“Meaning explanations” in Martin-Löfs Typentheorie

Anton Setzer
Uppsala, Schweden

1. Ein modifiziertes Hilbertsches Programm
2. Die Bedeutung der Urteile der Typentheorie
3. Die Bedeutung der Mengen
4. Die Bedeutung eines Universums
5. “Meaning explanations” für das Mahlo-Universum

1. Ein modifiziertes Hilbertsches Programm

Ursprüngliches Hilbertsches Programm:
Beweis der Konsistenz von Axiomensystemen der Mathematik mit endlichen Methoden.

Gödel:
Hilberts Programm ist nicht möglich.

Gentzen:
Beweis der Konsistenz von PA mit quantorenfreier transfiniter Induktion bis ϵ_0.

Beweistheorie als Ordinalzahlanalyse:
Reduktion der Konsistenz von Axiomensystemen der Mathematik auf Fundiertheit von Ordinalzahlbezeichungssystemen (primitiv-rekursive Wohlordnungen).

Problem:
Wie sieht man Fundiertheit der Ordinalzahlbezeichnungssysteme ein?

Modifiziertes Hilbersches Programm:
Reduktion der Konsistenz von Axiomensystemen der Mathematik auf philosophisch evidente oder evidentere Prinzipien.

Ansätze:

- Representation von Ordinalzahlbezeichnungssysteme, so daß ihre Wohlfundiertheit unmittelbar einsichtig ist.
  * "Ordinal systems".
  * Derzeitige Grenze der Evidenz:

    $|\mathrm{ID}_{<\omega}|$.
- Beweise der Konsistenz obiger Axiomensysteme (in der Regel via Ordinalzahlanalyse) in Theorien, so daß die Gültigkeit ihrer Theoreme philosophisch einsichtig ist.
  * In der Regel konstruktive Theorien.
  * Hauptkandidat: Martin-Löf Typentheorie.
  * Grundlage der Einsicht: "Meaning Explanations".

Betrachtete Typentheorie

- Kein "logical framework" (Höhere Typen oberhalb von Set).
- Polymorphe Typentheorie.
- Typen: N_k, N, $A+B$, $\Sigma x : A.B$, $\Pi x : A.B$, $\mathsf{W}x : A.B$, $\mathrm{I}(A,r,s)$, U und später Mahlo-Universum.
- Mit expliziten Substitutionen.

2. Die Bedeutung der Urteile der Typentheorie

0-stellige Programme: gewisse endliche Zeichenketten t zusammen mit einer Berechnungs vorschrift für t, die sofern sie terminiert als Ergebnis eine endliche Zeichenkette liefert.

$n+1$-stellige Programme: gewisse Zeichenketten t, zusammen mit einer Berechnungsvorschrift, die angibt, wie sich die Anwendung von t auf 0-stellige Programme $a_1, \ldots, a_{n+1}$ berechnet.
Im Fall von Terminierung ist das Ergebnis eine endliche Zeichenkette.

Ist t ein $n+1$-stelliges Programm,
a_1 ,. . . , a_{n+1} 0-stellige Programme,
so bezeichnet $t(a_1, \ldots, a_{n+1})$
das 0-stellige Programm, das wie die Anwendung von t auf $a_1, \ldots, a_{n+1}$ rechnet.

Im folgenden sagen wir für 0-stelliges Programm kurz Programm.

Gewisse Programme werden durch die Regeln der Typentheorie hergeleitet.
Der Begriff Programm ist aber intuitiv zu verstehen.

Objekte in Typentheorie:

Mengen (A, B, $C \ldots$) und Terme (r, s, $t \ldots$).

Urteile (judgements) in Typentheorie:
- $A : \mathrm{Set}$
- $A = B$
- $s : A$
- $s = t : A$.

Abhängige Urteile:
- $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ context. (Aus organisatorischen Gründen).
- $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A : \mathrm{Set}$.
- $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A = B$.
- $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r : A$.
- $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r = s : A$.

Notationen:
- Γ, Δ für Kontexte,
- θ für Urteile (ohne Abhängigkeit).

Regeln der Form

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \theta_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \Rightarrow \theta_n}{\Gamma \Rightarrow \theta}$$

Variablen

Simulation eines variablenfreien Kalküls:
Sei $z_1, z_2, z_3, \ldots$ eine Aufzählung der Variablen.
Konventionen:

- die i-te gebundene Variable sei z_i, i.e.:
  * In einem Kontext $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ sei $x_1 \equiv z_1, \ldots, x_n \equiv z_n$.
  * In $x : A, y : (\Sigma z : A.B), z : C$ sei $x \equiv z_1$, $y \equiv z_2$, $z \equiv z_3$, $z \equiv z_3$.
  * etc.
- "Sei y neu in Δ" bedeutet: Falls $\Delta \equiv z_1 : A_1, \ldots, z_n : A_n$, so sei $y \equiv z_{n+1}$.

Variablenfreie Version erhältlich durch:

- Streichung aller Variablen in Bindungsposition.
- x_i steht jetzt für die $i$te Projektion des Kontexts.

Meaning explanations

Im folgenden persönliche Auffassung.

Meaning explanation bedeutet:

- Man gibt zu einem Urteil in Typentheorie die Bedeutung aller in ihm vorkommenden Mengen und Terme an.
- Man gibt an, was es heißt daß dieses Urteil bzgl. der Bedeutung der Mengen und Terme gilt.
  - $*$Beschreibung erfolgt in natürlicher Sprache mit endlichen Sätzen.
- Man zeigt, daß wenn die Urteile der Prämissen einer Regel gelten, so auch das der Konklusion.

Sei $\Gamma \Rightarrow \theta$ ein in Typentheorie bewiesenes Urteil.
Beispiel: Formalisierung der Konsistenz einer Theorie.

Diesem Urteil entspreche eine Aussage, die man beweisen will.
Beispiel: Die Konsistenz der Theorie.

Wenn aus der Gültigkeit des Urteils die Aussage folgt, folgt aus dem Beweis und obigem die Gültigkeit der Aussage.

Einschränkung: Meaning explanations können nur für endlich viele Urteile angegeben werden.
Genügt für das modifizierte Hilbertsche Programm.

Die Bedeutung einer Menge

Die Bedeutung einer Menge A wird dadurch angegeben, daß man angibt, welches die kanonischen Elemente von A sind und wann zwei kanonische Elemente von A gleich sind.

Unter dieser Angabe ist ein Element von A ein Programm, das, wenn evaluiert, ein kanonisches Element von A ergibt. Wir schreiben dann $a \in A$ für a ist Element der Menge bzgl. der angegebenen Bedeutung.

Zwei Elemente von A sind gleich, wenn sie auf kanonische Elemente von A reduzieren, die gleich sind.

Die Bedeutung eines Terms

Die Bedeutung eines Terms, der in einem Kontext mit n Variablen gebildet ist, ist ein n-stelliges Programm.

Die Bedeutung von A : Set

- Die einzige im Urteil enthaltene Menge ist A.
- Im Urteil sind keine Terme enthalten.
- Bzgl. der Erklärung der Bedeutung von A gilt das Urteil wenn die Gleichheit kanonischer Elemente eine Äquivalenzrelation ist, d.h.
    - $*$ Jedes kanonische Element ist gleich zu sich selbst.
    - $*$ Wenn die kanonischen Elemente a und b gleich sind, so auch b und a.
    - $*$ Wenn die kanonischen Elemente a und b sowie b und c gleich sind, so auch a und c.

Die Bedeutung von $A = B$

- Die im Urteil enthaltene Mengen sind A, B.
- Im Urteil sind keine Terme enthalten.
- Das Urteil gilt bzgl. einer Erklärung von A und B, wenn gilt
  + Bzgl. dieser Erklärung gelten A : Set und B : Set.
  + A und B haben die gleichen kanonischen Elemente und die gleichen gleichen kanonischen Elemente, d.h.:
    * Jedes kanonische Element von A ist auch eines von B.
    * Jedes kanonische Element von B ist auch eines von A.
    * Sind zwei kanonische Elemente in A gleich, so auch in B.
    * Sind zwei kanonische Elemente in B gleich, so auch in A.

Die Bedeutung von $r : A$

- Die einzige im Urteil enthaltene Menge ist A.
- Der einzige im Urteil enthaltene Term ist r, welches ein 0-stelliges Programm bedeutet.
- Das Urteil gilt bzgl. einer Erklärung von A und r, wenn gilt:
  + Bzgl. dieser Erklärung gilt $A : \mathrm{Set}$.
  + r ist ein Element von A.

Die Bedeutung von $r = s : A$

- Die einzige im Urteil enthaltene Menge ist A.
- Die im Urteil enthaltene Terme sind r und s (0-stellig).
- Das Urteil gilt bzgl. einer Erklärung von A, r und s, wenn gilt
  + Bzgl. dieser Erklärung gelten $r : A$ und $s : A$.
  + Die Ergebnisse der Berechnung von r und s sind gleiche kanonische Elemente von A.

Die Bedeutung von $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ context

- Die im Urteil enthaltenen Mengen sind:
    * A_1;
    * $A_2(a_1)$, für alle $a_1 \in A_1$;
    * $A_3(a_1, a_2)$, für alle $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2(a_1)$
    * etc.
    * $A_n(a_1, \ldots, a_n)$, für alle $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2(a_1), \ldots, a_{n-1} \in A_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})$
- Im Urteil sind keine Terme enthalten.
- Bzgl. der Erklärung der Bedeutung von A_i gilt das Urteil wenn gilt:
  * Für jedes $i = 1, \ldots, n$ und $a_j \in A_j(a_1, \ldots, a_{j-1})$ ($j = 1, \ldots, i-1$) ist die Gleichheit kanonischer Elemente in $A_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$ Äquivalenzrelation.
  * Für jedes $i = 2, \ldots, n$ und a_j, a'_j gleiche Elemente in $A_j(a_1, \ldots, a_{j-1})$ ($j = 1, \ldots, i-1$) sind $A_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$ und $A_i(a'_1, \ldots, a'_{i-1})$ gleiche Mengen (definiert wie oben).

Die Bedeutung von $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A : \mathsf{Set}$

Die Bedeutung ist die gleiche wie die von

$$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, x_{n+1} : A_{n+1} \text{ context } .$$

Die Bedeutung von $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A = B$

- Die im Urteil enthaltenen Mengen sind diejenigen von
  $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A : \mathrm{Set}$ und
  $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow B : \mathrm{Set}$.
- Im Urteil sind keine Terme enthalten.
- Das Urteil gilt, wenn gilt:
  * $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A : \mathrm{Set}$ gilt.
  * $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow B : \mathrm{Set}$ gilt.
  * Für $a_i \in A_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$ sind
    $A(a_1, \ldots, a_{i-1})$ und $B(a_1, \ldots, a_{i-1})$
    gleiche Mengen.

Die Bedeutung von $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r : A$

- Die im Urteil enthaltenen Mengen sind diejenigen von
  $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A :$ Set.
- Der einzige im Urteil enthaltene Term ist r, welcher n-stellig ist.
- Das Urteil gilt, wenn gilt:
  * $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A :$ Set gilt.
  * $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow B :$ Set gilt.
  * Sind a_i Elemente von
    $A_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$ ($i = 1, \ldots, n$)
    so ist
    $r(a_1, \ldots, a_n)$ Element von $A(a_1, \ldots, a_n)$.
  * Sind a_i, a'_i gleiche Elemente von
    $A_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$ ($i = 1, \ldots, n$)
    so sind
    $r(a_1, \ldots, a_n)$ und $r(a'_1, \ldots, a'_n)$
    gleiche Element von $A(a_1, \ldots, a_n)$.

Die Bedeutung von $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r = s : A$

- Die im Urteil enthaltenen Mengen sind die jenigen von $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A : \mathrm{Set}$.
- Die im Urteil enthaltene Terme sind die jenigen von

  $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r : A$ und

  $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow s : A$.
- Das Urteil gilt, wenn gilt:
  - $\ast$ $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r : A$ gilt.
  - $\ast$ $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow s : A$ gilt.
  - $\ast$ Sind a_i Elemente von

    $A_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$

    so sind

    $r(a_1, \ldots, a_n)$ und $s(a_1, \ldots, a_n)$

    gleiche Elemente von $A(a_1, \ldots, a_n)$.

Voraussetzungen ("Presuppositions")

Die Erklärung der Bedeutung von Termen setzt in der Regel die Erklärung der Bedeutung von Teiltermen voraus.

Die Erklärung der Bedeutung von Mengen setzt in der Regel die Erklärung der Bedeutung von Teilmengen und Teiltermen sowie gewisse Urteile darüber voraus.

Im folgenden wird, wenn die Bedeutung der Konklusion einer Regel erklärt wird, vorausgesetzt, daß die in den Prämissen enthaltenen Mengen und Terme erklärt sind und die Urteile über sie gelten.

Verifikation der strukturellen Regeln

$\emptyset$: context

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A : \mathsf{Set}}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, x : A \text{ context}}$$

$$\frac{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \text{ context}}{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow x_i : A_i}$$

Die Bedeutung von $A_i(a_1, \ldots, a_n)$ ist die von $A_i(a_1, \ldots, a_{i-1})$.

$x_i(a_1, \ldots, a_n)$ reduziert zu a_i und rechnet dann wie a_i.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A : \mathsf{Set}}{\Gamma \Rightarrow A = A}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A = B}{\Gamma \Rightarrow B = A}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A = B \qquad \Gamma \Rightarrow B = C}{\Gamma \Rightarrow A = C}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r : A}{\Gamma \Rightarrow r = r : A}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r = s : A}{\Gamma \Rightarrow s = r : A}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r = s : A \qquad \Gamma \Rightarrow s = t : A}{\Gamma \Rightarrow r = t : A}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r : A \qquad\qquad \Gamma \Rightarrow A = B}{\Gamma \Rightarrow r : B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r = s : A \qquad\qquad \Gamma \Rightarrow A = B}{\Gamma \Rightarrow r = s : B}$$

Explizite Substitution

Sei $\Delta \equiv y_1 : B_1, \ldots, y_m : B_m$.

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A : \mathsf{Set} \\ \Delta \Rightarrow s_1 : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\Delta \Rightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] : \mathsf{Set}}$$

Bedeutung von $A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n](\vec{b})$ ist diejenige von $A(s_1(\vec{b}), \ldots, s_n(\vec{b}))$. (Wobei $s_i(\vec{b})$ als 0-stelliges Programm eingesetzt wird, d.h. nicht zuerst ausgewertet wird).

Sei $\Delta \equiv y_1 : B_1, \ldots, y_m : B_m$.

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r : A \\ \Delta \Rightarrow s_1 : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\Delta \Rightarrow r_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] : A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n]}$$

Bedeutung von

$r_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n](b_1, \ldots, b_m)$:

Berechnung wie $r(s_1(\vec{b}), \ldots, s_n(\vec{b}))$.

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A = B \\ \Delta \Rightarrow s_1 : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\Delta \Rightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] = B_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n]}$$

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow A \\ \Delta \Rightarrow s_1 = s_1' : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 = s_2' : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n = s_n' : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\Delta \Rightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] = A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1', \ldots, s_n']}$$

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r = s : A \\ \Delta \Rightarrow s_1 : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\begin{array}{c} \Delta \Rightarrow r_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] = s_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] \\ : A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow r : A \\ \Delta \Rightarrow s_1 = s_1' : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 = s_2' : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n = s_n' : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\begin{array}{c} \Delta \Rightarrow r_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] = r_{x_1,\ldots,x_n}[s_1', \ldots, s_n'] \\ : A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \text{ context} \\ \Delta \Rightarrow s_1 : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\begin{array}{l} \Delta \Rightarrow (x_i)_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] = s_i \\ \qquad\qquad : (A_i)_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] \end{array}}$$

$(x_i)_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n](\vec{b})$
rechnet wie $s_i(\vec{b})$.

Abkürzung

Falls $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \Rightarrow s : A$,
$s_{x_{i+1},\ldots,x_n}[s_{i+1}, \ldots, s_n]$
$\quad := s_{x_1,\ldots,x_n}[x_1, \ldots, x_i, s_{i+1}, \ldots, s_n]$.
$A_{x_{i+1},\ldots,x_n}[s_{i+1}, \ldots, s_n]$ wird analog definiert.

3. Die Bedeutung der Mengen
$\mathbf{\Pi x : A.B}$

$$\frac{\Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set}}{\Pi x : A.B : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A = A' \qquad \Gamma, x : A \Rightarrow B = B' : \mathsf{Set}}{\Pi x : A.B = \Pi x : A'.B'}$$

Bedeutung von $\Pi x : A.B(\vec{a})$:
Kanonischen Elemente: $\lambda(c)$ mit c 1-stelliges Programm, so daß gilt
- für alle $a \in A(\vec{a})$ ist $c(a) \in B(\vec{a}, a)$, und,
- für alle gleichen Elemente a, a' von $A(\vec{a})$ sind $c(a)$ und $c(a')$ gleiche Elemente von $B(\vec{a}, a)$.

Kanonische Elemente $\lambda(c)$ und $\lambda(c')$ sind gle-ich
in $(\Pi x : A.B)(\vec{a})$, falls
- für $a \in A(\vec{a})$ sind $c(a)$ und $c'(a)$ gleich in $B(\vec{a}, a)$.

$$\frac{\Gamma, x : A \Rightarrow t : B}{\lambda x.t : \Pi x : A.B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \Rightarrow t = t' : B}{\lambda x.t = \lambda x.t' : \Pi x : A.B}$$

Bedeutung von $(\lambda x.t)(\vec{a})$ ist $\lambda(c)$
wobei c das Programm mit $c(a) = t(\vec{a}, a)$.

$A \rightarrow B := \Pi x : A.B$, x neu.

Eliminationsregeln für $\Pi x : A.B$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A \Rightarrow B \\ \Gamma \Rightarrow t : (\Pi x : A.B) \qquad \Gamma \Rightarrow s : A\end{array}}{\mathsf{Ap}(t, s) : B_x[s]}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A \Rightarrow B \\ \Gamma \Rightarrow t = t' : (\Pi x : A.B) \qquad \Gamma \Rightarrow s = s' : A\end{array}}{\mathsf{Ap}(t, s) = \mathsf{Ap}(t', s') : B_x[s]}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A \Rightarrow B \\ \Gamma, x : A \Rightarrow t : B \qquad \Gamma \Rightarrow s : A\end{array}}{\mathsf{Ap}(\lambda x.t, s) = t_x[s] : B_x[s]}$$

Rechenvorschrift für $\mathsf{Ap}(t, s)(\vec{a})$:
- Berechne $t(\vec{a})$.
- Wenn Ergebnis $\lambda(c)$ ist, berechne $c(s(\vec{a}))$,
- ansonsten ist Ergebnis undefiniert.

Der “ansonsten”-Fall bei Destruktoren im folgenden ausgelassen.
Die Gleichheitsformen aller einführenden Regeln werden im folgenden nicht mehr angegeben.

Verträglichkeit mit Substitution

Sei $\Delta \equiv y_1 : B_1, \ldots, y_m : B_m$.

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\ \Delta \Rightarrow s_1 : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\begin{array}{rl} \Delta \Rightarrow (\Pi x : A.B)_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] & \\ = \Pi x : (A_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n]). & \\ (B_{x_1,\ldots,x_n,x}[s_1, \ldots, s_n, y]) & \end{array}}$$

wobei y neu bzgl. Δ.

Sei $\Delta \equiv y_1 : B_1, \ldots, y_m : B_m$.

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, x : A \Rightarrow t : B \\ \Delta \Rightarrow s_1 : A_1 \\ \Delta \Rightarrow s_2 : (A_1)_{x_1}[s_1] \\ \cdots \\ \Delta \Rightarrow s_n : (A_n)_{x_1,\ldots,x_{n-1}}[s_1, \ldots, s_{n-1}] \end{array}}{\begin{array}{l} \Delta \Rightarrow (\lambda x.t)_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] \\ \quad = \lambda x.(t_{x_1,\ldots,x_n,x}[s_1, \ldots, s_n, y]) \\ \quad : (\Pi x : A.B)_{x_1,\ldots,x_n}[s_1, \ldots, s_n] \end{array}}$$

wobei y neu bzgl. Δ.

Analog Regeln für Ap und für alle zukünftigen Konstruktionen.

$\mathbf{N}_k$

$$\frac{\Gamma \text{ context}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{N}_k : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\Gamma \text{ context}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{A}_k^i : \mathsf{N}_k}\; i = 0, \ldots, n-1$$

Bedeutung von $\mathsf{N}_k(\vec{a})$:
Die kanonischen Elemente sind A_i^k
$(i = 0, \ldots, k-1)$.
A_i^k und A_i^k sind gleich.

$\mathsf{A}_i^k(\vec{a})$ evaluiert zu A_i^k.

Eliminationsregeln für $\mathbf{N_k}$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r : \mathsf{N}_k \qquad \Gamma, x : \mathsf{N}_k \Rightarrow C : \mathsf{Set} \qquad \Gamma \Rightarrow t_i : C_x[\mathsf{A}_i^k] \quad (i = 0, \ldots, k-1)}{\mathsf{case}(r, t_0, \ldots, t_{k-1}) : C_x[r]}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathsf{N}_k \Rightarrow C : \mathsf{Set} \qquad \Gamma \Rightarrow t_i : C_x[\mathsf{A}_i^k] \quad (i = 0, \ldots, k-1)}{\mathsf{case}(\mathsf{A}_i^k, t_0, \ldots, t_{k-1}) = t_i : C_x[\mathsf{A}_i^k]}$$

Rechenvorschrift für case$(r, t_0, \ldots, t_{k-1})(\vec{a})$:
Berechne $r(\vec{a})$.
Wenn Ergebnis A_i^k ist, berechne $t_i(\vec{a})$.

$\mathbf{A + B}$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A : \mathsf{Set} \qquad \Gamma \Rightarrow B : \mathsf{Set}}{\Gamma \Rightarrow A + B : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r : A \qquad \Gamma \Rightarrow B : \mathsf{Set}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{i}(r) : A + B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A : \mathsf{Set} \qquad \Gamma \Rightarrow r : B}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{j}(r) : A + B}$$

Bedeutung von $(A + B)(\vec{a})$:
- Die kanonischen Elemente sind
  * $\mathsf{i}(a)$ für Elemente a von $A(\vec{a})$ und
  * $\mathsf{j}(b)$ für Elemente b von $B(\vec{a})$.
- $\mathsf{i}(a)$ und $\mathsf{i}(a')$ sind gleich, wenn a und a' gleich in A sind.
- $\mathsf{j}(b)$ und $\mathsf{j}(b')$ sind gleich, wenn b und b' gleich in B sind.
- $\mathsf{i}(r)(\vec{a})$, $\mathsf{j}(s)(\vec{a})$, evaluieren zu $\mathsf{i}(r(\vec{a}))$ bzw. $\mathsf{j}(r(\vec{a}))$ ($r(\vec{a})$ als Programmtext).

Bedeutung von Konstruktortermen wird im folgenden immer analog erklärt.

Eliminationsregeln für $A + B$

$$
\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow A : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow r : A + B \\ \Gamma, x : (A + B) \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma, x : A \Rightarrow s : C_x[\mathsf{i}(x)] \\ \Gamma, x : B \Rightarrow t : C_x[\mathsf{j}(x)]\end{array}}{\mathsf{E}(r, (x)s, (x)t) : C_x[r]}
$$

$$
\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow r : A \\ \Gamma, x : (A + B) \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma, x : A \Rightarrow s : C_x[\mathsf{i}(x)] \\ \Gamma, x : B \Rightarrow t : C_x[\mathsf{j}(x)]\end{array}}{\mathsf{E}(\mathsf{i}(r), (x)s, (x)t) = s_x[r] : C_x[r]}
$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow A : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow r : B \\ \Gamma, x : (A + B) \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma, x : A \Rightarrow s : C_x[\mathsf{i}(x)] \\ \Gamma, x : B \Rightarrow t : C_x[\mathsf{j}(x)]\end{array}}{\mathsf{E}(\mathsf{j}(r), (x)s, (x)t) = t_x[r] : C_x[r]}$$

Rechenvorschrift für $\mathsf{E}(r, (x)s, (x)t)(\vec{a})$:
Berechne $r(\vec{a})$.
Ist Ergebnis $\mathsf{i}(a)$, berechne $s(\vec{a}, a)$,
ist Ergebnis $\mathsf{j}(b)$, berechne $t(\vec{a}, a)$.

$\mathbf{\Sigma x : A.B}$

$$\frac{\Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set}}{\Gamma \Rightarrow (\Sigma x : A.B) : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow r : A \\ \Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow s : B_x[r]\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{p}(r, s) : (\Sigma x : A.B)}$$

Bedeutung von $(\Sigma x : A.B)(\vec{a}]$:
Kanonische Elemente:
$\mathsf{p}(a, b)$ für $a \in A(\vec{a})$, $b \in B(\vec{a}, b)$.
$\mathsf{p}(a, b)$ und $\mathsf{p}(a', b')$ sind gleich, wenn
- a, a' gleich in $A(\vec{a})$ und
- b, b' gleich in $B(\vec{a}, a)$ sind.

Eliminationsregeln für $\Sigma x : A.B$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow r : (\Sigma x : A.B) \\ \Gamma, x : (\Sigma x : A.B) \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma, x : A, y : B \Rightarrow t : C_x[\mathsf{p}(x, y)]\end{array}}{\mathsf{D}(r, (x, y)t) : C_x[r]}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow r : A \\ \Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow s : B_x[r] \\ \Gamma, x : (\Sigma x : A.B) \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma, x : A, y : B \Rightarrow t : C_x[\mathsf{p}(x, y)]\end{array}}{\mathsf{D}(\mathsf{p}(r, s), (x, y)t) = t_{x,y}[r, s] : C_x[\mathsf{p}(r, s)]}$$

Rechenvorschrift für $\mathsf{D}(r, (x, y)t)(\vec{a})$:

- Berechne $r(\vec{a})$.
- Wenn Ergebnis $\mathsf{p}(a, b)$ berechne $t(\vec{a}, a, b)$.

$\mathbf{N}$

$$\frac{\Gamma \text{ context}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{N} : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\Gamma \text{ context}}{\Gamma \Rightarrow 0} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow r : \mathsf{N}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{S}(r) : \mathsf{N}}$$

Bedeutung von $\mathsf{N}(\vec{a})$:

- Kanonische Elemente:
  - $*$ 0.
  - $*$ Wenn a ein Element von $\mathsf{N}(\vec{a})$ ist, so ist $\mathsf{S}(a)$ kanonisches Element.
- 0 und 0 sind gleich.
- $\mathsf{S}(a)$ und $\mathsf{S}(a')$ sind gleich, wenn sie als Elemente von N gleich sind.

Eliminationsregeln für N

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow r : \mathsf{N} \\ \Gamma, x : \mathsf{N} \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow s : C_x[0] \\ \Gamma, x : \mathsf{N}, y : C \Rightarrow t : C_x[\mathsf{S}(s)]\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{P}(r, s, (x, y)t) : C_x[r]}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : \mathsf{N} \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow s : C_x[0] \\ \Gamma, x : \mathsf{N}, y : C \Rightarrow t : C_x[\mathsf{S}(s)]\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{P}(0, s, (x, y)t) = s : C_x[0]}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow r : \mathsf{N} \\ \Gamma, x : \mathsf{N} \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow s : C_x[0] \\ \Gamma, x : \mathsf{N}, y : C \Rightarrow t : C_x[\mathsf{S}(s)]\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{S}(r), s, (x, y)t) = t_{x,y}[r, \mathsf{P}(r, s, (x, y)t)] \\ : C_x[\mathsf{S}(r)]\end{array}}$$

Bedeutung von $\mathsf{P}(r, s, (x, y)t)(\vec{a})$:
Berechne $f(r(\vec{a}))$,
wobei f ein 1-stellige Programm ist, das angewandt auf c, rekursiv folgende Rechenvorschrift hat:

- Berechne c.
- Ist das Ergebnis 0 berechne $s(\vec{a})$.
- Ist das Ergebnis $\mathsf{S}(a)$, berechne $t(\vec{a}, a, f(a))$.

$\mathbf{Wx : A.B}$

$$\frac{\Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set}}{\Gamma \Rightarrow (\mathsf{W}x : A.B) : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \Rightarrow r : A \\ \Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\ \Gamma \Rightarrow s : B_x[r] \to (\mathsf{W}x : A.B)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{sup}(r, s) : \mathsf{W}x : A.B}$$

Bedeutung von (Wx : $A.B$)($\vec{a}$]:
Kanonische Elemente:
Sei
- $a \in A(\vec{a})$,
- c ein 1-stelliges Programm, mit
  * für alle $b \in B(\vec{a}, b)$ terminiert $c(b)$ als kanonisches Element von (Wx : $A.B$)($\vec{a}$), und
  * für alle $b, b' \in B(\vec{a}, b)$ gleiche Elemente terminieren $c(b)$, $c(b')$ als gleiche kanonische Elemente von (Wx : $A.B$)($\vec{a}$).
- d ein Programm mit Ergebnis $\lambda(c)$.

Dann ist sup(a, d) kanonisches Element von (Wx : $A.B$)($\vec{a}$).

sup(a, d) und sup(a', d') sind gleich, wenn
- a, a' sind gleich in $A(\vec{a})$ und,
- falls d, d' als $\lambda(c)$, $\lambda(c')$ terminieren, gilt
  für alle $b \in B(\vec{a}, a)$,
  $c(b)$ und $c'(b)$ sind gleich in (Wx : $A.B$)($\vec{a}$).

Eliminationsregeln für $\mathsf{W}x : A.B$

$$
\frac{\begin{array}{c}
\Gamma, x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\
\Gamma \Rightarrow r : (\mathsf{W}x : A.B) \\
\Gamma, x : (\mathsf{W}x : A.B) \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\
\Gamma, x : A, y : (B \to (\mathsf{W}x : A.B)), \\
\quad z : (\Pi u : B.C_x[\mathsf{Ap}(y,u)]) \Rightarrow t : C_x[\mathsf{sup}(x,y)]
\end{array}}{\mathsf{R}(r, (x,y,z)t) : C_x[r]}
$$

$$
\frac{\begin{array}{c}
\Gamma x : A \Rightarrow B : \mathsf{Set} \\
\Gamma \Rightarrow r : A \\
\Gamma, \Rightarrow s : (B \to (\mathsf{W}x : A.B)) \\
\Gamma, x : (\mathsf{W}x : A.B) \Rightarrow C : \mathsf{Set} \\
\Gamma, x : A, y : (B \to (\mathsf{W}x : A.B)), \\
\quad z : (\Pi u : B.C_x[\mathsf{Ap}(y,u)]) \Rightarrow t : C_x[\mathsf{sup}(x,y)]
\end{array}}{\begin{array}{l}
\mathsf{R}(\mathsf{sup}(r,s), (x,y,z)t)) \\
\qquad = t_{x,y,z}[r, s, \lambda u.\mathsf{R}(\mathsf{Ap}(s,u), (x,y,z)t)] \\
\qquad : C_x[\mathsf{sup}(r,s)]
\end{array}}
$$

Rechenvorschrift für $\mathsf{R}(r,(x,y,z)t)(\vec{a})$:
Berechne $f(r(\vec{a}))$,
wobei f ein 1-stellige Programm ist, das angewandt auf c, rekursiv folgende Rechenvorschrift hast:

- Berechne c.
- Ist das Ergebnis $\sup(a,b)$ berechne $t(a,b,d)$
- wobei d ein 1-stellige Programm ist, das angewandt auf d, rekursiv folgende Rechenvorschrift hat:
    * Berechne $c[d]$.
    * Ist das Ergebnis $\lambda(e)$, dann berechne $f(e(d))$.

4. Die Bedeutung eines Universums

Betrachte nur Universum mit N und Π.

$$\frac{\Gamma\ \text{context}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{U} : \mathsf{Set}} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow r : \mathsf{U}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{T}(r) : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\Gamma\ \text{context}}{\Gamma \Rightarrow \widehat{\mathsf{N}} : \mathsf{U}} \qquad \frac{\Gamma\ \text{context}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{T}(\widehat{\mathsf{N}}) = \mathsf{N}}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r : \mathsf{U} \qquad \Gamma, x : \mathsf{T}(r) \Rightarrow s : \mathsf{U}}{\Gamma \Rightarrow (\widehat{\Pi} x : r.s) : \mathsf{U}}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow r : \mathsf{U} \qquad \Gamma, x : \mathsf{T}(r) \Rightarrow s : \mathsf{U}}{\Gamma \Rightarrow \mathsf{T}(\widehat{\Pi} x : r.s) = (\Pi x : \mathsf{T}(r).\mathsf{T}(s)) : \mathsf{U}}$$

Bedeutung: o.e. Γ ist leer.

Die kanonischen Elemente von U können nur mit Rückgriff auf die Definition von $\mathsf{T}(a)$ definiert werden.

Angabe
- der kanonischen Elemente von U und
- für jedes kanonische Element Angabe der Bedeutung der Menge $\mathsf{T}(a)$.

+ $\widehat{\mathsf{N}}$ ist ein kanonisches Element, T($\widehat{\mathsf{N}}$) ist die Menge der natürlichen Zahlen (wofür obige Definition eingesetzt werden muß).

+ - Ist a ein Element von U,
d.h. ein Programm, das auf ein kanonisches Element a' von U reduziert, und
- ist b ein Programm, das, angewandt auf ein Element von T(a') ein Element von U als Ergebnis hat, so ist
- $\widehat{\Pi}(a, b)$ ein kanonisches Element von U.
- T($\widehat{\Pi}(a, b)$) ist die Menge
$\Pi x : \mathsf{T}(a).\mathsf{T}(b(x))$,
für die man wieder obige Definition einsetzen kann.

Gleichheit kanonischer Elemente wird standardmäßig definiert.

Für $a \in$ U, ist T(a) definiert als T(a'), wobei a' das Ergebnis der Berechnung von a ist.

Inkonsistente Typentheorie:

Füge hinzu:

$$\frac{\Gamma \text{ context}}{\Gamma \Rightarrow \widehat{\mathrm{U}} : \mathrm{U}} \qquad \frac{\Gamma \text{ context}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{T}(\widehat{\mathrm{U}}) = \mathrm{U}}$$

Meaning explanations sind nicht möglich:

In der Erklärung von U müssen wir $\mathrm{T}(\widehat{\mathrm{U}})$ erklären. Dazu müssen wir aber die Erklärung der Bedeutung von U wiederholt. Die Erklärung ergibt keinen endlichen Satz.

5. Die Bedeutung des Mahlo-Universums

Erweiterung von U.

Zwecks Vereinfachung wird Kontext weggelassen.

Weiter schreibe $r(s)$ statt $\mathsf{Ap}(r, s)$, $r(s, t)$ statt $r(s)(t)$ etc.

$$\frac{\begin{array}{c} x : \mathsf{U}, y : \mathsf{T}(x) \to \mathsf{U} \Rightarrow f : \mathsf{U} \\ x : \mathsf{U}, y : \mathsf{T}(x) \to \mathsf{U}, z : \mathsf{T}(f) \Rightarrow g : \mathsf{U} \end{array}}{\mathsf{V}^{f,g} : \mathsf{Set}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} x : \mathsf{U}, y : \mathsf{T}(x) \to \mathsf{U} \Rightarrow f : \mathsf{U} \\ x : \mathsf{U}, y : \mathsf{T}(x) \to \mathsf{U}, z : \mathsf{T}(f) \Rightarrow g : \mathsf{U} \\ r : \mathsf{V}^{f,g} \end{array}}{\mathsf{S}^{f,g}(r) : \mathsf{U}}$$

Seien im folgenden die Annahmen bzgl. f, g wie oben.

$$\widehat{\mathsf{N}}^{f,g} : \mathsf{V}^{f,g}$$

$$\mathsf{S}^{f,g}(\widehat{\mathsf{N}}^{f,g}) = \widehat{\mathsf{N}} : \mathsf{U}$$

$$\frac{r : \mathsf{V}^{f,g} \qquad x : \mathsf{S}^{f,g}(r) \Rightarrow s : \mathsf{V}^{f,g}}{(\widehat{\Pi}^{f,g} x : r.s) : \mathsf{V}^{f,g}}$$

$$\frac{r : \mathsf{V}^{f,g} \qquad x : \mathsf{S}^{f,g}(r) \Rightarrow s : \mathsf{V}^{f,g}}{\mathsf{S}^{f,g}(\widehat{\Pi}^{f,g} x : r.s) = \widehat{\Pi} x : \mathsf{S}^{f,g}(r).\mathsf{S}^{f,g}(s) : \mathsf{U}}$$

$$\frac{r : \mathsf{V}^{f,g} \quad x : \mathsf{S}^{f,g}(r) \Rightarrow s : \mathsf{V}^{f,g}}{\widehat{\mathsf{f}}^{f,g}(r,(x)s) : \mathsf{V}^{f,g}}$$

$$\frac{r : \mathsf{V}^{f,g} \qquad\qquad x : \mathsf{S}^{f,g}(r) \Rightarrow s : \mathsf{V}^{f,g}}{\mathsf{S}^{f,g}(\widehat{\mathsf{f}}^{f,g}(r,(x)s)) = f(\mathsf{S}^{f,g}(r)), \lambda x.\mathsf{S}^{f,g}(s) : \mathsf{U}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} r : \mathsf{V}^{f,g} \\ x : \mathsf{S}^{f,g}(r) \Rightarrow s : \mathsf{V}^{f,g} \end{array} \quad t : \mathsf{T}(\mathsf{S}^{f,g}(r,(x)s))}{\widehat{\mathsf{g}}^{f,g}(r,(x)s,t) : \mathsf{V}^{f,g}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} r : \mathsf{V}^{f,g} \\ x : \mathsf{S}^{f,g}(r) \Rightarrow s : \mathsf{V}^{f,g} \end{array} \qquad t : \mathsf{T}(\mathsf{S}^{f,g}(r,(x)s))}{\mathsf{S}^{f,g}(\widehat{\mathsf{g}}^{f,g}(r,(x)s,t)) = g(\mathsf{S}^{f,g}(r), \lambda x.\mathsf{S}^{f,g}(s,t) : \mathsf{U}}$$

Hauptregel:

$\widehat{\mathsf{V}}^{f,g} : \mathsf{U}$ $\qquad\qquad$ $\mathsf{T}(\widehat{\mathsf{V}}^{f,g}) = \mathsf{V}^{f,g} : \mathsf{U}$

Erklärung des Mahlo-Universums:

Kanonische Elemente $\widehat{\mathsf{N}}$, $\widehat{\Pi}(a,b)$ wie oben.
Wenn wir aus dem bisherigen Wissen über U, ohne Wissen über die Totalität von U folgern können:

- für jedes Element a von U und
- für jede Funktion b von $\mathsf{T}(a)$ nach U, und
- für jedes c, das nach $\lambda(b)$ reduziert,
- gilt $f(a,c)$ ist ein Element von U, und
- für alle solche a, b, c
- und für alle Elemente d von $\mathsf{T}(e)$,
- wobei e das Redukt von $f(a,c)$ ist,
- gilt $g(a,b,d)$ ist ein Element von U,

können wir zunächst $\mathsf{V}^{f,g}$ zusammen mit $\mathsf{S}^{f,g}$ erklären.
Dann ist $\widehat{\mathsf{V}}^{f,g}$ ein kanonisches Element von U mit $\mathsf{T}(\widehat{\mathsf{V}}^{f,g}) = \mathsf{V}^{f,g}$.

Beachte: Obige Erklärung garantiert nicht Abschluß unter den Einführungsregeln.

Wenn wir aber keine Eliminationsregeln für U haben, und f und g wie in den Prämissen der Einführungsregel von $\widehat{\mathsf{V}}^{f,g}$ sind, so muß für f und g die Bedingung in der Erklärung der Bedeutung von U gelten.

Die Einführungsregeln für $\widehat{\mathsf{V}}^{f,g}$ sind also gerechtfertigt, wenn wir keine Eliminationsregeln für U erlauben.