4^e Conférence Francophone de MOdélisation et SIMulation
"Organisation et Conduite d'Activités dans l'Industrie et les Services"
MOSIM'03 – du 23 au 25 avril 2003 - Toulouse (France)

ETAT DE L'ART SUR LES PROBLEMES DE DIMENSIONNEMENT DES LOTS AVEC CONTRAINTES DE CAPACITE

Nadjib BRAHIMI

IRCCyN UMR CNRS 6597
1 rue de la Noe, 44300 Nantes, France
Mél : nadjib.brahimi@irccyn.ec-nantes.fr

Najib NAJID

IRCCyN UMR CNRS 6597
1 rue de la Noe, 44300 Nantes, France
Mél : najib.najid@irccyn.ec-nantes.fr

Stéphane DAUZERE-PERES

IRCCyN UMR CNRS 6597
1 rue de la Noe, 44300 Nantes, France
Mél : stephane.dauzere-peres@irccyn.ec-nantes.fr

Atle NORDLI

Department of Logistics, The Norwegian School of Management, BI
P.O.Box 580 N-1302 Sandvika, NORWAY
Mél: atle.nordli@bi.no

RESUME : *Cet article présente un état de l'art sur un problème important dans le domaine de la planification de la production. Ce problème consiste à dimensionner les lots de plusieurs gammes de produits avec une capacité limitée. Nous donnons d'abord un aperçu général des différents problèmes de dimensionnement des lots. L'article est ensuite consacré au Problème de Dimensionnement de Lots avec contraintes de Capacité (PDLC). Différentes modélisations du PDLC sont présentées. Nous expliquons ensuite brièvement différentes approches pour résoudre le problème avant de présenter les travaux sur chacune des approches.*

MOTS-CLES : *Dimensionnement des lots, planification de la production, optimisation*

1. INTRODUCTION

Le Problème de Dimensionnement des Lots avec contraintes de Capacité (PDLC) est un problème classique de planification de la production. Les demandes pour un ou plusieurs produits sont connues sur les T périodes de l'horizon de planification. Dans le processus de production, on consomme le temps de fabrication, et souvent un temps de *lancement* de la production, sur une ressource (ou un ensemble de ressources) ayant une capacité donnée (en unité de temps) pour chaque période. L'objectif est de déterminer les périodes dans lesquelles il faut produire et les quantités à produire pour chaque produit. Le plan résultant doit satisfaire toutes les demandes et minimiser l'ensemble des coûts, en respectant les contraintes de capacité. Les coûts à considérer sont habituellement, pour chaque produit i et à chaque période t : le coût par unité de production p_{it}, le coût de lancement s_{it}, qui est un coût fixe comptabilisé seulement s'il y a production du produit i, et le coût de stockage h_{it}. Ces coûts sont parfois indépendants de la période t.

Depuis les travaux de Wagner et Whitin (1958) et Manne (1958), beaucoup de recherches ont été menées sur les problèmes de dimensionnement des lots. De par sa complexité et son application effective pour la résolution de problèmes concrets, le PDLC est l'un des problèmes les plus étudiés en planification de la production. Le problème est particulièrement difficile à résoudre à cause des contraintes de capacité qui lient les différents produits. Sans ces contraintes, le PDLC se réduit à un ensemble de problèmes de dimensionnement des lots à un produit sans capacité. Chacun de ces problèmes peut être résolu en $O(T \log T)$ (voir par exemple : Wagelmans, *et al.*, 1992).

Dans la littérature, la plupart des articles sur le PDLC considère le problème dans des contextes plus larges. L'article de (Graves, 1981) considère l'ordonnancement et le dimensionnement des lots. Bahl et al. (1987) donnent plus d'importance aux problèmes de dimensionnement des lots sans capacité. Salomon (1991) considère plutôt les problème avec de courtes périodes de temps (ce qu'on appelle les problèmes à *« small time buckets »*). Kuik et al. (1994) mettent le PDLC dans un contexte général de contrôle du flux des biens.

Dans la littérature de la planification de production, on trouve plusieurs articles qui traitent le PDLC. Mais la plupart de ces articles se limitent à décrire les méthodes de résolution développées par les auteurs et peu de ces article donne un état de l'art sur les PDLC, leurs modèles mathématiques et les différentes méthodes de résolution qui existent. Par contre, deux articles se distinguent. (1) Chen et Thizy (1990), afin de faire une comparaison entre différentes relaxations Lagrangiennes du PDLC, décrivent quelques modèles mathématiques de problème. (2) Maes et Van Wassenhove (1988) donnent un état de l'art sur les méthodes heuristiques de résolution du PDLC. Finalement, il semblerait qu'il y a peu de travaux qui ont été publiés en Français sur les problèmes de dimensionnement des lots.

Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons le PDLC dans le contexte général des problèmes de dimensionnement des lots. Nous donnons un aperçu de ces problèmes et leur classification. La section 3 présente différentes formulations mathématiques du PDLC. La section 4 donne des résultats théoriques sur sa complexité algorithmique. Nous décrivons les relaxations linéaires et Lagrangiennes du PDLC dans la section 5, les méthodes de coupes dans la section 6, et finalement les méthodes approximatives (heuristiques) en section 7. Nous terminons par une conclusion et des perspectives de recherche.

2. APERÇU DES PROBLEMES DE DIMENSIONNEMENT DES LOTS

Les problèmes de dimensionnement des lots sont des problèmes de planification de la production où l'objectif est de déterminer les périodes où la production doit avoir lieu et les quantités à produire afin de satisfaire la demande tout en minimisant la somme des coûts de production, de lancement et de stockage. Dans certains cas, d'autres coûts sont ajoutés tels que le coût de rupture de stock (*backlogging*).

Dans cette section, nous donnons une classification des différents problèmes de dimensionnement des lots. Dans la littérature, il existe d'autres classifications plus ou moins similaires à la nôtre (Belveaux et Wolsey, 2000 et Graves, 1999).

Plusieurs critères peuvent être utilisés pour la classification de ces problèmes : le nombre de gammes de produits, le nombre de machines (ressources), les niveaux, les contraintes de capacité et la nature de la capacité (variable ou fixe), la longueur des périodes, etc.

2.1. Problèmes à un niveau

Les problèmes de dimensionnement des lots à un niveau sont caractérisés par le fait que seule la demande *indépendante* (ou *externe*) est considérée, c.-à-d., la demande provenant de l'extérieur de l'entreprise (pour un ou plusieurs produits). On peut distinguer deux grandes classes : les problèmes à *longues périodes* (*big time buckets*) et les problèmes à *courtes périodes* (*small time buckets*).

Dans les modèles à longues périodes, on considère des périodes de production où un ou plusieurs lots de produits peuvent être lancés et fabriqués. Ce problème est souvent appelé le *problème dynamique de dimensionnement des lots*.

Le problème dynamique de dimensionnement des lots avec *contraintes de capacité*, qui est NP-difficile en général (Bitran et Yannasse, 1982 ; voir section 4), a attiré l'attention de nombreux chercheurs dans le domaine de la planification. Les différentes techniques de résolution développées pour ce problème incluent les méthodes exactes telle que celle proposée par Eppen et Martin (1987), qui utilisent une formulation efficace basée sur la représentation du problème sous forme de graphe (voir section 3.3). Le problème étant NP-difficile, de nombreuses heuristiques ont été développées (voir Section 7).

Les problèmes à longues périodes peuvent aussi incorporer le temps de lancement ou des coûts dépendants du changement entre deux produits différents. Ces considérations rendent le problème encore plus difficile.

Pour les problèmes à courtes périodes, Belvaux et Wolsey (2000) considèrent le cas où on ne peut pas produire plus d'une unité de produit par période et le cas où on peut produire jusqu'à deux unités par périodes. Le problèmes à une unité de produit par période est appelé *le problème de dimensionnement et d'ordonnancement des lots*. Fleischman (1990) résout ce problème en utilisant la relaxation Lagrangienne. Il est aussi résolu dans Van Hoesel et al. (1994) en utilisant une formulation efficace de Programmation Linéaire.

2.2. Problèmes à plusieurs niveaux

Dans le cas des problèmes de dimensionnement des lots à plusieurs niveaux, les produits finis requièrent des composants, pour lesquels il faut aussi déterminer le plan de production correspondant. Ces composants peuvent aussi avoir des sous-composants, et ainsi de suite. Ces problèmes peuvent être considérés avec ou sans capacité. Les deux cas peuvent être encore divisés suivant la structure de production utilisée. C'est-à-dire, la structure qui lient les produits finis à leurs composants, et ces derniers à leurs sous-composants, …. Parmi les structures de production existantes, on distingue la structure en série, la structure d'assemblage (*in-tree*), et la structure générale (Figure 1, a, b et c, respectivement). Le problème est NP-difficile dans le cas d'une structure de production générale (Arkin *et al.*, 1989).

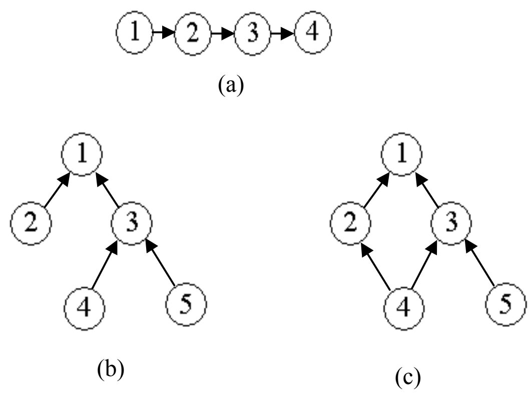

Figure 1 **:** Différentes structures de production pour les problèmes de dimensionnement des lots à plusieurs niveaux

Le cas sans capacité avec une structure générale est aussi abordé par Afentakis et Gavish (1986) en utilisant la relaxation Lagrangienne. Cette relaxation engendre des sous-problèmes constitués de problèmes multi-niveaux avec structure en série. Pochet et Wolsey (1991) appliquent une approche par ajout de coupes à des problèmes de dimensionnement de lots avec une structure générale de production et contraintes de capacité. Salomon et al. (1993) proposent des algorithmes basés sur la recherche taboue et le recuit simulé pour ces problèmes avec et sans capacité.

3. DIFFERENTES MODELISATIONS DU PDLC

Plusieurs variantes du PDLC ont été étudiées dans la littérature. Dans cette section, nous présentons différents modèles du problème de base avec une seule ressource et sans rupture de stock.

3.1. Le modèle agrégé

C'est sûrement le modèle le plus fréquemment utilisé pour le PDLC. Ce modèle représente le problème d'une façon quasi-intuitive. Il est décrit comme suit :

(AGG)

$$\min \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(s_{it}Y_{it} + p_{it}X_{it} + h_{it}I_{it}\right) \qquad (1)$$

sous :

$$I_{i,t-1} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \qquad \forall i,t \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(b_{it}X_{it} + a_{it}Y_{it}\right) \le cap_t \qquad \forall t \qquad (3)$$

$$X_{it} \le \left(\sum_{l=t}^{T} d_{il}\right)Y_{it} \qquad \forall i,t \qquad (4)$$

$$Y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \qquad \forall i,t \qquad (5)$$

$$X_{it} \ge 0 \qquad \forall i,t \qquad (6)$$

$$I_{it} \ge 0 \qquad \forall i,t \qquad (7)$$

On a N gammes de produits ($i = 1..N$) et T périodes ($t = 1..T$). Les variables de décisions sont : les variables de lancement Y_{it} , qui est égale à 1 s'il y a fabrication du produit *i* à la période *t* et zéro sinon, la quantité X_{it} à produire de l'article *i* à la période *t* et le niveau de stock I_{it} du produit *i* à la fin de la période *t*. Les coûts considérés sont : le coût de lancement s_{it} , le coût de production par unité p_{it} et le coût de stockage h_{it} . On suppose que tous ces coûts sont positifs ou nuls . Les autres paramètres sont : la demande d_{it} , la durée de traitement b_{it} d'une unité de produit *i*, le temps de lancement a_{it} et la capacité cap_t à la période *t*.

L'objectif (1) est de minimiser l'ensemble des coûts de lancement, de production et de stockage pour tous les produits et toutes les périodes. L'équation d'équilibrage des stocks (2) indique que le stock à la fin de la période *t*-1 ajouté à la production de la période *t* est égale à la demande de la période *t* plus ce qui reste en stock à la fin de cette même période. Les stock initiaux I_{i0} sont considérés nuls. S'ils étaient positifs, on les soustrairait des demandes, et on se ramènerait ainsi au même cas (I_{i0}=0 $\forall i$). Les contraintes de capacité (3) expriment que la durée totale de production et de lancement (fabrication) ne doit pas dépasser la capacité disponible à la période correspondante. Les contraintes de lancement (4) forcent la variable binaire, représentant le lancement, à 1 s'il y a changement de production et à 0 sinon..

Un autre modèle agrégé sans les variables de stock peut être dérivé du modèle précédent, en combinant les contraintes (2) et (6) pour calculer les variables I_{it} en fonction des X_{it} ..

3.2. Le modèle basé sur un problème de localisation

Bilde et Krarup (1977) ont montré que le problème de dimensionnement des lots d'un seul produit et sans capacité peut être modélisé sous forme d'un cas particulier du problème de localisation de dépôts sans capacité. Si on ignore initialement les contraintes de capacité pour le PDLC, on obtient *N* problèmes à un seul produit et sans capacité qu'on peut représenter avec le modèle de localisation des dépôts. En ajoutant à ces modèles les contraintes de capacité liant les différents produits, on obtient une formulation efficace pour le PDLC.

Dans l'une des versions de la formulation basée sur la localisation des dépôts pour le PDLC, les variables de production X_{it} sont désagrégées en plusieurs variables W_{itk} qui représentent la partie de la demande du produit *i* à la période *k* à satisfaire par la production à la période *t*, ce qui implique que : $\sum_{k=t}^{T} W_{itk} = X_{it}$

On reformule le PDLC ainsi :

(LOD)

$$\min \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} s_{it}Y_{it} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=t}^{T}\left(p_{it} + h_{itk}\right)W_{itk} \qquad (8)$$

sous :

$$\sum_{t=1}^{T} W_{itk} = d_{ik} \qquad \forall i,k \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=t}^{T} b_{it}W_{itk} + \sum_{i=1}^{N} a_{it}Y_{it} \le cap_t \qquad \forall t \qquad (10)$$

$$W_{itk} \le d_{ik}Y_{it} \qquad \forall i,k \qquad (11)$$

$$Y_{it} = 0 \;\; or \;\; 1 \qquad \forall i,k \qquad (12)$$

$$W_{itk} \ge 0 \qquad \forall i,t,k \qquad (13)$$

$$\text{Où } h_{itk} = \sum_{l=t}^{k-1} h_{il} \qquad (14)$$

Les contraintes de lancement (11) représentent le fait que d_{ik} est une borne supérieure pour les variables W_{itk} . Les contraintes (9) imposent que toutes les demandes soient satisfaites. Comme on va le montrer plus tard, la relaxation linéaire du modèle (LOD) génère une borne inférieure nettement meilleure que celle de la relaxation linéaire du modèle (AGG). L'inconvénient de (LOD) est le grand nombre de variables.

Le modèle (LOD) a été utilisé par Maes *et al.* (1991) et par Millar et Yang (1994) pour développer des méthodes de résolution basées, respectivement, sur la relaxation linéaire et la relaxation Lagrangienne du modèle. Il a aussi été utilisé par Rosling (1986) et Kuik *et al.* (1993) avec certaines extensions.

3.3. Le modèle basé sur un problème de plus court chemin

Eppen et Martin (1987) ont utilisé une technique de changement (redéfinition) de variables et ont proposé un modèle pour le PDLC basé sur un problème de plus court chemin. Cette technique est basée sur la fameuse représentation graphique du problème de dimensionnement des lots pour un seul produit et sans capacité (voir par exemple Evans, 1985). Un nœud est affecté à chaque période avec une période fictive (générique) T+1. L'arc entre deux nœuds u et v représente l'option de produire toute la demande qui se trouve entre les périodes u et v-1 (inclus) à la période u. Par conséquent, le problème de dimensionnement des lots d'un seul produit sans capacité consiste à trouver le plus court chemin entre les nœuds 1 et T+1.

Le modèle résultant est le suivant :

(PCC)

$$\min \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} s_{it}Y_{it} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=t+1}^{T+1} v_{itk}Z_{itk} \qquad (15)$$

sous :

$$\sum_{l=2}^{T+1} Z_{i1l} = 1 \qquad \forall i \qquad (16)$$

$$\sum_{l=1}^{t-1} Z_{ilt} = \sum_{l=t+1}^{T+1} Z_{itl} \qquad \forall i,\ \text{et}\ t = 2,..,T \qquad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=t+1}^{T+1} b_{it}d_{il,t-1}Z_{itl} + \sum_{i=1}^{i} a_{it}Y_{it} \le cap_t \qquad \forall t \qquad (18)$$

$$\sum_{\substack{l=t+1 \\ l:d_{jtl}>0}}^{T+1} Z_{itl} \le Y_{it} \qquad \forall i,t \qquad (19)$$

$$Y_{it} = 0 \text{ ou } 1 \qquad \forall i,t \qquad (20)$$

$$\theta_i^{(k)} = 0 \text{ ou } 1 \quad (21) \qquad \forall i,t,k>t \qquad (21)$$

Les variables Z_{itk} représentent la fraction de la demande totale du produit i à la période k-1 et qui est produite à la période t. Le paramètre du coût v_{itk} est le coût total de fabrication et de stockage pour produire $d_{itk} = d_{it} + d_{it+1} + ... + d_{i,k-1}$ à la période t, c'est à dire : $v_{itk} \equiv \sum_{l=t}^{k-1}\left(p_{il} + h_{itl}\right)d_{il}$

Les contraintes (16) et (17) sont des contraintes de conservation de flux, (16) indiquant que la somme des arcs sortant du premier nœud est égale à 1, et (17) garantissant que la conservation du flux est respectée au niveau des autres nœuds. Les contraintes de capacité sont représentées par (18). Si on élimine (18), le modèle (PCC) consistera en N problèmes de plus court chemin.

Pochet et Wolsey ont dérivé une formulation proche du (PCC) pour le problème de dimensionnement des lots avec rupture de stock. Des analyses du modèle (PCC) peuvent être trouvées dans Chen et Thizy (1990).

3.4. Le modèle approximatif

Manne (1958) avait proposé une formulation approximative dans le sens que, pour chaque produit i, on ne considère que les séquences de production ($x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iT}$) qui satisfont la propriété du zéro stock, c'est à dire qu'on ne produit à une période donnée que si le stock de la période précédente est nul. De tels plans de production sont appelés des *plans dominants*. Pour les problèmes de dimensionnement des lots avec un seul article et sans capacité, il existe une solution optimale qui possède cette propriété. Ceci n'est pas nécessairement le cas pour le PDLC.

En considérant cette propriété, le problème peut être modélisé avec des variables binaires pour chaque séquence de production possible. Ainsi les variables de lancement seront éliminées du modèle.

Soient $Y_{it}^{(k)}$, $X_{it}^{(k)}$ et $I_{it}^{(k)}$ les variables de lancement, de production et du stock à la période t du plan dominant k pour le produit i. Et soit $f_i^{(k)}$ le coût total du plan dominant k pour le produit i, c'est-à-dire : $f_i^{(k)} = \sum_{t=1}^{T}\left(s_{it}Y_{it}^{(k)} + p_{it}X_{it}^{(k)} + h_{it}I_{it}^{(k)}\right) \quad \forall i,k$

Et soit $g_{it}^{(k)}$ la consommation de la ressource à la période t dans le plan k pour le produit i : $g_{it}^{(k)} = b_{it}X_{it}^{(k)} + a_{it}Y_{it}^{(k)}$, $\forall i,t,k$.

Alors, un modèle approximatif est obtenu pour le PDLC :

(APP)

$$\min \sum_{i=1}^{N}\sum_{k} f_i^{(k)}\theta_i^{(k)} \qquad (22)$$

sous :

$$\sum_{k}\theta_i^{(k)} = 1 \qquad \forall i \qquad (23)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k} g_{it}^{(k)}\theta_i^{(k)} \le cap_t \qquad \forall t \qquad (24)$$

$$\theta_i^{(k)} = 0 \text{ ou } 1 \qquad \forall i \qquad (25)$$

où $\theta_i^{(k)}$ est une variable binaire égale à 1 si le plan k est choisi pour le produit i, et égale à 0 sinon.

Dans (APP), la contrainte (23) implique qu'un seul plan est choisi pour le produit i. Les contraintes (24) sont les contraintes de capacité. Dans la solution optimale du problème original du PDLC, la demande d'une période donnée peut être couverte sur plusieurs périodes de production (division des lots). Ceci n'est pas possible dans le modèle (APP). C'est pour cela que la solution obtenue par (APP) est supérieure ou égale à la solution optimale du problème PDLC. De plus, si les temps de lancement sont considérés, (APP) n'a pas nécessairement de solutions admissible même si c'est le cas pour le PDLC. Un exemple simple est donné par Bitran et Matsuo (1986).

En plus de Manne (1958), Dzielinski et Gomory (1965), Lasdon et Terjung (1971), Bahl (1983), Bahl et Ritzman (1987) et Cattrysse *et al.* (1990) ont aussi développé des méthodes de résolution pour le PDLC en se basant sur le modèle approximatif. Nous donnons dans la section 5 un résumé des résultats sur la relaxation linéaire de (APP).

4. COMPLEXITE DU PROBLEME

Dans cette section, nous présentons des résultats théoriques concernant la complexité du PDLC.

Plusieurs auteurs ont étudié la complexité des différentes classes du PDLC. Florian et Klein (1971) ont considéré le problème à un seul produit, sans temps de lancement et avec une capacité identique à chaque période. Ils ont prouvé que le problème est polynomial en proposant un algorithme de résolution en $O(T^4)$. Le cas où la variation des différents coûts et des capacités sur les périodes a une structure quelconque pour le PDLC à un seul produit a été prouvé NP-difficile dans Florian *et al.* (1980). Cependant, en proposant un algorithme pseudo-polynomial pour résoudre ce problème, ils ont pu démontré qu'il n'est pas NP-difficile au sens fort.

Bitran et Yannasse (1982) ont étudié plusieurs classes du PDLC avec temps de lancement nul. Leur étude se concentre plus sur la complexité du problème à un seul produit. Pour ce problème, ils ont introduit la notation $\alpha/\beta/\gamma/\delta$ où $\alpha,\beta,\gamma,$et δ indiquent la structure : du coût de lancement, du coût de stockage et du coût de production, respectivement. Les valeurs prises par $\alpha,\beta,\gamma,$et δ sont G, C, ND, NI et Z qui correspondent à une structure générale, constante, non-décroissante, non-croissante et zéro, respectivement.

Florian et Klein (1971) proposent un algorithme en $O(T^4)$ pour la famille des problèmes $G/G/G/C$. Plus tard, ce même problème a été résolu en $O(T^3)$ par Van Hoesel et Wagelmans (1996). Bitran et Yannasse (1982) ont aussi prouvé l'existence d'algorithmes polynomiaux pour les problèmes $NI/G/NI/ND$, $C/Z/C/G$ et $ND/Z/ND/NI$.

Chen et Thizy (1990) ont prouvé que le PDLC à plusieurs produits est NP-difficile au sens fort.

Tous les résultats mentionnés précédemment concernent les problèmes sans temps de lancement. Si on ajoute le temps de lancement à ces problèmes, ils deviennent encore plus difficiles. Sans temps de lancement, il est facile de vérifier qu'une instance du PDLC possède une solution admissible. Ceci peut être effectué en temps polynomial en comparant le cumul des capacités et le cumul des temps nécessaires pour le traitement total des demandes. A l'inverse, la vérification de l'existence d'une solution admissible pour le PDLC avec temps de lancement est un problème NP-complet (voir Maes *et al.*, 1991).

5. RELAXATIONS ET BORNES INFERIEURES

Les bornes inférieures sont importantes dans les méthodes d'optimisation énumératives telles que les Procédures par Séparation et Evaluation (PSE, méthode arborescente ou « *branch and bound* »), et dans les méthodes heuristiques pour valider la performance de ces méthodes. Des bornes inférieures peuvent être obtenues pour le PDLC en résolvant des versions relâchées des différents modèles du problème. Dans cette section, nous survolons quelques résultats analytiques sur ces relaxations.

5.1. Relaxations linéaires

Il est connu que la relaxation linéaire du modèle agrégé donne souvent de mauvaises bornes inférieures. Cependant, ce modèle peut être renforcé par l'utilisation d'inégalités valides. Nous présenterons l'utilisation de cette technique dans la section 6.

Bilde et Krarup (1977) ont montré que la relaxation linéaire du modèle (LOD) du problème de dimensionnement des lots avec un seul produit et sans capacité possède une solution optimale où toutes les variables de lancement sont entières. De plus, la relaxation linéaire du modèle (LOD) pour le PDLC donne de meilleures bornes inférieures que celles du modèle (AGG). Maes *et al.* (1991) et Kuik *et al.* (1993) ont utilisé le modèle LOD dans des méthodes basées sur la relaxation linéaires de problème multi-niveaux, dont le PDLC est un cas particulier.

Pour le modèle (PCC), Eppen et Martin (1987) ont démontré que la relaxation linéaire du problème à un seul produit et sans capacité possède aussi une solution optimale où toutes les variables de lancement sont entières. Pochet et Wolsey (1988) ont analysé le PDLC avec rupture de stock et ont démontré que les relaxations linéaires des modèles LOD et PCC donnent les mêmes bornes inférieures. D'autres analyses de la relaxation linéaire du modèle du plus court chemin sont fournies dans Chen et Thizy (1990) et Thizy (1991).

Manne (1958) a proposé de résoudre la relaxation linéaire du modèle approximatif (APP) du PDLC. Cette relaxation contient un grand nombre de variables. Pour faire face à cet inconvénient, Dzielinski et Gomory (1965) ont proposé une procédure de génération de colonnes basé sur la décomposition de Dantzig-Wolfe (Dantzig et Wolfe, 1960). Ainsi, des plans de production sont générés successivement en résolvant des problèmes de dimensionnement de lots à un seul produit et sans capacité.

Il est évident que la relaxation linéaire du modèle approximatif (APP) donne une borne inférieure de celui-ci, mais cela n'implique pas qu'elle donne une borne inférieure du PDLC original tant que la solution optimale de (APP) peut être supérieure à celle du PDLC. Cependant, Kleindorfer et Newson (1975) ont démontré que la relaxation linéaire de (APP) donne aussi une borne inférieure pour le PDLC.

5.2. Relaxations Lagrangiennes

On sait que les bornes inférieures obtenues par relaxation Lagrangienne sont au moins aussi bonnes que celles obtenues par relaxation linéaire. Dans la plupart des cas, la relaxation Lagrangienne du PDLC consiste à considérer les contraintes de capacité dans le modèle (AGG) comme les contraintes qui doivent être relaxées. La relaxation Lagrangienne qui en résulte consiste en N problèmes de dimensionnement de lots à un seul produit et sans contraintes de capacité, sachant que ces problèmes peuvent être résolus en $O(T \log T)$ (voir par exemple Waggelmans *et al.*, 1992).

Newson (1975) a proposé une heuristique itérative qui peut être considérée comme l'ancêtre des relaxations Lagrangiennes développées plus tard dans Thizy et Van Wassenhove (1985), Gelders *et al.* (1986), Trigeiro *et al.*(1989), Chen et Thizy (1990), et Diaby *et al.*(1992).

Pour le modèle (LOD) du PDLC avec rupture de stock, Millar et Yang (1994) ont implémenté une relaxation Lagrangienne en relaxant les contraintes (11). Le problème résultant est divisé en deux problèmes; un problème de transport classique et un problème simple en nombres entiers qui peut être facilement résolu par inspection des coefficients.

Pour le modèle du plus court chemin, à notre connaissance, il n'y a aucune implémentation de la relaxation Lagrangienne. Pour une étude comparative ainsi qu'un état de l'art sur les différentes relaxations Lagrangienne du PDLC, voir Chen et Thizy (1990).

6. LES METHODES DE COUPES ET LES INEGALITES VALIDES

Les inégalités valides sont des contraintes additionnelles générées afin d'améliorer la borne inférieure du PDLC sans éliminer la solution optimale. Les inégalités valides peuvent être utilisées soit directement dans le modèle ou dans la procédure de résolution. Dans le premier cas, on ajoute les inégalités au modèle avant de résoudre le problème. Dans le deuxième cas, les inégalités sont générées et utilisées dans les nœuds d'une méthode arborescente (*branch and cut*).

Il est toujours intéressant de considérer la structure particulière d'un problème pour générer des inégalités valides spécifiques à celui-ci. C'est ce qui a été fait pour le PDLC par Barany *et al.* (1984), Pochet (1988), et Maes *et al.* (1991).

7. HEURISTIQUES POUR CONSTRUIRE DES SOLUTIONS ADMISSIBLES

Une grande partie de la littérature a été consacrée aux techniques de construction de bonnes solutions admissibles. Nous classons ces heuristiques en deux catégories : celles qui démarrent à partir du tableau des demandes, et celles qui construisent une solution admissible à partir de résultats obtenus par la résolution de l'une des relaxations présentées plus haut.

7.1. Heuristiques simples ou de bon sens

Ces heuristiques construisent un plan de production en commençant à la première période. Des indices de priorité sont utilisés pour décider de la quantité à produire à chaque périodes. Pour une description et un état de l'art sur ces méthodes, voir, Maes et Van Wassenhove (1988). Lambrecht et Vanderveken (1979) et Dogramaci *et al.* (1981) sont les premiers à utiliser les heuristiques de bon sens. Dixon et Silver (1982) ont construit une heuristique basée sur l'heuristique de Silver et Meal (1973) du problème à un seul produit sans capacité. A notre connaissance, la seule heuristique de ce type qui considère les temps de lancement est celle de Trigeiro (1989) qui, dans une première étape, applique une version de l'heuristique de Silver et Meal (1973) modifiée pour prendre en considération le temps de lancement.

7.2. Heuristiques commençant à partir de la solution en nombres entiers d'une relaxation

Les solutions obtenues par relaxation Lagrangienne imposent des valeurs binaires aux variables de lancement. Cependant ces solutions sont habituellement inadmissibles. Par conséquent des heuristiques sont appliquées pour construire des solutions réalisables. Si ces heuristiques sont construites dans le cadre d'une relaxation Lagrangienne, on les appelle des heuristiques Lagrangiennes. Il est important qu'une heuristique Lagrangienne soit la plus simple possible car elle est utilisée de plusieurs fois dans le processus de résolution.

Pour cette classe d'heuristiques, deux principes ont été utilisés. Le premier consiste à préserver les valeurs des variables de lancement et à résoudre le programme linéaire (PL) qui en résulte. Le deuxième principe consiste à identifier les périodes ayant un dépassement de leurs capacités et à essayer de construire une solution admissible en déplaçant la production des périodes en dépassement de la capacité, produit par produit. On les appelle : heuristiques de lissage.

Une procédure basée sur le PL a été proposée par Thizy et Van Wassenhove (1985) pour le PDLC sans temps de lancement (voir aussi Diaby *et al.* (1992) pour le cas où les temps de lancement ne sont pas nuls).

D'autre part, plusieurs heuristiques de lissage ont été proposées dans la littérature. Trigeiro *et al.* (1989) ont construit une heuristique de lissage à quatre passes basée sur une heuristique simple développée par Trigeiro (1987).

7.3. Autres heuristiques

Les méta-heuristiques telles que la recherche taboue, le recuit simulé et les algorithmes génétiques ont récemment commencé à être utilisées pour résoudre le PDLC (voir par exemple, Salomon *et al.* (1993) pour la recherche taboue et le recuit simulé, Haase et Kohlmorgen (1995) pour les algorithmes génétiques et plus récemment Gopalakrishnan *et al.* (2001) pour la recherche taboue).

8. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A partir de notre étude bibliographique des problèmes de dimensionnement des lots et du PDLC en particulier, nous avons essayé de faire un résumé du travail de recherche important qui a été fait dans ce domaine. Ceci peut être considéré comme une référence rapide pour comprendre certaines notions sur ce type de problèmes.

Il est important de noter que, malgré le grand nombre de travaux sur le PDLC, il reste de nombreux chemins intéressants à explorer. En ce qui concerne les méthodes de résolution, nous avons remarqué un manque considérable au niveau du développement théorique des méta-heuristiques pour le PDLC. De plus, il existe de nouvelle extensions du problème qui n'ont pas été suffisamment considérées dans la littérature. D'autres extensions n'ont même pas encore été étudiées. Parmi ces dernières, citons le PDLC avec fenêtres de temps où une demande ne peut être produite que dans un intervalle de temps (fenêtre de temps) donné. A notre connaissance, le seul cas de ce problème qui a été considéré c'est celui d'un seul produit et sans capacité (Dauzère-Pérès *et al.*, 2002).

REFERENCES

Afentakis, P. and B. Gavish, 1986. *Optimal Lot-Sizing for Complex Product Structures*. Operations Research, 34, p. 237-249.

Arkin, E., D. Joneja and R. Roundy, 1989. *Computational Complexity of uncapacitated multi-echelon production planning problems*. Operations Research Letters, 8, p. 61-66.

Bahl, H.C., 1983. *Column Generation Based Algorithm for Multi-Item Scheduling*. IIE Transactions, 15(2), p. 136-141.

Bahl, H.C., L.P. Ritzman and J.N. Gupta, 1987. *Determining Lot Sizes and Resource Requirements-A Review*. Operations Research, 35(3), p. 329-345.

Barany, I., T.J. Van Roy and L.A. Wolsey, 1984. *Strong Formulations for Multi-Item Capacitated Lot-Sizing*. Management Science, 30, p. 1255-1261.

Belvaux, G. and L.A. Wolsey, 2000. *Lot-Sizing Problems: Modeling Issues and a Specialized Brand-and-Cut System BC-PROD*. Management Science, 46(5), p. 724-738.

Bilde, O. and J. Krarup, 1977. *Sharp Lower Bounds and Efficient Algorithms for the Simple Plant Location Problem*. Annals of Discrete Mathematics, 1, p. 79-97.

Bitran, G.R. and H. Matsuo, 1986. *The Multi-Item Capacitated Lot Size Problem: Error Bounds of Manne's Formulation*. Management Science, 32(3), p. 350-359.

Bitran, G.R. and H.H. Yanasse, 1982. *Computational Complexity of the Capacitated Lot Size Problem*. Management Science, 28(10), p. 1174-1186.

Cattrysse, D., J. Maes and L.N. van Wassenhove, 1990. *Set Partitioning and Column Generation Heuristics for Capacitated Dynamic Lot-Sizing*. European Journal of Operational Research, 46, p. 38-48.

Chen, W.H. and J.M. Thizy, 1990. *Analysis of Relaxations for the Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problem*. Annals of Operations Research, 26, p. 29-72.

Dantzig, G.B. and P. Wolfe, 1960. *Decomposition Principle for Linear Programs*. Operations Research, 8(1), p. 101-111.

Dauzère-Pérès, S., N. Najid and A. Nordli, 2002. *The Single-Item Lot Sizing Problem with time Windows*

Diaby, M., H.C. Bahl, M.H. Karwan and S. Zionts, 1992. *A Lagrangean Relaxation Approach for Very Large Scale Capacitated Lot-Sizing*. Management Science, 38, p. 1329-1339.

Dixon, P.S. and E.A. Silver, 1982. *A Heuristic Solution Procedure for the Multi-Item, Single-Level, Limited-Capacity, Lot-Sizing Problem*. Journal of Operations Management, 2, p. 23-39.

Dogramaci, A., J.C. Panayiotopoulos and N.R. Adam, 1981. *The Dynamic Lot-Sizing Problem for Multiple Items under Limited Capacity*. AIIE Transactions, 13(4), p. 294-303.

Dzielinski, B.P. and R.E. Gomory, 1965. *Optimal Programming of Lot Sizes*. Inventory and Labor Allocations. Management Science, 11(9), p. 874-890.

Eppen, G.D. and R.K. Martin, 1987. *Solving Multi-Item Lot-Sizing Problems using Variable Redefinition*. Operations Research, 35, p. 832

Evans, J.R., 1985. *An Efficient Implementation of the Wagner-Whitin Algorithm for Dynamic Lot-Sizing*. Journal of Operations Management, 5(2), p. 229-235.

Fleischmann, B., 1990. *The Discrete Lot-Sizing and Scheduling Problem*. European Journal of Operational Research, 44, p. 337-348.

Florian, M. and M. Klein, 1971. *Deterministic Production Planning with concave costs and Capacity constraints*. Management Science, 18, p. 12-20.

Florian, M., J.K. Lenstra and H.G. Rinnooy Kan, 1980. *Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity*. Management Science, 26, p. 669-679.

Gelders, L.F., J. Maes & L.N. Van Wassenhove, 1986. A Branch and Bound Algorithm for the Multi-Item, Single-Level Capacitated Dynamic Lot-Sizing Problem. *Multi-Stage Production Planning and Inventory*

Control, (eds.), S. Axsateretal., Springer Verlag, Berlin

Gopalakrishnan, M., K. Ding, J.M. Bourjolly and S. Mohan, 2001. *A Tabu-Search Heuristic for the Capacitated Lot-Sizing Problem with Set-up Carryover*. Management Science, 47(6), p. 851-863.

Graves, S.C., 1999. *Manufacturing Planning and Control*. Massachusetts Institute of Technology

Graves, S., 1981. *A review of Production Scheduling*. Operations Research, 29(4), p. 646-675.

Haase, K. and U. Kohlmorgen, 1995. Parallel Genetic Algorithm for the Capacitated Lot-Sizing Problem. In *Operations Research Proceedings*, Klein-schmidt. P.etal. (Hrsg.), pp. 370-5

Kleindorfer, P.R. and E.F. Newson, 1975. *A Lower Bounding Structure for Lot-Size Scheduling Problems*. Operations Research, 23(2), p. 299-311.

Kuik, R., M. Solomon and L.N. Van Wassenhove, 1994. *Batching Decisions: Structure and Models*. European Journal of Operational Research, 75, p. 243-263.

Kuik, R., M. Solomon, L.N. Van Wassenhove and J. Maes, 1993. *Linear Programming Simulated Annealing and Tabu Search Heuristics for Lotsizing in Bottleneck Assembly Systems*. IIE Transactions, 25(1), p. l62-172.

Lambrecht, M.R. and H. Vanderveken, 1979. *Heuristic Procedures for the Single Operation Multi-Item Loading Problem*. AIIE Transactions, 11, p. 319-326.

Lasdon, L.S. and R.C. Terjung, 1971. *An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling*. Operations Research, 19(4), p. 946-969.

Maes, J., J.O. McClain and L.N. Van Wassenhove, 1991. *Multilevel Capacitated Lotsizing Complexity and LP-based Heuristics*. European Journal of Operational Research, 53(2), p. 131-148.

Maes, J. and L.N. Van Wassenhove, 1988. *Multi-Item Single-Level Capacitated Dynamic Lot-Sizing Heuristics: A General Review*. Journal of Operational Research Society, 39(11), p. 991-1004.

Manne, A.S., 1958. *Programming of Economic Lot Sizes*. Management Science, 4, p. 115-135.

Millar, H.H. and M. Yang, 1994. *Lagrangian Heuristics for the Capacitated Multi-Item Lot-Sizing Problem with Backordering*. International Journal of Production Economics, 34, p. 1-15.

Newson, E.F., 1975. *Mult-Item Lot Size Scheduling by Heuristic*. Part I: With Variable Resources. Management Science, 21(10), p. 1194-1203.

Pochet, Y., 1988. *Valid Inequalities and Separation for Capacitated Economic Lot Sizing*. Operations Research Letters, 7, p. 109-116.

Pochet, Y. and L.A. Wolsey, 1988. *Lot-Size Models with Backlogging: Strong Reformulations and Cutting Planes*. Mathematical Programming, 40, p. 317-335.

Pochet, Y. and Wolsey, L. A., 1991. *Solving MultiItem LotSizing Problems using Strong Cutting Planes*. Management Science, 37, p. 53-67.

Rosling, K., 1986. Optimal Lot-Sizing for Dynamic Assembly Systems. *Multi-Stage Production Planning and Inventory Control*, S. Axsater, Ch. Schneeweiss and E. Silver (eds.), Springer-Verlag, Berlin -119-131

Salomon, M., 1991. *Determining Lot sizing models for Production Planning*. Springer-Verlag

Salomon, M., R. Kuik and L.N. Van Wassenhove, 1993. *Statistical Search Methods for Lot-Sizing Problems*. Annals of Operations Research, 41, p. 453-468.

Silver, E.A. and H.C. Meal, 1973. *A Heuristic for Selecting Lot Size Quantities for the Case of Deterministic Time Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment*. Production and Inventory Management, 14(2), p. 64-74.

Thizy, J.M., 1991. *Analysis of Lagrangean Decomposition for the Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problem*. INFOR, 29(4), p. 271-283.

Thizy, J.M. and L.N. van Wassenhove, 1985. *Lagrangean Relaxation for the Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problem*. IIE Transactions, 17, p. 308-313.

Trigeiro, W.W., 1989. *A Simple Heuristic for Lot Sizing with Setup Times*. Decision Sciences, 20, p. 294-303.

Trigeiro, W.W., 1987. *A Dual Cost Heuristic for the Capacitated Lot Sizing Problem*. IIE Transactions, 19(March), p. 67-72.

Trigeiro, W.W., L.J. Thomas and J.O. McClain, 1989. *Capacitated Lot Sizing with Set-up Times*. Management Science, 35, p. 353-366.

Van Hoesel, C.P. and A.P.M. Wagelmans, 1996. *An O(T3) Algorithm for the economic lot-sizing problem with constant capacities*. Management Science, 42, p. 142-150.

Van Hoesel, S., R. Kuik, M. Salomon and L.N. van Wassenhove, 1994. *The Single Item Discrete Lot-Sizing and Scheduling Problem: Optimization by Linear and Dynamic Programming*. Discrete Mathematics, 48, p. 289-303.

Wagelmans, A., S. Van Hoesel and A. Kolen, 1992. *Economic Lot Sizing: an O(n log n) that runs in linear time in the Wagner-Whitin case*. Operations Research, 40(1), p. S145-S156.

Wagner, H.M. and T.M. Whitin, 1958. *Dynamic Version of the Economic Lot Size Model*. Management Science, 5(1), p. 89-96.