# Principiul Contractiilor

<u>Def.1</u> O functie $f \in D \subseteq (x, d_1) \to (y, d_2)$ se numeste <u>contractie</u> dacă

$\exists$ c $\in (0,1) a.i. d_2(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_1(x,y), \forall x, y \in D$

<u>Exemple de contractii</u>

1) Orice functie derivabila $f \in \underset{(interval)}{I} \subseteq R \to R$ pentru care $\underset{t \in I}{sup} |f'(x)| = c \leq 1$

<u>Def.2</u> O functie $f \in D \subseteq (x, d) \to (x, d)$ are punct fix dacă $\exists u \in D$ a.i. $f(u) = u$

<u>Principiul contractiilor</u>

Fie $(x, d)$ un spatiu metric complet si $D = \overline{D} \subseteq X$ o multime inchisa din X. Orice contractie $f \in D \subseteq (x, d) \to (x, d)$ are un unic punct fix $u \in D$.

$\exists c \in (0,1)$ a.i. $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y), \forall x, y \in D$

Alegem un element arbitrar $a \in D$

Construim sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin relatia de recurentă $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ si $x_0 = a$

Se demonstreaza ca sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D \subseteq (x, d)$ este sir Cauchy, in consecinta el fiind si convergent.

Notăm $\underset{n \to +\infty}{lim} x_n = u$

Trecem la limita relatiei de recurenta si obtinem:

$x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \underset{\underset{n \to \infty}{lim}}{\Rightarrow} u = f(u)$

<u>Aproximarea punctului fix</u>

Pe parcursul demonstratiei teoremei se obtine urmatoarea inegalitate:

$d(x_n, u) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}^*$

# Spatii Liniare (Vectoriale) Normate

$K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

<u>Def.1</u> Se numeste spatiu liniar (vectorial) peste corpul K o multime nevidă X pe care se definesc:

1) o lege de compozitie internă

$``+'' : XxX \to X$

$(x, y) \to x + y$ (suma vectorilor x si y)

în raport cu care $(X, +)$ este grup abelian $(\circ_x)$

2) o lege de comparatie externă

$``\cdot'' : KxX \to X$

$(\underset{scalar}{\alpha}, \underset{vector}{x}) \to \alpha \cdot \underset{vector}{x}$ (înmultirea vectorului cu scalarul $\alpha$)

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \\ (\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \alpha, \beta \in K \\ \forall x, y \in X \end{array}$$

$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall \alpha, \beta \in K$

$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

<u>Def.2</u> Fie x un spatiu liniar (vectorial) peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Se numeste <u>normă</u> pe X o functie $p : x \to R_+$ care are are urmatoarele proprietati:

1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$

2) $p(\alpha \cdot x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in X$

3) $p(x) = O \Leftrightarrow x = \circ_x$

<u>Def.3</u> Se numeste spatiu liniar (vectorial) normat orice spatiu liniar X pe care se defineste o normă $\|\|$.

Notatie $(x\|\|)$

Obs Orice spatiu liniar normat $(x, \|\|)$ este spatiu metric.

$\| : X \in \mathbb{R}_+$

$\Downarrow \not\Uparrow$

$d : XxX \to \mathbb{R}_+, d(x,y) \stackrel{def}{=} \|x-y\|$

1) $(\mathbb{R}, ||)$

2) $(\mathbb{R}^k, \|\|_2), k \geq 2$

$\|(x_1, ..., x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}$

$(\mathbb{R}^k, \|\|_1)$

$\|(x_1, ..., x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_k|$

$(\mathbb{R}^k, \|\|_\infty)$

$\|(x_1, ..., x_2)\|_\infty = \underset{1 \leq i \leq k}{sup} |x_i|$

# Functii Derivabile

$f : D \subseteq \mathbb{R} \in \mathbb{R}^k$

$k = 1, f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - functie reală

$k \geq 2, f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ - functie vectorială

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)), \forall x \in D$

$f = (f_1, f_2, ..., f_k) \to$ componentele functiei vectoriale f

Def.1 Functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ este derivabilă în

$x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x-x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \in \mathbb{R}^k$.

Def.2 O functie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ este derivabilă.

Obs. $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k, k \geq 2$, este derivabilă în $x_0 \in D \cap D' \Leftrightarrow$

$f_1, f_2, ..., f_k : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în $x_0 \in D \cap D'$.

În plus, $f'(x_0) = (f_1'(x_0), ..., f_k'(x_0))$.

Def.3 Functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ este derivabilă la stânga în $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{x-x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \in \mathbb{R}^k$.

Functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ este derivabilă la dreapta în $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x-x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \in \mathbb{R}^k$

Notatii $\lim\limits_{\substack{x \in x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{x-x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \overset{not}{=} f_s'(x_0)$

Notatii $\lim\limits_{\substack{x \in x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x-x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \overset{not}{=} f_d'(x_0)$

Obs f este derivabilă în $x_0 \in \overset{\circ}{D} \Leftrightarrow \exists f_s'(x_0) \in \mathbb{R}^k, \exists f_d'(x_0) \in \mathbb{R}^k$ si $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$