúcs esetén z2, és z2 nagyobb, mint z1, akkor nem a z1-es csúcsot vágjuk ketté. Ha több egyforma a „legnagyobb", tehát több maximális érték is van, ezek közül szabadon választhatunk.

4. Minden lépésben, amikor egy csúcsot kettéválasztunk, két új csúcs keletkezik, ezeknél elvégezzük a szükséges számolásokat (az adott csúcshoz vezető úton levő összes korlátozást figyelembe véve mi a relaxált feladat optimális megoldása ebben a csúcsban). Ezek után az LB és UB értékét aktualizáljuk. Ha kaptunk olyan megengedett megoldást (csupa egész koordinátás megoldást) amelynek célfüggvényértéke jobb, mint a korábbi legjobb ismert megoldásunk, akkor a korábbit eldobjuk, és a mostanit megjegyezzük. Ezzel az LB értéke növekedett.

A B&B módszer, általában

4. (folytatás) Szükségünk van még arra a fogalomra, hogy vannak „élő” és már nem „élő” csúcsok. Ha egy csúcsot kettéosztunk, onnantól már nem él. Ennek az az oka, hogy minden halmazról csak egy hozzávetőleges információt tudunk kapni (nevezetesen hogy mi a halmazhoz tartozó relaxált feladat optimális megoldása), és ez a „tudásunk” javul, ha ketté osztjuk a halmazt, és mind a kettőt az előző módon megvizsgáljuk. Emiatt tehát ha egy halmazt kettéosztunk, utána az már nem él, hanem a „gyerekei” lépnek a helyébe, tehát a belőle képzett két új csúcs. Más módon is kizárhatunk egy halmazt a további vizsgálatból, erről később írunk az 5. pontban.

Ha az összes még „élő” csúcson a felső korlátok maximuma kisebb lett, mint a korábbi maximum (ami az UB értéke), akkor UB-t is aktualizáljuk, ennek ilyenkor csökken az értéke. Tehát ha az összes élő csúcs esetén a relaxált optimumok értéke z1, z2,…, zk (k darab ilyen élő csúcsot feltételezve), és ezek mindegyike kisebb, mint az aktuális UB, akkor UB új értéke az előbbi z1,…,zk számok maximuma lesz.

5. Ha valamelyik csúcs esetén, a csúcshoz tartozó relaxált optimum kisebb, mint LB aktuális értéke, azt a csúcsot kizárjuk a további vizsgálatokból, hiszen a csúcshoz vezető élek feltételei mellett biztos hogy nem találunk olyan megoldást, amely a már megtalált, jelenlegi legjobb megoldásnál jobb lenne. Emiatt ennek a halmaznak a további vizsgálata érdektelen.
Egy másik lehetőség egy csúcs kizárására, ha az odavezető úthoz tartozó feltételek (egyszerre) nem teljesíthetőek. Például előírják a feltételek hogy bizonyos tárgyakat be kell pakolni a zsákba, de ezek (együtt) nem férnek be.

A B&B módszer, általában

Ezek után, a B&B algoritmusunk a következő.

- Kiindulás: Felvesszük az 1-es csúcsot, kiszámoljuk a megfelelő relaxált optimumot, és a célfüggvényértéket.
- Ha LB<UB, megkeressük azt a csúcsot, amelyhez tartozó relaxált optimum a legnagyobb. Ezt a csúcsot ketté osztjuk. A kettéosztás alapja: amelyik koordináta tört a relaxált optimális megoldásban, ezt a koordinátát kerekítjük le illetve föl. Az új csúcsok esetén elvégezzük a szükséges számolásokat.
- Aktualizáljuk LB és UB értékét, és az élő csúcsokat: Ha valamely csúcs esetén az odavezető feltételek nem teljesíthetőek, a csúcsot kizárjuk a további vizsgálatból. Ha a csúcshoz tartozó relaxált optimum kisebb, mint LB, akkor is kizárjuk ezt a csúcsot. Ha találtunk olyan megoldást amely csupa egész koordinátát tartalmaz, és a célfüggvényértéke jobb, mint a jelenlegi LB, akkor LB-t aktualizáljuk (megnöveljük), és a most talált megoldás lesz az „eddigi legjobb". Ezek után, ha LB=UB, megállunk, egyébként menjünk az előző pontra.

Megjegyezzük, hogy általában nem elég 3 csúcsot megvizsgálni, mint abban a példában amelyet előbb láttunk. Több mintapélda, és ezek részletes megoldása fel lesz töltve a Moodle rendszerbe, ezeket kérjük tanulmányozni. Egy példa megoldása nem nyújt elég ismeretet, mert minden példa esetleges. Érdemes ezért több feladatot megoldani, hogy elég változatosak legyenek az esetek, amelyekkel szembesülünk.

A hátizsák feladatoknak (és megoldásuknak) elég nagy irodalma van, egy kézikönyv (2004-es kiadvány) például a következő: https://www.springer.com/gp/book/9783540402862

(A könyv bevezetőjéből idézünk a következő oldalon.)

A B&B módszer, általában

Thirteen years have passed since the seminal book on knapsack problems by Martello and Toth appeared. On this occasion a former colleague exclaimed back in 1990: "How can you write 250 pages on the knapsack problem?" Indeed, the definition of the knapsack problem is easily understood even by a non-expert who will not suspect the presence of challenging research topics in this area at the first glance. However, in the last decade a large number of research publications contributed new results for the knapsack problem in all areas of interest such as exact algorithms, heuristics and approximation schemes. Moreover, the extension of the knapsack problem to higher dimensions both in the number of constraints and in the number of knapsacks, as well as the modification of the problem structure concerning the available item set and the objective function, leads to a number of interesting variations of practical relevance which were the subject of intensive research during the last few years. Hence, two years ago the idea arose to produce a new monograph covering not only the most recent developments of the standard knapsack problem, but also giving a comprehensive treatment of the whole knapsack family including the siblings such as the subset sum problem and the bounded and unbounded knapsack problem, and also more distant relatives such as multidimensional, multiple, multiple-choice and quadratic knapsack problems in dedicated chapters.