

La modellizzazione matematica della natura e della materia: è sufficiente?

Incontri Interdisciplinari, 20 novembre 2017. J. Julve.

Dalla intuizione pitagorica sul valore fondante del Numero nel mondo materiale, assunta a livello di fede nella fisica classica da Laplace, passando per lo stupore novecentesco di fronte ad alcuni successi della fisica moderna, siamo passati ad una maggiore consapevolezza dei limiti della modellizzazione matematica del mondo fisico e a capire che probabilmente (o necessariamente?) la Natura supererà sempre le sue capacità descrittive.

Un breve percorso storico ci può fornire la guida che ci porta alla situazione odierna:

- PITAGORICI: “il Numero, principio e sostanza di tutte le cose, fondamento dell’armonia della realtà”.
- GALILEO: “Il libro della Natura è scritto in lingua matematica” (*Il saggiaiore*).
- LAPLACE: “[...se] una mente [potesse] tener conto di tutte le forze [della] natura [...], assieme alla rispettiva situazione degli esseri che la compongono, [...] per essa niente sarebbe incerto ed il futuro, così come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.” (*Essai philosophique sur les probabilités*)
- E. WIGNER: “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Physical Sciences” (*Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, #1, 1960),.
- A. EINSTEIN: “La cosa più incomprensibile dell’Universo è che esso sia comprensibile”, **però...** “Finché le leggi della matematica si riferiscono alla realtà, non sono certe, e finché sono certe, non si riferiscono alla realtà”. (*Sentenze*).

Possiamo convenire che la Matematica è un linguaggio logico formalizzato, trattabile (consente di fare calcoli analitici e quantitativi) e universale che permette di disegnare mappe (modelli, rappresentazioni) della realtà, ma ha anche la capacità di creare “mondi” indipendenti da essa.

Consistenza interna e completezza della matematica

Dagli studi sulle fondamenta della matematica, che ebbero il loro apogeo nella prima metà del novecento (Cantor, Bolzano, Peano, Hilbert, Poincaré, Frege, Russell, Whitehead, Gödel, ecc.), è ormai un fatto acquisito che la matematica (ogni sistema logico-formale con al meno la complessità della aritmetica) non può essere nel contempo consistente e completo.

Dal punto di vista della conversione di ogni problema matematico in un algoritmo implementabile in un computer ideale, la situazione si traduce (Turing, Church; Post, ecc.) nel riconoscimento che ci sono algoritmi per cui l’*halting problem* (saper dire se il calcolo si fermerà approdando ad un risultato dopo un numero finito, per quanto grande, di operazioni) non ha soluzione.

Non ci soffermeremo su questi punti perché sufficientemente noti o perché semplicemente li assumeremo come un dato di fatto.

Mondi matematici

Nonostante i limiti anteriormente segnalati, nei suoi territori di decidibilità certa, la matematica è capace di creare mondi autonomi (nel regno platonico delle idee) rispetto della realtà materiale. Elenchiamo le geometrie non euclidiani, anche se nel novecento la geometria riemanniana ha trovato una implementazione nello spazio-tempo curvo della gravitazione einsteiniana. Storicamente anche la teoria delle funzioni analitiche di variabili complesse ha avuto una creazione e uno sviluppo indipendenti dalle necessità della fisica, ma nella trattazione di sistemi con periodicità circolari (elettrotecnica), e con ruolo fondante nella teoria quantistica, finalmente ha trovato piena applicazione.

Tuttavia la matematica ha mostrato di riservarci sempre delle sorprese con la scoperta di mondi alieni, oggi come oggi, alla realtà fisica che conosciamo. Ne citeremo due: gli oggetti frattali (con l'esempio degli insiemi di Julia e Mandelbrot, che mostrano una insospettata struttura di dettaglio *infinitamente* ricca e variegata che si può analizzare con precisione arbitrariamente alta), e la stessa esistenza di proposizioni formalmente corrette, dette godelliane, la cui veridicità è indecidibile e dalla cui decisione arbitraria possono scaturire nuovi costrutti matematici (esempio delle geometrie non euclidiani).

Matematica e realtà

Dal punto di vista del linguaggio logico formale, il primo approccio rigoroso al problema della sua corrispondenza con il reale (il “mondo”) è il *Tractatus logico-philosophicus* di Wittgenstein. Sono famose alcune sue proposizioni.

L'ipotesi Riduzionista presuppone che la Natura si debba poter ridurre a leggi fondamentali semplici e in numero finito. Inoltre, per ciò che riguarda la formulazione matematica, le semplificazioni (idealizzazioni) sono inevitabili per poterle formulare e poi trattare analitica o numericamente.

I modelli così costruiti hanno riscosso alcuni successi sbalorditivi. Ricordiamo per esempio quelli della dinamica orbitale celeste e la navigazione spaziale, oppure le predizioni della Relatività Generale. Il record di precisione corrisponde al calcolo teorico (con l'Elettrodinamica quantistica e includendo solo l'interazione elettrone-fotone) e la misurazione sperimentale del momento dipolare magnetico anomalo dell'elettrone ($g = 2,002319304362$) che coincidono fino alla nona cifra decimale, sufficiente a giustificare le citate considerazioni ammirative di Wigner. Comunque questo straordinario risultato non ci deve illudere sul possesso della verità ultima anche in una questione così ristretta: si ignora se il calcolo perturbativo usato sia convergente, e d'altra parte non si sono considerate le altre forze e particelle elementari in gioco, che daranno contributi rilevabili a livelli di precisione maggiori.

Per le semplificazioni adottate, i modelli della realtà che ne risultano hanno sempre una applicabilità limitata a certi ambiti e presentano problemi ed insufficienze:

- Danno risultati assurdi in situazioni limite nella meccanica newtoniana e l'elettrodinamica classica, come per esempio quelli legati all'idea di particelle puntiformi con la massa o carica elettrica finite.
- Come limiti di applicabilità, la gravitazione newtoniana non è più valida per campi gravitazionali intensi o dalla variazione rapida. La Relatività Generale che la sostituisce ha però problemi nelle distanze molto piccole, dove dovrebbe fondersi con la teoria quantistica, questione oggi aperta.
- Va anche detto che la Relatività Ristretta, modificazione della meccanica newtoniana per le alte velocità, è semplice, non se ne conoscono violazioni e in principio si integra bene con la teoria

quantistica. Tuttavia l'applicazione della risultante Teoria quantistica dei campi al mondo delle particelle trova una gerarchia di difficoltà la cui soluzione ha portato alla teoria delle stringhe. Comunque la meraviglia di Einstein espressa dalla prima sentenza sopracitata è giustificata e comprensibile.

- Non sono capaci di affrontare la complessità, normalmente connaturale ai casi reali: la dinamica gravitazionale di sistemi a tre o più corpi è analiticamente irrisolvibile e caotica. La Meccanica Statistica, mentre ha successo in situazioni semplici come nella teoria cinetica dei gas (se ne derivano le leggi della termodinamica), nella complessità del mondo reale, anche con il meccanismo della selezione naturale, è ben lontana dal poter fornire un valore alle probabilità di emergenza della vita in un ambiente prebiotico e dell'intelligenza in una biosfera evoluta. La visione di Laplace è completamente fuori dalla realtà.

- In sistemi relativamente semplici come gli atomi singoli, se si vogliono tenere in conto tutte le interazioni reali tra le parti del sistema (nucleo ed elettroni orbitanti), non c'è soluzione esatta calcolabile e si deve procedere per approssimazioni matematiche (teoria delle perturbazioni) e calcolo numerico. Lo stesso succede con la pratica totalità delle situazioni nei sistemi fisici reali d'interesse. Con la corrispondenza terminologica esatto↔certo, la seconda sentenza einsteniana sopracitata descrive pienamente la situazione.

- Le leggi fondamentali della fisica (e dell'intera scienza in senso riduzionistico) si esprimono spesso come equazioni differenziali. Trovare le soluzioni nei casi concreti richiede conoscere le condizioni iniziali (o al contorno in generale), e si pone il problema (fondamentale in cosmologia, in rapporto anche con il problema antropico e i parametri empirici del Modello Standard) di decidere se ci sia più conoscenza del sistema nella legge o in dette condizioni. In un certo senso, le leggi fondamentali inevitabilmente lasciano sempre cose fuori: "l'unica mappa esatta e completa della Cina è la Cina stessa".

- La teoria fondamentale finale (candidato a TOE) più popolare per il mondo subatomico è la Teoria delle Stringhe. La deludente scoperta è che ci sono circa 10^{500} versioni matematicamente consistenti della teoria, pressappoco l'inverso della probabilità che i parametri empirici del Modello Standard delle particelle abbiano i valori antropici del universo che conosciamo. Quindi queste teorie hanno quasi nulla capacità predittiva, e quindi scarso significato scientifico nel senso di Popper, riducendosi nella pratica a un linguaggio.

Conclusioni

La visione dei pitagorici proponeva un fondamento dell'intera realtà materiale e trascendente mentre Galileo, da credente, si fermava alla prima. Con Laplace e il materialismo scienziato si mantiene l'ambizione e si nega persino la seconda. Invece, anche in piena era illuminista, si è fatta strada l'idea che possiamo aspirare solo ad avere modelli parziali e limitati della realtà.

Al giorno d'oggi è difficile respingere l'idea che, nelle pieghe dell'incalcolabilità nelle situazioni reali delle teorie accettate, della complessità, del carattere empirico delle condizioni al contorno, dell'esistenza di proposizioni matematiche corrette ma indecidibili (potenziali modelli), la Natura si riservi sempre la possibilità di sorprenderci con comportamenti o fenomeni nuovi, imprevedibili per le teorie vigenti.