

## Alcuni chiarimenti sulla Meccanica Quantistica riguardanti il problema della coscienza

Jaime Julve

### Premessa

Parliamo spesso di MQ come ambito di fenomeni che possono essere alla base dei misteri della coscienza, articolata in vari livelli che arrivano fino alla “coscienza di sé”. Quando ci occupiamo anche degli aspetti filosofici e interpretativi di questa teoria, talvolta non precisiamo sufficientemente a quale tra i suoi sviluppi e ambiti di validità facciamo riferimento, per cui alludiamo frequentemente alle funzioni d’onda, probabilità, campi quantistici, ecc. senza delimitare troppo il loro campo di applicazione.

In questo contributo azzarderemo un chiarimento di alcuni concetti della teoria che più ci riguardano, così come sono interpretati e usati dai fisici di oggi. Per efficacia comunicativa, rifuggiremo finché possibile le equazioni e il linguaggio specialistico, concedendoci anche uno stile più colloquiale. Per favorire la continuità del discorso rimanderemo alcune spiegazioni a dei Box a fine testo. Per un maggiore approfondimento non abbiamo fatto una ricerca delle pubblicazioni in italiano, ma possiamo suggerire al meno un testo in inglese<sup>1</sup> aggiornato e con particolare attenzione agli aspetti introduttivi per i non specialisti.

### Introduzione

L’aggettivo “quantistico” si usa in netta contrapposizione a quello di “classico” caratterizzante la fisica e tutta la scienza fino alla fine dell’800. Nel **Box 1** ricordiamo i più clamorosi fallimenti della fisica classica, e quindi della normale intuizione cui siamo abituati da sempre, che hanno obbligato a creare il paradigma quantistico al prezzo di dovere accettare concetti di base con aspetti altrettanto clamorosi, radicalmente nuovi e spesso contro-intuitivi.

La teoria così nata nel primo ventennio del secolo scorso è la MQ non Relativistica (che indicheremo ancora con MQ), da distinguere dalla posteriore Teoria Quantistica dei Campi (QFT, **Box 2**), per non parlare della molto più recente e innovativa Teoria delle Stringhe, tutta da testare. La MQ nacque per dare risposta a comportamenti sorprendenti del mondo microscopico e della radiazione nel regime che oggi classifichiamo come di “bassa energia”: l’effetto fotoelettrico, l’emissione e l’assorbimento della radiazione da parte della materia con le righe spettrali nel caso degli atomi, e il decadimento radioattivo per citarne alcuni.

I fenomeni della chimica, e della biologia in particolare, alla scala atomico-molecolare coinvolgono energie di pochi electronVolt (eV), pienamente nel rango delle basse energie, dove la MQ ordinaria, cioè non relativistica, è pienamente valida nel senso di descrittiva. Naturalmente l’attività del cervello e la trasmissione dei segnali tra i neuroni, classicamente ascrivibile a reazioni chimiche, trasporto di sostanze, ioni e correnti elettriche, trova una più compiuta descrizione a scala molecolare con la MQ.

---

<sup>1</sup> Guido Fano e S. M. Blinder, *Twenty-First Century Quantum Mechanics: Hilbert Space to Quantum Computers*, Ed. Springer, 2017. Particolarmente utile il Cap. 5 sull’entanglement e la coerenza quantistica.

Non solo, è nelle recenti proposte che gli aspetti più bizzarri della MQ, come la sua intrinseca non-località, offrono possibilità interpretative di osservazioni neurologiche nelle quali molti processi mentali vedono coinvolte simultaneamente ampie zone dell'encefalo nell'elaborazione dell'informazione, della percezione e sicuramente della coscienza. Per una panoramica delle proposte più significative<sup>2,3,4</sup> rimandiamo alle relazioni presentate nei recenti Convegni di Scienza e Metafisica e negli Incontri Interdisciplinari.

### Cenni di Meccanica Quantistica

Quando si studiano sperimentalmente gli atomi e le particelle (elettroni, fotoni, ecc.) aspetti come le traiettorie, la posizione e la velocità, protagonisti della descrizione classica, perdono rilevanza (non che non esistano in ogni circostanza o non siano mai osservabili) di fronte alla energia o al momento (o quantità di moto delle particelle  $p = mv$ ). Torna invece strumentale il concetto di “stato quantistico” (di una particella, di un atomo, di un sistema in generale), del quale si possono misurare, con eventuali limitazioni, posizione, momento, energia o altro.

I principi del nuovo paradigma faticosamente costruito (interpretazione di Copenhagen della MQ) si condensano in un insieme di Postulati (**Box 3**) che si implementano matematicamente con la teoria degli Operatori Hermitiani e gli Spazi di Hilbert basati sui numeri complessi (**Box 4**). L'insieme degli stati fisicamente possibili di un sistema, dati dalle rispettive funzioni d'onda, costituisce infatti uno spazio di Hilbert (**Box 5**). Questa assunzione, lungi dall'essere solo una formalità matematica, è gravida di conseguenze: ci dice che la sovrapposizione (cioè la combinazione lineare) di due stati quantistici è uno stato quantistico. Detta degli elettroni può non destare particolare perplessità, ma se trasposta all'ambito macroscopico avremmo il clamoroso paradosso del “gatto di Schrödinger”, che quantisticamente si può trovare nello stato vivo, morto o in qualsiasi combinazione di entrambi.

Una prima mostra della strana “non località” e dei correlati effetti istantanei a distanza viene data dal collasso della funzione d'onda in questo esempio: un elettrone con momento ben definito ha una probabilità di presenza distribuita (cioè la sua funzione d'onda ha un valore non nullo) in **tutto** lo spazio, ma se ne misuriamo la posizione e otteniamo un risultato  $x$ , la funzione “collassa” istantaneamente passando da essere sparpagliata in **tutto** lo spazio a concentrarsi esclusivamente in quel punto  $x$ , che è poi *random*, cioè aleatorio.

Ci sono molti aspetti basilari della teoria e diversi sistemi fisici tipici di obbligato trattamento in un corso di laurea, come la quantizzazione dell'oscillatore armonico o degli stati dell'atomo, l'effetto tunnel, ecc. Tuttavia, per la sua plausibile rilevanza nel funzionamento del cervello e anche perché R. P. Feynman, grande fisico e premio Nobel, lo riteneva forse il comportamento più squisitamente distintivo della MQ, ci limiteremo invece nel seguito a introdurre il fenomeno dell'*entanglement* (intreccio) quantistico.

---

<sup>2</sup> R. Casadio in *Mondo della vita e meccanica quantistica*, Incontro Interdisciplinare Scienza e Fede, Bologna 25 ottobre 2021.

<sup>3</sup> M. Di Febo in *Un modello matematico della conoscenza*, XXXIX Convegno Scienza e Metafisica, Bologna 1-3 ottobre 2021. Vedere particolarmente l'Appendice.

<sup>4</sup> A. Spadoni *Mente cervello*, XXXIX Convegno Scienza e Metafisica, Bologna 1-3 ottobre 2021.

## L'intreccio quantistico

Per presentarlo può essere utile un modello<sup>5</sup> costruito con elettroni, che riguardo allo *spin* (momento angolare interno, quantizzato) hanno solo due stati possibili, cioè *up* ( $\uparrow$ ) e *down* ( $\downarrow$ ). Naturalmente lo stato (equivalente a funzione d'onda, che indicheremo in **grassetto**) più generale **A** di un elettrone, chiamiamolo elettrone A, sarà una sovrapposizione delle due possibilità:

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{A}_{\uparrow} + a_2 \mathbf{A}_{\downarrow}$$

con coefficienti complessi  $a_1$  e  $a_2$  tali che  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$  (**Box 4 e 5**). Notiamo ancora che questa natura degli stati quantistici ha già implicazioni molto forti: racchiude in sé il paradosso di poter esser vivo e morto nel contempo. L'insieme di tutti questi stati possibili di A costituisce lo spazio di Hilbert  $H_A$ . Prendiamo un'altro elettrone indipendente B nel suo stato generale

$$\mathbf{B} = b_1 \mathbf{B}_{\uparrow} + b_2 \mathbf{B}_{\downarrow}$$

con le stesse precisazioni su  $b_1$  e  $b_2$  e il relativo spazio  $H_B$ , e pensiamo ora al sistema composito (*bipartite system*) fatto di questi due elettroni. Lo stato congiunto del sistema bipartito AB costituito dai sistemi A e B indipendenti non è altro che il banale appaiamento delle loro possibilità, cioè

$$(\mathbf{AB})_{\text{ind}} = (a_1 \mathbf{A}_{\uparrow} + a_2 \mathbf{A}_{\downarrow}) \cdot (b_1 \mathbf{B}_{\uparrow} + b_2 \mathbf{B}_{\downarrow})$$

$$[1] \quad = a_1 b_1 \mathbf{A}_{\uparrow} \mathbf{B}_{\uparrow} + a_1 b_2 \mathbf{A}_{\uparrow} \mathbf{B}_{\downarrow} + a_2 b_1 \mathbf{A}_{\downarrow} \mathbf{B}_{\uparrow} + a_2 b_2 \mathbf{A}_{\downarrow} \mathbf{B}_{\downarrow}$$

Questi stati danno luogo allo spazio di Hilbert  $H_A \times H_B$  (detto il “prodotto diretto” di  $H_A$  e  $H_B$ ). Ma come conseguenza del postulato quantistico per cui che tutte le sovrapposizioni degli stati composti  $\mathbf{A}_{\uparrow} \mathbf{B}_{\uparrow}$ ,  $\mathbf{A}_{\uparrow} \mathbf{B}_{\downarrow}$ ,  $\mathbf{A}_{\downarrow} \mathbf{B}_{\uparrow}$  e  $\mathbf{A}_{\downarrow} \mathbf{B}_{\downarrow}$ , cioè le combinazioni aventi la forma generale<sup>6</sup>

$$[2] \quad \mathbf{AB} = c_{11} \mathbf{A}_{\uparrow} \mathbf{B}_{\uparrow} + c_{12} \mathbf{A}_{\uparrow} \mathbf{B}_{\downarrow} + c_{21} \mathbf{A}_{\downarrow} \mathbf{B}_{\uparrow} + c_{22} \mathbf{A}_{\downarrow} \mathbf{B}_{\downarrow} \quad ,$$

sono stati fisici possibili del sistema bipartito, lo spazio  $H_A \times H_B$  contiene stati che non hanno la forma [1]. In effetti se A e B sono indipendenti i coefficienti  $c_{ij}$  hanno la forma  $c_{ij} = a_i b_j$  che vediamo in [1], e si può dimostrare che allora soddisfano alla proprietà necessaria e sufficiente

$$[3] \quad c_{11} c_{22} = c_{12} c_{21}$$

---

<sup>5</sup> Simile a quello fatto con l'esempio di un atomo con due stati 0 e 1, discusso in occasione dell'Incontro Interdisciplinare sul computer quantistico, che può essere utile rivisitare.

<sup>6</sup> Con l'unica restrizione di avere, come sempre, i coefficienti complessi  $c_{ij}$  normalizzati alla probabilità totale 1, cioè  $|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2 + |c_{21}|^2 + |c_{22}|^2 = 1$ . Per esempio negli stati in [4] e [5] abbiamo  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

Tutti gli stati che non soddisfano alla proprietà [3] non corrispondono quindi a sub-parti A e B indipendenti: si dice allora che sono stati *entangled*. In questi casi A e B sono legati tra di loro come componenti di un sistema unico più grande. Ci sono casi particolari come lo stato (detto “singoletto” di spin totale zero)

$$[4] \quad \sqrt{1/2} (\mathbf{A}_\uparrow \mathbf{B}_\downarrow - \mathbf{A}_\downarrow \mathbf{B}_\uparrow)$$

(in cui  $c_{11} = c_{22} = 0$ ,  $c_{12} = \sqrt{1/2} = -c_{21}$  e quindi  $c_{11} c_{22} = 0$  mentre  $c_{12} c_{21} = -1/2$ ), oppure

$$[5] \quad \sqrt{1/2} (\mathbf{A}_\uparrow \mathbf{B}_\uparrow + \mathbf{A}_\downarrow \mathbf{B}_\downarrow)$$

e altri simili, di cui si dice che sono “massimamente intrecciati” o “stati di Bell” per la loro rilevanza nel paradosso di Einstein-Rosen-Podolsky: infatti se facciamo una misurazione dello *spin* sullo stato A in [4] e otteniamo per esempio il risultato *up*, allora abbiamo certezza che B si trova nello stato di *spin* opposto, cioè *down*, per quanto siano fisicamente lontani l’uno dall’altro. Se otteniamo che A è *down*, allora B è *up*. In [5] invece A e B sono entrambi *up* o entrambi *down*, ma sempre il risultato della misurazione dello *spin* di A determina completamente il risultato in B.

La conclusione importante è che per questi stati intrecciati, la perturbazione associata alla misurazione dello *spin* di A si ripercuote istantaneamente in B. Tuttavia ciò non vuole dire che il fenomeno serva per trasmettere istantaneamente informazione da A a B con effetti causali (così violando il limite relativistico della velocità della luce) perché il risultato della misurazione in A è *random* e di conseguenza lo è il risultato in B. Il fatto che, per esempio in [4], sia opposto (massima correlazione) non elimina l’aleatorietà del risultato di B, solo la condivide con A.

### Commenti e conclusioni

Come si è già più volte commentato nelle nostre riunioni, si moltiplicano gli indizi, se non prove, che la Meccanica Quantistica abbia un ruolo fondamentale nella base fisica dei processi mentali, come pare già lo abbia in delicati processi biologici come la fotosintesi o la sensibilità degli uccelli migratori al campo magnetico terrestre. In particolare pare che alcuni processi mentali coinvolgano il funzionamento sincronizzato e simultaneo di estese aree del cervello.

Nella storia dell’evoluzione delle teorie scientifiche troviamo lo schema ricorrente che per capire (nel modesto senso di descrivere) il comportamento della natura procediamo a semplificare la realtà (in maniera da renderla trattabile matematicamente) in modelli articolati in torno a leggi fondamentali in senso riduzionista. La fisica fornisce l’esempio archetipico. Invariabilmente poi, portate queste leggi agli estremi del campo di applicabilità per cui sono state create, conducono spesso a situazioni limiti di singolarità matematica, di accettabilità logico-filosofica o anche di assurdità. Abbiamo già commentato il caso delle masse finite puntiformi nella gravitazione newtoniana o l’azione istantanea a distanza. Nella MQ ci troviamo di fronte alla non località estrema delle funzioni d’onda, che impregnano di presenza di una particella tutto lo spazio e collassano istantaneamente a un punto, o il potere essere vivi e morti nel contempo. A volte queste difficoltà si risolvono transcendendo le teorie con altre nuove (caso della relatività nel problema dell’azione a distanza, del principio quantistico d’indeterminazione che scompagina l’idea di massa puntiforme) o con trucchi matematici più o meno eleganti (la rinormalizzazione in QFT). Nel primo caso le difficoltà, lungi dal rappresentare una incomodità o prezzo da pagare, hanno fornito la spinta a trovare soluzioni creative che hanno aperto le porte a nuovi e sorprendenti scenari.

Della MQ possiamo dire in primo luogo che nonostante le sue bizzarrie funziona con sbalorditiva precisione e che quindi afferra qualche lembo della verità. Alcune sue implicazioni derivanti dalla non località e dall'entanglement sono alla base della possibilità del computer e della crittazione quantistiche, così come di qualche realizzazione elementare di teletrasporto. Questa affascinante ricerca trova per noi proiezioni molto promettenti sul funzionamento del cervello e la coscienza con concetti ricchi di potenzialità, al meno per la descrizione di situazioni inedite altrimenti inesprimibili. Così è possibile immaginare l'emergenza dei fenomeni mentali, come la coscienza, dalla complessità degli intrecci dei sistemi quantistici *multipartite* verosimilmente presenti nel cervello, di cui quello bipartito che abbiamo presentato è solo un assaggio. Così è anche suggestivo il collegamento tra la conservazione quantistica dell'informazione (**Box 6**), gli universi paralleli e l'immortalità di alcuni livelli della coscienza<sup>4</sup>. L'interesse aggiunto della MQ è che, oltre a fornire una nuova cornice concettuale, ha una implementazione matematica che, da genuina scienza galileiana, consente calcoli quantitativi con risultati numerici (reali!) riscontrabili con le osservazioni.

Concludiamo affrontando un giustificato sospetto: ci troviamo davanti a un nuovo meccanicismo? Certamente sì, ma con tante falle. Per cominciare la MQ non può essere una ultima parola, se non altro perché ignora la gravitazione e con essa aspetti fondamentali dello spaziotempo, e questa saldatura è il grande e duraturo problema aperto della scienza fondamentale odierna. In secondo luogo, dietro al problema del collasso dovuto a un atto di osservazione c'è la presenza di una coscienza: quella di un osservatore esterno e classico, cioè situato fuori dallo schema. Si può obiettare però che per provocare il collasso non è necessario l'osservatore cosciente, basta aggiungere all'apparecchiatura di misurazione un computer che registri i dati: Ma allora abbiamo preparato un artefatto strutturato da un progetto, dietro al quale c'è sempre *qualcuno*, e forse basta la sua coscienza di progettista per disturbare l'esperimento causando il collasso, sia pur per frapposta apparecchiatura. Una interconnessione *top-down* o *down-top* tra gli stati quantistici (e il loro collasso o perdita della coerenza) del sistema osservato, e gli stati mentali dell'osservatore<sup>3</sup>? Come sempre, la Realtà sarà sicuramente molto più in là.

\*\*\*\*\*

## Box 1

### Fallimenti e limiti della fisica classica

Elencheremo alcuni casi emblematici che ci sembra colpiscano più fortemente la nostra intuizione classica e che quindi ci suggeriscono che nel mondo microscopico le cose sono veramente diverse e strane.

#### **IL MOTO DEGLI ELETTRONI NEGLI ATOMI**

Da quando Rutherford scoprì che gli atomi sono fatti di un nucleo di carica elettrica positiva attorno al quale orbitano leggeri elettroni (negativi) trattenuti dalla attrazione elettrostatica, si pensò subito alla analogia con un sistema planetario. Solo che si sa che le cariche elettriche accelerate irradiano onde elettromagnetiche (e quindi energia), come nel caso degli elettroni che oscillano all'interno dell'antenna di una emittente di radio. Il calcolo classico mostra che gli elettroni dovrebbero precipitare verso il nucleo in circa  $10^{-8}$  secondi, il che ovviamente non succede: gli atomi sono stabili, cosa particolarmente evidente nella materia solida. Non solo, classicamente le orbite possono, come nel caso dei pianeti, avere qualsiasi raggio ed energia e quindi gli elettroni nel cambiare orbita dovrebbero emettere uno spettro continuo di luce, diciamo l'intero arcobaleno. Invece lo spettro che si osserva ha una struttura "a righe" di frequenze (cioè energie) discrete. Si desume quindi che solo alcune orbite sono consentite. Le traiettorie degli elettroni negli atomi sono inosservabili per cui, in pieno spirito positivista, ci si limita a parlare di "orbitali", di cui conosciamo solo l'energia ed il momento angolare. Succede inoltre che ci possono stare al massimo solo due elettroni in ogni orbitale, e che quando i più bassi (nel senso di energia e in qualche modo di vicinanza al nucleo) sono occupati, allora sono stabili, cioè gli elettroni "girano" lì dentro, sì, ma senza irradiare energia! Tutto un nonsenso per la fisica classica.

#### **DUALITÀ ONDA-PARTICELLA**

Nei metalli gli atomi si organizzano in forma reticolare, con gli elettroni in parte legati ai singoli atomi e in parte liberi di circolare nella rete, perciò sono conduttori dell'elettricità. Per strappare un elettrone alla massa metallica bombardandola con fotoni ci vuole una energia minima di soglia, che è più bassa per i metalli alcalini (tipo il sodio, per il quale basta la luce ordinaria): è l'effetto fotoelettrico. Solo che "classicamente" si dovrebbe pensare che, per una data lunghezza d'onda, a maggiore intensità della luce incidente maggiore sarà l'energia degli elettroni espulsi, ma non è così: si vide che questa energia dipendeva solo della frequenza della luce (ricordiamo che nei fenomeni ondulatori l'energia è proporzionale alla frequenza e al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione). È qui che il genio di Einstein, in uno dei suoi lavori da Nobel, collegò la recente ipotesi dei quanti di Planck (concepita per rendere ragione dello spettro di radiazione dei corpi caldi, che classicamente dovrebbero emettere nelle frequenze più alte) alla soluzione del mistero: la luce è onda classica, ma anche fatta di granelli, i fotoni, la cui energia è  $E = h \nu$ , dove  $\nu$  è la frequenza e  $h$  la costante di Planck. L'intensità è correlata invece al numero di fotoni. Poi si scoprì che questa dualità onda-particella è universale, riguarda tutti gli oggetti materiali e forme di energia, ma è più visibile per le particelle leggere come l'elettrone, proprietà sfruttata nel microscopio elettronico.

Concludiamo che, anche se la soluzione a questi problemi data dalla teoria quantistica adotta idealizzazioni con conseguenze bizzarre (non località, intreccio, ecc.), se non assurde in occasioni, è bene sottolineare che anche le idealizzazioni della fisica classica portate al limite ci regalano alcune assurdità: per esempio parlare di masse finite puntiformi significa densità infinita, e nella legge della gravitazione di Newton la loro forza di attrazione diventa infinita se sono arbitrariamente vicine. Il senso comune ci fa scartare queste situazioni come non realistiche, e anche questa cautela si deve osservare con la MQ, solo che il confine è molto più intricato e oggetto di intensa ricerca.

## Box 2

### Meccanica quantistica e Teoria quantistica dei campi.

La MQ ordinaria ignora la teoria della Relatività Ristretta: In effetti, alle basse energie, molto sotto la massa dell'elettrone (0.511 MeV), le particelle in gioco hanno velocità molto inferiore a quella della luce  $c$  e i fotoni non sono capaci di creare coppie elettrone-positrone. In questo regime il numero di particelle si conserva: gli elettroni, gli atomi, interagiscono tra loro d'accordo con la teoria e si raggruppano in diversi modi, ma né si creano né scompaiono.

Invece con gli acceleratori di particelle o nella radiazione cosmica, si supera il MeV anche per ordini di grandezza, sicché negli urti tra particelle regolarmente si creano e annichilano nuove particelle (che possono viaggiare a velocità vicina a  $c$ ) nel rispetto della popolare formula  $E=mc^2$ . Siamo in pieno ambito della relatività ristretta, che deve essere giocoforza incorporata nella teoria. Nasce così la QFT (Teoria quantistica dei campi). Nella sua struttura matematica si usano sempre Operatori matematici che agiscono in Spazi astratti, ma questa volta si tratta principalmente di *operatori di campo* (i noti "campi quantistici") che contengono operatori di creazione e di annichilazione che agiscono nello "spazio di occupazione" (Spazio di Fock) dei diversi tipi di particella elementare. Quando la QFT tratta di fotoni ed elettroni (Quantum Electrodynamics, QED) la precisione è sbalorditiva, riuscendo a predire il valore sperimentale del momento magnetico dell'elettrone fino alla ottava cifra decimale, un record insuperato in tutta la fisica. Quando la si usa per descrivere il resto delle particelle fondamentali e forze subatomiche, dà luogo al Modello Standard delle Particelle Elementari, pienamente in vigore da cinquant'anni. Va detto però che ignora la gravitazione.

Tuttavia nel rango di energie che le è proprio, la MQ ordinaria funziona anch'essa con straordinario successo ed è alla base della microelettronica, il laser, la risonanza magnetica e tante altre applicazioni pratiche come forse il futuro computer quantistico. Con grande uso di computer tradizionale, è anche capace di calcolare le proprietà, particolarmente la distribuzione di densità elettronica, di molecole di interesse biologico che determinano le loro funzionalità biologiche o farmacologiche.

### Box 3

#### Postulati della Meccanica Quantistica

I diversi autori li presentano talvolta in ordine un poco cambiato, con aggiunta di altri dettagli o raggruppati con leggere varianti, ma le implicazioni restano essenzialmente le stesse:

1. Un sistema (il suo stato quantistico) è completamente descritto da una funzione d'onda, usualmente rappresentata dalla lettera greca  $\Psi$  (Heisenberg).
2. L'evoluzione nel tempo di  $\Psi$  è data dall'equazione di Schrödinger.
3. La descrizione della natura è essenzialmente probabilistica. La probabilità di un evento è data dal quadrato del valore assoluto della sua funzione d'onda (regola di Born). La funzione d'onda, che ha valori complessi, rappresenta “ampiezza di probabilità”.
4. Non si possono conoscere contemporaneamente con precisione i valori di tutte le proprietà di un sistema (Principio d'indeterminazione di Heisenberg). Le proprietà che non si conoscono con precisione si descrivono probabilisticamente.
5. La materia, come l'energia, mostra una dualità onda-particella. Un esperimento può mostrare l'una o l'altra proprietà, ma non entrambe contemporaneamente (Principio di complementarità di Bohr).
6. Gli apparecchi di misurazione sono essenzialmente classici e misurano proprietà classiche come la posizione, il momento, l'energia, il momento angolare, ecc.
7. La descrizione mecano-quantistica di sistemi grandi (nel numero di particelle ed energia totale) deve approssimarsi alla descrizione classica (Principio di corrispondenza di Bohr e Heisenberg).
8. Due particelle di *spin* semi-intero (dette *fermioni*, come l'elettrone), nello stesso stato quantistico non possono occupare la stessa posizione nello spazio (Principio di esclusione di Pauli).



## Box 4

### I numeri complessi

Ricordiamo brevemente i diversi tipi di numeri:

- Naturali :  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- Interi:  $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- Frazionari (detti anche razionali):  $n/m$ , dove  $n$  e  $m$  sono interi.  
Hanno infinite cifre decimali, ma con una certa periodicità.
- Irrazionali: per esempio la radice quadrata di numeri positivi non quadrati perfetti come  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ecc., il numero aureo e altri.  
Hanno infinite cifre decimali, ma senza periodicità.
- Trascendenti:  $\pi$ ,  $e$  (base dei logaritmi neperiani), e altri numeri speciali in matematica.  
Hanno infinite cifre decimali, sempre senza periodicità.

L'insieme di questi numeri costituiscono i numeri detti **Reali**, che sono usati nella vita ordinaria.

La radice quadrata dei numeri negativi sono i numeri **Immaginari**.

L'unità immaginaria è  $i = \sqrt{-1}$  e ha la proprietà fondamentale  $i^2 = -1$

In generale si può scrivere  $\sqrt{-a} = i \sqrt{a}$ , con  $a$  reale positivo.

Abbinati ai numeri reali, i numeri immaginari danno luogo ai numeri **Complessi**, che hanno la forma generale  $z = a + i b$ , cioè hanno una parte reale  $a$  e una parte immaginaria  $i b$ .

Si definisce il complesso coniugato  $z^*$  di  $z$  come  $z^* = a - i b$ , e quindi si ha  $z^* z = a^2 + b^2$  reale positivo. Si chiama modulo o valore assoluto di  $z$  il numero reale positivo  $|z| = \sqrt{(z^* z)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ .

## Box 5

### Spazi di Hilbert e Osservabili

Si chiama Spazio di Hilbert “uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto interno”. Insieme alla teoria degli Operatori Hermitiani in questi spazi, costituisce la realizzazione matematica dei postulati della MQ. Questi spazi possono avere poche, molte o infinite dimensioni, dipendendo da quanti autostati abbia il sistema.

Tralasciamo di spiegare il significato generale di questi concetti e ci concentriamo su alcuni aspetti d’interesse, ancora sull’esempio degli stati di *spin* in un sistema con solo le due possibilità *up* e *down*, come è il caso degli elettroni. L’Operatore  $\Sigma_z$  della componente verticale dello *spin* determina cosa sia *up* e *down*, insieme ai corrispondenti “auto-stati” (o “autofunzioni”)  $\Psi_{\uparrow}$  e  $\Psi_{\downarrow}$ :

$$[5-1] \quad \Sigma_z \Psi_{\uparrow} = \frac{1}{2} \Psi_{\uparrow} \quad \Sigma_z \Psi_{\downarrow} = -\frac{1}{2} \Psi_{\downarrow}$$

dove  $\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$  sono i rispettivi “auto-valori”. Per l’elettrone (particella “fermionica” con *spin*  $\frac{1}{2}$ ) esistono solo questi due autostati, che hanno i detti autovalori.

Lo stato più generale  $\Psi$  è una combinazione lineare (detta sovrapposizione) dei due autostati, cioè

$$[5-2] \quad \Psi = c_1 \Psi_{\uparrow} + c_2 \Psi_{\downarrow}$$

con coefficienti  $c_1$  e  $c_2$  complessi. L’insieme degli stati  $\Psi$  costituisce uno Spazio di Hilbert  $H$  di 2 dimensioni complesse. I coefficienti  $c_1$  e  $c_2$  si chiamano “ampiezze di probabilità” perché i loro moduli al quadrato, cioè  $|c_1|^2$  e  $|c_2|^2$  rappresentano rispettivamente la probabilità che nella misurazione dello *spin* di  $\Psi$  il risultato sia  $+\frac{1}{2}$  (cioè *up*) o  $-\frac{1}{2}$  (cioè *down*).

Il fatto che deva per forza essere o l’uno o l’altro si traduce nella condizione  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ .

Questi postulati si completano stabilendo che la perturbazione dello stato  $\Psi$  del sistema provocata dalla misurazione consiste nel fatto che l’azione dell’operatore  $\Sigma_z$  su  $\Psi$  lo fa “collassare” nell’autostato  $\Psi_{\uparrow}$  con ampiezza di probabilità  $c_1$ , oppure in  $\Psi_{\downarrow}$  con ampiezza  $c_2$ .

A ogni grandezza fisica misurabile (con risultati sempre reali) corrisponde un operatore lineare  $O$ , detto un “Osservabile”, che agisce in  $H$ . Esempi sono gli operatori di posizione  $X$ , di momento  $P$ , di energia  $H$  (**Box 6**), di momento angolare  $\Sigma$  (di cui  $\Sigma_z$  è la componente lungo l’asse verticale), e altri. Il requisito che siano hermitiani garantisce che i risultati della misurazione, cioè gli autovalori, siano reali. L’equazione agli autovalori (di cui [5-1] sono esempi), è  $O \Lambda_i = \lambda_i \Lambda_i$ , dove  $\lambda_i$  sono gli autovalori e  $\Lambda_i$  le autofunzioni, per cui l’azione lineare di  $O$  su uno stato generale  $\Psi = c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + c_3 \Lambda_3 + \dots$  produce un altro stato

$$O \Psi = c_1 \lambda_1 \Lambda_1 + c_2 \lambda_2 \Lambda_2 + c_3 \lambda_3 \Lambda_3 + \dots$$

Come si vede, le probabilità in MQ (en anche nella QFT da essa derivata), che hanno valori reali positivi, hanno un precursore nelle ampiezze di probabilità, che hanno valori complessi. Dal punto di vista matematico le ampiezze sono molto più rilevanti e ricche d’informazione. La stessa funzione d’onda di una particella, per esempio  $\Psi(x)$  in rappresentazione di coordinate, è l’ampiezza di probabilità di trovare la particella nella posizione  $x$ , mentre  $|\Psi(x)|^2$  è la (densità di) probabilità di trovare la particella nella posizione  $x$ .

Il fatto che la sovrapposizione degli stati avvenga per mezzo delle ampiezze piuttosto che delle probabilità è cruciale nella MQ e rende possibili i fenomeni di interferenza che si osservano: la somma di due ampiezze può essere nulla (interferenza distruttiva), mentre la somma di due probabilità è sempre positiva.

## Box 6

### Hamiltoniana e evoluzione temporale

L'operatore di energia  $H$  è il cosiddetto operatore *hamiltoniano* (derivato dalla funzione hamiltoniana classica) che caratterizza quantisticamente il sistema perché ne determina l'evoluzione temporale mediante l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi$$

e anche gli autostati dell'energia  $\Psi_E$  mediante l'equazione agli autovalori  $H \Psi_E = E \Psi_E$ , detta anche equazione di Schrödinger indipendente dal tempo. Tralasciamo di dare qui la forma esplicita di  $H$  in termini degli operatori cinematici di posizione  $X$  e momento  $P$ , o ancora come operatore differenziale, già presentata in altre nostre riunioni<sup>3</sup>.

È importante notare invece che, essendo  $H$  un operatore hermitiano, l'operatore di evoluzione temporale che ne deriva è "unitario" e quindi conserva non solo le probabilità, ma le ampiezze nella espansione di  $\Psi$  in termini delle autofunzioni  $\Psi_E$  si evolvono con un fattore di fase (numero complesso di modulo 1), il che conserva anche l'informazione del sistema, mentre il collasso (che non è una evoluzione "unitaria") della funzione d'onda la perde. Questa osservazione è alla base delle proposte di teorie di "multiverso", secondo le quali nell'atto di una misurazione (che ci dà comunque un risultato), il resto dell'informazione in  $\Psi$  sopravvive in universi paralleli che si creano in quell'istante.

In altre situazioni meno drastiche del collasso, il sistema può perdere l'informazione parzialmente per interazione con l'ambiente circostante (altre particelle di cui non conosciamo lo stato quantistico; le apparecchiature di misurazione sono "classiche" e costituiscono il caso estremo). Si parla allora di "perdita della coerenza" quantistica e in questi casi è utile sostituire la funzione d'onda  $\Psi$  con l'operatore "matrice di densità", sul quale non ci soffermeremo.

## Impostazione logica, linguaggio comune e MQ

In tutte queste costruzioni assiomatiche o basate su principi, dalla matematica alla fisica, ecc., si tratta di definizioni dal puro valore formale (anche se nel caso delle scienze della natura, come la fisica, i principi coinvolgono termini dotati di un significato o valore di verità che intende rapportarsi alla realtà materiale, esterna al sistema logico-formale) e con proprietà dalle implicazioni formali.

D'altra parte, soprattutto nella MQ che è ricca di concetti spesso senza precedenti nell'esperienza comune (classica), mancano i termini per descriverli e frequentemente si attinge al linguaggio comune con il rischio di indurre a equivoci.

Per esempio, nella matematica e con scusa a chi già li conosce, è chiaro che non si parla di numeri

- naturali in contrapposizione a artificiali,
- razionali in contrapposizione a fuori di senno,
- irrazionali in contrapposizione a sensati (anche se per i pitagorici...),
- immaginari come sinonimo di fantastici,
- complessi in contrapposizione a semplici.

Un altro esempio: se non si è molto precisi, in certi momenti e riguardo soprattutto ai rapporti di causalità, possono sorgere equivoci indotti dalle accezioni dei diversi termini dominanti all'interno di correnti filosofiche o di pensiero affermate nella cultura comune, o addirittura scontri con i preconcetti più radicati: così nel caso della misura fatta su una delle parti di un sistema bipartito, (A e B nell'esempio di due stati intrecciati), quando diciamo che il risultato trovato per A determina (fraintendendo causa) quello per B.

Credo sia valida invece questa allegoria canina: se ho un cane dentro a un cassone di legno stretto e allungato con una finestrina in un estremo e una seconda nell'altro, non so a priori come sia messo l'animale, ma sono sicuro che se guardo in una e vedo coda, allora sono sicuro che nell'altra vedrei un muso, anche se non ci vado a guardare. Ma questo non intende dire che il muso sia causato dal mio avere osservato la coda. L'impostazione della MQ sarebbe questa: esiste il sistema (stato quantistico o funzione d'onda, con tutto ciò che comporta) bipartito "cane", e esistono i sottosistemi "estremità anteriore" e "estremità posteriore". Entrambe possono essere coda o muso. Se il cane è "intrecciato" (ma la MQ contempla anche quelli non intrecciati come caso altrettanto comune!) so solo che se l'una è muso, l'altra è coda. Ignoro come sia messo il cane dentro al cassone\* e cosa aspettarmi se apro una finestrina, ma se lo faccio e vedo coda, so che nell'altra vedrò muso, non importa quanto sia lungo il cane. Tuttavia non si instaura un rapporto di causalità efficiente tra coda e muso per il fatto di aprire una delle finestrine, il quadro concettuale è un'altro.

\* In questa espressione si è anche infilato un'altro preconcetto profondamente classico: nel pensiero comune diamo per scontato che "in realtà" il cane c'è, che ha un muso e una coda, e che nello stretto cassone è messo orientato in un modo o nell'altro, indipendentemente dal mio andare a guardare o no. La MQ nega questo presupposto "realista" (che è alla base delle proposte di "variabili occulte", smentite dagli esperimenti che confermano le disuguaglianze di Bell) dicendo che non si tratta di ignoranza, ma che dentro al cassone c'è una cosa descritta da una funzione d'onda (che il Postulato n.1 afferma essere tutta l'informazione che possiamo avere di quella cosa, e che è una informazione completa), che se apriamo il coperchio vediamo che è un cane vivo oppure morto, e che, se è di razza "intrecciata", nell'aprire un finestrino vediamo coda o muso con la consueta correlazione con ciò che vediamo nell'altro, e nulla di più! Tutto il resto sono pregiudizi classici di cui "ci si dovrebbe vergognare".