Sayısal Yöntemler Dersi 4. Hafta Ders Notu

Matrisin Determinantı

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left[(a_{11}a_{22}) - (a_{12} - a_{21})\right]$$

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Jacobian:

Jocobian doğrusal olmayan sistemlerin çözümünde ortaya çıkan bir büyüklüktür. X ve y için çözlümesi gereken eşitliktir. f1(x,y)=k, f2(x,y)=l.
Jacobian matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} = J(f_1, f_2) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\frac{df_1}{dx}\right)\left(\frac{df_2}{dy}\right) - \left(\frac{df_1}{dy}\right)\left(\frac{df_2}{dx}\right)$$

Cramer Yöntemi:

Cramer yöntemi denklem sistemlerinin çözümü için determinant değerlerini kullanmaktadır. Determinantı temel alan Cramer yöntemiyle bilinmeyen x değişkeninin hesaplanması için aşağıdaki eşitlik kullanılır:

$\det(a \mid b)_j$: eşitlik vektörünün $[a]$ katsayılar matrisinin

j.sütunun yerleştirilmesiyle oluşturulan matrisin determinantı hesaplanarak bulunur.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{1n}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

Örnek: Verilen denklemi Cramer yöntemiyle çözünüz.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\
&-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 8 \\
&3x_1 - 6x_2 + x_3 = 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}
$$

$$
\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix} = -2
$$

$$
x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 2 \\ 12 & -6 & 1 \end{bmatrix}}{\det(A)} = 211
$$

$$
x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ -2 & 8 & 2 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix}}{-2} = 88
$$

$$
x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -2 & 7 & 8 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}}{-2} = -93
$$

Doğrusal Eşitliklerin Sayısal Çözümü:

n bilinmeyenli doğrusal bir sistem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots a_{3n}x_n = b_3 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

b değerlerinin hepsinin 0 olması homojen denklem denir.
b değerlerinin 0 dan farklı olması ise homojen olmayan denklem sistemidir. Denklemin matris formu aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n
\end{bmatrix}
$$

Bu sistemleri çözebilmek için iki farklı sayısal yöntem kullanılabilir:

1. **Doğrudan (Dolaysız Direkt):** Eşitliklerdeki aritmetik hesaplamalar ile yapılır:
2. **Tekrarlamalı (Dolaylı iteratif):** Başlangıç çözümüyle işlemlere başlar ve ardışık işlemlerle daha hassas çözüm bulunana kadar iterasyonlar tekrarlanır:

Dolaylı Yöntemler:

Sistem kolay bir şekilde çözülebilecek eş değer denklem sistemine dönüştürülür. Matrislerin üst ve alt üçgen ile köşegen gösterimleri temel alınarak sistem çözülür.

Üst Üçgen Formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \leftarrow\leftarrow x_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \leftarrow\leftarrow x_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots a_{3n}x_n = b_3 \leftarrow\leftarrow x_3 \\ & \vdots \\ & a_{nn}x_n = b_n \leftarrow\leftarrow x_n \end{aligned}$$

Bu denklem geriye koyma metoduyla çözülebilir hale gelmiştir. Üst üçgen formu ile çözülen sistemlerde geriye doğru yerine koyma kullanılarak bulunması gereken x değerleri aşağıdaki eşitlik ile hesaplanır.

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} b_j}{a_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, n-3, \ldots 1$$

Üst köşegen formu ve geriye doğru yerine koyma işlemi Gauss eleme yönteminde kullanılmaktadır.

Alt Üçgen Formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 = b_1 \leftarrow\leftarrow x_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \leftarrow\leftarrow x_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \leftarrow\leftarrow x_3 \\ & \vdots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots a_{nn}x_n = b_n \leftarrow\leftarrow x_4 \end{aligned}$$

İleri doğru Yerine koyma metodu matematiksel modelli aşağıdaki gibidir:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} b_j}{a_{ii}} \qquad i = 2,3,\ldots n$$

Alt üçgen formu ile ileriye doğru yerine koyma işlemi ile değişkenin bulunması işlemi üst üçgen formunda olduğu gibi Gauss eleme yöntemi kullanılır.

Köşegen Formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$a_{33}x_3 = b_3$$
$$a_{11}x_1 = b_1$$
$$a_{22}x_2 = b_2 \qquad x_i = \frac{b_i}{a_i} \quad i = 1,2,3,..n.$$

Gauss Eleme Yöntemi:

Doğrusal sistemlerin çözümünde kullanılan Gauss eleme yönteminde ilk olarak alt ve üst üçgen matris oluşturulduktan sonra ileri ve geriye doğru yerine koyma metodu uygulanır. Aşağıda 4 bilinmeyenli bir denklem için Gauss eleme yöntemi uygulanır:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Verilen matrisin üst üçgen matris formunda aşağıdaki gibi yazılırsa:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$
$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b^2{}_2$$
$$a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b^3{}_3$$
$$a_{44}x_4 = b^4{}_4$$

Katsayılar üzerindeki terimler pivotların altındaki katsayıların sıfırlanması esnasında diğer katsayılardaki meydana gelen değişimi ifade etmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^2{}_{22} & a^2{}_{23} & a^2{}_{24} \\ 0 & 0 & a^3{}_{33} & a^3{}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a^4{}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b^2{}_2 \\ b^3{}_3 \\ b^4{}_4 \end{bmatrix}$$

Gauss Eleme yöntemiyle dört bilinmeyenli doğrusal denklemler aşağıdaki adımlara göre çözümlenir:

1. **Adım:** Eğer üst üçgen matris oluşturularak çözüm yapılıyorsa 1. Satır olduğu gibi bırakılır ve ikinci eşitlikteki a_{21} katsayısı sıfırlanır. Bu durumda a_{22}, a_{23} ve a_{24} ve b değerleri hesaplanır.
   Verilen sistem için ilk eşitlik pivot eşitlik a_{11} ise pivot kat sayı elemanıdır.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$ pivot eşitlik:

Bu yapıya göre

$$\text{İlk eşitlik } m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ ile çarpılıp ikinci eşitlikten farkı alınır.}$$

$$\text{İlk eşitlik } m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ ile çarpılıp üçüncü eşitlikten farkı alınır.}$$

$$\text{İlk eşitlik } m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} \text{ ile çarpılıp dördüncü eşitlikten farkı alınır.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^2_{22} & a^2_{23} & a^2_{24} \\ 0 & a^2_{32} & a^2_{33} & a^2_{34} \\ 0 & a^2_{42} & a^2_{43} & a^2_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b^2_2 \\ b^2_3 \\ b^2_4 \end{bmatrix}$$

2. **Adım:** Oluşturulan matristeki a^2_{22} elemanı pivot eleman olarak alınır.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$ pivot eşitlik:

Bu yapıya göre

$$\text{İkinci eşitlik } m_{32} = \frac{a^2_{32}}{a^2_{22}} \text{ ile çarpılıp üçüncü eşitlikten farkı alınır.}$$

$$\text{İkinci eşitlik } m_{42} = \frac{a^2_{42}}{a^2_{22}} \text{ ile çarpılıp dördüncü eşitlikten farkı alınır.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^2_{22} & a^2_{23} & a^2_{24} \\ 0 & 0 & a^3_{33} & a^3_{34} \\ 0 & 0 & a^3_{43} & a^3_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b^2_2 \\ b^3_3 \\ b^3_4 \end{bmatrix}$$

3. **Adım:** Bu adımda bir önceki adımda elde edilen üçüncü eşitlik pivot eşitliği olarak alınır. Hesaplamalar a^3_{33} pivot elemanı temel alınarak gerçekleştirilir.

$$\text{Üçünücü eşitlik } m_{43} = \frac{a^3_{43}}{a^3_{33}} \text{ ile çarpılıp dördüncü eşitlikten farkı alınır.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a^2_{22} & a^2_{23} & a^2_{24} \\ 0 & 0 & a^3_{33} & a^3_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a^4_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b^2_2 \\ b^3_3 \\ b^4_4 \end{bmatrix}$$

Daha sonra geriye doğru yerine koyma metoduyla denklemlerin kullanılır.

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}},\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} b_j}{a_{ii}} \quad i = n-1, n-2, n-3, \ldots 1$$

Örnek 1: Verilen doğrusal denklem sistemini gauss elemem mantığına göre çözünüz. (Üst Üçgen yapısına göre)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 4 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 10x_4 &= -29 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 &= 16 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 \\ -1 & -5 & 2 & -10 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -29 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1. Adımda ilk satır ½ ile çarpılıp ikinci satıra eklenir.
   İlk satır -1/2 ile çarpılıp 3. Satıra eklenir.
   ilk satır ½ ile çarpılıp dördüncü satıra eklenir.

   $$S_1 + 2S_2 \rightarrow S_2$$

   $$S_1 - 2S_3 \rightarrow S_3$$

   $$S_1 + 2S_2 \rightarrow S_4$$

   $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} & -1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -27 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2. Adım:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{11/2}{-13/2} = -\frac{11}{13}$$

$$m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}} = \frac{1/2}{-13/2} = \frac{1}{13}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{128}{13} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{14}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -27 \\ \frac{-115}{13} \\ -\frac{25}{13} \end{bmatrix}$$

3. Adım: 3. Eşitlik -3 ile çarpılıp dördüncü satır ile toplanırsa.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{128}{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{370}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -27 \\ \frac{-115}{13} \\ -\frac{370}{13} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{370}{13} x_4 = -\frac{370}{13} \quad x_4 = 1$$

$$-x_3 - \frac{128}{13} x_4 = -\frac{115}{13} \quad x_3 = -1$$

$$\frac{13}{2} x_2 + \frac{15}{2} x_4 = 27 \quad x_2 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 4 \quad x_1 = 2$$

Bir roketin yukarı doğru hızı üç farklı zamanda Tablo 1 ‘de verilmiştir.

Tablo 1 Hız ve Zaman datası.

Zaman, t (s)	Hız, v (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

Hızla ilgili datayı ikinci mertebeden bir yaklaşım polinomunda kullanalım:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 , \qquad 5 \le t \le 12$$

Yukarıdaki a_1, a_2, ve a_3 katsayıları aşağıdaki sistemi sağlar:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

a_1, a_2, ve a_3 katsayılarını Gauss eliminasyon yöntemi ile bulun. Roketin $t = 6, 7.5, 9, 11$ anlarındaki hızı nedir?

Çözüm

Forward Elimination

Üç denklem olduğu için iki adımlı ileriye doğru yok etme uygulanacak.

<u>İlk Adım</u>

Satır 1 ‘i $64/25 = 2.56$ ile çarpıp Satır 2 ‘den çıkaralım

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Satır 1 ‘i $144/25 = 5.76$ ile çarpıp Satır 3 ‘ten çıkaralım. Bu işlemlerle ilk adımda aşağıdaki system elde edilir:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ -335.968 \end{bmatrix}$$

<u>İkinci Adım</u>

Satır 2 ‘yi $-16.8/-4.8 = 3.5$ ile çarpıp Satır 3 ‘ten çıkaralım. İkinci adım sonucunda elde edilen sistem:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Back substitution

Üçüncü denklemden

$$0.7a_3 = 0.76$$
$$a_3 = \frac{0.76}{0.7}$$
$$= 1.08571$$

a_3 değerini ikinci denklemde yerine koyarsak,

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$
$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8}$$
$$= \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.08571}{-4.8}$$
$$= 19.6905$$

a_2 ve a_3 değerlerini ilk denklemde yerine koyarsak,

$$
\begin{aligned}
&25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8 \\
&a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25} \\
&\quad = \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25} \\
&\quad = 0.290472
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki çözüm vektörü elde edilir:

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}
$$

Yukarıdaki sonuca göre üç data noktamızın üzerinden geçen polinom şudur:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \\
&= 0.290472t^2 + 19.6905t + 1.08571, \quad 5 \le t \le 12
\end{aligned}
$$

Şimdi ise biz $t = 6, 7.5, 9 \text{ and } 11$ saniyelerindeki hızı bulmak istediğimizden basitçe istediğimiz t değerini $v(t) = 0.290472t^2 + 19.6905t + 1.08571$ hız fonksiyonunda yerine koyarak ona ilişkin hızı bulabiliriz. Örneğin, $t = 6$ anında:

$$
\begin{aligned}
v(6) &= 0.290472(6)^2 + 19.6905(6) + 1.08571 \\
&= 129.686 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

Bununla birlikte t = 6, 7.5, 9, 11 saniyelerinde istediğimiz hız değerlerini matris çarpımını kullanarakta bulabiliriz.

$$
v(t) = \begin{bmatrix} 0.290472 & 19.6905 & 1.08571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Yani, $v(6), v(7.5), v(9), v(11)$, değerleri şu şekilde bulunur:

$$
\begin{bmatrix} v(6) \, v(7.5) \; v(9) \, v(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 & 19.6905 & 1.08571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6^2 & 7.5^2 & 9^2 & 11^2 \\ 6 & 7.5 & 9 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$=\begin{bmatrix}0.290472 & 19.6905 & 1.08571\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36 & 56.25 & 81 & 121\\ 6 & 7.5 & 9 & 11\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}129.686 & 165.104 & 201.828 & 252.828\end{bmatrix}$$

$$v(6)=129.686\ \text{m/s}$$
$$v(7.5)=165.104\ \text{m/s}$$
$$v(9)=201.828\ \text{m/s}$$
$$v(11)=252.828\ \text{m/s}$$

Gauss Jordan Eleme Yöntemi:

Doğrusal sistemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden biri olan Gauss Jordan yöntemi Gauss elemeden farklı bir şekilde köşegen formu temel alınır. Köşegen üstünde 1 olcak şekilde kar sayılar oluşturulduktan sonra değişkenin çözümü değerleri doğrudan belirlenir.

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b'_1\\ b'_2\\ b'_3\\ b'_4\end{bmatrix}$$