Esercizi (riduzione di coniche in forma canonica) (Maggio 2009)

Esercizio 1. *Studiare la seguente conica*

$$x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 + 2\,x + y - 1 = 0 \tag{1}$$

Soluzione. Anzitutto scriviamo le due matrici

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $\det \tilde{A} = -\dfrac{25}{4} \neq 0$, dunque la conica è non degenere, inoltre $\det(A) = 0$, si tratta dunque di una **parabola**. Una forma canonica sarà quindi del tipo

$$bY^2 = 2cX.$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. Abbiamo cioè $b = 5$ e $c = \pm\sqrt{-\dfrac{det\tilde{A}}{b}} = \pm\sqrt{5}/2$. Cioè abbiamo

$$5Y^2 = \pm\sqrt{5}X.$$

Il segno di c dipende dall'orientamento dei nuovi assi (e dunque dal cambio di coordinate) e si può determinare sperimentalmente usando un punto della conica.
Cerchiamo ora di determinare l'asse, il vertice, il fuoco, la direttrice della parabola.
I Metodo: gli autospazi relativi a λ_1 e λ_2 sono

$$V_0 = kerA = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \;\; ; \;\; V_5 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \; .$$

Normalizzando gli autovettori, possiamo considerare il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix}$$

Possiamo sostituire in (1) oppure usare $D\overline{Z} \cdot \overline{Z} + 2Q^T B \cdot \overline{Z} + C = 0$, cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} - 1 = 0.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $5\overline{Y}^2 + \sqrt{5}\,\overline{X} - 1 = 0 \Rightarrow 5\overline{Y}^2 = -\sqrt{5}\,(\overline{X} - 1/\sqrt{5}) = 0$. Infine ponendo

$$\begin{cases} X = \overline{X} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ Y = \overline{Y} \end{cases}$$

otteniamo la forma canonica

$$5Y^2 = -\sqrt{5}X^2.$$

Il cambio di coordinate che permette di passare da (1) alla forma canonica è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ Y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dunque $V = (2/5, 1/5)$ è il vertice della parabola. Per trovare l'asse, la direttirce, i fuochi, basta considerare il cambio di coordinate inverso

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

<u>II Metodo</u> L'asse della parabola è parallelo all'autospazio di A corrispondente all'autovalore nullo (A è una matrice singolare). Nel caso in cui $a_{12} \neq 0$, l'asse è parallelo alla retta di equazione cartesiana

$$a_{11}x + a_{12}y = 0\ ;$$

nel nostro caso l'asse è quindi parallelo alla retta di equazione $x - 2\,y = 0$. La retta tangente nel vertice della parabola è parallela alla retta di equazione cartesiana $a_{12}x - a_{11}y = 0$ ed ammette quindi un'equazione del tipo:

$$a_{12}x - a_{11}y + t = 0$$

con t reale da determinare in modo tale che l'intersezione con la parabola sia ridotta ad un solo punto: il vertice. Nel nostro caso:

$$2\,x + y + t = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -2\,x - t$$

imponiamo che il sistema

$$\begin{cases} y = -2\,x - t \\ x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 + 2\,x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 25\,x^2 + 20\,tx + 4\,t^2 - t - 1 = 0$$

abbia una sola soluzione:

$$(20\,t)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (4\,t^2 - t - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 100\,t + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

quindi il vertice ha coordinate $V = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. La retta tangente nel vertice ha equazione

$$2\,x + y - 1 = 0\ ;$$

l'asse della parabola ha equazione

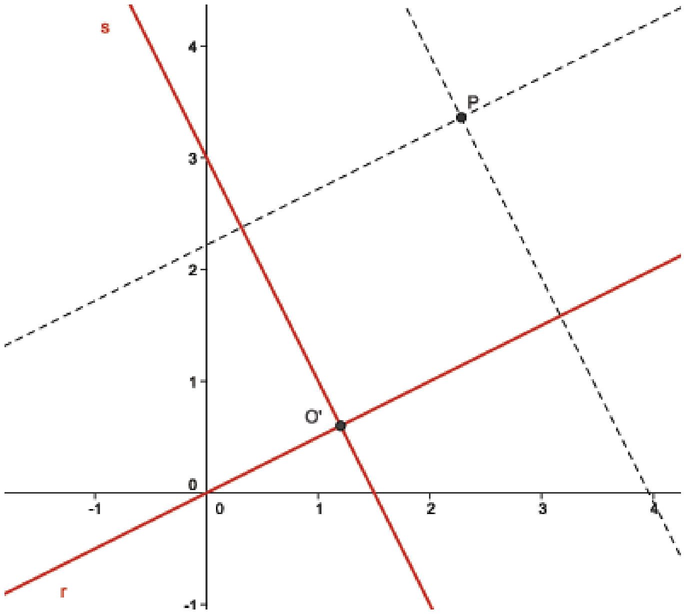
$$\left(x - \frac{2}{5}\right) - 2\left(y - \frac{1}{5}\right) = 0 \Longrightarrow x - 2y = 0.$$

La conoscenza dell'asse della parabola e della tangente nel vertice di una parabola permette di trovare un sistema di coordinate in cui la parabola assume forma canonica. Se si vuole la forma canonica $bY^2 = 2cX$, bisognerà prendere l'asse X coincidente con l'asse della parabola. Dunque:

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x + y - 1}{\sqrt{5}} \\[2ex] Y = \dfrac{x - 2y}{\sqrt{5}} \end{cases},$$

che infatti coincide con (3).

□



Osservazione 2. Ricordiamo come, fissati un sistema di riferimento (O,x,y) e due rette ortogonali $r: ax+by+c=0$ e $s: a'x+b'y+c'=0$, determinare un sistema di riferimento avente la retta r come asse delle ascisse e la retta s come asse delle ordinate. A tal proposito sia P di coordinate $(\overline{x},\overline{y})$ in (O,x,y) e coordinate $(\overline{X},\overline{Y})$ rispetto al nuovo sistema (O',X,Y). Quindi deve essere

$$\overline{X} = \pm d(P,s) \quad \text{e} \quad \overline{Y} = \pm d(P,r),$$

cioè

$$\overline{X} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \quad \text{e} \quad \overline{Y} = \pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

□

Esercizio 3. *Studiare la conica*

$$3x^2+2\,xy+3\,y^2+2\sqrt{2}\,x=0. \tag{4}$$

Soluzione.
Scriviamo la matrice $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

si osserva che:

$$\det(\tilde{A}) = -6 < 0\ ;\ \det(A) = 8 > 0\ ;\ \mathrm{tr}(A)\cdot\det(\tilde{A}) < 0$$

si tratta quindi di un'**ellisse reale**. Una forma canonica di (4) sarà det tipo ax^2+by^2+c. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2 = a$ e $\lambda_2 = 4 = b$. Mentre $c = -\frac{det(\tilde{A})}{det(A)} = 3/4$, dunque una forma canonica sarà

$$2\,X^2+4\,Y^2 = \frac{3}{4}.$$

Vediamo il cambiamento di coordinate che permette di scrivere la conica in forma canonica.
I Metodo Visto a lezione.
II Metodo Consideriamo il cambio di coordinate seguente:

$$\begin{cases} x = X+a \\ y = Y+b \end{cases} \tag{5}$$

sostituendo nell'equazione dell'ellisse (4) e annullando i termini di primo grado otteniamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} 6a + 2b + 2\sqrt{2} = 0 \\ 2\,a + 6\,b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -3b \\ b = \sqrt{2}/8 \end{cases}$$

quindi il centro della conica è $C = (-3\sqrt{2}/8, \sqrt{2}/8)$. Per determinare le direzioni principali dobbiamo diagonalizzare la matrice A. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ e gli autospazi relativi sono

$$V_2 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \quad ; \quad V_4 = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad .$$

Si osservi che l'autospazio relativo l'autovalore minore dà la direzione del semiasse maggiore; l'autovalore maggiore dà, invece, la direzione del semiasse minore. Possiamo considerare il cambio di coordinate seguente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3\sqrt{2}}{8} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix} + X \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(abbiamo normalizzato gli autovettori); possiamo riscrivere il cambio di coordinate nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X + \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y - \dfrac{3\sqrt{2}}{8} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} X + \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y + \dfrac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \tag{6}$$

sostituendo le (8) nell'equazione dell'ellisse (4) troviamo:

$$2\,X^2 + 4\,Y^2 - \frac{3}{4} = 0 \tag{7}$$

possiamo riscrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1.$$

□

Esercizio 4. *Classificare le seguenti coniche e ridurle in forma canonica:*

- $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$
- $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$
- $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
- $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$
- $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

Esercizio 5. *Studiare la seguente conica*

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

si osserva che:

$$\det(\tilde{A}) = 75 \; ; \; \det(A) = -25 < 0$$

dunque si tratta di una iperbole. Inoltre poichè la traccia di A è uguale a zero, possiamo dire che si tratta di una iperbole equilatera. Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_{1,2} = \pm 5$. Inoltre poichè $-\dfrac{\det(\tilde{A})}{\det(A)} = 3$, si ha che una forma canonica per l'iperbole considerata è

$$5X^2 - 5Y^2 = 3.$$

Una volta stabilito che si tratta di un'iperbole equilatera, cerchiamo il centro:

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \tag{8}$$

sostituendo nell'equazione dell' iperbole e annullando i termini di primo grado otteniamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} 3a + 4b - 3 = 0 \\ 4a - 3\,b - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Quindi il centro della conica è $C = (1, 0)$. Per Trovare gli assi osserviamo che sono paralleli ai due auotspazi e passano per il centro C. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -5$ e gli autospazi relativi sono

$$V_5 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \; ; \; V_{-5} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} .$$

Dunque gli assi X e Y sono le rispettivamente $x - 2y - 1 = 0$ e $2x + y - 2 = 0$. La conoscenza degli assi permette di scrivere le equazioni di cambiamento di coordinate relativo alla riduzione in forma canonica:

$$\begin{cases} X = \dfrac{x - 2y - 1}{\sqrt{5}} \\ Y = \dfrac{2x + y - 2}{\sqrt{5}} \end{cases} .$$

Invertendo tale trasformazione otteniamo e sostituendo nell'equazione dell'iperbole otteniamo una forma canonica per l'iperbole stessa.

Oppure normalizzando gli autovettori possiamo riscrivere il cambio di coordinate nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} X + \dfrac{1}{\sqrt{5}} Y + 1 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} X - \dfrac{2}{\sqrt{5}} Y \end{cases} \tag{9}$$

Oppure come fatto a lezione potevamo prima calcolare la trasformazione che permette di eliminare il termine in xy e poi con il completamento dei quadrati trovare la forma canonica.

□