Tekrarlama Yöntemleri:

Doğrusal sistemlerde eşitlikler tekrarlama yöntemleriyle çözülebilmektedir.

3. bilinmeyenli doğrusal bir eşitlikte:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad \Rightarrow x_1 = \left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\right] / a_{11}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad \Rightarrow x_2 = \left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3)\right] / a_{22}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad \Rightarrow x_3 = \left[b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)\right] / a_{33}$$

Bu denklem sistemi için eşitlikler sırasıyla x1, x2 ve x3 eşitliklerden çekilerek yukarıda gösterildiği gibi yeniden düzenlenir. Elde edilen eşitlikler başlangıç çözüm değerleri kullanılarak çözülür.

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} a_{ij}x_j\right)\right] \quad i = 1, 2, 3 \ldots n$$

Doğrusal bir sistemde çözümün yakınsaması için yeterli şart matrisin her bir satırında köşegen üzerindeki elemanın mutlak değerinin köşegen üzerinde yer almayan katsayıların mutlak değerlerinin toplamında daha büyük olmasıdır.

2 adet tekrarlama yöntemi vardır:

1. Jacobi Tekrarlama Yöntemi
2. Gauss Siedel Tekrarlama Yöntemi:

Bu iki yöntem arasındaki en önemli fark iterasyonda elde edilen çözümlerin yeni x değerlerinin hesaplanmasında nasıl kullanıldığıdır.

1. Jacobi Tekrarlama Yöntemi

Jacobi yöntemiyle çözüm işlemine verilen başlangıç değerleriyle başlanır ve bu değerler kullanılarak x değerleri hesaplanır. k'lar her iterasyonda hesaplanmış değerleri temsil eder. k=0 için başlangıç değerleri $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ şeklinde alınır.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_i}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} a_{ij} x^{(k)}{}_j \right] \quad i = 1,2,3...n$$

$$Her\ deg\,erin\ hassasiyeti$$

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| \leq \varepsilon \ \ ile\ olculur.\ i = 1,2,3,..n$$

Örnek 1: Aşağıda verilen denklem sisteminde başlangıç şartları V_a=V_b=V_c=1 olarak verilmektedir. Jacobi tekrarlama yöntemiyle 2 iterasyon için gerilimleri hesaplayınız.

$$\begin{aligned} 7V_a - 2V_b - 4V_c &= 3 \\ -2V_a + 10V_b - 5V_c &= 0 \\ -4V_a - 5V_b + 9V_c &= 2 \end{aligned}$$

Bu soruda öncelikle yapılması gereken V_a V_b ve V_c değerlerinin yalnız bırakılmasıdır.

$$V_a = \frac{1}{7}[3 + 2V_b + 4V_c] \ \Rightarrow V_a{}^{(k+1)} = \frac{1}{7}[3 + 2V_b{}^{(k)} + 4V_c{}^{(k)}]$$

$$V_b = \frac{1}{10}[2V_a + 5V_c] \ \Rightarrow \ V_b{}^{(k+1)} = \frac{1}{10}[2V_a{}^{(k)} + 5V_c{}^{(k)}]$$

$$V_c = \frac{1}{9}[2 + 4V_a + 5V_b] \ \Rightarrow V_c{}^{(k+1)} = \frac{1}{9}[2 + 4V_a{}^{(k)} + 5V_b{}^{(k)}]$$

1. **İterasyon:** k=0 degeri için $V_a{}^{(0)} = V_b{}^{(0)} = V_c{}^{(0)} = 1V$

$$V_a{}^{(1)} = \frac{1}{7}[3 + 2V_b{}^{(0)} + 4V_c{}^{(0)}] \ \Rightarrow V_a{}^{(1)} = \frac{1}{7}[3 + 2*1 + 4*1] = 1.2857$$

$$V_b{}^{(1)} = \frac{1}{10}[2V_a{}^{(0)} + 5V_c{}^{(0)}] \Rightarrow \ V_b{}^{(1)} = \frac{1}{10}[2*1 + 5*1] = 0.7$$

$$V_c{}^{(1)} = \frac{1}{9}[2 + 4V_a{}^{(0)} + 5V_b{}^{(0)}] \Rightarrow V_c{}^{(1)} = \frac{1}{9}[2 + 4*1 + 5*1] = 1.222$$

Denklem de görüldüğü gibi öncelikle k=0 için değerler yerine konularak ikinci iterasyondaki başlangıç değerleri hesaplanmaktadır.

2.iterasyon k=1 değeri için $V_a^{(1)} = 1.2857, V_b^{(1)} = 0.7,\ V_c^{(1)} = 1.2222$ değerleri aşağıdaki denklemlerde kullanılmalıdır.

$$V_a^{(2)} = \frac{1}{7}[3 + 2V_b^{(1)} + 4V_c^{(1)}] \ \Rightarrow V_a^{(1)} = \frac{1}{7}[3 + 2*0.7 + 4*1.2222] = 1.3270$$

$$V_b^{(2)} = \frac{1}{10}[2V_a^{(1)} + 5V_c^{(1)}] \Rightarrow \ V_b^{(1)} = \frac{1}{10}[2*1.2857 + 5*1.2222] = 0.8682$$

$$V_c^{(2)} = \frac{1}{9}[2 + 4V_a^{(1)} + 5V_b^{(1)}] \Rightarrow V_c^{(1)} = \frac{1}{9}[2 + 4*1.2857 + 5*0.7] = 1.1825$$

Görüldüğü gibi yöntemlerde algoritmik bir düzen söz konusudur. Yani ilgili denklemler n. iterasyona kadar hesaplanabilir.

Yöntem uygulanırken öncelikle matematiksel model çıkarılmıştır. Bu matematiksel modele göre iterasyonlar ilerletilmiştir. Bundan dolayı bu yöntemlerin herhangi bir programlama dilinde kodlanması son derece kolaydır.

2. Gauss Siedel Tekrarlama Yöntemi

Gauss siedel yönteminde iterasyonlarda her değişkenin hesaplanmış değeri diğer değişkenlerin hesaplanması için kullanılarak jacobi tekrarlama yöntemine göre daha hızlandırılmıştır. Yöntemde ilk olarak verilen başlangıç şartları için ilk değişken hesaplanmış ikinci ve 3. Diğer değişkenler için önceki işlemlerde bulunan değerler kullanılır.

Yöntemin gerçekleştirilme şekli;

$$x_l^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} x_j^{(k)} \right]$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} \right]$$

Örnek 2:Aşağıda verilen denklem sisteminde başlangıç şartları $V_a=V_b=V_c=1$ olarak verilmektedir. Gauss Siedel yöntemiyle çözünüz.

$$7V_a - 2V_b - 4V_c = 3$$
$$-2V_a + 10V_b - 5V_c = 0$$
$$-4V_a - 5V_b + 9V_c = 2$$

Bu soruda öncelikle yapılması gereken V_a V_b ve V_c değerlerinin yalnız bırakılmasıdır.

$$V_a = \frac{1}{7}[3 + 2V_b + 4V_c] \Rightarrow V_a^{(k+1)} = \frac{1}{7}[3 + 2V_b^{(k)} + 4V_c^{(k)}]$$
$$V_b = \frac{1}{10}[2V_a + 5V_c] \Rightarrow V_b^{(k+1)} = \frac{1}{10}[2V_a^{(k+1)} + 5V_c^{(k)}]$$
$$V_c = \frac{1}{9}[2 + 4V_a + 5V_b] \Rightarrow V_c^{(k+1)} = \frac{1}{9}[2 + 4V_a^{(k+1)} + 5V_b^{(k+1)}]$$

1.İterasyon: k=0 degeri için

$$V_a^{(1)} = \frac{1}{7}[3 + 2V_b^{(0)} + 4V_c^{(0)}] \Rightarrow V_a^{(1)} = \frac{1}{7}[3 + 2*1 + 4*1] = 1.2857$$
$$V_b^{(1)} = \frac{1}{10}[2V_a^{(1)} + 5V_c^{(0)}] \Rightarrow V_b^{(1)} = \frac{1}{10}[2*(1.2857) + 5*1] = 0.7571$$
$$V_c^{(1)} = \frac{1}{9}[2 + 4V_a^{(1)} + 5V_b^{(1)}] \Rightarrow V_c^{(1)} = \frac{1}{9}[2 + 4*(1.2857) + 5*(0.7571)] = 1.2143$$

2.İterasyon: k=1 degeri için

$$V_a^{(2)} = \frac{1}{7}[3 + 2V_b^{(1)} + 4V_c^{(1)}] \Rightarrow V_a^{(2)} = 1.3288$$
$$V_b^{(2)} = \frac{1}{10}[2V_a^{(2)} + 5V_c^{(1)}] \Rightarrow V_b^{(2)} = 0.8749$$
$$V_c^{(2)} = \frac{1}{9}[2 + 4V_a^{(2)} + 5V_b^{(2)}] \Rightarrow V_c^{(2)} = 1.3033$$