Functii derivabile

1) Folosind principiul contractiilor, deduceti că ecuatia $10x-1=sin(x)$ are solutie unică. Aproximati solutia cu eroare de 10^{-2}.

Principiul contractiilor ajută la rezolvarea ecuatiilor algebrice de forma $f(x)=x$.

Dacă forma ecuatiei nu convine, aceasta se transformă la forma $f(x)=x$.

$10x-1=sin(x) \Rightarrow 10x=sin(x)+1 \Rightarrow x=\frac{sin(x)+1}{10}=f(x)$

Etapa I $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ spatiu metric complet.

$D=\mathbb{R}$ - multime inchisă.

Etapa II f contractie?

f e derivabilă pe $\mathbb{R}$

$f'(x)=(\frac{(sin(x)+1)}{x_0})'=\frac{1}{10}(sin(x)+1)'=\frac{1}{10}cos(x), \forall x\in\mathbb{R}$

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\frac{cos(x)}{10}| = \frac{1}{10}\in(0,1) \Rightarrow$ f e contractie, unde $c=\frac{1}{10}\Rightarrow \exists! u\in\mathbb{R}$ a.î. $f(u)=u\Rightarrow$ ec. $10x-1=sin(x)$ are o singura solutie notata cu u.

Construim $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}$

$x_0=a=0$

$\lim\limits_{n\to 0} x_n = u$

$d(x_n,u)\le\frac{C^n}{1-C}\cdot d(x_1,x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$

$x_1=f(x_0)=f(0)=\frac{1}{10}$

$|x_n-u|\le\frac{(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}}\cdot|\frac{1}{10}-0|, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$|x_n-u|\le\frac{(\frac{1}{10})^n}{\frac{9}{10}}=(\frac{1}{10})^n\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{10}=(\frac{1}{10})^n\cdot\frac{1}{9}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Se rezolvă inecuatia $|x_n-u|\le(\frac{1}{10})^n\cdot\frac{1}{9}<10^{-2}$ cautând necunoscuta $n\in\mathbb{N}^*$

$\frac{1}{10^n}\cdot\frac{1}{9}\le\frac{1}{10^2}\Rightarrow 10^n\cdot 9>10^2\Rightarrow n\ge 2$. Concluzie: $x_2\approx u$ cu eroare de 10^{-2}

$x_2=f(\frac{1}{10})=\frac{sin(\frac{1}{10})z''+1}{10}=\frac{sin(0.1)+1}{10}=0.1\cdot(sin(0.1)+1)==0.1\cdot 1.0017453...=0.10017453$

$u\approx 0.10$

2) Studiati derivabilitatea functiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2e^x, & x\ge 0\end{cases}$. Calculati $f'(x)$.

f e continuă pe $\mathbb{R}^*$.

0 e punct interior pentru $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to 0}} -x=0\\ \lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} x^2e^x=0\\ f(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{f continuă în 0} \Rightarrow \text{si pe } \mathbb{R}$$

f derivabila pe $\mathbb{R}^*$

0 e punct interior.

$\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to 0}}\frac{-x-0}{x-0}=-1\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists f_s'(0)=-1$

$\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}}\frac{x^2e^x-0}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}}\frac{x^2e^x}{x} = \lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}}(xe^x) = 0 \Rightarrow \exists f'_d(0) = 0$

$\Rightarrow$ f nu e derivabilă în 0.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 2xe^x + xe^x, & x > 0 \end{cases}$$

3) Gasiti punctele de extrem local ale functiei de la exercitiul 2.

<u>Etapa I</u> Se verifică continuitatea functiei

<u>Etapa II</u> Se verifică derivabilitatea functiei

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 = 0, & x < 0, \quad \emptyset \\ 2xe^x + xe^x = 0, & x > 0, \quad \emptyset \end{cases}$$

$xe^x(2+x) = 0$

$\cancel{x}_1 = 0,\ \cancel{x}_2 = -2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞
f'(x)	$- - - -_{-1}$		$\vert^0$		$+ + + + +$

4) Studiati derivabilitatea functiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (\frac{sin(x)}{x})|x-1|$

$f = (f_1, f_2),\ f_1, f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = \frac{sin(x)}{x}$

$$f_2(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$

f_1 derivabila pe $\mathbb{R}^*$, f_2 continua pe $\mathbb{R}^*\backslash 1$

$$\left.\begin{aligned} f_s(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}}(-x+1) = 0 \\ f_d(1) &= \lim_{\substack{x\to 1\\x>1}}(x-1) = 0 \\ f_2(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{f continuă în } 0 \Rightarrow f_2 \text{ continuă pe } \mathbb{R}^*$$

f_2 derivabilă pe $\mathbb{R}^*\backslash 1$

$1 \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{-x+1}{x-1} = -1$

$\Rightarrow$ f este derivabilă pe $\mathbb{R}^* \cap (\mathbb{R}^*\backslash\{1\}) = \mathbb{R}^*\backslash 1$

5)

$f_1(x) = \frac{sin(x)}{x}$

$$f_2(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$

$f_1(x) = (\frac{sin(x)}{x})' = \frac{cos(x)\cdot x - sin(x)}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*\backslash 1$

$$f_2(x) = |x-1| = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \backslash 1$$

$$f'(x) = |x-1| = \begin{cases} (\frac{xcosx - sinx}{x^2}), & x > 1 \\ (\frac{xcosx - sinx}{x^2}), & x < 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \backslash 1$$

Temă: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 cos(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Studiati derivabilitatea functiei f.

b) Studiati continuitatea functiei f.

c) Ce concluzie se deduce din primele doua puncte?