Relatia R se numeste:
- totală: or. $a \in A$, ex. $x, b \in B$ a.î. $(a,b) \in \mathbb{R}$
- surjectivă: or. $b \in B$, ex. $a \in A$ a.î. $(a,b) \in \mathbb{R}$
- inj: or. $a_1, a_2 \in A$, or. $b \in B; (a_1, b) \in \mathbb{R}$ si $a_2, b \in \mathbb{R}$ implică $a_1 = a_2$
- func: or. $a \in A$, or. $b_1, b_2 \in B, (a, b_1) \in \mathbb{R}$ si $(a, b_2) \in \mathbb{R}$ implică $b_1 = b_2$

O functie este o relatie totală si functională.
$f: A \to B$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ ex. $g: B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$ si $f \circ g = 1_B$
(1) $x_{A \cap B} = min(x_A(x), x_B(x)) = x_A(x) \cdot x_B(x)$
(2) $x_{A \cup B} = max(x_A(x), x_B(x)) = x_A(x) + x_B(x) - x_A(x) \cdot x_B(x)$
(3) $x_{\overline{A}}(x) = 1 - x_A(x)$

Functia caracteristică a lui A fată de T este:
$$x_A : T \to \{0,1\}, x_A(x) = \begin{cases} 0, x \notin A \\ 1, x \in A \end{cases}$$
Un operator de închidere pe T este $C : P(T) \to P(T)$ care verifică:
$$\left.\begin{array}{l} (1) A \subseteq C(A) \\ (2) A \subseteq B \text{ implică } C(A) \subseteq C(B) \\ (3) C(C(A)) = C(A) \end{array}\right\}, \text{ or. } A, B \subseteq T$$
O multime $R \subseteq A \times A$, relatia binară R se numeste:
- reflexivă: $(x,x) \in \mathbb{R}$, or. $x \in A$
- simetrică: $(x,y) \in \mathbb{R}$ implică $(y,x) \in \mathbb{R}$, or. $x, y \in A$
- antisimetrică: (x,y) si $(y,x) \in \mathbb{R}$ implică $x = y$, or. $x, y \in A$
- tranzitivă: $(x,y) in \mathbb{R}$ si $(y,z) \in \mathbb{R}$ implică $(x,z) \in R$, or. $x, y, z \in A$
- relatie de preordine: reflexivă, tranzitivă
- relatie de ordine: reflexivă, antisimetrică, tranzitivă
- relatie de echivalenta: reflexivă, simetrică, tranzitivă

$R(R) = R \cup \Delta_A \to$ reflexivă
$S(R) = R \cup R^{-1} \to$ simetrică
$\Upsilon(R) = \bigcup_{n \geq 1} R^n$, unde $R^n = \underbrace{R \circ ... \circ R}_{n} \to$ tranzitivă
$\varepsilon(R) = \Upsilon(S(R(R))) \to$ echivalentă
"$\sim$" relatie de echivalentă: $x \sim y$ înseamnă $(x,y) \in \sim$
$\hat{x} = y \in A / x \sim y$ (clasa de echivalentă a lui x)
Un sistem de reprezentanti pentru $\sim$ este $x \subseteq A$ cu proprietatea:
or. $a \in A$, ex. un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$
(1) $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x \sim y$
(2) $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset \Leftrightarrow x \nsim y$
(3) $A = U\{\hat{x}/x \in X\}$, or. $x \subseteq A$
$A/\sim \ = \{\hat{x}/x \in A\}$ (multimea claselor de echivalentă)
$P\sim: A \to A/\sim, P\sim(x) = \hat{x}$ or. $x \in A$ (surjectie canonică)
Pe $A/\sim$ definim $\hat{x} \prec \hat{y} \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}$, "$\prec$" relatie de ordine $x \sim x_1, y \sim y_1$ si $\hat{x} \prec \hat{y}$ implică $\hat{x_1} \prec \hat{y_1}$
Un lant este o mult total ordonată (toate elem din mult sunt comp).
Relatie de ordine pe componente:
$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 y_1$ si $x_2 \leq_2 y_2$
Relatia de ordine lexicografică:
$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq_1 y_1$ si $x_1 \neq y_[1])$ sau $(x_1 = y_2$ si $x_2 \leq_2 y_2)$
O mult este bine ordo dacă este submult nevidă ce nu are un prim elem.
PBO: $\mathbb{N}$ este bine ordonată
PI: $S \subseteq \mathbb{N}$ a.î. (i) $O \in S$
(ii) or. $n \in \mathbb{N}(n \in S \leftrightarrow n+1 \in S)$ atunci $S = (N)$
O EPO este o multime partial ordonată $(C, \subseteq)$ cu:
- C are prim element $\perp$ • sup X există pentru orice lant $x \subseteq C$

O mpo este o latice daca $\sup\{x_1, x_2\}$ si $\inf\{x_1, x_2\}$ există or. $x_1, x_2 \in L$.
Laticea $(L-, \leq)$ este completă dacă infX si supX există or. $x \subseteq L$
Un element $a \in A$ este punct fix al unei functii $f : A \leftarrow A$ dacă $f(a) = a$
Teorema Knaster-Tarski pentru latici complete
Fie $(L, \leq)$ latice completă si $F : L \leftarrow L$ o functie crescătoare. Atunci $a = inf\{x \in L/F(x) \leq x\}$ este cel mai mic punct fix al functiei F.
Teorema Knaster-Tarski pentru CPO:
Fie $(C, \leq)$ o CPO si $F : C \to C$ o functie continuă. Atunci $a = sup\{F^n(\perp)/n \in \mathbb{N}\}$ cel mai mic punct fix al functiei F.
Infinumul si supremumul devin operatii pe L:
$\vee : L \times L \to L, x_1 \vee x_2 := sup\{x_1, x_2\}$
$\wedge : L \times L \to L, x_1 \wedge x_2 := inf\{x_1, x_2\}$
- asociativitate: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- comutativitate: $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$
- absorbtie: $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$

O latice este structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$ unde $\vee, \wedge$ relatii binare asociative, comutative, cu proprietatea de absorbtie.
$x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$, or. $x, y \in L$
$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$
$sup\{x,y\} = x \vee y, inf\{x,y\} = x \wedge y$, or. $x, y \in L$
O latice este mărginită dacă are prim si ultim element. Se notează cu $(L, \leq, 0, 1)$ iar ca structură algebrică $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$
$x \vee 0 = x, x \wedge 0 = 0, x \vee 1 = 1, x \wedge 1 = x$, or. $x \in L$
x este complement al lui y dacă $x \vee y = 1$ si $x \wedge y = 0$
L este complementată dacă or. $x \in L$ are un complement
L este distributivă dacă or. $x, y \in L$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ si $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
O algebră Boole este o latice distributivă si complementată cu prim si ultim element. Este structura $(A, \vee, \wedge, , 0, 1)$ care satisface următoarele identitati:
$(L_1)(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
$(L_2) x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$; $(L_3) x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$
(D) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
(P) $x \vee 0 = x, x \wedge 0 = 0$; (U) $x \wedge 1 = x, x \vee 1 = 1$; (C) $x \vee \overline{x} = 1, x \vee \overline{x} = 0$
$y = \overline{x} \Leftrightarrow x \vee y = 1$ si $x \wedge y = 0$; $\overline{\overline{x}} = x$
$x \leq y \Rightarrow x \vee z \leq y \vee z, x \wedge z \leq y \wedge z$; $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge \overline{y} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} \wedge y = 1 \Leftrightarrow \overline{y} \leq \overline{x}$;
$x \vee x = x \wedge x = x$
Legile lui DeMorgan: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}; \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
Decala unei expresii: Dacă $E(V_1, ..., V_n)$ este o expresie, atunci expresia decală: $E^d(V_1, ..., V_n)$ se obtine interschimbând 1 cu 0 si $\vee$ cu $\wedge$. $E(x,y,z) = x \vee (y \wedge \overline{z}) \Rightarrow E^d(x,y,z) = x \wedge (y \vee \overline{z})$
Principiul dualitătii: $E_1(V_1, ..., V_n) = E_2(V_1, ..., V_n) \Leftrightarrow E_1^d(V_1, ..., V_n) = E_2^d(V_1, ..., V_n)$
$(A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ Algebră Boole:
- $x \to y := \overline{x} \vee y$

$x \leq y \Leftrightarrow x \to y = 1$
$x \to (y \to x) = 1, (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$
- $x \leftrightarrow y := (x \to y) \wedge y \to x$

$x \leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = y$
$\overline{x} \Leftrightarrow \overline{y} = x \leftrightarrow y, (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$
- $x + y := (x \leftrightarrow y)^d = (\overline{x} \wedge y) \vee (\bar{(}y) \vee x)$

$x + x = 0, x + y = y + x$
$x + z \leq (x + y) \vee (y + z)$
Operatia $(x,y) \mapsto x + y$ are proprietatile unei distante.
Definim $x \cdot y = x \wedge y$
$R(A) = (A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este inel Boole cu $x \cdot x = X$, or. $x \in A$
- $x \cdot y + y \cdot x = 0$, $y \cdot x = -(x \cdot y)$

$(x + y) \cdot (x + y) = x + y \Rightarrow x + x \cdot y + y \cdot x + y = x + y$
- $x + x = 0$, $x = -x$
- $x \cdot y = y \cdot x$

$x \cdot y = -(x \cdot y) = y \cdot x$
Definim $x \vee y := x + y + x \cdot y$ si $x \wedge y = x \cdot y$
$(A, \cap, \cup, \bar{}, \emptyset, A)$ este algebră Boole de functii
- $0, 1, \in F; f_1, f_2 \in F \Rightarrow f_1 \vee f_2, f_1 \wedge f_2 \in F, \overline{f_1} \in F$
- or. $x \in X, 0(x) = 0, 1(x) = 1, \overline{f_1} = \overline{f_1(x)}$

$(f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \vee f_2(x); (f_1 \vee f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x)$
S este subalgebră a lui A dacă:
- $(A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ algebră Boole; $S \subseteq A$
- $0, 1 \in S; x, y \in S \Rightarrow x \vee x, x \wedge y, \overline{x} \in S$

O functie $f : A \to B$ este morfism de algebră Boole dacă: • $f(O_A) = O_B, f(1_A) = 1_B$; • $f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$
- $f(x \vee_A y) = f(x) \vee_B f(y), f(x \wedge_A y) = f(x) \wedge_B f(y)$

Un morfism inj s.n. scufundare. Un izomorfism este un morfism bij.
Algebrele Boole A si B sunt izomorfe dacă există un izomorfism $f : A \to B$.
În acest caz scriem $A \simeq B$.
O congruentă pe A este o relatie $\equiv \subseteq AxA$ care verifică
- $\equiv$ este relatie de echivalenta
- $x \equiv y \Rightarrow \overline{x} \equiv \overline{y}$
- $x_1 \equiv y_1$ si $x_2 \equiv y_2 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \equiv y_1 \vee y_2$, $x_1 \wedge x_2 \equiv y_1 \wedge y_2$

Constructia algebrei cât:
Pe $A/\equiv$ definim:
$\hat{x} \vee \hat{y} = \widehat{x \vee y}$, $\hat{x} \wedge \hat{y} = \widehat{x \wedge y}$, $\hat{\overline{x}} = \hat{\overline{x}}$
Atunci $(A/\equiv, \vee, \wedge, \bar{}, \hat{0}, \hat{1})$ este algebră Boole
O submultime $F \subseteq A$ s.n. filtru daca:
$1 \in F$; $x \in F$, $x \subseteq y \Rightarrow y \in F$, $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$
Un filtru e propriu dacă $0 \notin F(F \neq A)$
$0 \in F, x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F, x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$
Un ideal e propriu dacă $1 \notin F(F \neq A)$
Teoremă
(1) Dacă $F \subseteq A$ filtru, definim $\equiv F \subseteq AxA$ prin:
$x \equiv_F y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F \Leftrightarrow x \to y \in F$ si $y \to x \in F$
(2) Dacă $\equiv \nsubseteq AxA$ este o congruentă pe A definim:
$F_{\equiv} := \hat{1} = \{x \in A/x \equiv 1\}$
Atunci $F_{\equiv}$ este filtru în A
(3) Dacă $F \subseteq A$ este un filtru si $\equiv \subseteq AxA$ este o congruentă:
Atunci $F = F_{\equiv_F}$, si $\equiv = \equiv_{F_{\equiv}}$
Un ultrafiltru este un filtru care verifică:
(1) $x \in F \Leftrightarrow \overline{x} \notin F$ or. $x \in A$
(2) $x \vee y \in F \Leftrightarrow x \in F$ sau $y \in F$ or. $x, y \in F$
(3) $F \subseteq U$, U filtru propriu $\Rightarrow F = U$
Lema lui Zorn
Fie $(R, \leq)$ mpo cu proprietatea că or. lant $C \subseteq P$ are majorant
Atunci P are cel putin un element maximal.
P: Dacă $x \in A$, $x \neq 0$ atunci exista U un ultrafiltru a.î. $x \in U$
$\Rightarrow$ Multimea ultrafiltrelor este nevidă
$\Rightarrow \cap\{\cup \subseteq A/$ U ultrafiltru$\} = \{1\}$
Teorema de reprezentare a lui Stone:
Pt. orice algebră Boole A există X o multime si un morfism injectiv $\alpha : A \to P(x)$
Elementele minimale din $A \backslash \{0\}$ se numesc atomi. Algebra A s.n. atomică dacă pentru or. $x \neq 0$ există un atom $a \in A$ a.î. $a \subseteq x$. Teoremă: Dacă A o algebră Boole finită, atunci $\simeq P(At(A))$ si izomorfismul este: $d : A \to P(At(A)), d(x) = \{a \in A/$ a atom, $a \leq x\}$, or. $x \neq 0$