Sayısal Yöntemler Dersi 3. Hafta Ders Notu

Sayısal Yöntemlerde Hata

Problemin sayısal yöntem ve analitik yöntem ile çözülmesi durumunda ikisi arasında ortaya çıkan fark hata olarak tanımlanır.
Sayısal yöntemlerde gerçekleştirilen hesaplamalarda ne kadar hata yapıldığı kadar hatanın kabul edilebilirliği de önemlidir.

Karşılaşılan hatalar genellikle

- Yuvarlama
- Kesme

Yuvarlama Hatası:

Sayılar bilgisayarda sonlu sayıda bit ile gösterildiğinden yuvarlama hataları bilgisayarların bu sayıları ifade etmek için sınırlı sayıda basamak kullanmasından kaynaklanır:

Örneğin: $\pi, e, \sqrt{7}$........

Örnek: Birbirine çok yakın iki sayının a**=1780.9 b=1778.1** olsun.
10 tabanına göre kayan noktalı gösterimde 3 anlamlı rakam olması durumunda

a) Kesme durumunda
b) Yuvarlama durumunda bu iki sayının farkını ve toplamın hesaplayınız.

a-b=1780,9-1778,1=2.8 a+b=1780,9+1778,1=3559

a) Kesme durumunda 3 anlamlı rakam;
$a=1.780*10^3$; $b=1.778*10^3$

$a-b=1.780*10^3 - 1.778*10^3 =0.002*10^3 =2$

$a+b=1.780*10^3 + 1.778*10^3 =0.002*10^3 =3.558*10^3=3558$

b) Yuvarlama işlemine tabi turulursa;
$a=1.781*10^3$; $b=1.778*10^3$

$a-b=1.781*10^3 - 1.778*10^3 =0.002*10^3 =3$

$a+b=1.781*10^3 + 1.778*10^3 =0.002*10^3 =3.558*10^3=3559$

Kesme Hataları:

Sayısal hatalar sayısal büyüklüklerin yaklaşık değerlerde ifade edilemelerinde ortaya çıkmaktadır. Kesme hatası gerçek ya da gerçeğe yakın değerin hesaplanmasında çok fazla veya sonsuz sayıda terim alınması durumunda meydana gelen hatadır. Sayısal işlemlerde sonsuz uzunlukta bir seri belli bir kısmından itibaren kesilerek kullanılmaktadır ve kalan terimlerde atılmaktadır.
Örneğin cosx fonksiyonun Taylor serisi gibi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + ...$$

Verilen herhangi bir x sayısının kosinüs değerinin hesaplanmasında sonsuz sayıda terim kullanılamayacağında ancak belli bir sayıda terimle işlem yapılmaktadır.

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = 0.8090169943749747$$

Tek terimlik bir seri açılması durumunda ise

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = 1$$

Hata hesaplanmasında

$$\varepsilon_g = \text{Gerçek deg er} - \text{yaklasık deg er}$$

$$\%\varepsilon_g = |\text{Gerçekdeg er} - \text{yaklaşık deg er}|*100$$

$$\varepsilon_g = 0.809016994374947 - 1 = -0.1909830056225053$$

$$\varepsilon_g \cong \%19.1$$

Seri açılımında iki terimin kullanılmasıyla hesaplanan hata değeri aşağıdaki gibidir.

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = 1 - \frac{(\frac{\pi}{5})^2}{2!} = 0.802607911978213$$

$$\varepsilon_g = 0.809016994374947 - 0.802607911978213 = \%0.6$$

Kesme Hataları ve Taylor Serisi:

Bir f(x) fonksiyonun istenilen her hangi dereceden bir polinomla gösterilmektedir. Veya Taylor serisi bir f(x) fonksiyonun herhangi bir noktadaki değerini fonksiyonun ve türevlerinin ibr başka noktadaki değeri cinsinden belirlenemesin imkan sağlar.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=x_0} + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3\frac{d^3f}{dx^3}\Big|_{x=x_0}$$
$$+ \dots\dots\dots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\frac{d^nf}{dx^n}\Big|_{x=x_0} + R_n(x)$$

$R_n(x) \rightarrow$ serinin geri kalan kısmını karakterize etmektedir.

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}$$

Örnek: f(x)=cos(x) fonksiyonun 0 noktasındaki Taylor serisi açılımı ile bir, üç ve beş terim kullanarak x= $\frac{\pi}{10}$ noktasındaki değerini yaklaşık olarak ifade ediniz.

İlk olarak 0 noktasındaki verilen fonksiyon değeri

$f(x) = \cos(x)$; $f(x_0) = \cos x_0$; $f(0) = \cos(0) = 1$

Daha sonra f(x)=cos(x) fonksiyonun türevleri hesaplanır:

$f(x) = \cos(x)$

$f' = -\sin x$; $f'' = -\cos x$; $f'''(x) = \sin x$; $f^{(4)} = \cos x$; $f^{(5)} = -\sin x$

$x = 0$ daki değeri

$f'(0) = -\sin(0) = 0$

$f''(0) = -\cos(0) = -1$

$f'''(0) = \sin(0) = 0$

$f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$

$f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}(x - x_0)^4 f^{(4)}(x_0)$$

1 terim için:

$f(x_0)$

3 terim için:

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0)$$

5 Terim İçin

$$f(x_0)+(x-x_0)f^{'}(x_0)+\frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f^{''}(x_0)+\frac{1}{3!}(x-x_0)^3 f^{'''}(x_0)+\frac{1}{4!}(x-x_0)^4 f^{(4)}(x_0)$$

$x=\frac{\pi}{10}$ tüm değerler hesağlanır:

1 terim için:

f(x)= $f(x_0)$ =1

3 terim için:

f(x)= $f(\frac{\pi}{10})=f(x_0)+(\frac{\pi}{10}-x_0)f^{'}(x_0)+\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{10}-x_0)^2 f^{''}(x_0)$

$$1+0-\frac{x^2}{2!}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2=0.950651978$$

5 Terim İçin

f(x)=

$$f(\frac{\pi}{10})=f(x_0)+(\frac{\pi}{10}-x_0)f^{'}(x_0)+\frac{1}{2!}(\frac{\pi}{10}-x_0)^2 f^{''}(x_0)+\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10}-x_0)^3 f^{'''}(x_0)+\frac{1}{4!}(\frac{\pi}{10}-x_0)^4 f^{(4)}(x_0)$$

$$f(x)=f(\frac{\pi}{10})=1+0-\frac{x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}$$

$$=1-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{10})^2+\frac{1}{24}(\frac{\pi}{10})^4$$

$$=0.951057849$$

Hataların Hesaplanması:

Sayısal çözüm yaklaşık bir değerdir. Sayısal çözümler her zaman kullanılan yönteme bağlı olarak yuvarlama veya kesme hatalarını içerisi.

- **Gerçek mutlak Hata:** Gerçek çözüm ile sayısal çözüm arasındaki farktır.

$$| x_{gerçek} - x_n | \leq \varepsilon$$

- **Yaklaşık mutlak hata:** Ardışık iterasyonlar da bulunan iki farklı kök değeri arasındaki farkın mutlak değeridir.

$$| x_{n+1} - x_n | \leq \varepsilon$$

- **Gerçek Mutlak Bağıl Hata:** Fonksiyonun gerçek değeri ile sayısal yöntemlerde elde edilen yaklaşık değer arasındaki farkın gerçek değere oranıdır.

$$\left| \frac{x_{gerçek} - x_n}{x_{gerçek}} \right| \leq \varepsilon$$

- **Yaklaşık Mutlak Bağıl hata:** Fonksiyonun gerçek değerli bilinmiyorsa değişkenlerin farkının en son bulunan değişkene oranı yaklaşık mutlak bağıl hata olarak adlandırılır.

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq \varepsilon$$

Soru4. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ fonksiyonunu $z = 1$ noktası civarında Taylor serisine açınız.

Çözüm.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z^{-1} \\
f'(z) &= -z^{-2} \\
f''(z) &= (-1)(-2)\, z^{-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z) &= (-1)^n\, n! z^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

olup $f^{(n)}(1) = (-1)^n\, n!$ olarak elde edilir. Buradan $|z-1| < 1$ için

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n$$

bulunur. İkinci yol olarak seri açılımını $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^n$, $|z| < 1$ olarak bildiğimiz $\dfrac{1}{1+z}$ fonksiyonundan yararlanabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n\,; \qquad\qquad |z-1| < 1$$

elde edilir.

Özel Matrisler

Bazı matrisler satır ve sütun sayıları ve elemanlarının değerleri veya dizilişleri bakımından farklılık gösterirler. Bu bölümde bu tür matrisler ve özelliklerinden bahsedilecektir.

1) Satır ve Sütun Matrisleri

Tek bir satırdan oluşan matrislere satır matrisi, tek bir sütundan oluşan matrislere sütun matrisi denir.

Örnek

$$A = [3, 5, 7]_{1x3}, \; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3x1}, \; C = [6]_{1x1}$$

matrisleri için A satır matrisi, B sütun matrisi, C ise hem satır hem sütun matrisidir.

2) Kare Matris

Satır ve sütun sayıları eşit olan matrislerdir.

Örneğin, $A = [7]_{1x1}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ birer kare matristir. $n.n$ boyutlu bir kare matrisin $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ elemanlarının oluşturduğu doğrultuya asal köşegen denir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

kare matrisinin asal köşegeni 1,4 ve 8 elemanlarından oluşmaktadır.

3) Sıfır Matrisi

Bütün elemanları sıfır olan matristir ve 0 sembolü ile gösterilir. Örneğin,

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

birer sıfır matristir.

4) Köşegen Matris

Asal köşegen üzerindeki elemanları dışında bütün elemanları sıfır olan matristir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bir köşegen matristir.

5) Birim Matris

Asal köşegeni üzerindeki elemanları bir ve diğer elemanları sıfır olan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki kare matrislere birim matris denir. I veya boyutu belirtmek için I_n sembolü ile gösterilir. Örneğin, I_2 ve I_3 birim matrisleri

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bir Matrisin Tersi

Herhangi bir A kare matrisi için

$$A.B = B.A = I$$

denklemini gerçekleyen B matrisine A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. Özel olarak $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

formülü ile hesaplanır.

Özellikler

$n.n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ kare matrisleri için,

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

özellikleri gerçeklenir.

Bir Matrisin Devriği (Transpozu)

Bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin satırlarını sütun, sütunlarını satır yapmakla elde edilen matrise A matrisinin taranspozu denir ve A^T ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozu $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 7 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Özellikler

$m.n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri için,

1) $\left(A^T\right)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $k \in \mathbb{R}$ için $(kA)^T = kA^T$

4) $(A.B)^T = B^T.A^T$

5) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

özellikleri gerçeklenir.