Legile lui DeMorgan:
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}; \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
Decala unei expresii:
Dacă $E(V_1, ..., V_n)$ este o expresie, atunci expresia decală: $E^d(V_1, ..., V_n)$ se obtine interschimbând 1 cu 0 si $\vee$ cu $\wedge$. $E(x, y, z) = x \vee (y \wedge \overline{z}) \Rightarrow E^d(x, y, z) = x \wedge (y \vee \overline{z})$
Principiul dualitătii: $E_1(V_1, ..., V_n) = E_2(V_1, ..., V_n) \Leftrightarrow E_1^d(V_1, ..., V_n) = E_2^d(V_1, ..., V_n)$
$(A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ Algebră Boole:
•$x \to y := \overline{x} \vee y$
$x \leq y \Leftrightarrow x \to y = 1$
$x \to (y \to x) = 1, (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$
•$x \leftrightarrow y := (x \to y) \wedge y \to x$
$x \leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = y$
$\overline{x} \Leftrightarrow \overline{y} = x \leftrightarrow y, (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$
•$x + y := (x \leftrightarrow y)^d = (\overline{x} \wedge y) \vee (\bar(y) \vee x)$
$x + x = 0, x + y = y + x$
$x + z \leq (x + y) \vee (y + z)$
Operatia $(x, y) \mapsto x + y$ are proprietatile unei distante.
Definim $x \cdot y = x \wedge y$
$R(A) = (A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este inel Boole cu $x \cdot x = X$, or. $x \in A$
•$x \cdot y + y \cdot x = 0$, $y \cdot x = -(x \cdot y)$
$(x + y) \cdot (x + y) = x + y \Rightarrow x + x \cdot y + y \cdot x + y = x + y$
•$x + x = 0$, $x = -x$
•$x \cdot y = y \cdot x$
$x \cdot y = -(x \cdot y) = y \cdot x$
Definim $x \vee y := x + y + x \cdot y$ si $x \wedge y = x \cdot y$
$(A, \bigcap, \bigcup, \bar{}, \emptyset, A)$ este algebră Boole de functii
•$0, 1, \in F; f_1, f_2 \in F \Rightarrow f_1 \vee f_2, f_1 \wedge f_2 \in F, \overline{f_1} \in F$
• or. $x \in X, 0(x) = 0, 1(x) = 1, \overline{f_1} = \overline{f_1(x)}$
$(f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x); (f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x)$
S este subalgebră a lui A dacă:
•$(A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ algebră Boole; $S \subseteq A$
•$0, 1 \in S; x, y \in S \Rightarrow x \vee x, x \wedge y, \overline{x} \in S$
O functie $f : A \to B$ este morfism de algebră Boole dacă:
•$f(O_A) = O_B, f(1_A) = 1_B$
•$f(\bar(x)) = f(x)$
•$f(x \vee_A y) = f(x) \vee_B f(y), f(x \wedge_A y) = f(x) \wedge_B f(y)$
Un morfism injectiv se numeste scufundare
Un izomorfism este un morfism bijectiv.
Algebrele Boole A si B sunt izomorfe dacă există un izomorfism $f : A \to B$. În acest caz scriem $A \simeq B$
O congruentă pe A este o relatie $\equiv \subseteq AxA$ care verifică
• $\equiv$ este relatie de echivalenta
•$x \equiv y \Rightarrow \overline{x} \equiv \overline{y}$
•$x_1 \equiv y_1$ si $x_2 \equiv y_2 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \equiv y_1 \vee y_2$, $x_1 \wedge x_2 \equiv y_1 \wedge y_2$

Constructia algebrei cât:
Pe $A/\equiv$ definim:
$\hat{x} \vee \hat{y} = \widehat{x \vee y}$, $\hat{x} \wedge \hat{y} = \widehat{x \wedge y}$, $\hat{\bar{x}} = \bar{\hat{x}}$
Atunci $(A/\equiv, \vee, \wedge, \bar{}, \hat{0}, \hat{1})$ este algebră Boole
O submultime $F \subseteq A$ s.n. filtru daca:
$1 \in F$; $x \in F$, $x \subseteq y \Rightarrow y \in F$, $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$
Un filtru e propriu dacă $0 \notin F (F \neq A)$
$0 \in F, x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F, x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$
Un ideal e propriu dacă $1 \notin F (F \neq A)$
Teoremă
(1) Dacă $F \subseteq A$ filtru, definim $\equiv F \subseteq AxA$ prin:
$x \equiv_F y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F \Leftrightarrow x \to y \in F$ si $y \to x \in F$
(2) Dacă $\equiv \not\subseteq AxA$ este o congruentă pe A definim:
$F_\equiv := \hat{1} = \{x \in A / x \equiv 1\}$
Atunci $F_\equiv$ este filtru în A
(3) Dacă $F \subseteq A$ este un filtru si $\equiv \subseteq AxA$ este o congruentă: Atunci $F = F_{\equiv_F}$, si $\equiv = \equiv_{F_\equiv}$
Un ultrafiltru este un filtru care verifică:
(1) $x \in F \Leftrightarrow \overline{x} \notin F$ or. $x \in A$
(2) $x \vee y \in F \Leftrightarrow x \in F$ sau $y \in F$ or. $x, y \in F$
(3) $F \subseteq U$, U filtru propriu $\Rightarrow F = U$
Lema lui Zorn
Fie $(R, \leq)$ mpo cu proprietatea că or. lant $C \subseteq P$ are majorant
Atunci P are cel putin un element maximal.
P: Dacă $x \in A$, $x \neq 0$ atunci exista U un ultrafiltru a.î. $x \in U$
$\Rightarrow$ Multimea ultrafiltrelor este nevidă
$\Rightarrow \bigcap\{\bigcup \subseteq A/$ U ultrafiltru$\} = \{1\}$
Teorema de reprezentare a lui Stone:
Pt. orice algebră Boole A există X o multime si un morfism injectiv $\alpha : A \to P(x)$
Elementele minimale din $A \backslash \{0\}$ se numesc atomi. Algebra A s.n. atomică dacă pentru or. $x \neq 0$ există un atom $a \in A$ a.î. $a \subseteq x$. Teoremă: Dacă A o algebră Boole finită, atunci $\simeq P(At(A))$ si izomorfismul este: $d : A \to P(At(A)), d(x) = \{a \in A/$ a atom, $a \leq x\}$, or. $x \neq 0$