Functii derivabile de ordin superior

1) Determinati parametrul real $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, stiind că

$6^x + a^x \geq 4^x + 3^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Rezolvare:

$\underbrace{6^x + a^x - 4^x - 3^x}_{f(x)} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x + a^x - 4^x - 3^x$

Căutăm $x_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_0) = 0$

Obs. că $f(0) = 0$

Obs. că $f(x) = f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underset{(1)}{\underline{x_0 = 0}}$ punct de minim global pentru f.

f derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ f derivabilă în x_0 (2)

Obs. că $\underset{3}{\underline{x_0 \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}}}$

Din (1), (2), (3) $\overset{Th.Fermat}{\Rightarrow}$ $f'(x_0) = 0$

$f'(x_0) = (6^x + a^x - 4^x - 3^x)' = 6^x ln6 + a^x lna - 4^x ln4 - 3^x ln3$

$ln\frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

2) Demonstrati urmatoarea inegalitate:

$\sqrt[n]{\frac{x+x}{2}} \geq \frac{\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}}{2}, \forall x, y \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Obs. că pentru $n \geq 1$ inegalitatea e adevarată

2) Vom demonstra inegalitatea pentru $n \geq 2$

2.1.) Obs. că inegaliteatea este adevărată dacă $n = 0$ sau $y = 0$

2.2.) Rămâne să demonstrăm inegalitatea pentru $x, y > 0$

Alegem functia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt[n]{t}$

f derivabilă pe $(0, \infty)$

$f'(t) = (t^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1}, \forall t \in (0, \infty)$

f' derivabilă pe $(0, \infty) \Rightarrow$ f e derivabilă de 2 ori pe $(0, \infty)$

$f(t)$ indefinit derivabilă

$f''(t) = (\frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1})' = \underset{+}{\frac{1}{n}}(\underset{-}{\frac{1}{n} - 1})t^{\frac{1}{n}} \underset{+}{-} 2, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$f''(t) < 0, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f$ e concavă

$\overset{def}{\Rightarrow} f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0, 1]$

$\Rightarrow \sqrt[n]{tx + (1-t)y} \geq \sqrt[n]{x} + (1-t)\sqrt[n]{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0, 1]$

$\sqrt[n]{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}}{2}$