Reflecting Universes in Explicit Mathematics

Reinhard Kahle* Anton Setzer†

October 31, 1999

1 Introduction

Definition 1

1. $[k, l[:= \{n \in \mathsf{N} \mid k \leq n < l\}$.
2. $a \restriction [k, l[:= \begin{cases} \langle ak, a(k+1), \ldots, a(l-1) \rangle & \text{if } k < l, \\ \langle\rangle & \text{otherwise.} \end{cases}$
   (Defined by recursion on l).
3. $[k, l] := [k, l+1[$.
4. $]k, l[:= [k+1, l[$.
5. $]k, l] := [k+1, l+1[$.

2 Π_3-reflection

Definition 2

1. $m \in \mathsf{M} \leftrightarrow m0 \in \Re \wedge (m1 : (m0 \times \Re) \to \mathsf{M})$.
2. $\mathsf{u}mf \in \mathsf{U} \to (f : \mathsf{u}mf \dot{\to} \mathsf{u}mf)$.
3. $m \in M \wedge (f : \Re \to \Re) \to \mathsf{u}mf \in \mathsf{U}$.
4. $u = \mathsf{u}mf \in \mathsf{U} \wedge a \,\dot{\in}\, m0 \times u \wedge (g : u \dot{\to} u)$
   $\to \mathsf{u}(m1a)g \in \mathsf{U} \cap u$.

*Wilhelm-Schickard-Institut, Universität Tübingen, Sand 13, D–72076 Tübingen, Germany, email: kahle@informatik.uni-tuebingen.de

†Dept. of Mathematics, Uppsala University, P.O. Box 480, S-751 06 Uppsala, Sweden, email: setzer@math.uu.se

3 Π_{n+3}-reflection

Definition 3

1. $p \in \mathsf{P} \leftrightarrow p0 \in \Re \wedge (p1 : (p0 \times \Re) \to \mathsf{P})$.
2. $u \in \mathsf{U} \to (p \in \mathsf{Q}(u) \leftrightarrow p0 \,\dot{\in}\, u \wedge (p1 : (p0 \times u) \to \mathsf{Q}(u)))$.
3. $\mathsf{v}pf \in \mathsf{U} \to (f : \mathsf{v}pf \,\dot{\to}\, \mathsf{v}pf)$.
4. $(f : \Re \to \Re) \wedge (p : [0,n] \to \mathsf{P}) \to \mathsf{v}pf \in \mathsf{U}$.
5. $u = \mathsf{v}pf \in \mathsf{U} \wedge$
   $(f' : u \to u) \wedge l \leq n \wedge a \,\dot{\in}\, pl0 \times u \wedge$
   $(p' : [0,l[\to \mathsf{Q}(u)) \wedge p'l = pl1a \wedge (p' \restriction]l,n] = p \restriction]l,n])$
   $\to \mathsf{v}p'f' \in \mathsf{U} \cap u$.

4 Π_α-reflection

Definition 4 Let OT be a set of notations for ordinals $< \alpha$ with ordering $\prec$.

Definition 5

1. $p \in \mathsf{P} \leftrightarrow p0 \in \Re \wedge (p1 : (p0 \times \Re) \to \mathsf{P})$
2. $u \in \mathsf{U} \to (p \in \mathsf{Q}(u) \leftrightarrow p0 \,\dot{\in}\, u \wedge (p1 : p0 \times u \to \mathsf{Q}(u)))$.
3. $\mathsf{v}n\beta pf \in \mathsf{U} \to (f : \mathsf{v}n\beta pf \,\dot{\to}\, \mathsf{v}n\beta pf)$.
4. $\beta 0 \in \mathsf{OT} \wedge p0 \in P \wedge (f : \Re \to \Re) \to v0\beta pf \in \mathsf{U}$.
5. $u = \mathsf{v}n\beta pf \in \mathsf{U} \wedge l \leq n \wedge (f' : u \,\dot{\to}\, u) \wedge a \in u \times pl0 \wedge$
   $(p' \restriction [0,l[= p \restriction [0,l[) \wedge p'l = pl1a$
   $\to \mathsf{v}l\beta p'f' \in \mathsf{U} \cap u$.
6. $u = \mathsf{v}n\beta pf \in \mathsf{U} \wedge (f' : u \,\dot{\to}\, u) \wedge$
   $(p' \restriction [0,n] = p \restriction [0,n]) \wedge p'(n+1) \in \mathsf{Q}(u) \wedge$
   $(\beta' \restriction [0,n] = \beta \restriction [0,n]) \wedge \beta'(n+1) \prec \beta n$
   $\to \mathsf{v}(n+1)\beta'p'f' \in \mathsf{U} \cap u$.

5 Π^1_1-reflection

Definition 6

1. $p \in \mathsf{P} \leftrightarrow p0 \in \Re \wedge (p1 : (p0 \times \Re) \to \mathsf{P})$.
2. $u \in \mathsf{U} \to (p \in \mathsf{Q}(u) \leftrightarrow p0 \,\dot{\in}\, u \wedge (p1 : (p0 \times u) \to \mathsf{Q}(u)))$
3. $\mathsf{v}ndpf \in \mathsf{U} \to (f : \mathsf{v}ndpf \,\dot{\to}\, \mathsf{v}ndpf)$.
4. $d0 \in \mathsf{P} \wedge p0 \in \mathsf{P} \wedge (f : \Re \to \Re) \to \mathsf{v}0dpf \in \mathsf{U}$.
5. $u = \mathsf{v}ndpf \in \mathsf{U} \wedge (f' : u \,\dot{\to}\, u) \wedge a \,\dot{\in}\, dl0 \times u \wedge$
   $(d' \restriction [0, n] = d \restriction [0, n]) \wedge d'(n + 1) = dn1a \wedge$
   $(p' \restriction [0, n] = p \restriction [0, n]) \wedge p'(n + 1) \in \mathsf{Q}(u)$
   $\to \mathsf{v}(n + 1)d'p'f' \in \mathsf{U} \cap u$.
6. $u = \mathsf{v}ndpf \in \mathsf{U} \wedge (f' : u \,\dot{\to}\, u) \wedge l \leq n \wedge a \,\dot{\in}\, pl0 \times u \wedge$
   $(p' \restriction [0, l[= p \restriction [0, l[) \wedge p'l = pl1a$
   $\to \mathsf{v}ldp'f' \in \mathsf{U} \cap u$.